



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL**  
**FACULDADE DE MATEMÁTICA**  
**LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**GEOVANA COSTA LIMA**

**PROPOSIÇÃO DE USO DE MODELAGEM MATEMÁTICA ATRAVÉS DA TORRE**  
**DE HANÓI PARA O ENSINO FUNDAMENTAL**

**CASTANHAL - PA**

**2024**

**GEOVANA COSTA LIMA**

**PROPOSIÇÃO DE USO DE MODELAGEM MATEMÁTICA ATRAVÉS DA TORRE  
DE HANÓI PARA O ENSINO FUNDAMENTAL**

Trabalho de Conclusão de curso submetido à Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Castanhal, da Universidade Federal do Pará, para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Roberta Modesto Braga

CASTANHAL - PA

2024

GEOVANA COSTA LIMA

**PROPOSIÇÃO DE USO DE MODELAGEM MATEMÁTICA ATRAVÉS DA TORRE  
DE HANÓI PARA O ENSINO FUNDAMENTAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática.

---

Data Defesa 29/02/2024

Banca examinadora

---

Profa. Dra. Roberta Modesto Braga  
Orientadora - Universidade Federal do Pará - UFPA

---

Profa Dra. Gerlândia de Castro Silva Thijm  
Avaliadora interna – FACMAT/UFPA

---

Profa Mestranda Nayane Amoras Sousa dos Santos  
Avaliadora externa

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por ter sempre me guiado e me dado ânimo para sonhar e ter me proporcionado a força e coragem para realizar todos os meus sonhos, pois sem esse pai bondoso nada disso seria possível.

Aos meus queridos pais, a Gerciane Lima que sempre me sustentou com suas orações e a Paulo André que juntos me deram uma educação de qualidade, gratidão por todos os esforços que fizeram para me ajudar a chegar onde estou.

A Márcio e a Bárbara, queridos tios. Por incentivar os meus estudos e me proporcionarem a oportunidade de uma educação melhor. Obrigada por todo amor e cuidado comigo e por sempre me tratarem como uma filha.

A todos os familiares, em especial Pricilla, Gustavo, Jakson, Marjori e Kaleb, irmãos perfeitos e a Gessé e Damares tios amorosos que direta ou indiretamente me motivaram a não desistir nessa jornada.

Aos colegas de turma que junto comigo passaram por todos os desafios que surgiram durante o curso, em especial a Sâmara, Irisnan, Rivandson, Kleilson e Mateus Natividade, sou grata pelos momentos de descontração, companheirismo e troca de conhecimento durante o tempo de curso.

A Universidade Federal do Pará, Campus Castanhal, por ofertar o curso de licenciatura em Matemática na cidade de Curuçá, possibilitando a oportunidade de ingresso em uma graduação de qualidade.

A professora e orientadora Roberta Modesto Braga, pelo incentivo e dedicação nos momentos que eu mais precisei para a realização deste trabalho.

Elevo meu agradecimento a todos os competentes professores que contribuíram na minha formação acadêmica, pelo conhecimento repassado e pela dedicação e compromisso com uma formação de qualidade.

A Deus, o maior orientador da minha vida. Ele nunca me abandonou nos momentos de necessidade.

## RESUMO

Este trabalho destaca o uso de jogos matemáticos, em particular a Torre de Hanói, como uma ferramenta educacional eficaz para ensinar Matemática no ensino básico. Ele explora como os jogos podem tornar o aprendizado da matemática acessível e divertido, incentivando os alunos a se envolverem e a desenvolverem habilidades lógicas. O jogo Torre de Hanói é apresentado como uma situação problema que pode ser aplicada em sala de aula, promovendo o desenvolvimento do raciocínio lógico e estratégico dos alunos. Além disso, o texto discute a Modelagem Matemática como uma abordagem que combina teoria matemática e prática, incentivando os alunos a pensar de forma abstrata e a colaborar na resolução de problemas. Ao final, são apresentadas propostas de atividades de Modelagem Matemática usando a Torre de Hanói como base, destacando como essa abordagem pode ser implementada de forma eficaz no ensino da matemática. Destaca-se que o referido trabalho não traz resultados de aplicação.

**Palavras-Chave:** Ensino da Matemática. Torre de Hanói. Jogos Matemáticos. Modelagem Matemática.

## **ABSTRACT**

This paper highlights the use of mathematical games, in particular the Tower of Hanoi, as an effective educational tool for teaching mathematics in elementary school. It explores how games can make learning mathematics accessible and fun, encouraging students to get involved and develop logical skills. The Tower of Hanoi game is presented as a problem situation that can be applied in the classroom, promoting the development of students' logical and strategic thinking. In addition, the text discusses Mathematical Modeling as an approach that combines mathematical theory and practice, encouraging students to think abstractly and collaborate in solving problems. At the end, proposals for mathematical modeling activities using the Tower of Hanoi as a basis are presented, highlighting how this approach can be implemented effectively in the teaching of mathematics. It should be noted that this work does not include any application results.

**Keywords:** Teaching mathematics. Tower of Hanoi. Mathematical Games. Mathematical modeling.

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>1 USOS E POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA</b>	<b>12</b>
1.1 Jogos e materiais manipulativos	13
1.2 Modelagem Matemática	15
1.3 Modelagem a partir de Jogos	16
<b>2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</b>	<b>18</b>
2.1 Metodologia da Pesquisa	18
2.2 Um pouco da história da torre de Hanói	18
2.3 Atividade propositiva	20
<b>3 PROPOSTA DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA A PARTIR DA MANIPULAÇÃO DA TORRE DE HANÓI</b>	<b>21</b>
3.1 Atividade 1: Apresentação do conteúdo de potenciação aos alunos	22
3.2 Atividade 2: Torre de Hanói e a ideia de modelos matemáticos	24
3.3 Atividade 3: Modelagem a partir da manipulação da torre de Hanói	26
3.4 Alinhamento com a BNCC e discussão de possíveis resultados	27
<b>4 CONCLUSÃO</b>	<b>29</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>31</b>

## INTRODUÇÃO

A utilização de jogos como ferramenta educacional tem se mostrado uma parceira valiosa na abordagem do ensino da matemática de maneira acessível e divertida, buscando envolver os alunos de modo a despertar o prazer pelo aprendizado disciplinado diante de desafios matemáticos. De acordo com Huizinga (2007) jogo “é uma atividade voluntária exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e espaço, segundo regras livremente consentidas”. (Huizinga, 2007, p.33).

O jogo matemático oferece aos envolvidos a oportunidade de se divertirem de maneira espontânea e alegre. Além disso, contribui para o desenvolvimento de habilidades lógicas em situações que demandam maior agilidade e atenção. A presença da matemática em diversas situações destaca a importância fundamental do aprendizado para a formação do indivíduo.

Neste trabalho, propõe-se o jogo Torre de Hanói, como situação problema. Torre de Hanói se caracteriza por ser um jogo que possui aplicações que podem ser basicamente usadas em escolas por professores que desejam melhorar e desenvolver o cognitivo de seus alunos, podendo ser aplicado em pequenos grupos ou individualmente. A proposta de uso da Torre de Hanói como ferramenta de modelagem matemática no ensino fundamental tem como objetivo principal introduzir conceitos matemáticos de forma prática e visualmente estimulantes. O tipo de trabalho seria uma abordagem interdisciplinar, envolvendo matemática e algumas noções de lógica.

Não existe um único caminho para o ensino das disciplinas curriculares. Porém, é importante o professor conhecer as diversas possibilidades de trabalho para construir a sua prática. Neste sentido, os jogos estão entre os recursos pedagógicos que o professor pode utilizar nas aulas de Matemática. Conforme disserta Borin (2007, p.89), “o uso dos jogos nas aulas de matemática é um importante fator que contribui para diminuir os bloqueios apresentados por muitos alunos que temem a matemática e sentem-se incapacitados de aprendê-la”.

O ensino da Matemática está diretamente ligado ao desenvolvimento de atividades lúdicas, com propósito de estimular as crianças e os jovens. Assim, este trabalho trás propostas de atividades usando a Modelagem Matemática através do Jogo Torre de Hanói.

A Modelagem Matemática através do jogo Torre de Hanói é uma abordagem interessante que combina teoria matemática e atividades práticas para desenvolver habilidades cognitivas e de resolução de problemas. O jogo envolve mover discos entre

três pinos, seguindo regras específicas. Ao modelar matematicamente este problema, os jogadores são incentivados a abstrair as características essenciais do problema, como o número de discos, a disposição inicial e as restrições de movimento. Isso leva à generalização, onde os princípios aprendidos podem ser aplicados a problemas semelhantes. A Modelagem Matemática incentiva os jogadores a formular hipóteses sobre estratégias eficazes para resolver o problema da Torre de Hanói. Eles podem testar diferentes abordagens, observar padrões e refinar suas estratégias com base nos resultados. Essa experimentação promove o pensamento crítico e a habilidade de análise.

Como para resolver o problema da Torre de Hanói requer um raciocínio lógico e estratégico. Os jogadores precisam antecipar os efeitos de seus movimentos e planejar suas ações com cuidado para evitar impasses. A Modelagem Matemática desse problema ajuda a fortalecer essas habilidades, pois os jogadores são desafiados a pensar de forma sistemática e a considerar todas as possíveis ramificações de suas decisões.

A representação visual da Torre de Hanói, com seus discos empilhados em diferentes tamanhos, facilita a compreensão do problema. A Modelagem Matemática pode envolver o uso de diagramas, gráficos ou outras representações visuais para ajudar os jogadores a visualizar o problema e a desenvolver estratégias para resolvê-lo, tornando uma atividade colaborativa, onde os jogadores trabalham juntos para explorar o problema, compartilhando ideias e discutindo estratégias. Isso promove a comunicação eficaz e o trabalho em equipe, à medida que os jogadores aprendem a expressar suas ideias, ouvir os outros e chegar a soluções em conjunto.

Em suma, o uso da Modelagem Matemática através do jogo Torre de Hanói oferece uma maneira envolvente e eficaz de desenvolver habilidades matemáticas e cognitivas importantes, como abstração, generalização, raciocínio lógico, visualização e colaboração. Essa abordagem pode ser aplicada em contextos educacionais e de resolução de problemas, proporcionando uma experiência de aprendizado prática e significativa.

A torre de Hanói constitui num jogo estratégico capaz de contribuir no desenvolvimento da memória, do planejamento e solução de problemas através de técnicas estratégicas. Com o alvo de aplicação nas séries finais do Ensino Fundamental o jogo será usado no intuito do estabelecimento de estratégias na transferência de peças, na contagem dos movimentos e no raciocínio lógico. Adotar novas técnicas de ensino pode

proporcionar aos estudantes uma nova visão sobre a matemática, além de melhorar seu desempenho na disciplina.

O trabalho está dividido em três seções. A Seção I – Usos e Possibilidades para o Ensino da Matemática; A Seção II – Procedimentos Metodológicos e Seção III – Proposta de Atividades de Modelagem Matemática. Na primeira seção apresento os usos e possibilidades para o ensino da Matemática, citando jogos, materiais manipulativos e Modelagem Matemática como ferramentas pedagógicas eficazes no ensino, e Modelagem a partir de jogos. A segunda seção trata da classificação pesquisa quanto a natureza, abordagem, procedimentos e quanto aos objetivos e um pouco da história da Torre de Hanói. Na terceira seção é apresentado as três atividades, para que o(a) leitor(a) compreenda o encaminhamento e possa desenvolver as atividades de Modelagem Matemática em sala de aula a partir da manipulação da torre de Hanói.

## SEÇÃO 1 – USOS E POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

O ensino da Matemática é uma parte fundamental da educação, pois fornece às pessoas habilidades analíticas e de resolução de problemas que são essenciais em muitos aspectos da vida cotidiana e em diversas carreiras. No entanto, muitas vezes, o ensino tradicional da Matemática pode parecer desafiador e abstrato para os alunos, o que pode levar a uma falta de engajamento e compreensão.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece competências e habilidades que todos os estudantes devem desenvolver ao longo de sua escolaridade. No caso da Matemática, ela enfatiza não apenas o desenvolvimento de cálculos e procedimentos, mas também a compreensão dos conceitos, a resolução de problemas e a aplicação dos conhecimentos matemáticos em diferentes contextos. O ensino de matemática na BNCC está centrado na resolução de problemas, no desenvolvimento do raciocínio lógico e na capacidade de comunicação matemática (Brasil, 2018). Assim,

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (Brasil, 2018, p. 266).

Uma abordagem eficaz para o ensino da Matemática é torná-la mais acessível e relevante para os alunos, conectando os conceitos matemáticos ao mundo real e destacando sua aplicação em diversas áreas, como ciências, tecnologia, engenharia, economia e até mesmo nas artes. Isso pode ser feito através de projetos práticos, problemas do mundo real e atividades interativas que incentivam os alunos a aplicar seus conhecimentos matemáticos para resolver problemas do mundo real.

Somado a isso, ao longo dos descritores de habilidades descritos na BNCC para conteúdos matemáticos, a mesma enfatiza o uso de jogos, brincadeiras, materiais da sala de aula, entre outros. Assim, é importante variar as estratégias de ensino para atender às diferentes necessidades e estilos de aprendizagem dos alunos. Algumas estratégias eficazes incluem o uso de jogos educativos, manipulativos matemáticos, tecnologia (como aplicativos e softwares interativos), colaboração em grupo e ensino personalizado.

O uso de manipulativos matemáticos, como blocos de contagem, régua, ábacos, entre outros, pode ajudar os alunos a visualizar e compreender conceitos abstratos,

tornando a Matemática mais tangível e concreta. Jogos educativos também podem ser uma ótima maneira de tornar o aprendizado da Matemática mais divertido e envolvente, enquanto ainda desafia os alunos a pensarem de forma crítica e aplicarem seus conhecimentos matemáticos de maneira prática.

As tecnologias também desempenham um papel importante no ensino da Matemática, oferecendo recursos interativos e adaptativos que podem personalizar o aprendizado de acordo com as necessidades individuais de cada aluno. Aplicativos, softwares e recursos online podem fornecer prática adicional, feedback imediato e uma variedade de abordagens para abordar conceitos matemáticos complexos.

Segundo Freitas et. al (2023), o ensino da Matemática vai além de aprender a contar e seriar, conhecer cores e formas geométricas, se impondo, para além disso, como a oportunidade que pode ser dada à criança para que ela se reconheça e se localize no espaço e seja capaz de resolver problemas cotidianos, formular hipóteses e elaborar respostas para as situações que se impõem no dia a dia. Dessa forma, ela usufrui do próprio corpo, dos brinquedos, das histórias, músicas, comparações, jogos e brincadeiras para fazer as conexões necessárias entre sua vida cotidiana e o conhecimento matemático.

Além disso, promover uma mentalidade de crescimento e resiliência em relação à Matemática é essencial para motivar os alunos a persistirem diante dos desafios e acreditarem em seu próprio potencial para aprender e ter sucesso na disciplina.

Em resumo, ao tornar a Matemática mais acessível, relevante, envolvente e personalizada, os educadores podem ajudar os alunos a desenvolverem uma compreensão mais profunda e duradoura dos conceitos matemáticos e a se tornarem pensadores críticos e resolutos.

### **1.1 Jogos e materiais manipulativos**

Jogos e materiais manipulativos são recursos educacionais que desempenham um papel fundamental no processo de aprendizagem. Eles oferecem uma abordagem prática e envolvente para o ensino, proporcionando oportunidades para os alunos explorarem conceitos de maneira concreta.

A característica marcante do jogo é uso de regras. Para que determinada atividade configure um jogo ela deve possuir regras, podendo ser simples ou complexas. Para Kishimoto (2017, p.26):

A existência de regras em todos os jogos é uma característica marcante. Há regras explícitas, como no xadrez ou amarelinha, regras implícitas como na brincadeira de faz de conta, em que a menina se faz passar pela mãe que cuida da filha. São regras internas, ocultas, que ordenam e conduzem a brincadeira. (Kishimoto, 2017, p.26).

O jogo pode ser considerado instrumento metodológico com grande colaboração para o desenvolvimento da matemática nas escolas, para Viginheski (2014) o uso de jogos “contribui ainda para a formação do pensamento lógico matemático, o exercício da argumentação e da organização do pensamento, tomada de atitudes, necessárias para a aprendizagem da Matemática” (p.83).

Os jogos vêm sendo muito prestigiados na Educação Matemática, se tornando bastante eficaz como ferramenta auxiliadora no processo de ensino e aprendizagem. O jogo desenvolve nos participantes a capacidade de elaborar estratégias, solucionar problemas, além de promover interações sociais com outros jogadores. O jogo por si, desperta o interesse no jogador e no contexto educacional, este elemento apresenta-se como um resgate ao prazer em aprender matemática, além disso, cria espaços para a imaginação possibilitando ao jogador um nível de abstração útil ao desenvolvimento cognitivo. (Grando, 1995).

Materiais manipulativos são recursos físicos, tangíveis e manipuláveis que são utilizados como suporte no processo de ensino e aprendizagem em diversas áreas, especialmente na matemática e nas ciências. Eles são projetados para proporcionar experiências práticas e concretas aos alunos, permitindo que eles explorem conceitos abstratos de forma mais tangível e intuitiva.

Passos (2006) confirma destacando que os materiais manipuláveis são:

objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia a dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia. [...] Os materiais manipuláveis são caracterizados pelo envolvimento físico dos alunos numa situação de aprendizagem ativa (Passos, 2006, p.5).

Os materiais manipulativos trazem uma dimensão concreta para o aprendizado, permitindo que os alunos vejam, toquem e manipulem objetos físicos relacionados aos conceitos que estão sendo estudados. Isso ajuda a tornar os conceitos mais tangíveis e acessíveis, especialmente para alunos que aprendem melhor através da experiência prática. Esses materiais muitas vezes representam visualmente os conceitos abstratos, tornando-os mais fáceis de entender e assimilar. Por exemplo, blocos de manipulação

podem ser usados para representar números em problemas matemáticos, enquanto modelos tridimensionais podem representar estruturas moleculares em ciências.

A manipulação de materiais oferece uma experiência sensorial que pode ajudar os alunos a construir uma compreensão mais profunda dos conceitos. O ato de manipular os materiais envolve os sentidos do tato e da visão, o que pode fortalecer a conexão entre as mãos e o cérebro, facilitando o processo de aprendizagem.

Os materiais manipulativos geralmente são mais envolventes do que simplesmente ler um texto ou ouvir uma palestra. Eles permitem que os alunos participem ativamente do processo de aprendizagem, experimentando e explorando os conceitos por conta própria. Isso pode aumentar a motivação e o interesse dos alunos no assunto. E, podem ser utilizados em uma variedade de contextos e níveis educacionais, desde a pré-escola até o ensino superior. Eles são adaptáveis e podem ser usados para ensinar uma ampla gama de conceitos, desde os mais básicos até os mais avançados, dependendo das necessidades e habilidades dos alunos.

Alguns exemplos comuns de materiais manipulativos incluem blocos de base dez, ábacos, quebra-cabeças geométricos, modelos moleculares, jogos de encaixe, entre outros. No geral, esses materiais desempenham um papel importante no enriquecimento da experiência de aprendizado dos alunos, oferecendo uma abordagem prática e interativa para o ensino de conceitos abstratos.

Jogos e materiais manipulativos são ferramentas pedagógicas eficazes que promovem uma abordagem mais ativa e envolvente no processo de ensino-aprendizagem, contribuindo para um entendimento mais profundo e duradouro dos conceitos.

## **1.2 Modelagem Matemática**

A Modelagem Matemática é uma abordagem na qual os conceitos matemáticos são aplicados para descrever, analisar e entender fenômenos do mundo real. Ela envolve a formulação de modelos matemáticos que representam as características essenciais de um sistema ou processo, permitindo assim a análise e previsão de seu comportamento.

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) evidencia a Modelagem como uma alternativa “para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional” (Brasil, 2018, p. 266).

A Modelagem Matemática tem um espaço de reflexão que mostra os processos de transmissão e construção do conhecimento matemático a partir da “colaboração e interação entre os estudantes, professor e objetos investigados” (Braga, 2009, p. 20). Além de ser uma ferramenta poderosa que tem aplicações em uma ampla variedade de áreas, incluindo física, engenharia, biologia, economia, entre outras. Ela permite aos pesquisadores e profissionais entenderem melhor os sistemas complexos, fazer previsões sobre seu comportamento futuro e tomar decisões informadas com base nessas previsões.

Além disso, a Modelagem Matemática também é uma ferramenta educacional valiosa, pois ajuda os alunos a desenvolverem habilidades de pensamento crítico, resolução de problemas e aplicação de conceitos matemáticos em contextos do mundo real. Ao envolver os alunos em projetos de Modelagem Matemática, os educadores podem ajudá-los a ver a Matemática como uma ferramenta poderosa e relevante para entender o mundo ao seu redor.

### **1.3 Modelagem a partir de Jogos.**

A Modelagem a partir de jogos é uma abordagem educacional que utiliza jogos como ferramentas para explorar e entender conceitos matemáticos e fenômenos do mundo real. Essa metodologia pode ser eficaz, pois os jogos são naturalmente envolventes e motivadores, o que pode aumentar o interesse e a participação dos alunos no processo de aprendizagem matemática.

Existem várias maneiras pelas quais os jogos podem ser usados para Modelagem Matemática. Na simulação de situações reais, os jogos podem simular situações do mundo real que envolvem conceitos matemáticos. Por exemplo, um jogo de gerenciamento de recursos pode simular a economia de uma cidade, permitindo aos jogadores explorar conceitos como oferta e demanda, custos de produção, lucro e perda, entre outros. Já na resolução de problemas, muitos jogos apresentam desafios que requerem a aplicação de conceitos matemáticos para serem resolvidos. Por exemplo, jogos de quebra-cabeça, estratégia ou lógica podem envolver a resolução de equações, cálculo de probabilidades, geometria, entre outros conceitos.

Na Modelagem de sistemas dinâmicos, alguns jogos envolvem a modelagem de sistemas dinâmicos, nos quais as ações dos jogadores afetam o estado do sistema ao longo do tempo. Isso pode ajudar os alunos a entenderem como diferentes variáveis interagem e como pequenas mudanças podem ter grandes efeitos no sistema como um todo. No

entanto, na exploração de padrões e relações, muitos jogos incentivam os jogadores a identificar padrões e relações entre diferentes variáveis. Por exemplo, jogos de quebra-cabeça baseados em padrões podem ajudar os alunos a desenvolverem habilidades de reconhecimento de padrões e generalização matemática. E na visualização de conceitos abstratos, os jogos podem fornecer uma representação visual de conceitos matemáticos abstratos, tornando-os mais tangíveis e acessíveis para os alunos. Por exemplo, jogos de geometria tridimensional podem ajudar os alunos a visualizar formas geométricas complexas e entender suas propriedades.

Ao usar jogos para fazer Modelagem Matemática, os educadores podem ajudar os alunos a desenvolverem uma compreensão mais profunda e intuitiva dos conceitos matemáticos, enquanto também promovem habilidades de pensamento crítico, resolução de problemas e colaboração em equipe. Além disso, os jogos podem tornar o aprendizado da Matemática mais divertido e envolvente, aumentando assim a motivação dos alunos e melhorando seu desempenho acadêmico.

## SEÇÃO 2 – PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

### 2.1 Metodologia da Pesquisa

Este estudo adota uma abordagem qualitativa exploratória por meio de uma revisão bibliográfica. A proposta de atividades apresentada neste trabalho enfoca o uso do jogo Torre de Hanói como uma ferramenta pedagógica para o ensino de potências. A pesquisa busca investigar a relevância e o potencial dessa abordagem no contexto educacional.

Para realizar esta revisão, foram consultadas diversas fontes bibliográficas, incluindo artigos científicos, livros e teses relacionadas ao uso de jogos educativos e estratégias de ensino de matemática.

As revisões são necessárias para pesquisadores iniciantes em uma determinada área do conhecimento. Esses estudos podem conter análises destinadas a comparar pesquisas sobre temas semelhantes ou relacionados; apontar a evolução das teorias, dos aportes teórico metodológicos e sua compreensão em diferentes contextos, indicar as tendências e procedimentos metodológicos utilizadas na área, apontar tendências das abordagens das práticas educativas. (Vosgerau e Romanowski ,2014, p.168)

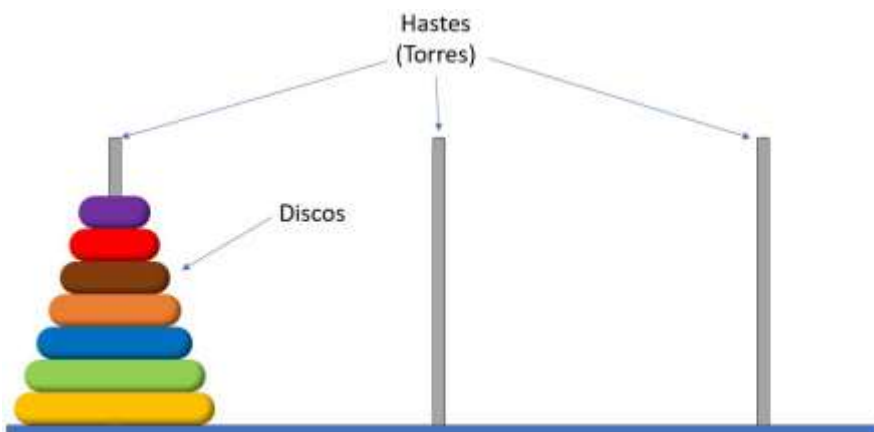
Destaca-se que este trabalho não inclui resultados de aplicação prática das atividades propostas. No entanto, busca-se fornecer uma fundamentação teórica sólida e percepções pedagógicas que possam orientar futuras pesquisas e práticas educacionais.

### 2.2 Um pouco da história da torre de Hanói

A torre de Hanói é um jogo de quebra cabeça, que foi criado pelo matemático francês Édouard Lucas (Tahan, 1974, p. 137). Ele teve inspiração de uma lenda para construir o jogo das Torres de Hanói em 1883. Já seu nome foi inspirado na torre símbolo da cidade de Hanói, no Vietnã. A lenda diz que há muito tempo atrás, em um templo na cidade de Hanói, havia uma torre de três pinos onde 64 discos de ouro estavam empilhados do maior para o menor. Os monges do templo eram encarregados de mover os discos de um pino para outro, seguindo certas regras. Os monges foram instruídos a mover todos os discos de um pino para outro, mas nunca colocar um disco maior sobre um menor. Eles estavam cientes de que, quando todos os discos fossem transferidos para o último pino, o mundo chegaria ao seu fim. A história é uma alegoria para ensinar sobre paciência, perseverança e concentração.

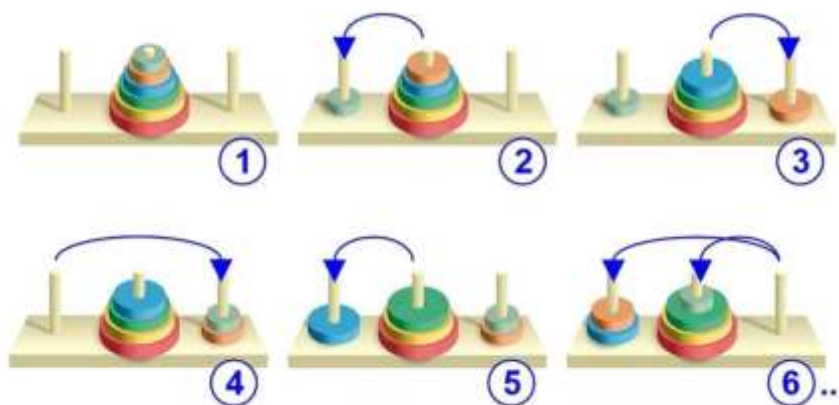
No Jogo a torre é formada por uma base com três hastes e discos de tamanhos diferentes. Em uma das hastes encontram-se colocados todos os discos, dispostos do maior para o menor. O objetivo é transferir todos os discos de uma haste para outra com o menor número possível de movimentos, de modo que só se possa mover um disco de cada vez, sem deixar um disco de diâmetro maior sobre um de diâmetro menor.

Figura 1: Torre de Hanói



Fonte: <https://www.bosontreinamentos.com.br/logica-de-programacao/algorithmo-torre-de-hanoi-em-python/>. Acessado em 21 de fev de 2024.

Figura 2: Movimentos para 6 discos da Torre de Hanói



Fonte: <https://a-static.mlcdn.com.br/90x90/jogo-educativo-torre-de-hanoi-6-discos-em-madeira-carimbras/bambinno3/704176219/b7ff69bd07b21fec30292351a490b4f2.jpg>.

Acessado em 21 de fev de 2024.

O principal objetivo com o jogo é expor uma possibilidade de trabalho com alunos do ensino fundamental; incorporar, de forma séria e objetiva, o espírito investigativo, importante no processo de desenvolvimento de ideias matemáticas.

### 2.3 Atividade propositiva

Uma atividade propositiva é aquela que envolve a proposição ou sugestão de algo com o objetivo de incentivar a reflexão, a criatividade ou a resolução de problemas. Geralmente, esse tipo de atividade é projetado para encorajar os participantes a pensar de forma crítica e a desenvolver soluções inovadoras para questões específicas.

Logo, as sequências didáticas possibilitam ao professor a estruturação das ações do ensino a partir do conteúdo a ser explorado utilizando procedimentos previamente planejados. A ideia é organizar um conteúdo a partir de atividades já estruturadas de maneira sistemática e que conecte a primeira e a última atividade visando uma ação educativa (Cabral, 2017).

Por exemplo, em um contexto educacional, uma atividade propositiva pode ser um exercício em que os alunos são solicitados a propor soluções para um problema real ou hipotético, utilizando seus conhecimentos e habilidades. Essas atividades muitas vezes incentivam a colaboração, o pensamento crítico e a aplicação prática do conhecimento.

No mundo dos negócios, uma atividade propositiva pode envolver uma sessão de brainstorming na qual os funcionários são convidados a sugerir ideias para melhorar processos, produtos ou serviços da empresa. Essas atividades visam estimular a inovação e o pensamento criativo dentro da organização.

Em resumo, uma atividade propositiva é aquela que busca estimular a geração de ideias, soluções ou propostas, com o objetivo de promover o aprendizado, a inovação ou o progresso em determinado contexto.

### **SEÇÃO 3 – PROPOSTA DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA A PARTIR DA MANIPULAÇÃO DA TORRE DE HANÓI**

Será apresentado como resultado da pesquisa as propostas de atividades, especificando o tempo destinado para aplicação de cada atividade e as fichas de trabalho que serão usadas durante a sua realização visando, com isso, o ensino de conteúdos matemáticos do ensino fundamental, bem como descritores de habilidades na perspectiva da BNCC.

As atividades apresentadas nesse estudo foram pensadas do ponto de vista de Lima, Márcio André Santa Brígida. Modelagem Matemática, Geometria Fractal e Geogebra: Proposta de Atividades para Ensinar Conteúdos Matemáticos do Ensino Médio. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Castanhal, Programa de Pós- Graduação em Matemática em Rede Nacional, Castanhal, 2021.

Nesse trabalho as atividades propostas foram pensadas para serem aplicadas no Ensino Fundamental e na série em que os conteúdos por elas abordados façam parte da matriz curricular, tanto em momento de introdução ao conteúdo, quando em momento de revisão. Espera-se que esses estudantes tenham alguns conhecimentos que ajudarão no desenvolvimento das atividades como: conhecimentos sobre as operações básicas de adição, subtração, multiplicação, divisão.

Foram construídas três atividades, na primeira atividade apresentamos o conceito de potências, não será usado o jogo Torre de Hanói e nem Modelagem nesse primeiro momento, na segunda atividade será trabalhado a correlação de potência com a Torre de Hanói com a ideia de modelos matemáticos, a terceira atividade trabalhar-se-á com a demonstração prática dos conceitos estudados, ao fazer Modelagem a partir da manipulação dos movimentos da Torre de Hanói.

A seguir, serão apresentadas as três atividades, mostrando em cada uma delas os conteúdos matemáticos e as estratégias a serem aplicadas no Ensino Fundamental e o que elas podem mobilizar na perspectiva da Modelagem Matemática.

### 3.1 Atividade 1: Apresentação do conteúdo de potenciação aos alunos

**Assunto Abordado:** Potência.

**Material:** Apostila, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

**Habilidade (BNCC):** EF06MA11.

**Procedimento:** 1. Explique o conceito de potências, destacando a base e o expoente.

As potências são uma forma compacta de escrever repetições de um mesmo número multiplicado por ele mesmo. O conceito é expresso na forma  $a^n$ , onde **a** é chamado de base e **n** é o expoente. Aqui está uma explicação mais detalhada:

**Base (a):** A base é o número que está sendo multiplicado por ele mesmo. Por exemplo, em  $2^3$ , o número 2 é a base.

**Expoente (n):** O expoente indica quantas vezes a base deve ser multiplicada por ela mesma. No exemplo  $2^3$ , o expoente é 3, o que significa que 2 deve ser multiplicado por ele mesmo três vezes:  $2 \times 2 \times 2$ .

$$\text{Exemplo: } 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

Aqui estão alguns pontos importantes para entender sobre potências:

Quando o expoente é 0 ( $a^0$ ), o resultado é sempre 1, independentemente do valor da base. Por exemplo,  $3^0 = 1$ .

Quando o expoente é 1 ( $a^1$ ), o resultado é igual à base. Por exemplo,  $4^1 = 4$ .

O expoente pode ser um número inteiro positivo, negativo ou zero, mas a base geralmente é um número real positivo.

As potências são úteis em muitas áreas da matemática, especialmente em situações que envolvem crescimento exponencial, como na modelagem de juros compostos, decaimento radioativo, entre outros. Compreender o conceito de potências é fundamental para aprofundar o entendimento em diversos tópicos matemáticos e científicos.

2. Mostre como escrever uma potência e seus componentes.

Escrever uma potência envolve a representação de um número (chamado de base) multiplicado por ele mesmo várias vezes (determinado pelo expoente). Vamos abordar como escrever uma potência e identificar seus componentes usando a notação adequada.

A notação padrão para uma potência é  $(a^n)$ , onde:

- é a base, representando o número que está sendo multiplicado.
- (n) é o expoente, indicando quantas vezes a base é multiplicada por ela mesma.

Aqui estão alguns exemplos:

#### **Potência Positiva:**

- $(2^3)$
- Leitura: "2 elevado à potência de 3" ou "2 elevado à terceira potência".
- Componentes: A base é 2, e o expoente é 3. Isso significa  $(2 \times 2 \times 2)$ .

#### **Potência com Expoente 1:**

- $(5^1)$
- Leitura: "5 elevado à potência de 1" ou "5 elevado à primeira potência".
- Componentes: A base é 5, e o expoente é 1. Isso significa (5).

#### **Potência com Expoente 0:**

- $(3^0)$
- Leitura: "3 elevado à potência de 0".
- Componentes: A base é 3, e o expoente é 0. Isso significa (1) (qualquer número elevado a 0 é igual a 1).

#### **Potência Negativa:**

- $(4^{-2})$
- Leitura: "4 elevado à potência de -2".
- Componentes: A base é 4, e o expoente é -2. Isso significa  $(\frac{1}{4^2})$  ou  $(\frac{1}{16})$ .

A notação de potência é uma maneira eficaz de expressar repetições de multiplicação de um número por ele mesmo. Esses conceitos são fundamentais, em álgebra, cálculo e em várias disciplinas científicas.

### **3.2 Atividade 2: Torre de Hanói e a ideia de modelos matemáticos**

**Assunto Abordado:** Potência, Torre de Hanói.

**Material:** Apostila, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

**Habilidade (BNCC):** EF06MA11.

**Procedimento: 1.** Apresente a Torre de Hanói como um quebra-cabeça com discos em diferentes tamanhos.

A Torre de Hanói é um quebra-cabeça clássico que envolve mover discos de tamanhos diferentes entre três hastes ou pinos. Aqui está uma descrição da configuração básica do quebra-cabeça:

**Hastes ou Pinos:**

- Inicialmente, você tem três hastes ou pinos verticais, geralmente numerados de 1 a 3.

**Discos:**

- Vários discos de diferentes tamanhos são empilhados em uma das hastes. Os discos são organizados de maior para menor, formando uma torre.

**Objetivo:** O objetivo do jogo é mover toda a pilha de discos de uma haste para outra, seguindo as seguintes regras:

- Apenas um disco pode ser movido por vez.
- Um disco maior nunca pode ficar em cima de um disco menor.

**Número de Movimentos Mínimos:**

- O desafio é realizar essa transferência de forma eficiente, completando o quebra-cabeça em um número mínimo de movimentos.

A Torre de Hanói é um excelente exercício para desenvolver habilidades de resolução de problemas, pensamento lógico e estratégias algorítmicas. A complexidade do jogo aumenta exponencialmente com o número de discos, o que o torna particularmente interessante para relacionar com conceitos matemáticos, como as potências.

2. Associe a quantidade de movimentos necessários para resolver o quebra-cabeça. Solicite aos alunos que construam uma tabela com potências de 2 ( $2^n$ ), onde "n" é o número de discos e o número mínimo de movimentos para cada quantidade de discos, conforme a tabela 1.

Tabela 1 - Número mínimo de movimento dos discos.

NÚMEROS DE DISCOS	NÚMERO MÍNIMO DE MOVIMENTOS
$2^n$	

Fonte: Da autora, 2024.

A tabela 2 está preenchida com os resultados esperados a ser obtido pelos alunos.

Tabela 2 – Número mínimo de movimento dos discos (resultados).

NÚMEROS DE DISCOS	NÚMERO MÍNIMO DE MOVIMENTOS
$2^2$	3
$2^3$	7
$2^4$	15
$2^5$	31

Fonte: Da autora, 2024.

Ao ensinar potências usando a Torre de Hanói, você pode destacar como o número mínimo de movimentos necessário para resolver o quebra-cabeça é diretamente relacionado à potência de 2, onde a base é 2 e o expoente é o número de discos. Isso proporciona uma aplicação prática e visual dos conceitos matemáticos, tornando o aprendizado mais envolvente e significativo e promove o entendimento da ideia de modelo matemático como a representação de uma dada situação.

### 3.3 Atividade 3: Modelagem a partir da manipulação da torre de Hanói

**Assunto Abordado:** Potência, Torre de Hanói.

**Material:** Apostila, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

**Habilidade (BNCC):** EF06MA11.

**Procedimento:** 1. Solicitar aos alunos que observem a tabela construída por eles na aula anterior e que analisem se há alguma relação entre o número de discos e o número mínimo de movimentos.

Em um primeiro momento os alunos perceberam que à medida que aumentava o número de peças aumentava também o número mínimo de movimentos. Nesse momento é necessário a mediação do professor, mostrando que na realidade o número mínimo de movimentos pode ser calculado através de uma expressão numérica envolvendo a potenciação.

2. Discutir a construção da expressão numérica com os alunos.

O número mínimo de movimentos é calculado através da potência de base 2, com expoente igual ao número de discos menos o número 1.

Encorajar os alunos e organizar no quadro branco o número mínimo de movimentos para dois e três discos: para 2 discos:  $2^2 - 1 = 3$  movimentos; para 3 discos:  $2^3 - 1 = 7$  movimentos. E assim, nessa sequência lógica, que os mesmos possam desenvolver os cálculos necessários para 4, 5 e 6 discos. Os resultados para essa atividade estão descritos na tabela 3 com os respectivos cálculos.

Tabela 3 – Cálculo para obtenção de movimento dos discos.

Nº DE DISCOS	CÁLCULO REALIZADO	Nº MÍNIMO DE JOGADAS.
$2^2$	$2^2 - 1 = 3$	3
$2^3$	$2^3 - 1 = 7$	7
$2^n$		

Fonte: Da autora, 2024.

A tabela 4, apresenta o preenchimento com os cálculos que devem ser realizados pelos alunos.

Tabela 4 – Cálculo para obtenção de movimento dos discos.

Nº DE DISCOS	CÁLCULO REALIZADO	Nº MÍNIMO DE JOGADAS.
$2^2$	$2^2 - 1 = 3$	3
$2^3$	$2^3 - 1 = 7$	7
$2^4$	$2^4 - 1 = 15$	15
$2^5$	$2^5 - 1 = 31$	31

$2^6$	$2^6 - 1 = 63$	63
-------	----------------	----

Fonte: Da autora, 2024.

Ao final da atividade é esperado que os alunos fiquem surpresos ao constatarem que é possível prever através de cálculos matemáticos qual a quantidade mínima de movimentos para qualquer número de discos, perceber que a operação da potência, que haviam estudado em aulas passadas, estava presente no cálculo da previsão de número mínimo de jogadas e surpresos e compreendam o modelo matemático gerado pelo movimento dos discos a partir das regras da torre de Hanói, uma vez concluído o item 3, que segue, dessa sequência.

3. Para finalizar a atividade proponha a esses alunos que desenvolvam uma expressão que permita calcular a quantidade mínima de movimentos para qualquer quantidade de discos, por exemplo, para “n” discos. O esperado é que os alunos apresentem a expressão  $m = 2^n - 1$ .

### **3.4 Alinhamento com a BNCC e discussão de possíveis resultados**

Segundo estudo feito com base nos resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) em 2021, apenas 5% dos estudantes terminam o ensino médio da rede pública com aprendizado considerado adequado em matemática.

Pensando nisso, este trabalho propositivo foi produzido. Adotar novas técnicas de ensino pode proporcionar aos estudantes uma nova visão sobre a Matemática, além de melhorar seu desempenho na disciplina e aumentar os resultados considerados pelo Saeb.

Atualmente, busca-se inovações no modo de transmitir os conhecimentos em sala, novos métodos, novas ideias surgem com o intuito de aperfeiçoar as habilidades das crianças no momento de resolver algumas questões na aula, quanto em casa, os recentes instrumentos desenvolvidos e utilizados fazem uma grande diferença na hora de resolver o raciocínio dos pequenos. Um desses instrumentos pedagógicos utilizados é a torre de Hanói associado a dinâmica da Modelagem Matemática.

Segundo Ribeiro et. al (2023), A Torre de Hanói é considerada, por estudiosos, como um valioso recurso didático-metodológico para o ensino de conceitos matemáticos por induzir o aluno a perceber as leis matemáticas a ele relacionadas, sobretudo, trabalhar com o desenvolvimento de habilidades mentais, tais como: desenvolver um plano de ação durante as jogadas, capacidade de concentração, o trabalho com

algoritmos matemáticos, estabelecer relações interpessoais em um trabalho colaborativo e promover o desenvolvimento da capacidade cognitiva.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece competências e habilidades que os alunos devem desenvolver ao longo da educação básica. No contexto do ensino de Matemática, a BNCC destaca a importância de promover o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a aplicação dos conhecimentos matemáticos em diferentes contextos, bem como o uso da Modelagem Matemática e projetos. Além disso, a BNCC enfatiza a necessidade de explorar temas interdisciplinares e promover uma aprendizagem significativa.

Esse jogo pode ser usado nas séries iniciais como uma forma de melhorar o aprendizado dos estudantes, tanto na forma lúdica, de raciocínio, na coordenação motora e também de memória, aprimorando as habilidades dos alunos. Mas a atividade propositiva foi produzida para um público do ensino fundamental maior, assim as atividades propostas podem ser utilizadas em turmas de 5º, 6º e 7º ano, na qual as crianças poderiam trabalhar potência.

## CONCLUSÕES

Ensinar matemática através da Modelagem é criar novos caminhos, meios e possibilidades para o desenvolvimento do raciocínio lógico, além de estimular a criatividade e a habilidade de possuir pensamento autônomo para resolução de problemas. A utilização de jogos é uma tendência para a criação de um novo caminho para a Educação Matemática, expõe uma possibilidade de trabalho com alunos; incorporar, de forma séria e objetiva, o espírito investigativo, importante no processo de desenvolvimento de ideias matemáticas. O jogo torre de Hanói, quando utilizado como um recurso didático, apresenta características que podem potencializar e despertar o interesse dos alunos, desmitificando a visão de que a Matemática é uma disciplina difícil e enfadante.

Com a Torre de Hanói, constitui objeto manipulativo com característica de jogo que permite manipulações e reconhecimento de relações e conceitos matemáticos. E por isso entendemos que a partir do processo de Modelagem Matemática é possível ensinar conteúdos matemáticos como Potenciação, padrão e função usando a torre de Hanói; além de promover a interação entre os alunos; criar espaços para discussão e argumentação junto ao professor; motivar os alunos para a aprendizagem, entre outras potencialidades que podem ser geradas ao longo do desenvolvimento da atividade.

O professor tem consciência de que as salas de aula oferecem diversas opções de trabalho com fundamentação teórica, características únicas, materiais didáticos e diferentes abordagens metodológicas que divergem da ação que se baseia na atuação dos educadores que orientam os procedimentos de ensino-aprendizagem. A aprendizagem deve ser direcionada de forma a garantir significado aos alunos e sua plena participação.

Nesse sentido, é necessário que o professor elabore atividades que favoreçam o desenvolvimento e aperfeiçoamento das estruturas lógicas de pensamento, visando um resultado prático e o estabelecimento de condições para aquisição de outros conhecimentos.

O ensino da Matemática pode se beneficiar enormemente da integração de jogos matemáticos, como a Torre de Hanói, e da aplicação de técnicas de Modelagem Matemática. Essas abordagens oferecem oportunidades valiosas para os alunos desenvolverem habilidades matemáticas essenciais de forma prática e envolvente. Ao explorar conceitos complexos por meio de atividades lúdicas e da representação de

situações do mundo real, os educadores podem promover uma aprendizagem mais significativa e duradoura. Assim, é fundamental que o ensino da Matemática continue a evoluir, incorporando estratégias inovadoras que inspirem os alunos a explorar o fascinante mundo dos números e das formas.

## REFERÊNCIAS:

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M.R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, nº 22, ano 17, 2004.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino–aprendizagem com modelagem matemática**. 3 Ed. Editora Contexto: São Paulo, 2006, p. 389

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequências didáticas: estrutura e elaboração**. Belém: SBEM, 2017.

FREITAS, V. da S., Bazhuni, R. F., & Lima, J. de C. P. (2023). Tecnologia, formação dos professores e ludicidade no ensino da matemática. **Revista Brasileira De Educação Do Campo**, 8, e15357. <https://doi.org/10.20873/uft.rbec.e15357>

GRANDO, R. C. **O jogo e suas possibilidades metodológicas no processo ensino aprendizagem da matemática**. 1995. 175f. Dissertação (mestrado) – UNICAMP, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/25386>. Acesso em: 4 dezembro 2022.

G1. "Só 5% terminam ensino médio público com aprendizado adequado em matemática, aponta estudo". Disponível em: <https://g1.globo.com/educacao/noticia/2022/11/30/so-5percent-terminam-ensino-medio-publico-com-aprendizado-adequado-em-matematica-aponta-estudo.ghtml>. Acesso em: 21 de fevereiro de 2024.

KISHIMOTO, Tizuko M. (Org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. São Paulo: Cortez, 2017.

Lima, Márcio André Santa Brígida. **Modelagem Matemática, Geometria Fractal e Geogebra: Proposta de Atividades para Ensinar Conteúdos Matemáticos do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Castanhal, Programa de Pós- Graduação em Matemática em Rede Nacional, Castanhal, 2021.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recurso didático na formação de professores. **In: LORENZATO, S. (ED) O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, p. 77-92, 2006.

Ribeiro, C. A., Damasceno Neto, A. R., Silva, I. N., Lima, L. S. de, Dantas, M. J. M., & Silva, V. D. da. (2023). O JOGO TORRE DE HANÓI COMO FERRAMENTA MEDIADORA NO ENSINO DE POTÊNCIAS: UM ESTUDO COM OS ALUNOS DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL NÍVEL II. **Revista Ibero-Americana De Humanidades, Ciências E Educação**, 9(5), 2710– 2710. <https://doi.org/10.51891/rease.v9i5.10019>.

TAHAN, M. **O Homem que calculava**. 60 Ed. Editora Record: São Paulo, 1974, p. 137.

VIGINHESKI, Lúcia Virginia Mamcasz. **Uma abordagem para o ensino de produtos**

**notáveis para uma classe inclusiva:** o caso de uma aluna com deficiência visual. Dissertação mestrado – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa. 2014.

VOSGERAU, D. S. R; ROMANOWSKI, J. P. **Estudos de revisão:** implicações conceituais e metodológicas. Revista Diálogo Educacional, v. 14, n. 41, 2014.