



Universidade Federal do Pará  
Campus Universitário de Castanhal  
Faculdade de Matemática  
Licenciatura em Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

---

**Avaliações mediante Bacias de Atração  
e Desempenho Computacional  
de Alguns Métodos de Determinação  
de Raízes de Polinômios**

---

**Edriane do Socorro Silva Costa**

2020

# **Avaliações mediante Bacias de Atração e Desempenho Computacional de Alguns Métodos de Determinação de Raízes de Polinômios**

**Graduação**

05/2016 – 04/2020

Submissão 15/02/2020

Defesa 17/02/2020

Versão Final 28/02/2020

Universidade Federal do Pará  
Campus de Castanhal  
Faculdade de Matemática

**Edriane do Socorro Silva Costa**

[edriane costa@gmail.com](mailto:edriane costa@gmail.com)

Licenciada em Matemática 2020

*UFPA-Castanhal*

**Banca Examinadora**

**Prof. Valdelírio da Silva e Silva**

Membro da Faculdade

(Orientador)

**Prof. Romário Silva Duarte**

Membro Externo

**Prof. Renato Germano Reis Nunes**

Membro da Faculdade

**Prof. Carla Cristina de Souza Tavares**

Membro da Faculdade

---

## Dedicatória

Em memória de minha avó materna, Antônia, quem me ensinou a importância do conhecimento e me deu subsídios para lutar por tudo que acredito.

---

# Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida.

Aos meus familiares, especialmente minha mãe Ana Cláudia, minha irmã Edilane, meu avô José e meu tio Edielson.

Ao meu professor orientador Valdelírio Silva, que me deu todo o suporte necessário na elaboração deste trabalho.

Aos meus professores Kátia, Frayzer, Fábio, Carla e todos que contribuíram com a minha formação.

Aos meus amigos, especialmente Glênio, Felipe, Karina, Jéssica e alguns do grupo udv.

Enfim, a todos que se fizeram presentes nesta caminhada.

---

# Epígrafe

“Uma mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.”

(Albert Einstein)

# Resumo

---

O presente trabalho trata-se de uma pesquisa avaliativa que possibilitou a investigação de seis métodos iterativos de determinação de raízes de polinômios. O objetivo foi analisar sob a perspectiva das bacias de atração o desempenho dos métodos e para isso adotou-se nove polinômios para investigação. O trabalho apresenta uma explanação no que diz respeito as propriedades da Geometria Fractal, bem como definições de medidas a serem usadas nas avaliações desses polinômios. Como resultado, percebe-se que é necessário compreender a utilização dos métodos no que diz respeito a obter propriedades para facilitação da escolha para uso.

**Palavras-chaves:** Bacias de Atração, Newton, Variante de Newton, Dong, SSTZ2, Euler-Cauchy, Raízes de Polinômios.

# Abstract

---

The present work deals with an evaluative research that allows the investigation of six iterative methods of determination polynomials roots. The objective was to analyse from the perspective of the attraction basins the performance of the methods and, for that, nine polynomials were adopted for investigation. The work presents an explanation with respect to Fractal Geometry properties, as well as definitions of measures to be used in evaluating these polynomials. As a result, it is perceived that it is necessary to understand the use of the methods to obtain properties to facilitate the choice of use.

**Keywords:** Attraction basins, Newton, Newton's variant, Dong, SSTZ2, Euler-Cauchy, roots of polynomials.

---

## Lista de Figuras

2.1	Formação do Tapete de Sierpinski . . . . .	12
2.2	Formação da Curva de Koch . . . . .	13
2.3	Exemplo das regiões com conjuntos de Fatou e Júlia . . . . .	14
2.4	Exemplo da região do conjunto de Mandelbrot . . . . .	15
4.1	Bacias de Atração referentes ao polinômio $p_1(x) = (x - 1)^2(3x^2 + 14x + 19)$ . . . . .	27
4.2	Bacias de Atração referentes ao polinômio $p_2(x) = x^2(11x^4 - 34x^2 + 39)$ . . . . .	28
4.3	Bacias de Atração referentes ao polinômio $p_3(x) = x^7 + x^2 - 1$ . . . . .	29
4.4	Bacias de Atração referentes ao polinômio $p_4(x) = x^4 - 1$ . . . . .	30
4.5	Bacias de Atração referentes ao polinômio $p_5(x) = x^6 - 1$ . . . . .	31
4.6	Bacias de Atração referentes ao polinômio $p_6(x) = (x - 2)(x - 2)(x - 2)(x^2 + 3)^3$ . . . . .	32
4.7	Bacias de Atração referentes ao polinômio $p_7(x) = (x^2 - x + 1)^2(x + 2)^4$ . . . . .	33
4.8	Bacias de Atração referentes ao polinômio $p_8(x) = (x^4 - 5)^5$ . . . . .	34
4.9	Bacias de Atração referentes ao polinômio $p_9(x) = (x^3 + 4x^2 - 10)^3$ . . . . .	35

---

## Lista de Tabelas

4.1	Eficiências . . . . .	24
4.2	Polinômios $p(x)$ e a maior multiplicidades $m$ das raízes . . . . .	26
4.3	Tempo Computacional em minutos . . . . .	36
4.4	Ordem de Convergência Computacional (OCCA) . . . . .	36
4.5	Número médio de iterações por ponto . . . . .	37
4.6	Número de Pontos Pretos expresso em porcentagem . . . . .	37

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Fractais</b>	<b>11</b>
2.1	Conjunto de Júlia . . . . .	14
2.2	Conjunto de Mandelbrot . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Métodos de Determinação de Raízes</b>	<b>16</b>
3.1	Método de Newton . . . . .	16
3.2	Método Variante de Newton . . . . .	17
3.3	Método SSTZ2 . . . . .	18
3.4	Euler-Cauchy . . . . .	19
3.5	Dong . . . . .	20
3.5.1	Dong 3 . . . . .	20
3.5.2	Dong 4 . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Análise dos Métodos</b>	<b>22</b>
4.1	Ordem de Convergência . . . . .	22
4.2	Ordem de Convergência Computacional Aproximada . . . . .	23
4.3	Número de Avaliação por Iteração . . . . .	23
4.4	Eficiência . . . . .	23
4.5	Critérios de Parada . . . . .	24
4.6	Estabilidade . . . . .	24
4.7	Raio de Convergência Local . . . . .	25
4.8	Pontos Pretos . . . . .	25
4.9	Polinômios Avaliados . . . . .	25
4.10	Bacias de Atração . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>40</b>
	<b>Referências</b>	<b>41</b>

# 1

## Introdução

---

A matemática fez uso de métodos analíticos para modelar e resolver alguns problemas na natureza, a maioria dos problemas por sua vez, torna-se impossível ou mesmo inviável para tais métodos; esses casos, geralmente, envolvem fenômenos não lineares. Daí se recorre aos métodos numéricos iterativos, isto é, a partir de uma repetição sucessiva de um determinado processo pré estabelecido encontra-se um valor aproximado o suficiente da solução exata do problema, onde através de alguns critérios este é aceito como solução da problemática.

Neste trabalho, foi considerado a determinação de raízes de polinômios, que são funções não lineares, por alguns métodos iterativos. São eles: Newton, Variante de Newton (MVN), Dong 3, Dong 4, SSTZ2 e Euler-Cauchy. Tais métodos são analisados aqui sob a perspectiva de bacias de atração, que muitas vezes apresentam-se pertencentes à Geometria Fractal; uma geometria estudada primeiramente por Mandelbrot que apresenta imagens denominadas de fractais presentes em diversos ramos na natureza. Neste caso, essas são geradas a partir de processos iterativos dos métodos citados por meio do software *MatLab*. Tais imagens apresentam estruturas características próprias que permitem uma análise detalhada acerca dos métodos designados por este trabalho.

O método de Newton foi escolhido por ser um dos métodos mais conhecidos para resolução de problemas desta natureza; o MVN, por outro lado, foi optado por apresentar vantagens sobre o método de Newton que poderiam ser relevantes na resolução de funções; o método de Dong 3 e Dong 4, por sua vez, foram eleitos pelo trabalho de [Chun & Neta \(2018\)](#) como métodos rápidos e com um número bom de avaliações da função por ponto; o método SSTZ2, foi escolhido por ter sido designado, também por [Chun & Neta \(2018\)](#), como um método de bom tempo computacional para resolução das funções; e, por fim, foi definido o método de Euler-Cauchy, visto que no trabalho desenvolvido por [Chun & Neta \(2018\)](#) o mesmo é pontuado por não apresentar pontos pretos.

A relevância do assunto abordado no presente trabalho dá-se pelo fato de os fractais/bacias de atração nesta perspectiva ainda serem pouco explorados, bem como a necessidade de compreender a utilização dos métodos no que diz respeito a obter propriedades para facilitação da escolha para uso.

Além deste capítulo, o trabalho está dividido em outros quatro, sendo o segundo designado ao conceito de Fractais, no que diz respeito à indentificação e propriedades. O terceiro apresenta os métodos considerados nesta análise. O quarto capítulo apresenta e explica as medidas crucias para a análise dos métodos e, além disso as bacias de atração de cada método para nove polinômios, cuja escolha se deu para variar número de raízes, multiplicidade e requerimento computacional, além disso, são feitos o detalhamento dos resultados obtidos pelas medidas e bacias de atração. Por fim, no último capítulo são feitas as considerações finais do trabalho, que de certo modo sumarizam as observações acerca análise estudada dos métodos.

# 2

## Fractais

---

A geometria euclidiana consegue explicar diversas problemáticas existentes na natureza, algumas porém são consideradas por essa geometria como desvio padrão. Neste casos, a Geometria Fractal apresenta um de seus méritos, quiçá o maior, pois representa melhor essas formas. Tal fato pode ser facilmente entendido quando remete-se à célebre frase do livro considerado o marco inicial da Geometria Fractal, *Geometry of the nature* (1975), que diz que “nuvens não são esferas, montanhas não são cones, os litorais não são círculos, a casca da árvore não é lisa e tampouco a luz viaja em linha reta”. A definição de fractal, por sua vez, torna-se por vezes um problema na matemática, pois diversas são as tentativas para definir o mesmo, mas cada uma dessas deixa em aberto uma lacuna, ainda assim este fato não impossibilita o seu estudo ou uso. Segundo o maior expoente da Geometria Fractal, (MANDELBROT, 1983, p. 5).

Será necessário definir uma figura fractal de modo rigoroso, para em seguida dizer que um objeto real é fractal por se assemelhar à figura geométrica que constitui o modelo? Considerando que um tal formalismo seria prematuro, adotei um método totalmente diferente: baseado em uma caracterização aberta e intuitiva, procedendo por retoques sucessivos. (tradução livre)

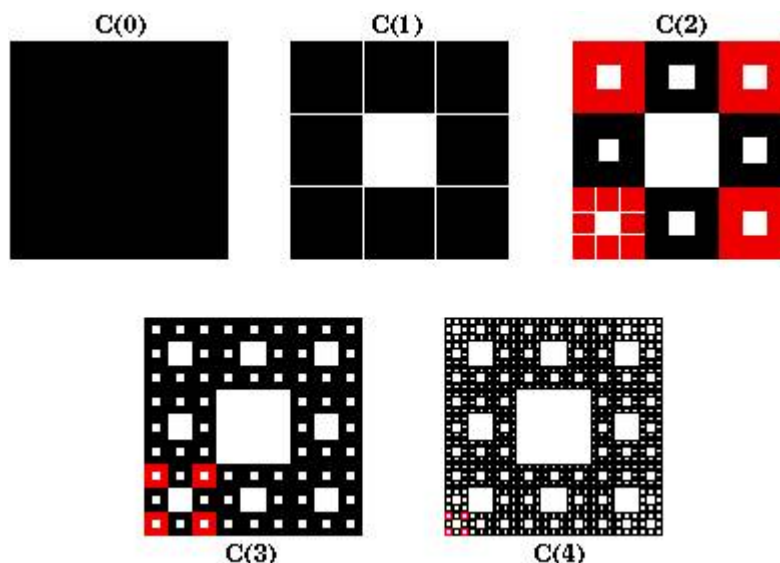
Em contrapartida, Benoit Mandelbrot não foi o primeiro a perceber os fractais, mas o primeiro a desenvolver estudos capazes de discerní-los. O matemático Mandelbrot (1924-2010), nasceu em Varsóvia, capital da Polônia e aos 12 anos de idade mudou-se com sua família para França, e mais tarde foi para os EUA, locais onde ele pôde desenvolver alguns estudos que depois foram reunidos e direcionados para o que se tem como Geometria Fractal.

Fractal, por sua vez, foi o termo usado por Mandelbrot em 1975 quando este sentiu a necessidade de uma palavra para denotar as formas que compõem esta geometria, surgiu através da palavra *fractus*, que vem do verbo “frangere”, do latim e significa quebrado ou fragmentado. O vocábulo descreve as irregularidades provenientes das figuras com padrões complexos que transmite a ideia de partição ordenada que tende a se repetir infinitamente, por mais que esteja limitada a uma área finita. As características mais comuns abordadas tratando-se de fractais são a auto similaridade ou auto semelhança, iteração ou lei de formação e dimensão.

A auto similaridade ocorre quando tendo uma parte de determinada figura esta remeterá semelhanças a figura inteira, ou ainda, independente da escala de ampliação do objeto de estudo, este permanece invariável em sua forma inicial; esta última é tida como uma especificação da auto similaridade chamada de auto similaridade estrita. Esta propriedade pode ser melhor compreendida observando o tapete de Sierpinski (figura 2.1) ou o floco de Koch (figura 2.2) (SPENGLER, 2014).

O processo de formação dos fractais é geralmente simples e dá-se por procedimentos ou métodos iterativos, uma vez que os fractais não dispõem de representação analítica. Tais métodos consistem em repetir o

**Figura 2.1:** Formação do Tapete de Sierpinski



FONTE: Retirada do site: <http://didamat-univaq.wikifoundry.com> [acesso: Fev, 2020]

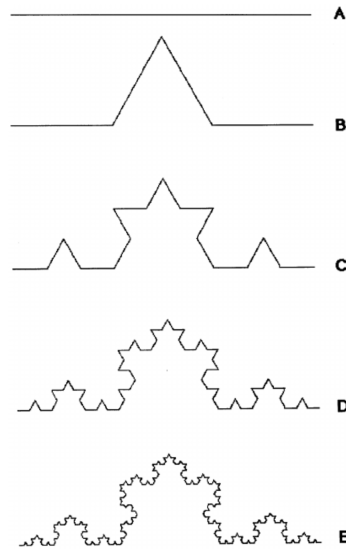
mesmo ato ou princípio em forma de feedback, com o auxílio de computadores, a fim de obter determinadas representações para posterior análise dessas estruturas. Como consequência desta lei de formação, os fractais apresentam uma característica chamada de estrutura fina, que retrata o quantitativo de detalhes existente em um fractal, onde independente do grau de ampliação da figura esta apresentará a mesma quantidade de detalhes da imagem que está sofrendo ampliação.

O processo iterativo dentro da Geometria Fractal pode ser classificado em dois tipos: algébrico e geométrico. A iteração algébrica consiste em atribuir um valor inicial  $x_n$  e partindo deste encontrar o valor de  $x_{n+1}$  mediante uma expressão, este valor então assume o valor de  $x_n$  para se obter um valor  $x_{n+2}$  e assim sucessivamente para adquirir os valores necessários para análise. Por outro lado, na iteração geométrica o processo iterativo é aplicado à determinada figura geométrica, por exemplo o tapete de Sierpinski (figura 2.1), onde dado um quadrado inicial (figura geométrica), este é dividido igualmente em outros nove quadrados, onde destes é retirado o quadrado central e então repete-se o processo para os outros oito quadrados restantes e assim sucessivamente (CARVALHO et al., 2005).

Tratando-se da dimensão Fractal, diferentemente da Geometria Euclidiana, ela pode assumir valores fracionários, pois está relacionada basicamente com a estrutura de ocupação do espaço da figura. Por exemplo, a curva de Koch que se trata de uma reta, porém devido a infinita quantidade de detalhes nas dobras ela tende a “ocupar mais espaço” que uma linha convencional da Geometria Euclidiana, daí assume-se que a dimensão da curva é maior que 1, mas menor que 2, atribuindo assim um valor fracionário à dimensão. Para o cálculo da dimensão fractal Spengler (2014, p. 13) explica que:

Para o cálculo da dimensão sem a necessidade de existência de auto similaridade é usado o método de contagem de caixas. Nesse método cobre-se a figura com uma malha de quadrados de lado  $\delta$ , e toma-se  $n$  como o número de quadrados hachurados. Quando  $\delta$  é muito grande a cobertura tem pouca precisão, pois com poucos quadrados a figura será contida, assim não atentando aos detalhes e a dimensão da figura. Logo quanto menor o valor de  $\delta$  mais precisa será a cobertura, ou seja, faz-se tender para zero o valor de  $\delta$ , tendo a dimensão como  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log n}{-\log \delta}$

Outrossim, são diversos os tipos existentes de fractais, dentre os mais famosos estão os gerados por sistemas dinâmicos complexos, isto é, aqueles constituídos a partir de processos iteracionais de uma função,

**Figura 2.2:** Formação da Curva de Koch

FONTE: <https://www.researchgate.net/>The iterative construction of the Koch curve with a Df [acesso: Fev, 2020]

definida em um conjunto qualquer nele mesmo, aplicada na própria função em um ponto inicial  $x_0$ . A sequência de pontos  $x_k$  gerados pela função  $f$  em questão, junto a  $x_0$  originam as órbitas, que a partir de  $|x_0|$  podem ser classificadas, de acordo com Cruz (2008), como órbitas progressivas ou regressivas, variando segundo o valor inicial  $x_0$ .

Designando-se por  $R$  como sendo o processo iterativo, todas iterações  $n \in \mathbb{N}$  tais que  $|R^n(x)| \leq |x_0| < 1$  tem-se o que se denomina por órbita regressiva. Caso contrário, isto é,  $|R^n(x)| > |x_0| > 1$ , a órbita é denominada de progressiva. Outro caso são os pontos tidos como pontos periódicos, tidos quando  $R^n(x_0) = x_0$  para algum  $n$ . A órbita do ponto em questão é denominada como órbita periódica ou ciclo, tal que o menor natural não nulo  $n$  de modo que isso aconteça é chamado de período mínimo da órbita. Em casos do período mínimo ser 1, dizemos que o ponto  $x_0$  é um ponto fixo, caracterizando uma órbita invariante (CRUZ, 2008).

As órbitas ainda podem ser classificadas conforme suas propriedades em confinadas ou fugitivas. De modo geral as tidas como confinadas localizam-se em uma região limitada no plano  $\mathbb{C}$ , enquanto as fugitivas tendem a prolongar-se ao infinito.

Quando a órbita for identificada como progressiva tem-se que o infinito é um atrator da órbita de modo que todos os pontos pertencentes a esse plano também possuem como atrator o infinito, constituindo, desta maneira, a bacia de atração do infinito, esquematizada e representada por  $B_\infty$  (CRUZ, 2008).

$$B_\infty = \{x \in \mathbb{C} : |f^n(x)| \rightarrow \infty\} \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

Por outro lado, se a órbita for identificada como regressiva tem-se que a origem do plano dos complexos é o atrator das órbitas e que os pontos que possuem o mesmo atrator, constituem a bacia de confinamento, representada por  $K$  (CRUZ, 2008).

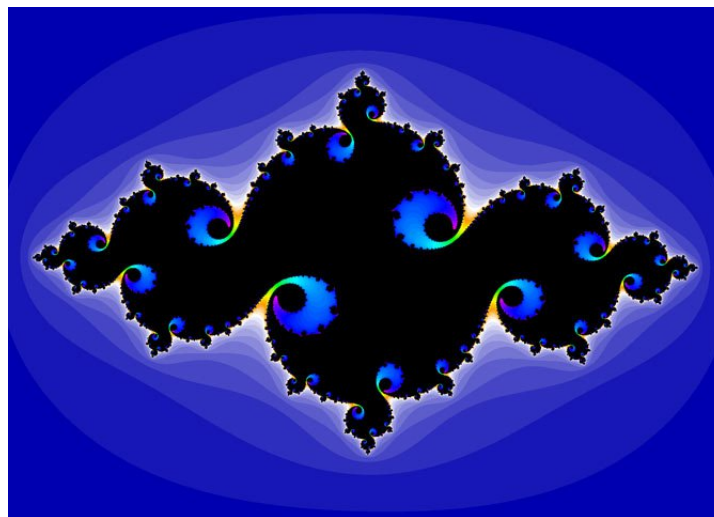
$$K = \{x \in \mathbb{C} : |f^n(x)| < \delta, \forall n \in \mathbb{Z}\} \text{ onde } \delta > 0$$

## 2.1 Conjunto de Júlia

O plano  $\mathbb{C}$  é dividido por dois conjuntos: um que contém o conjunto cuja as órbitas escapam para o infinito e outro cujas órbitas estão confinadas em determinado espaço. A fronteira existente entre esses conjuntos denomina-se conjunto de Júlia de uma função  $f$ , denotado por  $J$  e corresponde aos pontos do plano complexo que não apresentam atrator.

Segundo Karas (1994) o conjunto de Júlia corresponde a um conjunto não vazio completamente invariante, gerado pela função quadrática  $f(x) = x^2 + c$  onde  $c \in \mathbb{C}$ . No entanto, apesar de sua fórmula,  $J$  pode ser gerado a partir de funções quadráticas, cúbicas, quárticas, etc, mas o caso em que a função é exclusivamente quadrática, a mesma depende exclusivamente do parâmetro  $c$  na sua morfologia, onde  $c = p + qi$  com  $p, q$  reais, denotada, assim, por  $J(c)$ . Quando se tem o valor de  $c = 0$  o conjunto é representado por uma circunferência, à medida que este parâmetro vai sendo alterado a complexidade de Júlia vai sendo apresentada. O complementar do conjunto de Júlia é chamado conjunto de Fatou, desenvolvido por Pierre Fatou. A figura (2.3) a seguir exemplifica o conjunto em questão.

**Figura 2.3:** Exemplo das regiões com conjuntos de Fatou e Júlia



FONTE:<https://www.pbs.org/wgbh/nova/article/mandelbrot-fractal/>  
Conjunto de Julia Nova [acesso: Fev, 2020]

## 2.2 Conjunto de Mandelbrot

Esse conjunto de pontos foi descoberto por Mandelbrot, por meio de recursos computacionais. Segundo Spengler (2014) o conjunto corresponde a morfologia da família quadrática  $f(z) = z^2 + c$  obtida na variação do parâmetro  $c$ . Onde morfologia, por sua vez, refere-se ao conjunto de pontos que geram órbitas confinadas.

De acordo com Cruz (2008 apud SERRA; KARAS, 1997, p. 31) o conjunto de Mandelbrot corresponde ao conjunto dos pontos do plano complexo para os quais o conjunto de Júlia é conexo, isto é, quando a única cisão possível é a trivial.

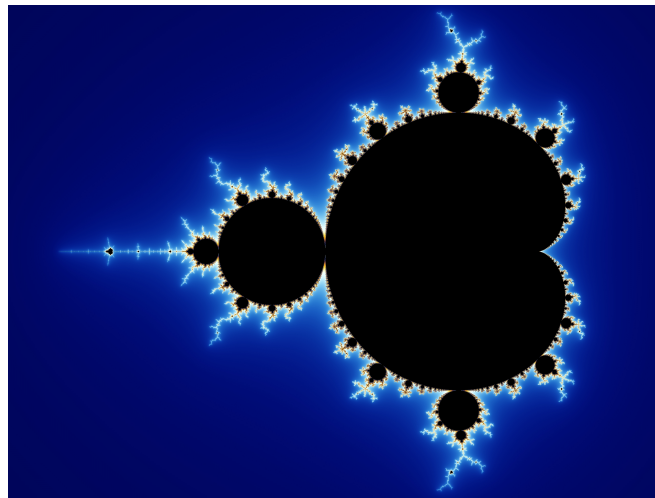
Assim, o conjunto de Júlia torna-se dependente diretamente do conjunto de Mandelbrot para ser gerado, uma vez que Júlia é gerado pela iteração de uma função definida no plano dos complexos. Desta maneira pode-se conceituar Júlia a partir de uma família de funções quadráticas em função de um ponto  $c = a + bi$

pertencente ao conjunto de Mandelbrot, como da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}x_1 &= f(x_0) = x_0^2 + c \\x_2 &= f(x_1) = f(x_0^2 + c) = (x_0^2 + c)^2 + c \\x_3 &= f(x_2) = f((x_0^2 + c)^2 + c) = ((x_0^2 + c)^2 + c)^2 + c \\&\vdots\end{aligned}$$

A imagem a seguir exemplifica o conjunto em questão.

**Figura 2.4:** Exemplo da região do conjunto de Mandelbrot



FONTE:<https://www.pbs.org/wgbh/nova/article/mandelbrot-fractal/>  
Mandelbrot Nova [acesso: Fev, 2020]

# Métodos de Determinação de Raízes

## 3.1 Método de Newton

O método de Newton é um dos mais populares quando se remete à aproximação de raízes reais ou complexas de funções. Como em qualquer método iterativo, o método de Newton consiste em a partir de um valor inicial  $x_0$  encontrar uma solução  $x^*$  de modo que  $f(x^*) \approx 0$ . No caso deste, toma-se o modelo local linear na função  $f(x)$  em função de  $x^*$  e este modelo então é a reta tangente ao gráfico da função em  $x^*$ . Através de processos iterativos da função  $R = N_f$  encontre-se a sequência  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  que sob determinadas condições, podem convergir ou não para um raiz  $\alpha$  de  $f$  (GOMES-RUGGIERO; LOPES, 1996).

**Definição 1.** *Dada uma função  $f$  real ou complexa, derivável com  $f'(x_n) \neq 0$ , define-se a função de Newton, associada a  $N_f$  como:*

$$N_f(x) = x - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.1)$$

Assim,

$$\begin{aligned} x_1 &= N(x_0) \\ x_2 &= N(x_1) = N(N(x_0)) = N^2(x_0) \\ x_3 &= N(x_2) = N(N(N(x_0))) = N^3(x_0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Isto é,  $x_n = N^n(x_0)$ , na qual a notação  $N^n$  remete-se a n-ésima iteração de  $N$ . Spengler (2014, p. 6) explica Newton da seguinte maneira:

Escolhida arbitrariamente uma aproximação inicial  $x_0$  toma-se a linearização de  $f$  neste ponto, ou seja, a aproximação da curva  $y = f(x)$  por sua reta tangente traçada no ponto  $(x_0; f(x))$ . O ponto seguinte  $x_1$  será a interseção dessa reta com o eixo  $x$  (solução). De modo análogo, o ponto  $x_2$  será a interseção do eixo  $x$  com a linearização de  $f$  no ponto  $x_1$ .

Assim, tem-se que Newton é um algoritmo usado para aproximar a raiz de uma função a partir de uma aproximação suficientemente próxima da raiz tida como exata, e usando tal chute inicial e o esquema de iteração dado por (3.1) converge quadraticamente para a raiz em questão (BURDEN; FAIRES, 1989). Em cada etapa iterativa, por sua vez, constrói-se um modelo linear local da função em um ponto qualquer  $x_n$ , encontrando assim a aproximação  $x_{n+1}$  do modelo local. O procedimento significa que a função  $f(x)$  seja

bem aproximada por uma reta  $y$  na vizinhança de  $x_n$ , isto é,  $f(x) \approx y$ . Mas  $f(x) \approx f(x_n) + y - f(x_n) = f(x_n) + \frac{y - f(x_n)}{x - x_n} \cdot (x - x_n) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ . Então o modelo linear do método de Newton fica representado por:

$$M_n(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \quad (3.2)$$

O método de Newton pode convergir rapidamente, se este apresentar uma boa aproximação inicial, ou seja, um chute inicial que esteja próximo da solução exata da função em questão. Segundo [Teodoro \(2013\)](#) o método de Newton pode falhar em situações, tais como quando  $f'(x_n) = 0$ , visto que por definição o método restringe tal fato; e no qual representa um ponto crítico da função, interpretada geometricamente como a não interseção da reta tangente com o eixo das ordenadas. Uma outra situação ainda na qual o método poderá não apresentar convergência é quando o chute inicial  $x_0$  coincidir com um ciclo e assim a função permanecer invariante. Para essa ocorrência pode-se referenciar o seguinte teorema:

**Teorema 1.** *(Teorema do ponto fixo de Newton): Seja  $f$  uma função e  $N_f$  a função iterativa de Newton, então  $r$  é uma raiz dessa função com multiplicidade  $m > 0$  se, e somente se,  $r$  for ponto fixo de  $N_f$ . Os pontos fixos por sua vez, estão constantemente se atraindo.*

Assim, tem-se que os pontos fixos da função  $N_f$  são raízes de  $f$ , assim também como as raízes de  $f$  são pontos fixos de atração de  $N_f$ .

## 3.2 Método Variante de Newton

O processo iterativo Método Variante de Newton (MVN) foi proposto por [Weerakoon & Fernando \(2000\)](#) como uma melhoria para o método de Newton mas o qual demanda uma avaliação adicional de derivada.

Newton apresenta um teorema, denominado Teorema de Newton, que apresenta a seguinte fórmula para o método ([DENNIS; SCHNABEL, 1996](#))  $f(x) = f(x_n) + \int_{x_n}^x f'(\lambda)d\lambda$ , onde a integral definida é aproximada por retângulo, isto é,  $\int_{x_n}^x f'(\lambda)d\lambda \approx f'(x_n)(x - x_n)$ , tal que resolvendo resultará no modelo linear de Newton (3.2).

O Método MVN, por sua vez, origina-se do mesmo teorema com uma análise não mais direcionada para aproximação da integral por retângulo, mas em vez disso, por trapézio, resultando em:

$$\int_{x_n}^x f'(\lambda)d\lambda \approx \frac{1}{2}(x - x_n)[f'(x) + f'(x_n)] \quad (3.3)$$

Assim o modelo local equivalente ao método em questão adequa-se da seguinte forma:

$$M_{vn}(x) = f(x_n) + \frac{1}{2}(x - x_n)[f'(x) + f'(x_n)] \quad (3.4)$$

Modelo local representa uma aproximação para a função, então o procedimento de determinação de raízes implica em tomá-lo como sendo nulo; por conseguinte, o próximo ponto iterativo como raiz do modelo

local no MVN vem da consideração:

$$\begin{aligned} M_{vn}(x_n + 1) = 0 &\Rightarrow f(x_n) + \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)[f'(x_n) + f'(x_{n+1})] = 0 \\ &\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{[f'(x_n) + f'(x_{n+1})]} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Uma das dificuldades deste esquema encontra-se em o processo requerer a derivada da função na  $(n + 1)$ -ésima etapa iterativa para calcular o ponto em si. Neste caso, para contornar isto adota-se a etapa iterativa de Newton para calcular a  $(n + 1)$  iteração no lado direito. Assim se resulta em um novo esquema dado por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(x_{n+1}^*)}, n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.6)$$

em que  $x_{n+1}^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ .

Os autores do método demonstram que se uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  (com  $D$  um intervalo aberto) possuir primeira, segunda e terceira derivadas definidas neste intervalo e tal que  $\alpha \in D$  seja uma raiz simples de  $f$ , se  $x_0$  corresponder ao chute inicial que esteja suficientemente próximo de  $\alpha$ , o MVN possui erro de aproximação dado por:

$$e_{n+1} = \left( c_2^2 + \frac{1}{2} C_3 \right) e_n^3 + O(e_n^4) \quad (3.7)$$

em que  $e_n = x_n - \alpha$  e  $C_j = \frac{1}{j!} \frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$ , com  $j = 2$  ou  $3$ .

Com essa mensuração de erro pode-se então afirmar que o MVN quando convergente é de ordem pelo menos 3; e diferentemente de muitos métodos desta ordem ou superior o mesmo não apresenta a necessidade de calcular derivadas de ordem maior que dois para executar as iterações necessárias para se obter uma raiz.

Sobre os exemplos de funções avaliadas em [Weerakoon & Fernando \(2000\)](#), uma curiosidade a cerca do MVN comparado com Newton está em que apesar do primeiro contar com uma avaliação adicional da derivada o número total de iterações ainda permanece menor que os do método de Newton.

### 3.3 Método SSTZ2

O método foi proposto por Sbibih, Serghini, Tijini e Zidna em [Sbibih et al. \(2014\)](#) como uma família geral composta por quatro métodos. São eles: SSTZ1, SSTZ2, SSTZ3 e SSTZ4, que tem como objetivo encontrar raízes múltiplas de uma função de valor real a partir de um chute inicial tido como razoável.

Primordialmente adota-se como hipótese uma função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  com uma raiz  $z$  de multiplicidade  $m$  e analítica na vizinhança dessa raiz. Tem-se então o método como um método alternativo, baseado no método de Newton usado para calcular uma solução da equação  $f(x) = 0$ ; onde este utiliza em cada iteração duas avaliações da função e uma avaliação de sua derivada. O processo iterativo resume-se na seguinte equação:

$$x_{n+1} = x_n - \varphi \left( \frac{f(x_n) - \mu \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}{f(x_n)} \right) \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.8)$$

em que  $\varphi$  é uma função complexa e  $\mu$  um parâmetro não nulo real ou complexo. O método pode ser de ordem 3 ou 4 variando de acordo com a multiplicidade das raízes da função. Sendo de ordem 3 para  $m \geq 2$  e de ordem 4 para  $m = 1$  e obtendo as ordem mediante  $\varphi$  satisfazer as condições estipuladas pelo teorema a seguir.

**Teorema 2.** *Seja  $f$  uma função complexa que tem uma raiz múltipla  $z$  com multiplicidade  $m$  é analítica na vizinhança de  $z$  então o Método de Newton Modificado dado pela relação (3.8) tem a ordem 3 se  $t \neq 0$  e  $\varphi$  satisfazer:*

$$\varphi(t^m) = m, \varphi'(t^m) = \frac{1}{t^{(m-1)}(1-t)^2} e \left| \left( \frac{1}{\varphi'} \right)' (t^m) \right| < \infty \quad (3.9)$$

Além disso, sua constante do erro assintótico é dada por:

$$\eta = \frac{1}{6^{\frac{m+2}{3}}} \left| \left( \frac{m+2}{2} - \frac{(m+2)(m-1)}{2m(m+1)t} - \frac{m+2}{m+1} \left( \frac{1}{\varphi'} \right)' (t^m) \right) \theta_1^2 - t\theta_2 \right|, \text{ sendo } \theta_k = \frac{f^{(m+k)}(z)}{f^{(k)}(z)}, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.10)$$

Quando  $m = 1$ ,  $\mu = m$  e a função  $\varphi$  satisfizer  $\varphi(0) = 1$ ;  $\varphi'(0) = 1$  e  $\varphi''(0) = 2$  o método tem pelo menos ordem 4.

Todos os quatro métodos aqui mencionados propostos por [Sbibih et al. \(2014\)](#) iniciam com uma dada escolha da função  $\varphi$  e uma pesquisa do parâmetro  $\mu$  de modo a se obter a terceira ordem de convergência. Além disso, os métodos oferecem diversos parâmetros para que a função satisfazendo as condições expostas pelo teorema (2) possa apresentar êxito.

De acordo com [Chun & Neta \(2018\)](#), dentre os quatro métodos SSTZ, o SSTZ2 foi o que menos demandou tempo computacional nas suas avaliações, e por isso foi o escolhido aqui. Neste caso adota-se a função  $\varphi = \frac{a}{b-x}$  em que  $a = m^2 t^{m-1} (1-t)^2$  e  $b = m t^{m-1} (1-t)^2 + t^m$ , e a fim de que se tenha ordem 3 de convergência, as funções devem ser tais que exista ao menos uma raiz com multiplicidade  $m \geq 2$ . Sob essas considerações adota-se  $t = 1 - \frac{\mu}{m}$ , com a escolha feita aqui do parâmetro  $\mu = 1$ .

### 3.4 Euler-Cauchy

O método de Euler-Cauchy é da família do método de Newton-Raphson, e surgiu a partir da manipulação para melhoramento do método de Newton. [Chun & Neta \(2018\)](#) citam-no também, junto aos métodos de Halley, Ostrowski e Hansen Patrick, como pertencente de métodos da família de Laguerre. Ele é de terceira ordem e uma dedução detalhada do método de Euler-Cauchy é apresentada em [Kneisl \(2001\)](#), onde é definido uma forma geral para os métodos da família de Laguerre:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\lambda u_n}{1 + \operatorname{sgn}(\lambda - m) \sqrt{\frac{\lambda - m}{m} \left[ (\lambda - 1) - \lambda \frac{u_n f''(x_n)}{f'(x_n)} \right]}} \quad (3.11)$$

em que  $\lambda (\neq 0, m)$  é um parametro real e  $\operatorname{sign}$  é a função sinal do argumento  $\lambda - m$ .

Por outro lado, é a partir do parâmetro  $\lambda$  que se define os casos especiais do método aqui mencionados. Para  $\lambda = 2m$  origina-se o método de Euler-Cauchy, daí, substituindo o valor de  $\lambda$  em (3.11) tem-se que o

método é dado por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2mu_n}{1 + \sqrt{(2m-1) - 2m \frac{u_n f''(x_n)}{f'(x_n)}}} \quad (3.12)$$

Mesmo com o surgimento e aprimoramento dos diversos métodos propostos recentemente por vários autores, Cauchy ainda é clássico e tem suas vantagens em certos contextos; sua maior vantagem é que será exato para polinômios até o grau 2, isto é, Cauchy produzirá com acurácia a solução do problema. Tal fato pode ser facilmente reconhecido na estrutura das bacias de atração, visto que Cauchy, geralmente, apresenta bacias limites com uma aparência diferente das complicadas estruturas fractais, mantendo sempre as suas fronteiras retas ou suaves, comumente sem a presença de pontos divergentes. Este fato explica o motivo do método ser escolhido para ser analisado neste trabalho.

### 3.5 Dong

Os métodos chamados por esse nome foram propostos em [Dong \(1982\)](#) e [Dong \(1987\)](#) como uma família composta por quatro métodos iterativos para encontrar raízes de equações, são eles: Dong 1, Dong 2, Dong 3, Dong 4. A família conta com três avaliações, sendo uma avaliação da função e duas de sua derivada por iteração. Os quatro métodos de Dong tem convergência de terceira ordem e são generalizados pela seguinte equação:

$$\psi(x) = \phi(x) - \frac{f(x)[\phi(x) - x]}{a_1 f'[\phi(x)](\phi(x) - x) + a_2 f(x) + a_3 f'(x)(\phi(x) - x)} \quad (3.13)$$

onde  $\phi(x) = x - \beta \frac{f(x)}{f'(x)}$  e  $\phi'(x^*) = \phi' = 1 - \frac{\beta}{m}$

A partir daí os métodos da família em questão são diferenciáveis pela escolha de diferentes parâmetros, levando em consideração que:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-1}{m\phi^{(m)} [(m+1)\phi^{(2)} - 2m\phi' + m - 1]} \\ a_2 &= (\phi' - 1) \frac{(m+1)\phi^{(2)} - (3m+1)\phi' + 2m}{\phi' [(m+1)\phi^{(2)} - 2m\phi' + m - 1]} \\ a_3 &= \frac{(m+1)\phi' - m}{m\phi' [(m+1)\phi^{(2)} - 2m\phi' + m - 1]} \end{aligned}$$

De acordo com [Chun & Neta \(2018\)](#), dentre os quatro métodos Dong aqui citados, o Dong 3 e Dong 4 são classificados como bom quando se remete a avaliação por ponto e tempo computacional, e por isso foram considerados para análise aqui.

### 3.5.1 Dong 3

Para Dong 3 considera-se  $\beta = 1$ , logo, tem-se que:

$$\begin{aligned} a_1 &= \left( \frac{m}{m-1} \right)^{m+1}, \\ a_2 &= \frac{m^2 + 1}{(m-1)^2}, \\ a_3 &= \frac{m}{(m-1)^2} \end{aligned}$$

Assim, obtém-se a seguinte função iterativa:

$$\psi(x) = x - u - \frac{f(x)}{\left( \frac{m}{m-1} \right)^{m+1} f'(x-u) + \frac{m-m^2-1}{(m-1)^2} f'(x)} \quad (3.14)$$

### 3.5.2 Dong 4

Para Dong 4 por sua vez tem-se que  $\beta = \frac{m}{m+1}$ , daí:

$$a_1 = \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^{m+1}, \quad a_2 = 1 \text{ e } a_3 = 0$$

Assim Dong 4 é dado pela seguinte função iterativa:

$$\psi(x) = x - \frac{m}{m+1}u + \frac{\frac{m}{m+1}f(x)}{f'(x) - \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^m f' \left( x - \frac{m}{m+1}u \right)} \quad (3.15)$$

## Análise dos Métodos

Neste capítulo serão apresentadas definições de ordem de convergência, ordem de convergência computacional aproximada, número de avaliações por iteração, eficiência, critério de parada, estabilidade, raio de convergência local e pontos pretos. Algumas dessas medidas serão adotadas como comparativo entre os métodos apresentados no capítulo anterior, e outras como explicativas para determinados comportamentos dos tais quando observados sob a perspectiva das bacias de atração.

### 4.1 Ordem de Convergência

Dada uma sequência  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$  obtida de um processo iterativo com valores (vetores definidos num subconjunto do  $\mathbb{R}^n$ ) com tendência a um  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ , define-se ordem de convergência dessa sequência sendo  $p$  se existir uma constante  $C > 0$  tal que  $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| < C\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^p$  (ALLEN; ISAACSON, 1989).

Por conseguinte, um método converge linearmente caso se tenha um  $p = 1$  (e  $0 < C < 1$ ). Caso  $p = 2$  o método convergirá quadraticamente, caso  $p = 3$  cubicamente, e assim sucessivamente. Por outro lado, se  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^p} = C$  então  $C$  é tida como a constante assintótica do erro. O método possui convergência superlinear se existir uma sequência  $\{C_k\} \in R^+$  tal que  $C_k \rightarrow 0$  e  $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq C_k \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|$ .

Para os métodos aqui estudados tem-se que Newton converge quadraticamente, enquanto MVN, SSTZ2, Dong3, Dong4 e Euler-Cauchy convergem cubicamente. Assim tem-se que os métodos respeitam o seguinte teorema (CHUN; BAE; NETA, 2009):

**Teorema 3.** *Seja  $\alpha \in I$  uma raiz de multiplicidade  $m$  suficientemente diferenciável em  $f : I \rightarrow R$  para um intervalo aberto  $I$  e se  $x_0$  for próximo o suficiente de  $\alpha$ , então os métodos definidos por:*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{m[(2\theta - 1)m + 3 - 2\theta]}{2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{\theta(m-1)^2}{2} \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} - \frac{(1-\theta)m^2}{2} \frac{[f(x_n)]^2 f''(x_n)}{[f'(x_n)]^3} \quad (4.1)$$

são cubicamente convergentes para qualquer valor real  $\theta$  e satisfazem a equação de erro dada por

$$e_{n+1} = K_3 e_n^3 + O(e_n^4) \quad (4.2)$$

em que  $e_n = x_n - \alpha$  e  $K_3$  é dado por

$$K_3 = (\theta - 1) \frac{f^{(m+1)}(\alpha)}{f^{(m)}(\alpha)} + \gamma \frac{[f^{(m+1)}(\alpha)]^2}{[f^{(m)}(\alpha)]^2} - \frac{1}{(m+2)(m+1)m} \frac{f^{(m+2)}(\alpha)}{f^{(m)}(\alpha)} \quad (4.3)$$

sendo

$$\gamma = \frac{2(1-\theta)m^5 + 2(\theta-1)m^4 + (2\theta-1)m^3 + (10\theta-9)m^2 + (19-20\theta)m + 8\theta-9}{2(m+1)^2m^2(m-1)^2} \quad (4.4)$$

## 4.2 Ordem de Convergência Computacional Aproximada

Existe no entanto uma ordem de convergência computacional, obtida pelo próprio processo, uma vez que os fractais/bacias de atração são gerados por processos computacionais. Ela é ordem de convergência computacional, medida em âmbito numérico apenas, dada por:

$$OCCA = \frac{\ln(\|\mathbf{e}_{k+1}\|/\|\mathbf{e}_k\|)}{\ln(\|\mathbf{e}_k\|/\|\mathbf{e}_{k-1}\|)} \quad (4.5)$$

em que  $\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}$ , com  $i = k-1, k$  ou  $k+1$  obtidos com as quatro últimas iterações  $\mathbf{x}_{k-2}, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k$ , e  $\mathbf{x}_{k+1}$ .

Cada região de quatro pontos dispõe de uma OCCA diferente, a partir destas é possível calcular uma média geral obtida por (4.5) de modo que os pontos contidos no intervalo determinado da problemática apresentem uma ordem geral de convergência computacional.

## 4.3 Número de Avaliação por Iteração

Os autores [Kung & Traub \(1974\)](#) descrevem o número de avaliações por iterações como  $v_i(\phi)$ , onde  $\phi$  corresponde a função que requer avaliações de  $f^{(i)}$ , sendo então definida contabilizando-se as avaliações da função  $f$  e de todas as suas derivadas envolvidas pelo método em cada iteração. Daí tem-se então que  $v(\phi) = \sum_{i \geq 0} v_i(\phi)$  é o número total de avaliações requeridas por  $\phi(f(x))$  por iteração.

## 4.4 Eficiência

Para comparar os métodos usados para encontrar as raízes simples de uma função não-linear  $f(x) = 0$  adota-se que  $f(\alpha) = 0$  e  $f'(\alpha) \neq 0$ . Sendo  $p$  a ordem de convergência do método e  $d$  correspondendo ao número de avaliações da função por iteração, tem-se que sua eficiência ( $I$ ) é definida por

$$I = p^{1/d} \quad (4.6)$$

Para os métodos que apresentam ordem superior a três considera-se na eficiência também as derivadas da função. Como os métodos aqui analisados apresentam até ordem três, são considerados apenas a ordem do método e o número de avaliação por iteração; uma vez que nos casos de ordem até três a eficiência dos métodos não são facilmente modificadas levando em consideração este fator ([CHUN; NETA; KIM, 2014](#)).

Por outro lado, tem-se também a eficiência computacional ( $IEC$ ), onde  $p$  ainda sendo a ordem de convergência e  $C(n) = a(n) + q(n)$  o número total de avaliações de funções, de suas derivadas nas iterações requeridas pelo método ( $a(n)$ ), mais a quantidade de produtos e quocientes ( $q(n)$ ) existentes realizada por iteração, define-se  $IEC$  da seguinte forma:

$$IEC(n) = p^{1/C(n)} \quad (4.7)$$

Para os métodos analisados aqui tem-se a seguinte tabela com o resumo das medidas apresentadas até agora:

**Tabela 4.1:** Eficiências

Método/Medidas	$(p)$	$(d)$	$(d')$	$a(n)$	$q(n)$	$C(n) = a(n) + q(n)$	I	IEC
Newton	2	1	1	2	1	3	2,00	1,25
MVN	3	1	2	3	2	5	3,00	1,24
Dong 3	3	1	2	3	6	9	1,73	1,12
Dong 4	3	1	2	3	8	11	1,73	1,10
SSTZ 2	3	2	1	3	6	9	1,73	1,12
Euler-Cauchy	3	2	1	3	8	11	1,73	1,10

## 4.5 Critérios de Parada

Um método iterativo consiste de um modo geral em a partir de uma aproximação inicial ou chute inicial, denominado por  $\mathbf{x}_0$ , obter sucessivamente outras aproximações  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ . Desta maneira pode-se obter uma sucessão que pode convergir ou não para uma solução.

Não sabendo de antemão se um chute inicial remeterá para uma aproximação aceitável é necessário estabelecer os critérios de parada para se aceitar determinado ponto como solução do problema em questão, ou mesmo para se detectar que não há convergência para nenhuma solução, isto é, detectar uma divergência ou ponto-fixo. Mesmo que em cada exemplo avaliado aqui já se soubesse previamente quais são as raízes, um critério de parada se estabelece sobre uma tolerância  $\epsilon$  que se verifica através da norma 2 da diferença entre o pontos obtidos com uma aproximação e sua antecedente, isto é,  $(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\| \leq \epsilon)$ . Mas isto também pode ser interpretado como sendo o passo entre duas iterações consecutivas. Também aplica-se como critério de parada um número máximo de iterações permitido. Neste trabalho foi uniformizado como critério de parada nos métodos um  $\epsilon = 10^{-3}$  e um número máximo de 40 iterações por ponto.

## 4.6 Estabilidade

Um método iterativo é tido como estável quando partindo de um presuposto que um ponto tido como chute inicial apresenta determinado comportamento, isto é, converge para determinada raiz da função; assim também sua vizinhança o faz, isto é, quando neste ponto é acrescido um pequeno desvio, ou seja adotando um vizinho cuja a diferença com o ponto inicial anteriormente adotado não seja significativa, esta condicional não afeta o comportamento anteriormente efetivado, convergindo para a mesma raiz que o ponto inicial anterior. Assim sendo, dado um ponto  $z$  os pontos de sua vizinhança quando condicionados aos mesmos métodos iterativos geram órbitas semelhantes no comportamento com  $z$ , este conjunto de pontos ( $z$  e sua vizinhança) é denominado de conjunto estável do método.

De maneira análoga, um ponto  $z$  é dito instável caso qualquer de sua vizinhança possuir pelo menos um ponto que dê origem a órbitas com comportamentos distintos de  $z$ , ou seja, se partindo de um ponto inicial seu vizinho acrescido de determinado valor pouco significativo não apresenta a mesma convergência. Este outro conjunto de pontos é denominado conjunto instável do método.

Outro caso é quando em determinada vizinhança de  $z$  há pontos com comportamentos semelhantes e distintos, assim, tem-se um conjunto denominado condicionalmente estável.

## 4.7 Raio de Convergência Local

Raio de convergência local é designado por  $r$ , correspondendo ao maior raio possível da circunferência gerada a partir de determinada raiz  $\alpha$  onde os pontos são estáveis, abrangendo, por sua vez, o ponto inicial  $\mathbf{x}_0$ . Assim, o valor de  $r$  é definido da seguinte maneira:

$$r = \max \mathfrak{N}(\alpha, k) \tag{4.8}$$

onde  $\mathfrak{N}(\alpha, k) = \mathbf{x}_0 \in B(\alpha); \|\mathbf{x}_0 - \alpha\|_2 < k$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \alpha$

## 4.8 Pontos Pretos

Para caracterização dos pontos convergentes é necessário estabelecer os critérios para se aceitá-los como solução do problema em questão, já que pontos fixos podem ser solução, ou simplesmente pontos nos quais a aproximação do método convergiu mesmo estando distante de qualquer solução.

Todos os métodos escolhidos para análise dos polinômios deste trabalho requerem avaliação de derivada dessa função. E tais elementos sempre estão no denominador do passo, ou de elementos do passo no processo iterativo do método. Sendo assim, quando o valor da derivada é nulo ou muito próximo disso, a fração na qual ela aparece tenderá a um valor muito alto, a não ser que o numerador seja da mesma ordem, ou superior, da derivada. Se sequencialmente acontece a primeira situação, isto é, o elemento identificado como passo tem valor alto, há possibilidades do processo chegar ao limite máximo de iterações e não alcançar uma aproximação aceitável; originando portanto pontos pretos dentro das bacias. Como os critérios de parada são de número de iterações e tamanho do passo, existem também situações em que os pontos pretos são criados mediante as sequências gerarem aproximações divergentes até alcançar o máximo de iterações permitidas, ou pontos fixos, diferente de raiz, mediante o tamanho do passo ser inferior à tolerância adotada.

## 4.9 Polinômios Avaliados

Os polinômios e suas multiplicidades estão dispostos na tabela 4.2 de modo que através da geração das bacias de atração desses possa haver um detalhamento sobre o tempo computacional necessário para executar cada método em todos os pontos, bem como o número total de iterações necessárias para um ponto convergir para determinada raiz, o número médio de avaliações de funções necessárias por ponto e o número de pontos que requerem 40 iterações sem apresentar convergência, isto é, o número de pontos pretos.

Para cada raiz do polinômio  $p(x)$  verificado é atribuída uma cor de modo que os pontos dispostos no intervalo  $[-3, 3] \times [-3, 3]$  ao serem analisados nos métodos iterativos convergem ou não para determinada raiz de  $p(x)$ . Em caso de não convergência o ponto é denominado ponto preto (sinalizado com a cor preta), de

modo que comparando as bacias dos métodos entre si é possível obter uma avaliação qualitativa dos pontos tidos como fixos ou divergentes no método.

Assim, tem-se que cada cor representa uma raiz e para cada conjunto de pontos vizinhos convergente para a mesma raiz diz-se que se tem um conjunto de pontos estáveis com determinado raio de convergência. Isto é, cada região que apresenta uma mesma cor indica que tal conjunto de pontos convergem para uma mesma raiz e apresentam algum grau de estabilidade sob certo raio de convergência.

O número de avaliações por ponto e tempo computacional, por sua vez, podem ser averiguados nas curvas dispostas pelas bacias. Quando se obtém uma área da bacia mais sombreada que outra (limitadas por curvas de nível), tem-se que os pontos da área mais sombreada demandaram mais avaliações e conseqüentemente maior tempo computacional para obterem convergência que das áreas menos sombreadas.

As medidas foram geradas pelo software *Matlab* juntamente com as bacias de atração. Para o tempo computacional foram considerados apenas a geração das bacias sem as demais medidas e, para o número de avaliações por pontos foram considerados somente os pontos que convergiram para determinada raiz, isto é, foram desprezados os números de avaliações dos pontos que se adequam a alguma condição para serem pretos. Os pontos pretos por outro lado foram expostos em porcentagem, onde 100% representa os 250.000 pontos do quadrado usados na discretização do domínio para avaliação por bacias.

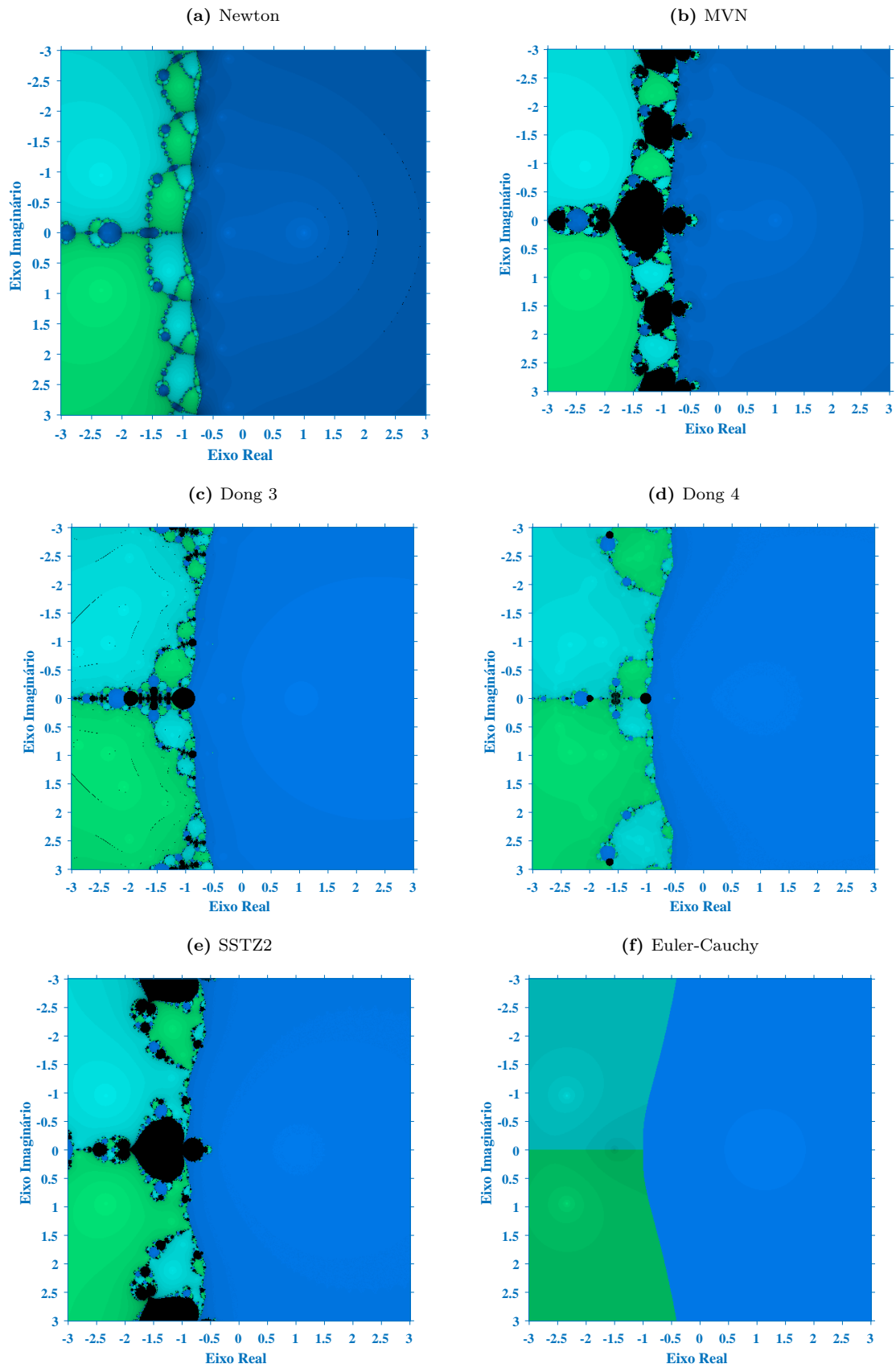
**Tabela 4.2:** Polinômios  $p(x)$  e a maior multiplicidades  $m$  das raízes

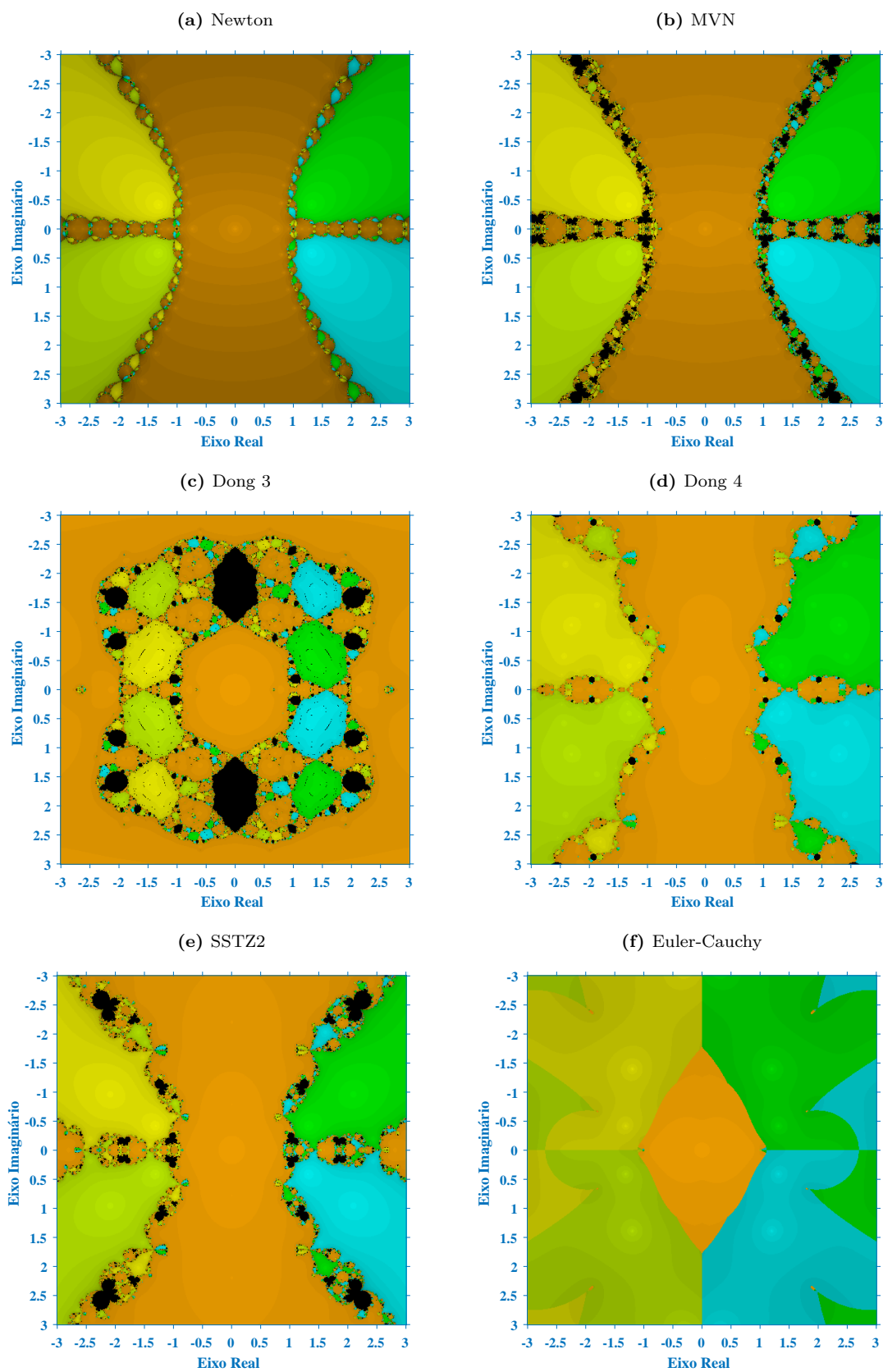
Polinômios	$m$
$p_1(x) = (x - 1)^2(3x^2 + 14x + 19)$	2
$p_2(x) = x^2(11x^4 - 34x^2 + 39)$	2
$p_3(x) = x^7 + x^2 - 1$	2
$p_4(x) = x^4 - 1$	2
$p_5(x) = x^6 - 1$	2
$p_6(x) = (x - 2)(x - 2)(x - 2)(x^2 + 3)^3$	3
$p_7(x) = (x^2 - x + 1)^2(x + 2)^4$	4
$p_8(x) = (x^4 - 5)^5$	5
$p_9(x) = (x^3 + 4x^2 - 10)^3$	6

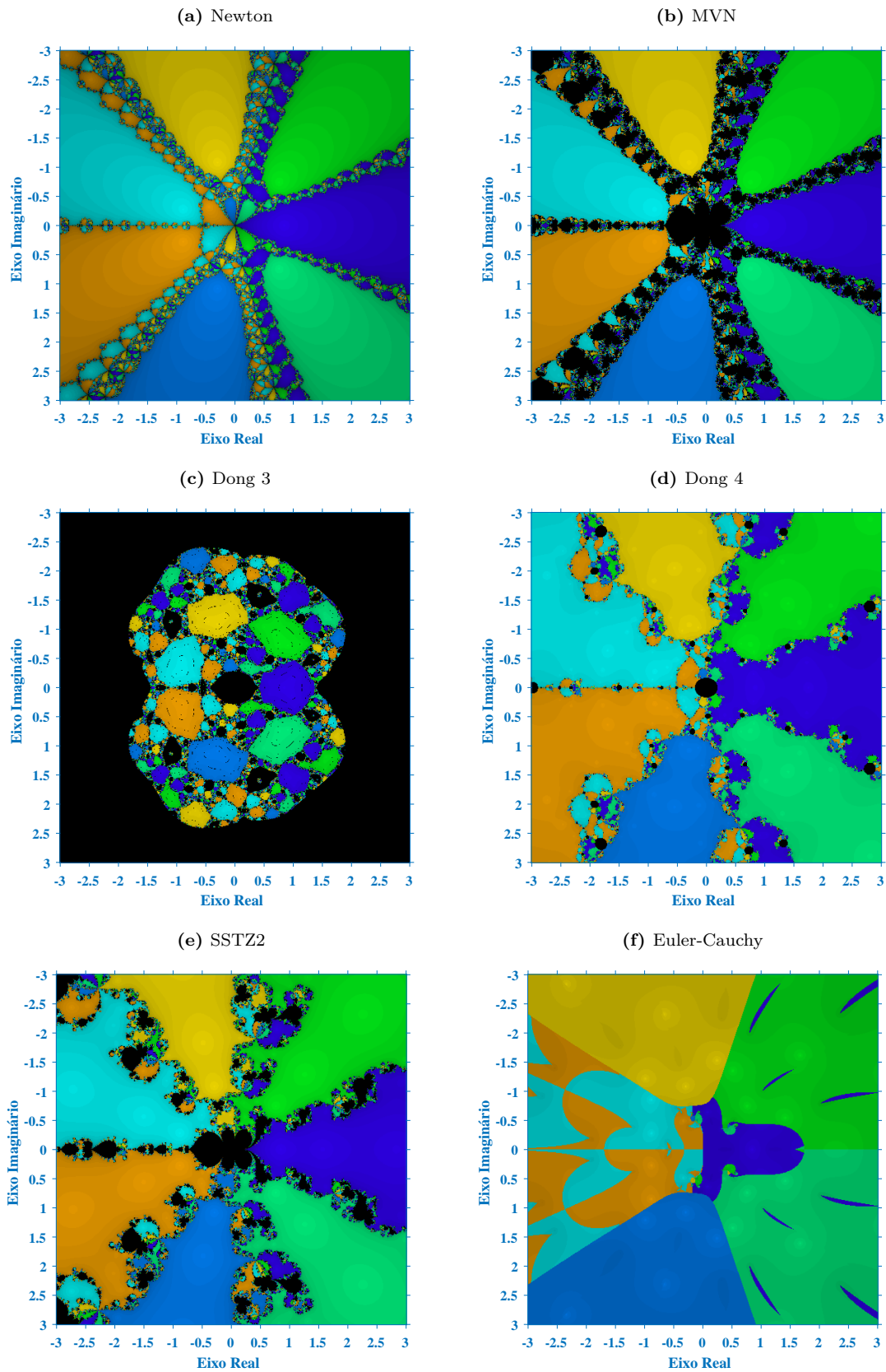
## 4.10 Bacias de Atração

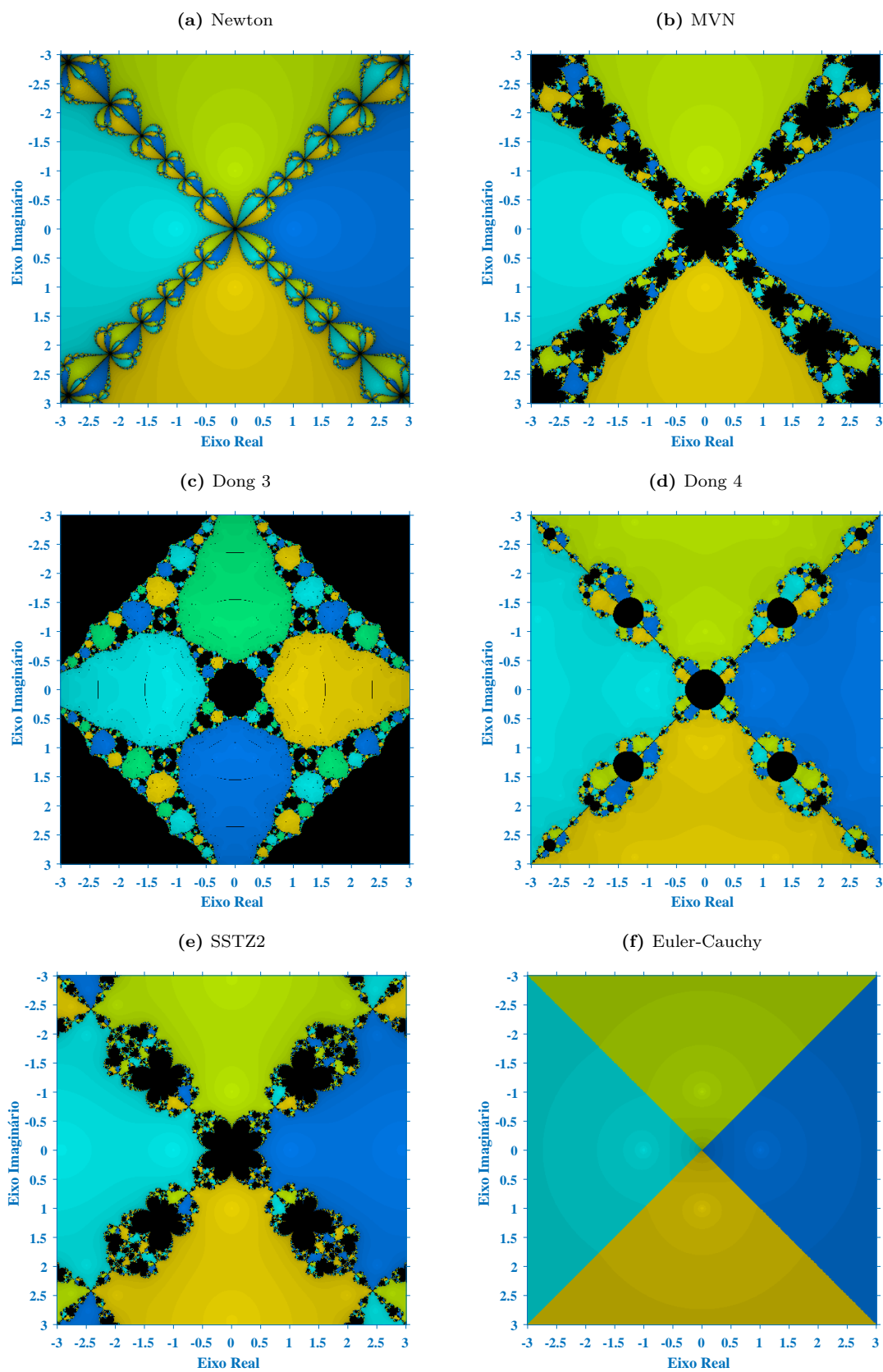
Para a análise em questão adotou-se os polinômios dentro do quadrado  $[-3, 3]$  por  $[-3, 3]$ , distribuídos em 250.000 pontos igualmente espaçados. Foram eleitos nove polinômios por características diversas, tais como: número de raízes, multiplicidade e representação das bacias de atração.

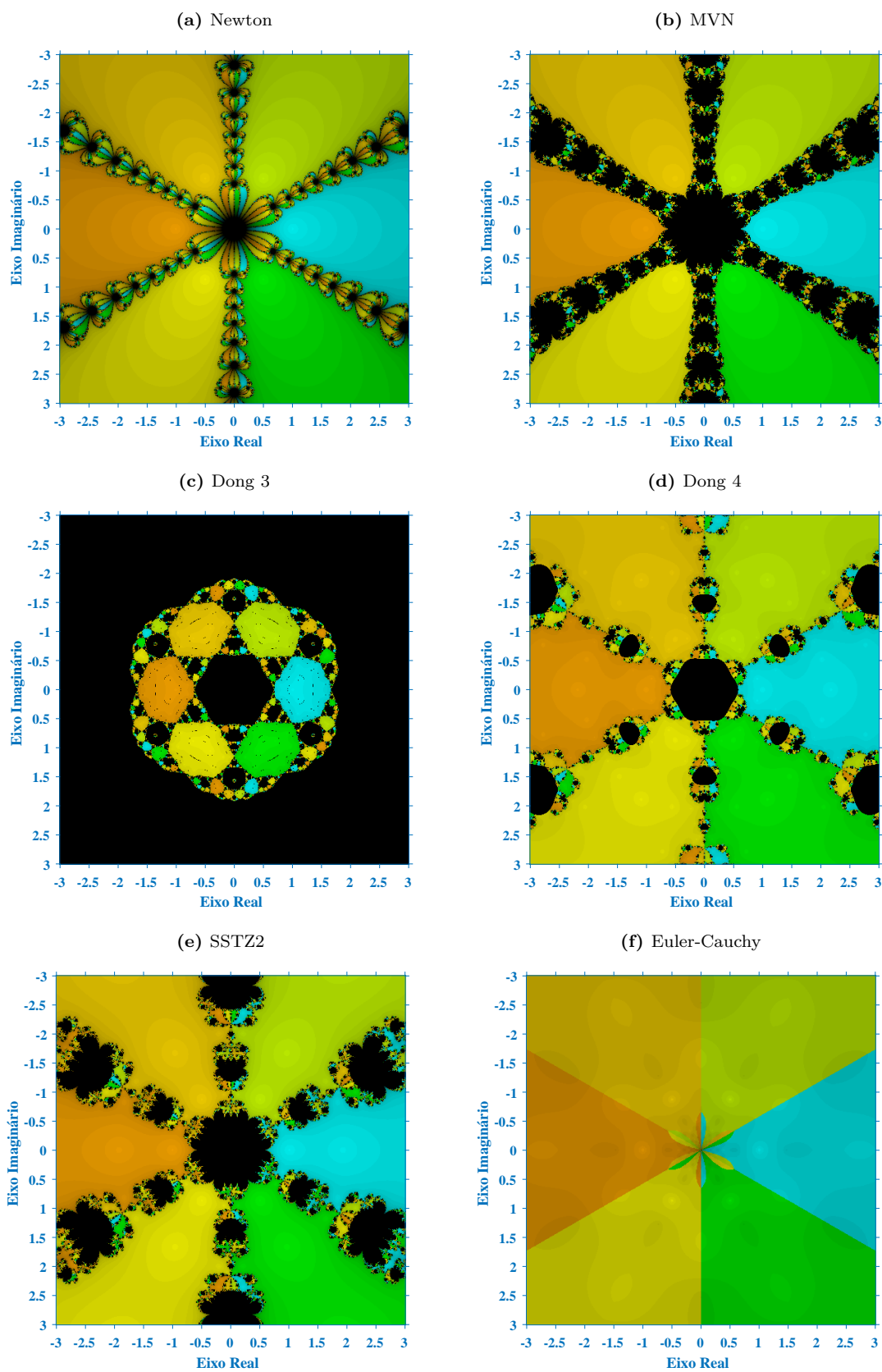
**Figura 4.1:** Bacias de Atração referentes ao polinômio  $p_1(x) = (x - 1)^2(3x^2 + 14x + 19)$



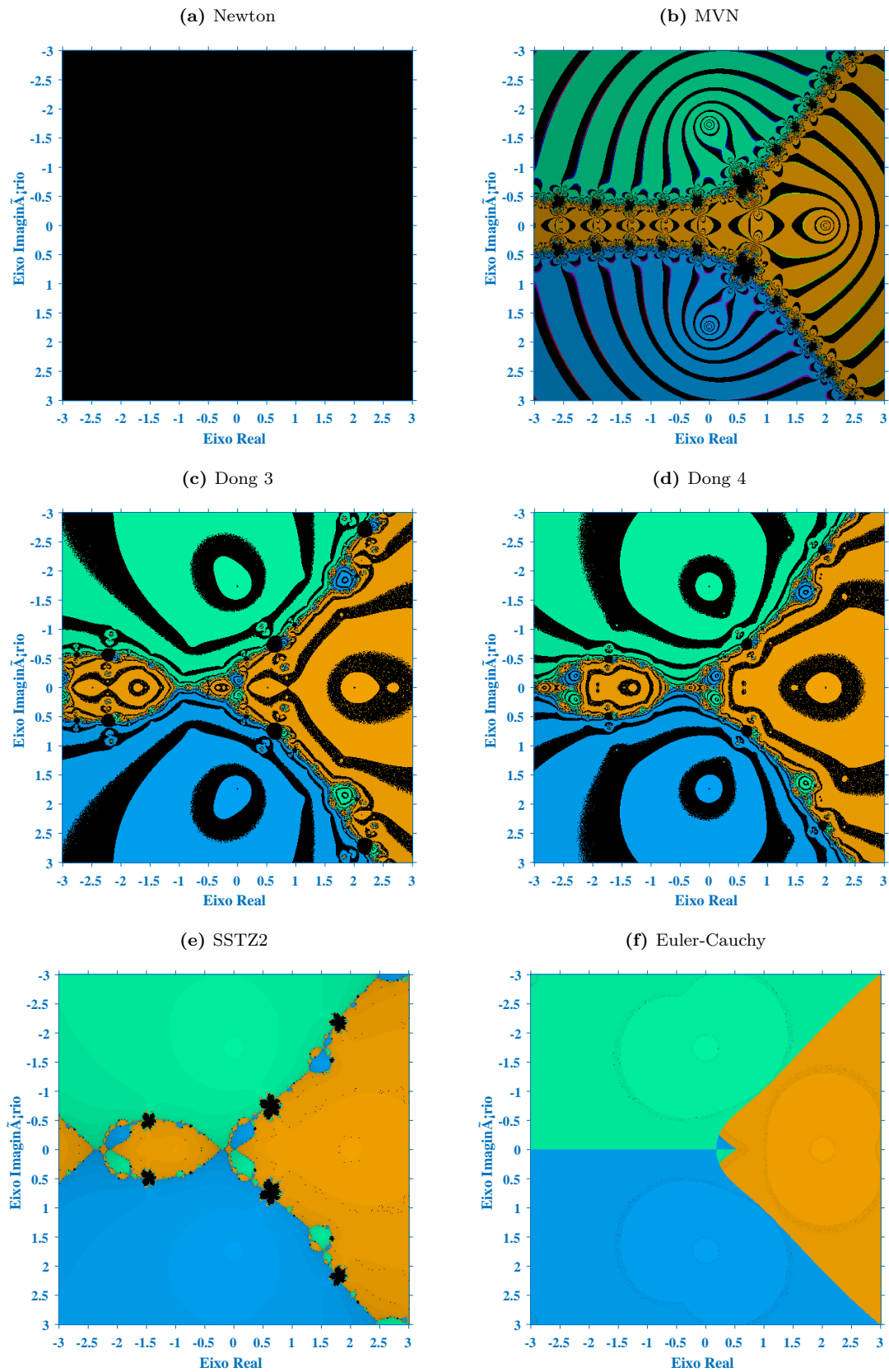
**Figura 4.2:** Bacias de Atração referentes ao polinômio  $p_2(x) = x^2(11x^4 - 34x^2 + 39)$ 

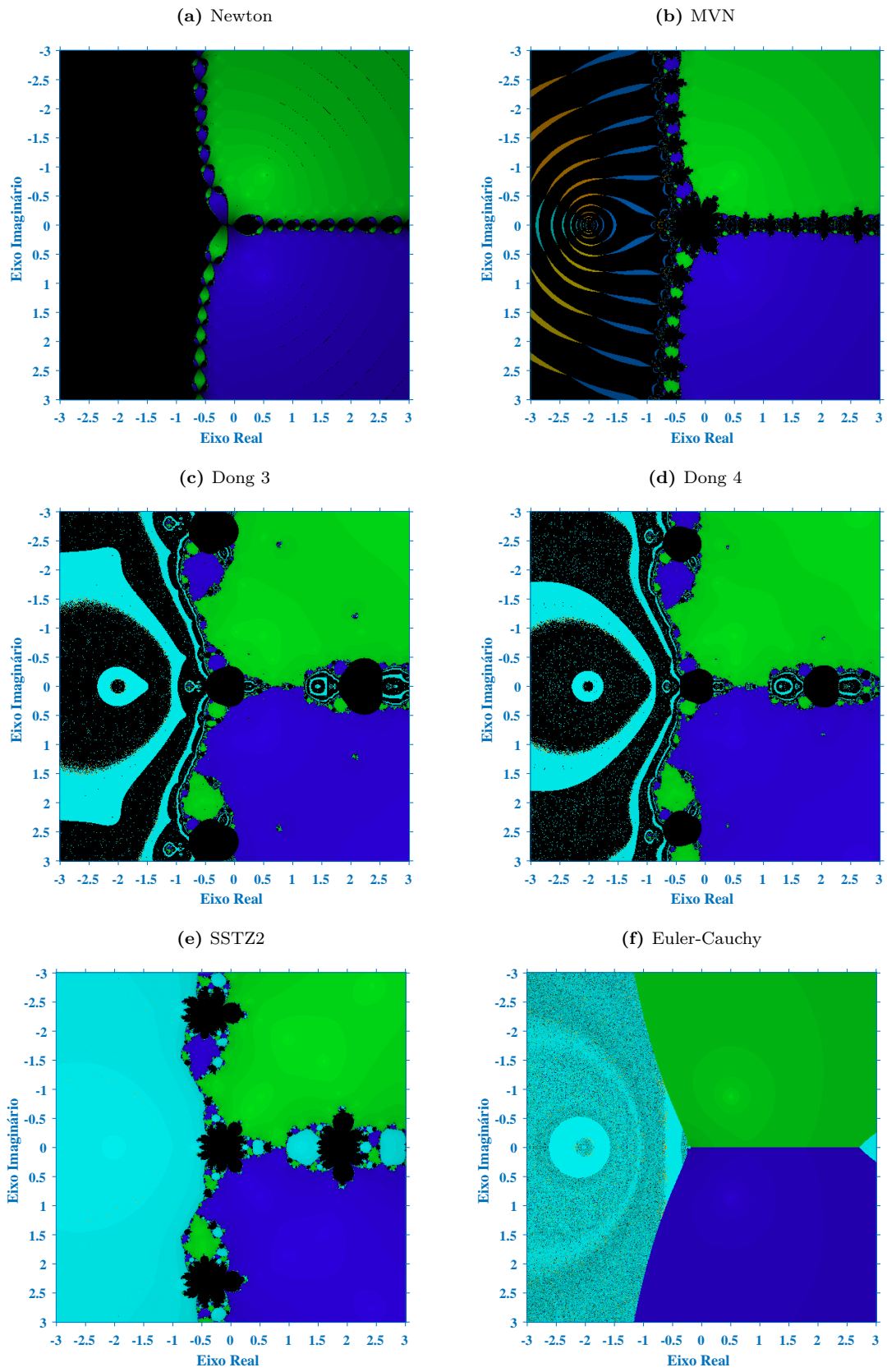
**Figura 4.3:** Bacias de Atração referentes ao polinômio  $p_3(x) = x^7 + x^2 - 1$ 

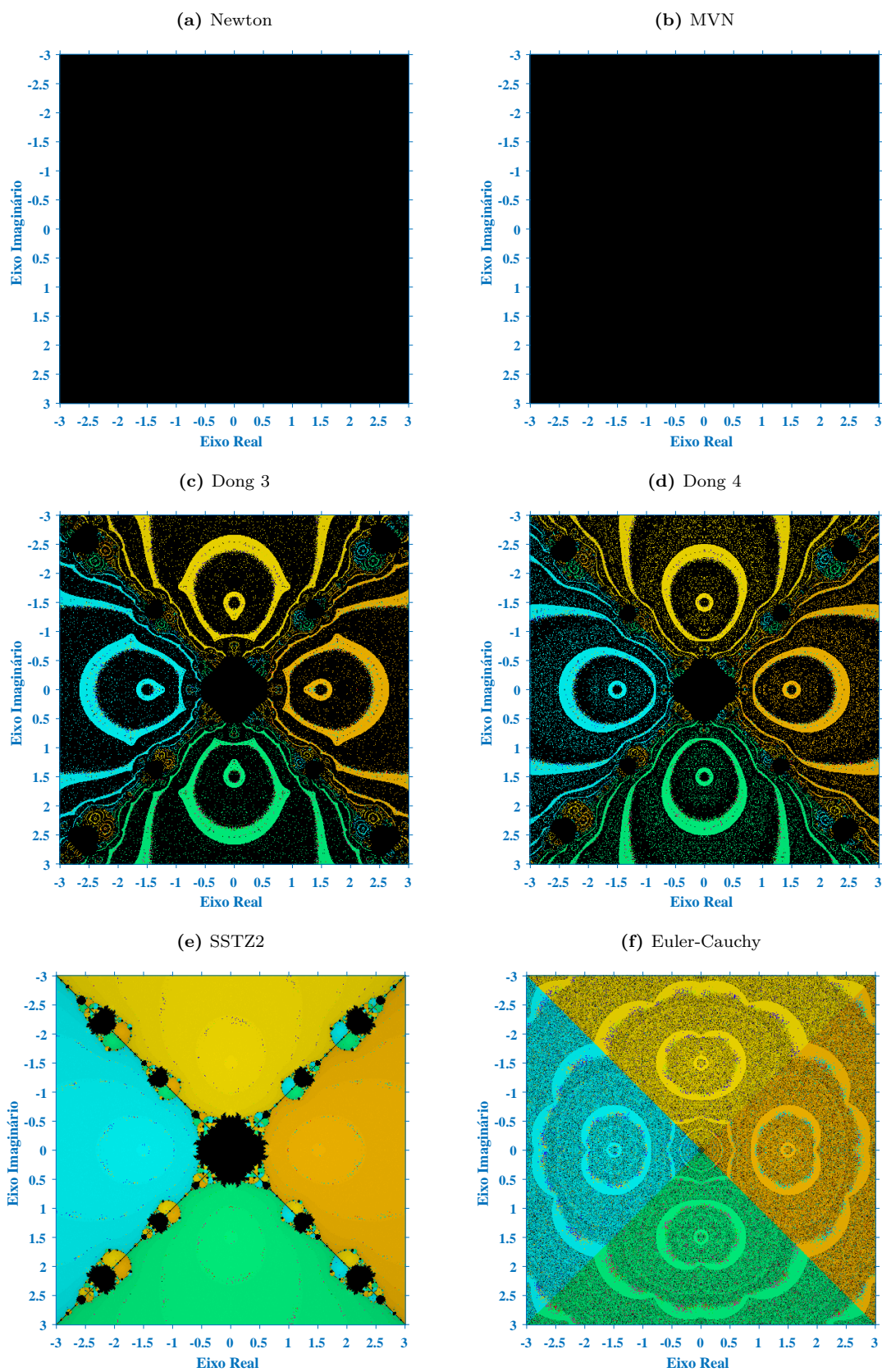
**Figura 4.4:** Bacias de Atração referentes ao polinômio  $p_4(x) = x^4 - 1$ 

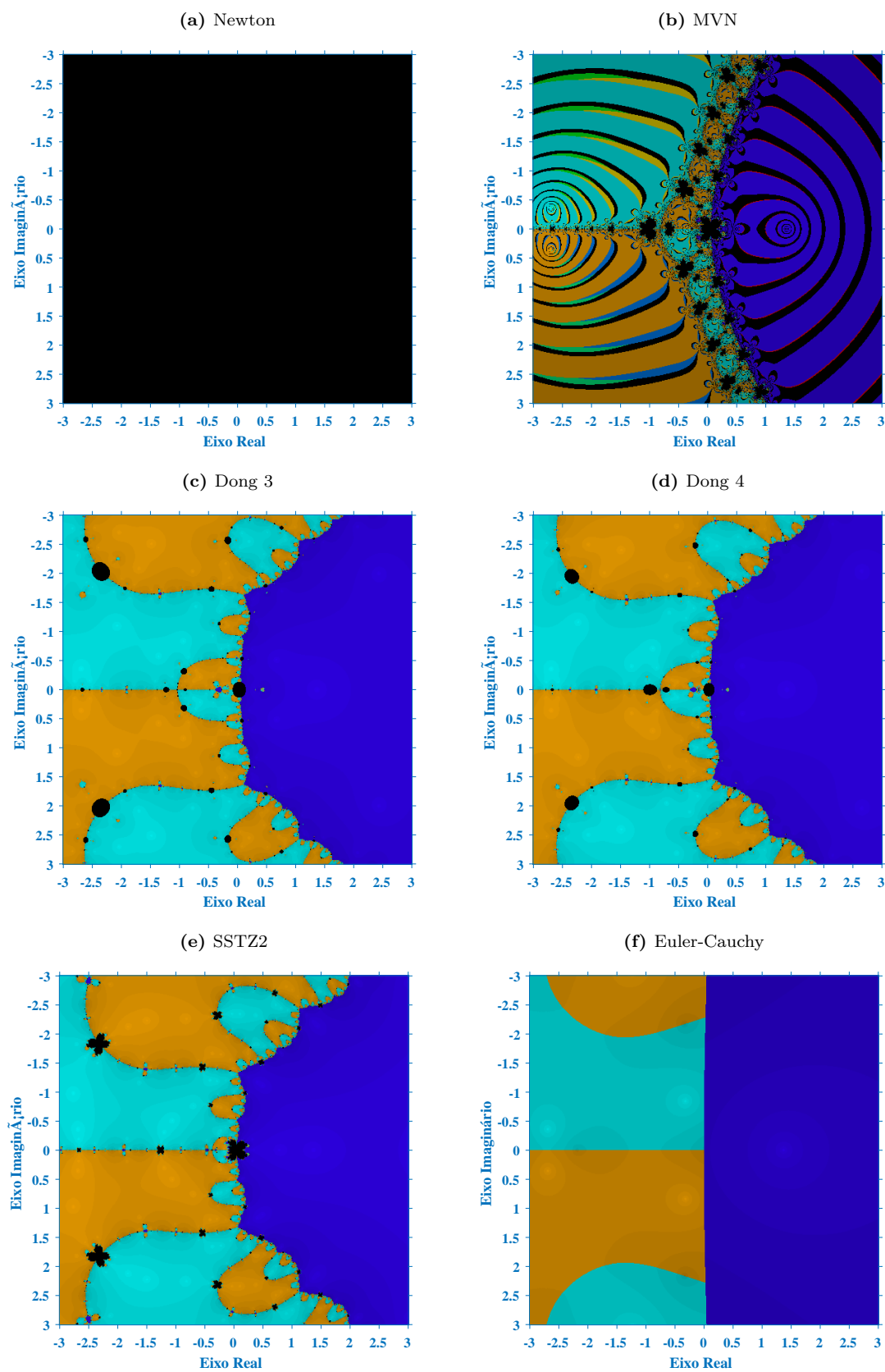
**Figura 4.5:** Bacias de Atração referentes ao polinômio  $p_5(x) = x^6 - 1$ 

**Figura 4.6:** Bacias de Atração referentes ao polinômio  $p_6(x) = (x - 2)(x - 2)(x - 2)(x^2 + 3)^3$



**Figura 4.7:** Bacias de Atração referentes ao polinômio  $p_7(x) = (x^2 - x + 1)^2(x + 2)^4$ 

**Figura 4.8:** Bacias de Atração referentes ao polinômio  $p_8(x) = (x^4 - 5)^5$ 

**Figura 4.9:** Bacias de Atração referentes ao polinômio  $p_9(x) = (x^3 + 4x^2 - 10)^3$ 

Sobre todos os nove polinômios estudados se tem as medidas apresentadas nas tabelas a seguir e em seguida uma análise desses dados.

**Tabela 4.3:** Tempo Computacional em minutos

Método/Polinômios	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	$p_5(x)$	$p_6(x)$	$p_7(x)$	$p_8(x)$	$p_9(x)$
Newton	0,44	0,33	0,32	0,28	0,35	0,49	0,60	0,88	1,21
MVN	0,50	0,37	0,51	0,41	0,36	0,54	1,18	0,90	0,72
Dong 3	0,24	0,31	0,17	0,21	0,13	0,17	0,29	0,19	0,52
Dong 4	0,23	0,24	0,30	0,29	0,28	0,18	0,30	0,20	0,59
SSTZ 2	0,35	0,26	0,42	0,44	0,37	0,21	0,33	0,22	0,66
Euler-Cauchy	0,32	0,42	0,47	0,50	0,46	0,16	0,56	0,48	1,35

**Tabela 4.4:** Ordem de Convergência Computacional (OCCA)

Método/Polinômios	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	$p_5(x)$	$p_6(x)$	$p_7(x)$	$p_8(x)$	$p_9(x)$
Newton	1,35	1,51	2,01	2,01	2,01	<i>ND</i>	1,00	<i>ND</i>	<i>ND</i>
MVN	1,61	1,96	2,95	2,97	2,95	1,00	1,00	<i>ND</i>	1,00
Dong 3	2,22	36142,23	0,63	0,99	1,03	1,00	1,00	1,00	1,00
Dong 4	2,26	247998,88	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
SSTZ 2	2,74	-81701,27	2,05	2,04	2,06	3,62	5,51	4,62	1,00
Euler-Cauchy	2,19	42726,27	1,00	1,00	1,00	1,02	1,63	1,30	1,00

Para o tempo computacional foram considerados apenas a geração das bacias sem as demais medidas e, para o número de avaliações por pontos foram considerados somente os pontos que convergiram para determinada raiz, isto é, foram desprezados os números de avaliações dos pontos que se adequam a alguma condição para serem pretos.

Diante do exposto, para o tempo computacional, Dong 4 é o melhor para os polinômios  $p_1(x)$  e  $p_2(x)$  enquanto Dong 3 é o melhor para os demais polinômios testados, exceto para  $p_6(x)$  onde Euler-Cauchy, surpreendentemente, apresenta o melhor tempo computacional. Euler-Cauchy, também, por outro lado, é o que apresenta o maior tempo computacional para os polinômios  $p_2(x)$ ,  $p_4(x)$ ,  $p_5(x)$  e  $p_9(x)$  ao lado do MVN que apresenta o maior tempo computacional para os demais polinômios. Além disso, os métodos Dong 3 e Dong 4 apresentam tempos bem próximos em todos os  $p(x)$  aqui analisados e, o SSTZ2 não apresenta fortes oscilações de tempo.

Para a OCCA verifica-se que dentre os métodos, Newton e o MVN não apresentam fortes oscilações

**Tabela 4.5:** Número médio de iterações por ponto

Método/Polinômios	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	$p_5(x)$	$p_6(x)$	$p_7(x)$	$p_8(x)$	$p_9(x)$
Newton	10,39	11,78	11,42	9,74	11,48	<i>ND</i>	14,24	<i>ND</i>	<i>ND</i>
MVN	7,31	8,45	7,75	5,86	6,81	12,88	10,37	<i>ND</i>	14,23
Dong 3	4,50	5,50	6,46	6,33	5,42	3,67	6,18	3,86	7,68
Dong 4	4,49	5,38	6,52	6,40	6,33	3,76	6,30	4,04	7,79
SSTZ 2	4,59	5,76	7,15	6,62	7,04	4,34	5,51	4,75	8,31
Euler-Cauchy	5,90	9,47	10,39	11,16	10,29	3,64	10,51	12,53	10,98

**Tabela 4.6:** Número de Pontos Pretos expresso em porcentagem

Método/Polinômios	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	$p_5(x)$	$p_6(x)$	$p_7(x)$	$p_8(x)$	$p_9(x)$
Newton	0,02%	0,03%	0,85%	0,61%	2,93%	100%	42,14%	100%	100%
MVN	8,41%	4,44%	17,76%	19,93%	23,20%	24,97%	41,17%	100%	21,91%
Dong 3	1,87%	9,05%	69,25%	45,17%	81,32%	34,61%	33,82%	76,09%	1,08%
Dong 4	0,31%	0,79%	2,04%	6,45%	11,92%	32,60%	34,73%	78,04%	0,81%
SSTZ 2	6,80%	3,99%	11,09%	15,90%	21,63%	1,34%	7,34%	6,98%	1,20%
Euler-Cauchy	0%	0%	0%	0%	0%	0,04%	0,20%	2,67%	0%

nos testes. Para o polinômio  $p_9(x)$  com excessão de Newton, os cinco métodos apresentaram convergência equivalentemente a 1. Com excessão de  $p_2(x)$  os métodos em sua maioria apresentam convergência entre 1 e 3. O  $p_2(x)$ , por sua vez, apresentou comportamentos irregulares devido uma de suas raízes ser o zero e assim os fatores do logaritmo tender a  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Para  $p_6(x)$ ,  $p_8(x)$  e  $p_9(x)$  Newton não declarou esta medida devido não ter obtido convergência para nenhuma das raízes em nenhum dos pontos contidos no intervalo testado, assim também como o MVN em  $p_8(x)$ .

Para o número médio de iterações por ponto os maiores resultados para os polinômios testados são dados por Newton e Euler-Cauchy, enquanto os menores são obtidos por Dong 3 e Dong 4 com diferenças mínimas entre seus resultados. Para o polinômio  $p_4(x)$  tem-se que o MVN é o melhor, mas com uma diferença pouco significativa dos demais. O método de Newton, por sua vez, por não ter encontrado nenhuma das raízes para  $p_6(x)$ ,  $p_8(x)$  e  $p_9(x)$  não definiu esta medida, mas encontra-se como o método com os maiores números de avaliação na maioria dos casos. Para  $p_8(x)$  o MVN também não definiu a medida devido ter obtido apenas divergências para o intervalo em questão. Além disso, o MVN ao ser comparado com os demais só apresenta resultados melhores que Newton, como já averiguado por [Weerakoon & Fernando \(2000\)](#), e para Euler-Cauchy,

nos polinômios  $p_2(x)$ ,  $p_7(x)$  e  $p_9(x)$ .

Para o número de pontos pretos o melhor para os polinômios testados é Euler-Cauchy que não apresenta nenhum ponto preto para nenhum dos cinco polinômios de multiplicidade até 2 e pouquíssimos nos casos de multiplicidades maiores. Para os polinômios  $p_2(x)$ ,  $p_3(x)$ ,  $p_4(x)$ ,  $p_5(x)$  e  $p_6(x)$  o maior número de não convergências é apresentado pelo Dong 3, enquanto para  $p_1(x)$  e  $p_9(x)$  por MVN.

Por conseguinte, para  $p_6(x)$ ,  $p_8(x)$  e  $p_9(x)$  Newton apresenta todos os pontos pretos, apontando que para todos os pontos em questão o polinômio se adequa a algum dos critérios para indicação desses pontos, fato que deve ser destacado, visto que para os demais polinômios de multiplicidade 2 testados ele é o segundo melhor método para esta medida, perdendo apenas para Euler-Cauchy. Para  $p_8(x)$  o MVN apresenta todos os pontos do intervalo dado como pretos. Para  $p_6(x)$ ,  $p_7(x)$  e  $p_8(x)$  Euler-Cauchy apresenta pontos pretos, mas ainda assim não são significativos quando comparados aos demais analisados.

Assim, tem-se que mesmo Euler-Cauchy apresentando um tempo computacional maior que os demais ele é o único que não dispõe de uma quantidade significativa de pontos pretos. Além disso, o número de iterações considerados neste trabalho é contabilizado apenas para os pontos que apresentaram convergência, isto é, são desprezadas as iterações dos pontos pretos, neste caso, então, apesar de alguns métodos apresentarem bons resultados nos números médios de iterações apresentam muitos pontos pretos, remetendo, desta maneira, que não se deve retirar o mérito de iterações de Euler-Cauchy, visto que este apresenta convergência praticamente integral para os pontos.

Por outro lado, nas bacias de atração do polinômio  $p_1(x)$  dadas pela figura 4.1 com excessão de Euler-Cauchy os métodos apresentam os pontos pretos nas fronteiras das raízes, área que, também, é marcada pela instabilidade de convergência. Euler-Cauchy, por sua vez, apresenta um grau de estabilidade excelente, sendo destacado pelas fronteiras bem definidas e sem a presença de pontos pretos. Os métodos em geral para este polinômio demonstram boa convergência para as três raízes apresentadas pelas três diferentes cores.

Nas bacias de atração do polinômio  $p_2(x)$  dadas pela figura 4.2 são apresentadas cinco raízes distintas com fronteiras bem definidas para os métodos em geral, com excessão de Dong 3 que apresenta certa instabilidade de convergência para a maioria das raízes. A instabilidade dos métodos assim como os pontos pretos é dada nas fronteiras dos mesmos. Cauchy, novamente, é destacado por suas fronteiras bem delimitadas e sem a presença de pontos pretos, bem como Newton que apresenta boa convergência para as raízes em questão com quantitativo pouco significativo de pontos divergentes. As bacias do polinômio  $p_3(x)$  designados pela figura 4.3 apresentam comportamentos semelhantes ao polinômio  $p_2(x)$  com destaque para Dong 3 que também demonstrou instabilidade e grande quantidade de pontos pretos.

Para o polinômio  $p_4(x)$  e  $p_5(x)$  são delimitados 4 e 7 cores indicando, respectivamente, 4 e 7 raízes para qual os pontos apresentam boa estabilidade na maioria dos métodos. Novamente, Dong 3 apresenta significativa presença de pontos pretos, com alto grau de instabilidade das raízes. Com exceção de Euler-Cauchy que manifesta novamente todas as fronteiras suaves e bem definidas, os métodos expressam os mesmos comportamentos bem mais instáveis nas suas fronteiras.

Sobre as bacias de atração do polinômio  $p_6(x)$  dados pela figura 4.6 são apresentados três cores indicando três raízes distintas. Para essas Newton não apresenta nenhuma convergência para o intervalo definido neste trabalho. Todos os métodos neste caso apresentam pontos pretos, que diferente das bacias anteriores não estão somente na fronteira, mas dispostos na bacia inteira. No caso de SSTZ2 e Euler-Cauchy a presença é pouco significativa e em comparação com os demais apresentam boa estabilidade de convergência das raízes.

Na figura 4.7 são apresentadas as bacias de atração do polinômio  $p_7(x)$  onde são expostas três cores que representam as três raízes distintas do polinômio em questão. Os métodos de Newton e MVN são destacados

por apresentarem convergência somente para duas raízes e serem marcados por pontos divergentes. Dong 3 e Dong 4, por sua vez, mostram comportamentos semelhantes enfatizados pela presença de pontos pretos e instabilidade nas fronteiras e na convergência para a raiz representada pela cor azul claro. SSTZ2 mostra boa convergência, apresentando pontos pretos somente nas fronteiras das raízes e Euler-Cauchy apresenta suas fronteiras bem demarcadas apresentando pontos pretos, porém em menor quantidade que os demais métodos e existentes significativamente na região representada pela cor azul claro.

Da mesma maneira, na figura 4.8 são dadas as bacias do polinômio  $p_8(x)$  onde os métodos de Newton e MVN apresentam 100% dos pontos neste intervalo sendo pretos. Dong 3 e Dong 4 apresentam comportamentos semelhantes entre si, marcados pela presença de pontos pretos. SSTZ2 e Euler-Cauchy não apresentam muitos pontos desta natureza e, surpreendentemente, SSTZ2 apresenta melhor estabilidade que Cauchy, uma vez que SSTZ2 apresenta pontos pretos apenas em suas fronteiras enquanto Euler-Cauchy tem estes pontos espalhados por todo o intervalo em questão.

Por fim, para o polinômio  $p_9(x)$  estão dispostas as bacias na figura 4.9. Newton, mais uma vez, não apresenta convergência para nenhuma raiz e o MVN, por outro lado, apresenta comportamento instável mas converge em determinados pontos para as três raízes apresentadas por três cores distintas. Dong 3, Dong 4 e SSTZ2 apresentam comportamentos semelhantes com estabilidade boa e poucos pontos pretos, geralmente restritos as fronteiras. Enquanto Euler-Cauchy, para este caso, não dispõe de nenhum ponto desta natureza e apresenta todas as suas fronteiras bem delimitadas apresentando excelente convergência para todas as raízes no intervalo em questão.

---

## Considerações Finais

Os fractais são utilizados por diversas áreas para distintas representações e estudos, as bacias de atração, por sua vez, são geradas por métodos iterativos e podem ser consideradas ou não fractais. Essas bacias podem apresentar características bem complexas que dificilmente serão apresentadas pela Geometria Euclidiana, como auto similaridade, lei de formação, dimensão fractal, etc. Assim, tem-se que o estudo dos fractais e das bacias de atração podem proporcionar análises diferenciadas em casos que envolvem fenômenos não lineares.

Para a determinação de métodos para encontrar raízes polinomiais, por sua vez, deve-se considerar diversas medidas, tais como: eficiência, ordem de convergência, tempo computacional, número de pontos pretos, número médio de avaliações por ponto, fronteiras, estabilidade, etc; variando de acordo com o interesse da problemática em questão.

Dentre os testes realizados para os polinômios selecionados, destaca-se o método de Newton que mesmo sendo considerado por alguns como defasado apresentou resultados satisfatórios para os polinômios testados com multiplicidade 2. Além disso, destaca-se Euler-Cauchy que mesmo não dispondo de vantagens no tempo computacional e no número médio de avaliações por ponto é o único método para o qual a presença de pontos pretos é pouco significativa.

Neste trabalho optou-se por explorar apenas as iterações algébricas devido esse processo fornecer as aproximações das soluções desejadas e restringiu-se a pesquisa a métodos até terceira ordem de convergência, mas destaca-se a gama de métodos existentes com as mais variadas ordens. Assim, é pertinente destacar que os fractais/bacias de atração nesta perspectiva devem ser mais explorados, e daí tendo-se a necessidade de compreender e explorar mais esta ferramenta em trabalhos futuros, bem como, investigar outros métodos iterativos existentes para determinação de raízes de polinômios ou de funções não-lineares em geral.

## Referências

- ALLEN, M. B.; ISAACSON, E. L. *Numerical analysis for applied science*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 1989. v. 35. 22
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis: 4th Ed.* Boston, MA, USA: PWS Publishing Co., 1989. ISBN 0-53491-585-X. 16
- CARVALHO, H. C. d. et al. Geometria fractal: perspectivas e possibilidades no ensino de matemática. Universidade Federal do Pará, 2005. 12
- CHUN, C.; BAE, H. ju; NETA, B. New families of nonlinear third-order solvers for finding multiple roots. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 57, n. 9, p. 1574 – 1582, 2009. ISSN 0898-1221. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122108006226>>. 22
- CHUN, C.; NETA, B. Comparative study of methods of various orders for finding repeated roots of nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 340, p. 11 – 42, 2018. ISSN 0377-0427. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042718300803>>. 10, 19, 20
- CHUN, C.; NETA, B.; KIM, S. On jarratt's family of optimal fourth-order iterative methods and their dynamics. *Fractals*, World Scientific, v. 22, n. 04, p. 1450013, 2014. 23
- CRUZ, C. M. da. Introdução ao estudo de fractais: história, topologia e sistemas dinâmicos complexos. 2008. 13, 14
- DENNIS, J. E.; SCHNABEL, R. B. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. Philadelphia, PA, USA: Siam, 1996. v. 16. 17
- DONG, C. A basic theorem of constructing an iterative formula of the higher order for computing multiple roots of an equation. *Math. Numer. Sinica*, v. 11, p. 445–450, 1982. 20
- DONG, C. A family of multi-point iterative functions for finding multiple roots of equations. *International Journal of Computer Mathematics*, Taylor & Francis, v. 21, n. 3-4, p. 363–367, 1987. 20
- GOMES-RUGGIERO, M. A.; LOPES, V. L. *Calculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. [S.l.]: Editora Makron Books, Rio de Janeiro–RJ, 2ª. Edição, 1996. 16
- KARAS, E. W. Iteração de transformações racionais aplicadas ao método de Newton no plano complexo. 1994. 14
- KNEISL, K. Julia sets for the super-newton method, cauchy's method, and halley's method. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, American Institute of Physics, v. 11, n. 2, p. 359–370, 2001. 19
- KUNG, H.; TRAUB, J. Optimal order of one-point and multipoint iteration. *J. ACM*, v. 21, p. 643–651, 10 1974. 23
- MANDELBROT, B. B. *The fractal geometry of nature*. New York, USA: W. H. Freeman and Company, 1983. v. 173. 11
- SBIBIH, D. et al. A general family of third order method for finding multiple roots. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 233, p. 338–350, 2014. 18, 19

SERRA, C. P.; KARAS, E. W. *Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos*. [S.l.]: Universitaria Champagnat, 1997. [14](#)

SPENGLER, H. C. *Sistemas não-lineares, método de newton e fractais*. Dissertação (B.S. thesis) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2014. [11](#), [12](#), [14](#), [16](#)

TEODORO, M. M. *O método de Newton e fractais*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Sao Joao del-Rei, 2013. [17](#)

WEERAKOON, S.; FERNANDO, T. A variant of newton's method with accelerated third-order convergence. *Applied Mathematics Letters*, Pergamon, v. 13, n. 8, p. 87–93, 2000. [17](#), [18](#), [37](#)