



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

AUGUSTO CEZAR ABREU RAMOS

GRUPOS DE ISOMETRIAS E ASPECTOS
CULTURAIS

Belém

2023

AUGUSTO CEZAR ABREU RAMOS

GRUPOS DE ISOMETRIAS E ASPECTOS CULTURAIS

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcel Vinhas Bertolini

Coorientador: Prof. Me. Edilson dos Passos Neri Júnior

Belém

2023

AUGUSTO CEZAR ABREU RAMOS

GRUPOS DE ISOMETRIAS E ASPECTOS CULTURAIS

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à
Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências
Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará
como requisito básico para a obtenção do título de
Licenciado em Matemática.

Data da Apresentação:

Prof. Dr. Marcel Vinhas Bertolini (Orientador)
Faculdade de Matemática, UFPA

Prof. Me. Edilson dos Passos Neri Júnior (Membro)
Faculdade de Matemática, UFPA

Prof. Dr. Jean Carlos de Aguiar Lelis (Membro)
Faculdade de Matemática, UFPA

Prof. Dra. Juliana Silva Canella (Membro)
Faculdade de Matemática, UFPA

Dedico este trabalho à minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus pela vida e por ter estar comigo em todos os obstáculos encontrados ao longo do percurso.

Agradeço à minha mãe, Maria Aparecida da Silva Abreu, por ser meu alicerce e meu maior exemplo de força e determinação.

Agradeço ao meu orientador Marcel Vinhas Bertolini por sua gigantesca paciência comigo, por sua atenção e todos os ensinamentos. Agradeço ao meu coorientador Edilson Dos Passos Neri Júnior por ter me acompanhado em todos esses anos de graduação, por todas as orientações e ensinamentos, ressaltando assim como ambos os meus orientadores foram extremamente cruciais para meu desenvolvimento profissional.

Agradeço à equipe de direção da faculdade de matemática composta por Tania Madeleine Begazo Valdivia, Almir Moreira de Sousa, Ana Claudia Barbosa Cunha, Karina Louise Maués Rodrigues, Macilene Santos, Mauro Costa da Silva Filho, João da Costa Corrêa e Alice Campos.

Agradeço aos professores, pelas lições e ensinamentos, em especial aos professores membros da banca deste trabalho Jean Carlos de Aguiar Lelis e Juliana Silva Canella.

Agradeço aos meus colegas de curso Alisson Arias, Williams Santos, Wallace Ramos, Felipe Macedo, Luiz Carnevali, Felipe Quaresma, Bheatriz Costa e Rafael Barbosa, por terem me acompanhado nesta jornada, por todos os ensinamentos e risadas.

Agradeço aos meus colegas de projetos de ensino e extensão Hugo Chagas, Paulo Santos, Maria Siqueira, Railane Silva, Marlon Barros e Agenor Silva, por todos os aprendizados que obtive com vocês.

Agradeço à Universidade Federal do Pará por ter me dado esta belíssima oportunidade e a todas as pessoas que contribuíram para este trabalho de alguma forma.

Mesmo que já tenha feito uma longa caminhada, sempre haverá mais um caminho a percorrer.

Santo Agostinho

RESUMO

Este trabalho pretende desenvolver o estudo das isometrias e utilizar a Teoria de Grupos como uma ferramenta para investigar a incidência de padrões de simetria em artefatos culturais amplamente acessíveis na cultura da região Norte do Brasil. Estes artefatos são cerâmicas, tapeçarias e outros objetos. Um dos objetivos desta investigação é promover a relevância cultural desses padrões e a riqueza de propriedades geométricas contida nestes artefatos. Para isso, será feito um estudo das isometrias do plano euclidiano e suas propriedades, mostrando que estas podem ser tomadas como elementos de alguns grupos, em especial, grupos de Rosácea e de Friso. A esse respeito, demonstraremos os respectivos teoremas de classificação, bem como resultados auxiliares. Concluímos o trabalho reconhecendo os grupos em peças do memorial Verônica Tembé e da Feira de Artesanato do Paracuri.

PALAVRAS-CHAVE: Isometrias, Grupos de Isometrias, Grupos de Friso, Teorema de Leonardo, Grupos de Rosácea.

ABSTRACT

This work intends to develop the study of isometries and use Group Theory as a tool to investigate the incidence of symmetry patterns in widely accessible cultural artifacts in the culture of the North region of Brazil. These artifacts are ceramics, tapestries and other objects. One of the objectives of this investigation is to promote the cultural relevance of these patterns and the wealth of geometric properties contained in these artifacts. For this, a study will be made of the isometries of the Euclidean plane and its properties, showing that these can be taken as elements of some groups, in particular, groups of Rosacea and Friso. In this regard, we will prove the respective classification theorems, as well as auxiliary results. We concluded the work by recognizing the groups in pieces from the Verônica Tembê memorial and the Paracuri Handicraft Fair.

KEY WORDS: Isometries, Groups of Isometries, Frieze Groups, Leonardo's Theorem, Rosette Groups.

Lista de Figuras

1.1	Reflexão em torno de um vetor u	27
2.1	Composição de reflexões com retas concorrentes	40
2.2	Composição de rotações não concêntricas	41
2.3	Anotações de Leonardo Da Vinci sobre as simetrias de um edifício	42
2.4	Cêramica Marajoara exposta no Museu Emílio Goeldi	45
2.5	Planta Octogonal da igreja de São João	45
2.6	Translações nos grupos de friso	48
2.7	Padrão de simetria de F_1	48
2.8	Padrão de simetria de F_2	49
2.9	Imagens de l por σ_c	50
2.10	Padrão de simetria de F_1^1	50
2.11	Padrão de simetria de F_2^1	51
2.12	Padrão de simetria de F_1^2	51
2.13	Padrão de simetria de F_2^2	52
2.14	Padrão de simetria de F_1^3	53
2.15	Fluxograma de identificação dos padrões de friso	54
3.1	Peneira	62
3.2	Região B	63

3.3	Meia volta e reflexão	63
3.4	Cesto	64
3.5	Fluxograma do padrão do Cesto	64
3.6	Vaso com reflexão com deslizamento e meia volta	65
3.7	Fluxograma do padrão do vaso com reflexão com deslizamento e meia volta	65
3.8	Vaso com translação e reflexão vertical	66
3.9	Feira do Artesanato Do Paracuri	66
3.10	Cuia	67
3.11	Análise do padrão de simetria da cuia	68
3.12	Análise sobre as reflexões não preservarem o padrão de simetria da cuia	68
3.13	Prato	69
3.14	Prato 2	69
3.15	Análise do padrão de simetria do prato 2	70
3.16	Vaso com translação e meia volta	70
3.17	Fita do vaso com translação e meia volta	71
3.18	Vaso com translação	71
3.19	Cesto com reflexão vertical e horizontal	72

Sumário

Introdução	13
1 Isometrias no espaço euclidiano	15
1.1 Isometrias	15
1.1.1 Forma geral de isometrias da reta real.	16
1.2 Forma geral de isometrias de espaços euclidianos.	18
1.2.1 Ortogonalidade	20
1.2.2 Caracterização de Matrizes Ortogonais 2×2	24
1.3 Consequências e Exemplos	27
1.4 Grupos	30
1.4.1 Grupos de bijeções	32
1.4.2 Grupos de simetria	34
2 Grupos de Rosácea e de Friso	37
2.1 Resultados Preliminares	37
2.2 Grupos de Rosácea	42
2.2.1 Teorema de Leonardo	42
2.3 Grupos de Friso	46
2.4 Isomorfismos dos Grupos de Simetria	54
2.4.1 Grupo Cíclico Finito	55

2.4.2	Grupo Cíclico Infinito	56
2.4.3	Grupo Diedral Finito	57
2.4.4	Grupo Diedral Infinito	59
2.4.5	Grupos de Friso	60
3	Padrões dos Grupos de simetria na Arte Indígena	61
3.1	Grupos de Isometrias em Obras do Memorial Verônica Tembé	61
3.2	Grupos de Isometrias na Feira do Artesanato do Paracuri	66
	Considerações Finais	72

Introdução

No cotidiano, vemos imagens diversas com um certo tipo de padrão: na arquitetura, na arte e outros, sem necessariamente entendermos o que está acontecendo ali. As isometrias são elementos extremamente presentes em nossa vida, sendo estas cobradas como habilidades pautadas na BNCC em [1], como EF08MA18, cujo intuito é reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de Geometria Dinâmica. Porém, em contraste com a sua vastidão, ainda é um assunto pouco explorado no Brasil como tema de pesquisa, segundo Lima (1996).

Quando estudamos as geometrias do plano, dizemos que dois elementos (segmentos, ângulos, polígonos e etc) são congruentes quando podemos descolar estes de tal forma que se sobreponham perfeitamente. Uma pergunta que nos fica com esse movimento é: existe um único tipo de deslocamento entre esses entes? Se existir mais de um tipo de deslocamento, quais são? Esses deslocamentos levam o nome de isometrias no plano. O geômetra alemão Felix Klein, em seu texto “Programa de Erlangen” (1872), sugeriu que as isometrias seriam o princípio organizador e unificador da geometria, dado que na época utilizava-se o termo “geometrias”. No início foram investigados grupos relacionados as “geometrias” donde estabeleceu-se o termo “transformação geométrica”.

Ao decorrer deste trabalho investigaremos as isometrias, porém, não apenas geometricamente, mas algebricamente, como uma visão alternativa, tratando as transformações como elementos de um grupo, cuja operação é a composição de transformações. Esta visão expandida nos traz ferramentas como os “isomorfismos” entre grupos, dado que, a partir do momento que conseguimos estabelecer um isomorfismo entre grupos estes são “iguais” a menos de uma roupagem entre seus elementos, preservando sua “forma”, sua estrutura. Quando falamos de isometrias do plano tomando como base a álgebra moderna, temos os

grupos ornamentais do plano, sendo esses os grupos de rosácea, grupos de friso e os grupos de papel de parede. Os grupos de rosácea são grupos finitos classificados pelo Teorema de Leonardo, como sendo grupos cíclicos ou diedrais. Os grupos de friso são grupos de isometrias cujo subgrupo das translações é gerado por uma única translação. Já os grupos de papel de parede têm seu subgrupo das translações gerado por duas translações, cujos vetores associados a estas translações são linearmente independentes.

Neste trabalho estudaremos a incidência de padrões de simetria dos grupos de rosácea e dos grupos de friso sobre artefatos da cultura indígena paraense, sendo estes artefatos ligados aos Tembés e aos marajoaras.

O primeiro capítulo tem como objetivo apresentar conceitos e propriedades das isometrias, além da demonstração de alguns teoremas que serão fundamentais na construção do conhecimento do leitor sobre o assunto. O segundo capítulo trata da demonstração dos teoremas de Leonardo e de classificação dos sete tipos de grupos de friso. No terceiro capítulo, a partir dos padrões de simetrias apresentados no capítulo 2, analisaremos obras da cultura indígena paraense em referência a cultura marajoara e Tembé, verificando a incidência de padrões destes grupos de isometrias sobre seus artefatos.

O terceiro capítulo deste texto é dedicado ao Memorial Verônica Tembé e a Feira de Artesanato do Paracuri. A partir de pesquisas desenvolvidas, nos deparamos com estudos da incidência das isometrias, como por exemplo nos azulejos portugueses [14], ou em artefatos de diferentes culturas pelo mundo [2], mas, não encontramos trabalhos que utilizem de padrões de grupos de isometrias sobre a cultura paraense. Um dos principais objetivos deste trabalho é, verificar a incidência dos padrões de simetrias cíclicos, diedrais ou de friso em objeto dos diferentes povos que fazem parte da população do estado do Pará, e homenagear estes e as riquezas artísticas e matemáticas presentes em suas obras.

Capítulo 1

Isometrias no espaço euclidiano

Neste capítulo vamos abordar conceitos e propriedades sobre as isometrias, mostrando as isometrias por uma visão não apenas sintética, mas também por coordenadas.

1.1 Isometrias

Seja $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d)$ onde \mathbb{R}^n é o conjunto das n -uplas de números reais, sendo \mathbb{E}^2 o caso particular do plano euclidiano, e d a função distância. Podemos definir isometrias da seguinte forma:

Definição 1 (Isometria). Uma isometria é uma transformação bijetiva no espaço euclidiano que preserva a distância entre pontos. Isto é, sendo P, Q pontos pertencentes ao espaço euclidiano \mathbb{E}^n e $\alpha : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ uma isometria, temos:

$$d(\alpha(P), \alpha(Q)) = d(P, Q).$$

A seguir, definiremos as principais isometrias do plano. No capítulo 2, veremos que as próximas isometrias apresentadas são as únicas isometrias do plano. As demonstrações que provam que estas são isometrias podem ser encontradas em [12].

Definição 2 (Reflexões). Seja r uma reta em \mathbb{E}^2 . A reflexão em torno da reta r é a função $\sigma_r : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ tal que $\sigma_r(X) = X$ para todo $X \in r$ e, se $X \notin r$, $\sigma_r(X) = X'$, com r sendo a mediatriz do segmento $\overline{XX'}$.

Definição 3 (Translação). Sejam A, B pontos distintos do espaço euclidiano \mathbb{E}^2 . A translação $\tau_{A,B} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ é a função tal que $\tau_{A,B}(X) = X'$ onde X' é o quarto vértice do paralelogramo $ABXX'$, se $X \notin \overleftrightarrow{AB}$ e $X \in \overleftrightarrow{AB}$, X' é tal que $\overline{XX'} = \overline{AB}$ e, além disso, o “sentido do percurso” de X para X' é o mesmo de A para B .

Definição 4 (Reflexão com deslizamento). Sejam A, B pontos distintos do plano euclidiano \mathbb{E}^2 e r uma reta do plano euclidiano \mathbb{E}^2 . Quando operamos $\tau_{A,B} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ e a reflexão $\sigma_r : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$, temos $\tau_{A,B} \circ \sigma_r : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$, com $\tau_{A,B} \circ \sigma_r(X) = X''$ onde X é refletido em relação a r , $\sigma_r(X) = X'$ e X' é transladado em relação a $\tau_{A,B}(X') = X''$.

A notação $\theta \equiv \theta' \pmod{360^\circ}$ se, e somente se $\theta - \theta' = k \cdot 360^\circ$, com $k \in \mathbb{Z}$, será utilizada em teoremas futuros sobre rotações.

Definição 5 (Rotação e Meia Volta). Seja O um ponto fixado de \mathbb{E}^2 e $\theta = \widehat{AOB}$ um ângulo orientado de vértice O . A rotação de ângulo θ em torno de O é a função $\rho_{O,\theta} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ assim definida: $\rho_{O,\theta}(O) = O$ e, para todo ponto X em \mathbb{E}^2 , $\rho_{O,\theta}(X) = X'$ é o ponto do plano \mathbb{E}^2 tal que

$$d(X, O) = d(X', O) \text{ e } \widehat{XOX'} = \theta.$$

Uma meia volta é um caso particular da rotação, onde $\theta = 180^\circ$. A notação para meia volta é σ_P , com P sendo o centro da rotação. Um conceito abordado ao longo do trabalho é o de isometrias não identitárias.

Essas se referem a isometrias que são distintas da transformação identidade. Tomemos, como exemplo, uma rotação $\rho_{O,360^\circ} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ e tomemos $P \neq O$. Notamos que $\rho_{O,360^\circ}(P) = P$. Logo, $\rho_{O,360^\circ}$ é uma rotação identitária.

1.1.1 Forma geral de isometrias da reta real.

O teorema a seguir dá a forma geral das isometrias da reta real. Observe que $d(x, y) = |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é isometria, então

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \forall \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Teorema 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ corresponde a uma isometria $r \rightarrow r$ se, e somente se $f(x) = \alpha x + \beta$, para algum $\alpha = \pm 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Separemos a demonstração nas em 3 afirmações.

Afirmação 1. Se existem $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq x_1$, tais que $f(x_0) = x_0$ e $f(x_1) = x_1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, para todo $x \in X$, vale a tese para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. De fato,

$$|f(x) - f(x_i)| = |x - x_i| \Rightarrow |f(x) - x_i| = |x - x_i|, \quad i = \{0, 1\}$$

Em outras palavras:

$$f(x) - x_i = x - x_i \Rightarrow f(x) = x - x_i + x_i \Rightarrow f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ou

$$f(x) - x_i = -(x - x_i) \Rightarrow f(x) - x_i = -x + x_i \Rightarrow f(x) = -x + 2x_i, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ou seja, temos que ou $f(x) = x$, $\forall x$ ou $f(x) = -x + 2x_0$ ou $f(x) = -x + 2x_1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O que implica que $x_0 = x_1$, contrariando a hipótese $x_0 \neq x_1$. Portanto, vale apenas, $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Afirmação 2. Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = x_0$ e $f(x) \neq x$ para todo $x \neq x_0$. Logo $i = 0$, temos:

$$|f(x) - x_0| = |x - x_0| \Rightarrow f(x) = x$$

Note que este caso não é válido, dado que fere a hipótese. Portanto:

$$f(x) - x_0 = -(x + x_0) \Rightarrow f(x) = -x + 2x_0$$

Temos assim $f(x) = \alpha x + \beta$ com $\alpha = -1$ e $\beta = 2x_0$.

Afirmação 3. Se $f(x) \neq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos verificar que, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ fixado, $f(x) - x = f(x_0) - x_0 = \beta$. Temos as seguintes possibilidades para $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|$:

$$f(x) - f(x_0) = x - x_0 \Rightarrow f(x) - x = f(x_0) - x_0 \Rightarrow f(x) = x + f(x_0) - x_0$$

tomando $\beta = f(x_0) - x_0$ e $\alpha = 1$

e

$$f(x) - f(x_0) = -(x - x_0) \Rightarrow f(x) = -x + f(x_0) + x_0,$$

Tomando $\beta = f(x_0) + x_0$ e $\alpha = 1$. Observe que na afirmação 2 não é válido, pois para $x = x_0$, temos $f(x) = x$ o que é um absurdo para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, considere $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \{-1, 1\}$ e $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |x - y| &= |\alpha x + \beta - (\alpha y + \beta)| \\ &= |\alpha x + \beta - \alpha y - \beta| \\ &= |\alpha||x - y| \end{aligned}$$

Logo, $|\alpha||x - y| \neq |x - y|$, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \{-1, 1\}$

Portanto, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma isometria se, e somente se $f(x) = \alpha x + \beta$, com $\alpha = \pm 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

□

1.2 Forma geral de isometrias de espaços euclidianos.

Introduzindo coordenadas cartesianas em \mathbb{E}^n , em particular no \mathbb{E}^2 , obtemos fórmulas para as isometrias.

Definição 6 (Espaços Euclidiano). Para cada número inteiro positivo n , denotamos por \mathbb{R}^n o conjunto de todas as n -uplas ordenadas de números reais. Assim, cada $x \in \mathbb{R}^n$ é da forma $x = (x_1, \dots, x_n)$, com $x_i \in \mathbb{R}$ para cada $i = 1, \dots, n$. Consideramos em \mathbb{R}^n sua estrutura de espaço vetorial real usual, e então seus elementos são vetores.

Exemplo. 1 (Translações). Considere a translação $\tau_{P,Q}(X) : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ dada em relação aos pontos $P = (x_0, y_0)$, $X = (x, y)$ e $Q = (x_1, y_1)$ com $P, Q, X \in \mathbb{E}^2$. Definindo $x_0 - x_1 = a$ e $y_0 - y_1 = b$, temos, para cada $X = (x, y) \in \mathbb{E}^2$:

$$\tau_{P,Q}(X) = (x + a, y + b) = X'.$$

Exemplo. 2 (Meia Volta). Tomando $P \in \mathbb{E}^2$ com $P = (a, b)$ e $X = (x, y)$, podemos representar as meias voltas de forma cartesiana em relação a P da seguinte forma:

$$\sigma_P(X) = (-x + 2a, -y + 2b) = X'$$

Note que P é ponto médio do segmento $\overline{XX'}$.

As fórmulas de isometrias como rotações e reflexões não são triviais como as fórmulas das meias voltas e translações que serão obtidas na seção 1.2.2. Em algumas demonstrações a seguir utilizaremos do recurso de coordenadas. Estas propriedades nos auxiliaram na demonstração da forma geral de isometrias do \mathbb{E}^n e podem ser verificadas em [7].

Definição 7 (Produto Interno euclidiano no \mathbb{E}^n). Para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, seu *produto interno euclidiano*, também chamado de *produto escalar*, é o número real dado por:

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + \dots + x_n \cdot y_n \quad (1.2)$$

Enunciaremos as propriedades básicas do produto escalar a seguir.

Proposição 1 (Propriedades do Produto Escalar). Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, tendo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

- i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- ii) $\alpha \langle x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle$
- iii) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$

Definição 8 (Norma Euclidiana). A *norma euclidiana* de cada $x \in \mathbb{R}^n$ é definida por:

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}. \quad (1.3)$$

Proposição 2 (Propriedades da Norma). Para qualquer $x, y \in \mathbb{R}^n$; $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|x\| = 0 \iff x = 0 \quad (1.4)$$

$$x \cdot x = \|x\|^2 \quad (1.5)$$

$$\|\lambda \cdot x\| = \|\lambda\| \cdot \|x\| \quad (1.6)$$

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad (1.7)$$

Temos as seguintes consequências a partir das propriedades (1.4), (1.5), (1.6), (1.7):

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad (1.8)$$

$$\|f(x)\|^2 = \|x\|^2 \implies \|f(x)\| = \|x\| \quad (1.9)$$

Utilizando a norma, a distância pode ser expressa como:

$$d(Q, P) = \|Q - P\|. \quad (1.10)$$

1.2.1 Ortogonalidade

Nesta seção provaremos que uma isometria $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ é da forma $f(x) = Ax + \beta$, onde A é uma matriz ortogonal de ordem n e $\beta \in \mathbb{R}^n$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 9 (Matriz Ortogonal). Uma matriz quadrada A de ordem n e com entradas reais é *ortogonal* se $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Definição 10 (Família Ortogonal e Ortonormal). Uma família $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ é *ortogonal* se $x \cdot y = 0$ para quaisquer $x, y \in \mathcal{A}$ distintos. Se, adicionalmente, $x \cdot x = 1$ para todo $x \in \mathcal{A}$, então \mathcal{A} é dita *ortonormal*.

O teorema a seguir pode ser verificado em [7].

Teorema 2. Uma matriz quadrada A de ordem n e com entradas reais é ortogonal se, e somente se, vale uma das seguintes condições equivalentes:

- i) As colunas de A constituem uma base ortonormal do \mathbb{R}^n .
- ii) As linhas de A constituem uma base ortonormal do \mathbb{R}^n .
- iii) $A^T A = A A^T = I$, onde A^T e I denotam, respectivamente, a transposta de A e a matriz identidade.

iv) $A^T = A^{-1}$, onde A^{-1} denota a inversa de uma matriz A , quando esta for inversível.

Abaixo temos uma reformulação da definição de isometria para o \mathbb{E}^n .

Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria se, e somente se, é bijetora e satisfaz a seguinte condição:

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.11)$$

Teorema 3. Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria se, e somente se, existem $\beta \in \mathbb{R}^n$ e uma matriz ortogonal A de ordem n tais que $f(x) = Ax + \beta$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Passos da Prova do Teorema 3.

1° **Passo.** Defina $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $g(x) = f(x) - f(0)$. Podemos verificar que g satisfaz a condição (1.11) e que $g(0) = 0$. Consequentemente, $\|g(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Sendo $g(x)$ uma isometria e tomando a equação (1.11) temos:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(0) - f(y) + f(0)\| &= \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \\ \|f(x) - f(0) - (f(y) - f(0))\| &= \|x - y\| \\ \|g(x) - g(y)\| &= \|x - y\| \end{aligned}$$

Assim, g satisfaz a condição (1.11). Tomando $g(x) = f(x) - f(0)$, temos:

$$g(x) = f(x) - f(0) \implies g(0) = f(0) - f(0) \implies g(0) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(0)\| &= \|x - 0\| \\ \|g(x)\| &= \|x\| \end{aligned} \quad (1.12)$$

2° **Passo.** Verifiquemos que

$$\langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.13)$$

Devido a propriedade (1.7) e pelo item anterior:

$$\|g(x) - g(y)\|^2 = \|g(x)\|^2 - 2\langle g(x), g(y) \rangle + \|g(y)\|^2$$

Pela propriedade (1.9) temos:

$$\begin{aligned}\|g(x) - g(y)\| = \|x - y\| &\implies \|g(x) - g(y)\|^2 = \|x - y\|^2 \\ \|g(x)\| = \|x\| &\implies \|g(x)\|^2 = \|x\|^2\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}\|g(x) - g(y)\|^2 &= \|g(x)\|^2 - 2\langle g(x), g(y) \rangle + \|g(y)\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\quad - 2\langle g(x), g(y) \rangle = -2\langle x, y \rangle \\ &\quad \langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

3° Passo. Vejamos que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|g(x + y) - (g(x) + g(y))\|^2 = 0$.
Concluimos que $g(x + y) = g(x) + g(y)$.

Tomadas as propriedades (1.7), (1.12) e pela propriedade (1.13) demonstrada anteriormente, temos:

$$\begin{aligned}\|g(x + y) - (g(x) + g(y))\|^2 &= \|g(x + y)\|^2 - 2\langle g(x + y), (g(x) + g(y)) \rangle + \|g(x) + g(y)\|^2 \\ &= \|x + y\|^2 - 2\langle g(x + y), (g(x) + g(y)) \rangle + \|x\|^2 + \\ &\quad + 2\langle g(x), g(y) \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x + y\|^2 - 2\langle g(x + y), (g(x) + g(y)) \rangle + \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \\ &\quad + \|y\|^2 \\ &= \|x + y\|^2 - 2\langle g(x + y), (g(x) + g(y)) \rangle + \|x + y\|^2\end{aligned}$$

Pela propriedade (1.13):

$$\begin{aligned}\|g(x + y) - (g(x) + g(y))\|^2 &= \|x + y\|^2 - 2\langle g(x + y), (g(x) + g(y)) \rangle + \|x + y\|^2 \\ &= 2 \cdot [\|x + y\|^2 - \langle g(x + y), g(x) + g(y) \rangle] \\ &= 2 \cdot [\|x + y\|^2 - \langle g(x + y), g(x) \rangle + \langle g(x + y), g(y) \rangle] \\ &= 2 \cdot [\|x + y\|^2 - \langle x + y, x \rangle + \langle x + y, y \rangle] \\ &= 2 \cdot [\|x + y\|^2 - (x + y)(x + y)] \\ &= 2 \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Logo:

$$\|g(x+y) - (g(x) + g(y))\|^2 = 0 \implies g(x+y) = g(x) + g(y)$$

4° **Passo.** Verifiquemos que $g(tx) = t \cdot g(x)$ para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Pelas propriedades (1.7), (1.12) e (1.13) temos:

$$\begin{aligned}\|g(t \cdot x) - t \cdot g(x)\|^2 &= \|g(t \cdot x)\|^2 - 2\langle g(tx), tg(x) \rangle + \|t\|^2 \cdot \|g(x)\|^2 \\ &= \|g(tx)\|^2 - 2\langle tx, tx \rangle + \|tx\|^2 \\ &= \|tx\|^2 - 2\langle tx, tx \rangle + \|tx\|^2\end{aligned}$$

Pelas propriedades (1.6) e (1.5):

$$\begin{aligned}\|g(t \cdot x) - t \cdot g(x)\|^2 &= 2\|tx\|^2 - 2\langle tx, tx \rangle \\ &= 2 \cdot (\|tx\|^2 - \langle tx, tx \rangle) \\ &= 2 \cdot (\|tx\|^2 - t^2 \cdot \|x\|^2) \\ &= 2 \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Logo:

$$g(t \cdot x) = t \cdot g(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$$

5° **Passo.** Pelos dois itens anteriores, g é uma transformação linear. Tomando A como a matriz de g na base canônica do \mathbb{R}^n , de modo que $g(x) = Ax$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, verifiquemos que A é ortogonal.

Utilizando (1.13), temos:

$$\begin{aligned}g(x) \cdot g(y) &= Ax \cdot Ay \\ &= xy\end{aligned}$$

Logo, A é ortogonal.

Conclusão: tomando $\beta = f(0)$, temos que $f(x) = Ax + \beta$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

6° **Passo.** Vamos agora demonstrar a recíproca. Tomando $f(x) = Ax + \beta \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ e

dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, sendo A uma matriz ortogonal de ordem n , temos:

$$\begin{aligned}
 \|f(a) - f(b)\| &= \|Aa + \beta - (Ab + \beta)\| \\
 &= \|Aa + \beta - Ab - \beta\| \\
 &= \|Aa - Ab\| \\
 &= \|A(a - b)\| = \sqrt{[A(a - b)] \cdot [A(a - b)]} \\
 &= \sqrt{(a - b) \cdot (a - b)} = \|a - b\|
 \end{aligned}$$

□

Sendo \mathbb{E}^2 o plano euclidiano, considerado com sua estrutura de espaço vetorial, já sabemos que toda isometria $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ é da forma $f(x) = A(x) + \beta$ para alguma transformação ortogonal $A : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ e algum vetor $\beta \in \mathbb{E}^2$. Além disso, temos uma classificação para todas as transformações ortogonais.

1.2.2 Caracterização de Matrizes Ortogonais 2×2 .

Examinaremos como pode ser um operador ortogonal $A : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ num espaço vetorial \mathbb{E}^2 de dimensão 2, dotado de um produto interno a partir da natureza dos autovalores de A .

Seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

uma matriz ortogonal 2×2 . Como $x_1 = (a, c)$ é um vetor unitário em \mathbb{R}^2 , existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $a = \cos \theta$ e $c = \sin \theta$. Sendo $x_2 = (b, d)$ unitário e perpendicular a u_1 , devemos ter $u_2 = \pm(-\sin \theta, \cos \theta)$. Temos assim as seguintes possibilidades para A :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

No segundo caso, temos $ad - bc = -1$, e o seguinte polinômio característico:

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det \left(\begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \det \left(\begin{bmatrix} \cos \theta - \lambda & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & -\cos \theta - \lambda \end{bmatrix} \right) \\
&= (\cos \theta - \lambda)(-\cos \theta - \lambda) - \text{sen } \theta \cdot \text{sen } \theta \\
P_A(\lambda) &= \lambda^2 - 1.
\end{aligned}$$

Note que $P_A(\lambda)$ tem raízes $\lambda = \pm 1$.

No primeiro caso, temos $ad - bc = 1$, e o polinômio característico:

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det \left(\begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \det \left(\begin{bmatrix} \cos \theta - \lambda & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta - \lambda \end{bmatrix} \right) \\
&= (\cos \theta - \lambda)(\cos \theta - \lambda) + \text{sen } \theta \cdot \text{sen } \theta
\end{aligned}$$

Temos assim o polinômio característico sendo:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2(\cos \theta)\lambda + 1$$

Seu discriminante é:

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-2 \cos \theta)^2 - 4 \\
&= 4 \cos^2 \theta - 4
\end{aligned}$$

Assim, implicando que existem autovalores reais distintos se $\cos^2 \theta \geq 1$. Se $\Delta > 0$:

i) $P_A(\lambda)$ possui autovalores complexos.

Note que $\cos^2 \theta - 1 < 0$ implica que $P_A(\lambda)$ não possui raízes reais. Neste caso θ não é congruente a 0° e 180° .

Se $\Delta = 0$, temos:

ii) A possui um único autovalor $\lambda = 1$.

Tomando $\lambda = 1$ o único autovalor de A , tendo $u \in \mathbb{E}^2$, sendo $u = (x_1, y_1)$ um autovetor de A , onde $|u| = 1$, temos:

$$Au = \lambda \cdot u \implies Au = 1(x_1, y_1) \implies Au = u.$$

Tomando $v \in \mathbb{E}^2$, tal que v é perpendicular a u , sendo $v = (x_2, y_2)$ um autovetor de A , onde $|v| = 1$, temos $Av = v$. Uma matriz A , relativa a qualquer par de bases ortonormais contidas em \mathbb{E}^2 , é uma matriz ortogonal. Como A deixa invariante o subespaço $F \subset \mathbb{E}^2$ gerado por u , deixa invariante também seu complemento ortogonal, logo, sendo $w = (x, y)$, $Aw = w$, para todo $w \in \mathbb{E}^2$. Daí, $A = I$ e neste caso, temos $\theta = 0^\circ$.

iii) A possui um único autovalor $\lambda = -1$.

Tomando $\lambda = -1$ o único autovalor de A , tendo $u \in \mathbb{E}^2$, sendo $u = (x_1, y_1)$ um autovetor de A e $|u| = 1$, temos:

$$Au = \lambda \cdot u \implies Au = -1(x_1, y_1) \implies Au = -u.$$

Tomando $v \in \mathbb{E}^2$, tal que v é perpendicular a u , sendo $v = (x_2, y_2)$ um autovetor de A , onde $|v| = 1$, temos $Av = -v$.

De modo análogo ao item anterior, como A deixa invariante o subespaço $F \subset C$ gerado por u , deixa invariante seu complemento ortogonal. Assim, $Aw = -w$ para todo $w \in \mathbb{E}^2$ e $A = -I$. Neste caso, temos $\theta = 180^\circ$.

No primeiro caso para a matriz A , temos:

iv) A possui dois autovalores reais distintos, sendo $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.

Este caso trata da matriz do segundo tipo, que tem $\det < 0$. Tomando vetores unitários $u, v \in \mathbb{E}^2$ com $Au = u$ e $Av = -v$, temos:

$$u \cdot v = Au \cdot Av \implies u \cdot v = u \cdot (-v) \implies u \cdot v = -u \cdot v \implies u \cdot v = 0$$

Logo, $u \perp v$, onde $Au \perp Av$, sendo $\{u, v\} \subset \mathbb{E}^2$, uma base ortonormal. Tomando $a, b \in \mathbb{R}$, na identidade $A(a, b)$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 \\ a \cdot 0 - 1 \cdot b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}$$

Considere $w = au - bv$, tal que:

$$Aw = Aau - Abv \implies Aw = au + bv$$

Neste caso temos uma reflexão, como consta na figura 1.1. Note que se A não tem autovalores reais, então é uma rotação de ângulo não congruente a $k \cdot 180^\circ$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$.

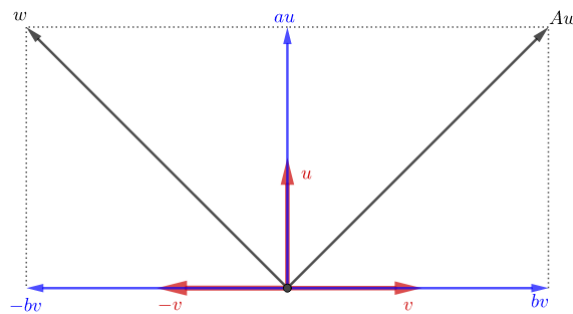


Figura 1.1: Reflexão em torno de um vetor u

1.3 Consequências e Exemplos

Teorema 4. (Critério de igualdade de isometrias) Se uma isometria do plano fixa três pontos distintos e não-colineares, então ela é igual a identidade. Conseqüentemente, se duas isometrias do plano coincidem sobre três pontos distintos, então elas são iguais.

Demonstração. Tomando \mathbb{E}^2 , o plano trabalhado com a, b e $c \in \mathbb{R}^2$, tendo uma transformação linear $\alpha(x) = A \cdot x + \beta$, temos:

$$\alpha(a) = A \cdot a + \beta \implies a - A \cdot a = \beta$$

$$\alpha(b) = A \cdot b + \beta \implies b - A \cdot b = \beta$$

$$\alpha(c) = A \cdot c + \beta \implies c - A \cdot c = \beta$$

$$a - A \cdot a = b - A \cdot b \implies a - b = A \cdot a - A \cdot b \implies a - b = A(a - b),$$

Porém, temos que a , b e c são não colineares com $a - b \neq 0$, além disso,

$$a - c = A(a - c)$$

Com $a - c \neq 0$.

Defina:

$$\begin{cases} \vec{u} = a - b \\ \vec{v} = a - c \end{cases}$$

Como a , b e c são não colineares, \vec{u}, \vec{v} determinam uma base. Pelo visto:

$$\alpha(\vec{u}) = \alpha(a - b) = \alpha(a) - \alpha(b) = a - b = \vec{u}$$

$$\alpha(\vec{v}) = \alpha(a - c) = \alpha(a) - \alpha(c) = a - c = \vec{v}$$

Como a transformação α deixa invariante os vetores \vec{u} e \vec{v} , então deixa invariante o espaço gerado pela base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$. Assim, temos garantido que a matriz nesta base é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Além disso, como $\alpha(\vec{u}) = \vec{u} = A\vec{u} + \beta$ e $\alpha(\vec{v}) = \vec{v} = A\vec{v} + \beta$, segue que β é o vetor nulo.

Desta forma, se uma isometria do plano fixa três pontos, está é a identidade. Como consequência, se γ e δ são duas isometrias que coincidem sobre os pontos a, b e c , então $\gamma \circ \delta^{-1}(a) = a$, $\gamma \circ \delta^{-1}(b) = b$ e $\gamma \circ \delta^{-1}(c) = c$ implicando em $\gamma \circ \delta = Id$.

□

Proposição 3. Toda isometria do plano leva retas paralelas em retas paralelas.

Demonstração. Tomemos os pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $r, s \in \mathbb{R}^2$ sendo r e s retas paralelas e o vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Seja $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma isometria, temos:

$$r : (x_p, y_p) = (x_1, y_1) + \lambda \vec{V}, \lambda \in \mathbb{R} \quad e \quad s : (x_k, y_k) = (x_2, y_2) + \theta \vec{V}, \theta \in \mathbb{R}$$

Com $\alpha(x) = A \cdot x + \beta$, temos:

$$\alpha(r) = A((x_1, y_1) + \lambda \vec{v}) + \beta = A((x_1, y_1)) + a(\lambda \vec{v}) + \beta \quad e \quad \alpha(s) = A((x_2, y_2) + \theta \vec{v}) + \beta = A((x_2, y_2)) + a(\theta \vec{v}) + \beta$$

Como $\{\lambda, \theta\} \in \mathbb{R}$ e $A(\theta \vec{v}) = A(\lambda \vec{v})$, temos assim que $\alpha(r) // \alpha(s)$. □

Proposição 4. Se $S = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, então $S^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\text{sen}(n\theta) \\ \text{sen}(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$.

Demonstração. Para essa demonstração utilizaremos o seguinte a respeito de soma de arcos:

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \text{sen}(\beta) \cdot \cos(\alpha) \tag{1.14}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta) \tag{1.15}$$

Também utilizaremos as seguintes propriedades:

$$\cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta) = \cos(2\theta) \tag{1.16}$$

$$2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta) = \text{sen}(2\theta) \tag{1.17}$$

A demonstração será feita por indução sobre $n \in \mathbb{N}$. Provemos para $n = 2$, assim:

$$\begin{aligned} S^2 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta) & -2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta) \\ 2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta) & -\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por 1.16, 1.17 temos:

$$S^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\text{sen}(2\theta) \\ \text{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

Tomemos nossa hipótese de indução, suponhamos k , tal que:

$$S^k = \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\operatorname{sen}(k\theta) \\ \operatorname{sen}(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$$

Para $k + 1$, temos:

$$\begin{aligned} S^{k+1} = S^k \cdot S &= \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\operatorname{sen}(k\theta) \\ \operatorname{sen}(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(k\theta)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(k\theta)\operatorname{sen}(\theta) & -\cos(k\theta)\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}(k\theta)\cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(k\theta)\cos(\theta) + \cos(k\theta)\operatorname{sen}(\theta) & \cos(k\theta)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(k\theta)\operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por (1.14), (1.15) temos:

$$S^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos((k+1)\theta) & -\operatorname{sen}((k+1)\theta) \\ \operatorname{sen}((k+1)\theta) & \cos((k+1)\theta) \end{pmatrix}$$

Portanto, conclui-se que

$$S^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\operatorname{sen}(n\theta) \\ \operatorname{sen}(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.18)$$

Note que tendo $\rho_{P,\alpha} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ e $\rho_{P,\theta} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$, a composição destas nos devolve $\rho_{P,\alpha+\theta} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$. Este resultado será novamente pautado no teorema 16.

□

1.4 Grupos

Seja S um conjunto não vazio. Uma aplicação $*$: $S \times S \rightarrow S$, que associa $(x, y) \mapsto x * y$, com $x * y \in S$ é chamada de operação binária sobre S .

Definição 11 (Grupo). Um conjunto G munido com uma operação binária $*$, será um grupo se:

- i) $a * (b * c) = (a * b) * c, \quad a, b, c \in G;$
- ii) $\exists e \in G$ tal que, $\forall a \in G, \quad e * a = a = a * e;$
- iii) $\forall a \in G, \quad \exists b \in G$ tal que $a * b = b * a = e.$

Definição 12 (Subgrupo). Sejam $(G, *)$ um grupo e H um subconjunto não vazio de G . Dizemos que H é um subgrupo de G se H é fechado, com relação a operação $*$ de G . Ou seja, todos os elementos de H operados dois a dois ainda pertencem a H . Em outras palavras, $(H, *)$ é um grupo.

Notação: $H \leq G$. O grupo das isometrias do plano $\text{Isom}\mathbb{E}^2$ é um subgrupo das bijeções do plano. Isto pode ser visto nas subseções 1.4.1 e 1.4.2.

Definição 13 (Grupo Cíclico). Um grupo G é cíclico quando $\exists a \in G$, tal que:

$$G = \{a^m \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

Notação: $G = \langle a \rangle$, onde a é dito o elemento gerador do grupo G .

Proposição 5. Todo grupo cíclico é abeliano, isto é, $g_1 g_2 = g_2 g_1, \forall g_1, g_2 \in G$.

Demonstração. Tomando $G = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, temos:

$$g^n \cdot g^m = g^{n+m} = g^{m+n} = g^m \cdot g^n.$$

Logo, todo grupo cíclico é abeliano. □

Definição 14 (Subgrupo Gerado). Se $S \subseteq G$ subconjunto não vazio de G , sendo G grupo, definimos o subgrupo gerado por S , denotado por $\langle S \rangle$, por:

$$\langle S \rangle = \bigcap \{H \mid H \leq G, S \subseteq H\}.$$

Assim, $\langle S \rangle$ é o menor subgrupo de G contendo S

Definição 15. (Homomorfismo) Dados dois grupos $(G, *)$ e (J, Δ) , dizemos que uma aplicação $f : G \rightarrow J$ é um homomorfismo de G em J , se para todo $a, b \in G$ tivermos $f(a * b) = f(a) \Delta f(b)$.

Definição 16. (Isomorfismo) Sejam $(G, *)$ e (J, Δ) grupos quaisquer. Dizemos que uma aplicação $f : G \rightarrow J$ é um isomorfismo do grupo G no grupo J se, e somente se:

- a) f é bijetora;
- b) f é um homomorfismo de grupos.

1.4.1 Grupos de bijeções

O principal objetivo desta seção é mostrar que o conjunto das bijeções formam um grupo. Verificaremos diretamente que certas propriedades de grupos são válidas nesse contexto. Lembrando que, por definição, as isometrias são transformações bijetivas. As seguintes proposições são exercícios de [8].

Proposição 6. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é injetiva se, e somente se, existe uma função $g : Y \rightarrow X$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Se f é injetiva, temos que, para todo $y \in f(X)$, existe um único $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Tomemos $g(y) = x$. Definimos assim a função $g : f(X) \rightarrow X$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$. Tomemos $g : Y \rightarrow X$ com, $g(y) = x$ para $y \in Y \setminus f(X)$, onde $x \in X$ é qualquer. Assim, temos $g : Y \rightarrow X$ sendo $g \circ f = Id$. Logo, existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = Id$. reciprocamente, tendo $x_1, x_2 \in X$, temos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$. Logo, f é injetiva.

□

Proposição 7. Uma $f : X \rightarrow Y$ é sobrejetiva se, e somente se existe uma função $g : Y \rightarrow X$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$.

Demonstração. Se f é sobrejetiva, temos que para todo $y \in Y$,

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\} \neq \emptyset$$

. Tomemos, para cada $y \in Y$, um $x \in X$ tal que $f(x) = y$ e definimos $g(y) = x$. Assim, temos que a função $g : Y \rightarrow X$ é definida de tal forma que $f(g(y)) = y$. Note que g é uma inversa à direita de f . Reciprocamente, se existe $g : Y \rightarrow X$ com $f \circ g = Id$, podemos

concluir que, para todo $y \in Y$, tomando $x = g(y)$, temos $f(x) = f(g(y)) = y$. Logo, f é sobrejetiva. \square

Proposição 8. Para quaisquer bijeções $f, g, h : X \rightarrow X$, $f = g$ se, e somente se, $f \circ h = g \circ h$ ou $h \circ f = h \circ g$.

Demonstração. Se $f, g, h : X \rightarrow X$ com $f = g$, note que

$$h = h \Rightarrow f \circ h = f \circ h \Rightarrow f \circ h = g \circ h.$$

Por outro lado, se $f \circ h = g \circ h$, tendo uma bijeção de $h : X \rightarrow X$, temos $f \circ h \circ h^{-1} = g \circ h \circ h^{-1}$, então $f = g$.

Se $f \circ h = g \circ h$, então

$$h \circ f \circ h \circ h^{-1} = h \circ g \circ h \circ h^{-1} \Rightarrow h \circ f = h \circ g$$

Portanto,

$$h \circ f = h \circ g \Rightarrow h^{-1} \circ h \circ f = h^{-1} \circ h \circ g \Rightarrow f = g$$

.

\square

Proposição 9. Para quaisquer bijeções $f, g : X \rightarrow X$, $f = g \iff f \circ g^{-1} = Id_X$.

Demonstração. Se $f = g$, temos

$$f = g \Rightarrow f \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = Id_X.$$

Temos também que,

$$f \circ g^{-1} = Id_X \Rightarrow f \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} \Rightarrow f = g$$

.

\square

1.4.2 Grupos de simetria

Segundo dicionários, o termo simetria, do grego *syn* (junto) + *metron* (medida ou a qualidade do que tem a mesma medida), é utilizado quando as partes de um elemento dividido no meio são iguais. Esse conceito é utilizado na geometria, na gramática, na arte, na natureza e na arquitetura. Nesta seção será abordado o estudo de isometrias como elementos de um grupo, sendo a operação desse grupo a composição de transformações.

Uma forma de verificarmos uma isometria visualmente é tomar um elemento que teve duas partes ditas “simétricas” que foram separadas e sobrepor estas. Se estas tiverem as mesmas dimensões, são simétricas. Na geometria, um objeto apresenta simetria quando se tem as mesmas dimensões depois de ter sofrido uma transformação, como reflexão ou rotação. O eixo de simetria é uma linha, real ou imaginária, que atravessa o centro da figura.

Definição 17 (Reta e ponto de simetria). Uma linha m é uma reta de simetria para um conjunto S de pontos se $\sigma_m : S \rightarrow S$ é tal que $\sigma_m(S) = S$, isto é, se o σ_m fixa S . O ponto P é um ponto de simetria para um conjunto S de pontos se $\sigma_P : S \rightarrow S$ é tal que $\sigma_P(S) = S$.

Definição 18 (Conjunto de todas as simetrias). Sendo S um conjunto de pontos e T uma isometria do \mathbb{E}^n , definimos o conjunto de todas as simetrias de S como $Sim(S) = \{T \in \text{Isom}\mathbb{E}^n \mid T(S) = S\}$.

Proposição 10. O conjunto de todas as simetrias de um conjunto de pontos forma um grupo. Em particular, $\text{Isom}\mathbb{E}^2$ é um grupo.

Demonstração. Seja S qualquer conjunto de pontos. O conjunto de simetrias para S não é vazio, pois a identidade é uma simetria para S . Suponha que α e β são simetrias para S . Então $\beta\alpha(S) = \beta(\alpha(S)) = \beta(S) = S$. Portanto, o conjunto de simetrias é fechado para composição de simetrias. Se α é uma simetria para S , então α e α^{-1} são transformações e $\alpha^{-1}(S) = \alpha^{-1}(\alpha(S)) = id(S) = S$. Assim, o conjunto de simetrias também tem a propriedade inversa. Isso é suficiente para que o conjunto de todas as simetrias de um conjunto de pontos seja um grupo. \square

Definição 19 (Grupo de Isometrias). O grupo de isometrias de um espaço eucliano é o conjunto de todas as isometrias do espaço euclidiano em si mesmo, com a composição da

função como operação de grupo. Seu elemento de identidade é a função de identidade. Os elementos do grupo de isometria às vezes são chamados de movimentos rígidos do espaço.

Teorema 5. Se P é um ponto de simetria para um conjunto de pontos S e α é uma simetria de S , então $\alpha(P)$ é um ponto de simetria para S . Ainda, se l é uma reta de simetria para um conjunto S de pontos e α é uma simetria de S , então $\alpha(l)$ é uma reta de simetria de S .

A demonstração deste teorema consta na página 78 de [8].

Definição 20. (Grupos Diedrais) Um grupo diedral D_n é o grupo das simetrias de um polígono regular de n lados com $n \geq 3$.

Teorema 6. (Grupos Diedrais) Os grupos diedrais tem a seguinte generalização $D_n = \{e, a, \dots, a^{n-1}, b, ba, \dots, ba^{n-1}\}$, onde e é a identidade, b é uma reflexão e a é uma rotação de ângulo $(n-2)\frac{2\pi}{n}$ centrada no centro do polígono, onde n é o número de lados do polígono regular.

A demonstração do teorema 6 é feita mediante a verificação das propriedades a seguir:

Propriedades dos grupos diedrais:

- i) $a^n = e = b^2$
- ii) $ab = ba^{n-1}$

Note que grupos cíclicos são subgrupos dos grupos diedrais, ou seja, $C_n \leq D_n$.

Definição 21 (Invariância). Um subconjunto S de \mathbb{E}^n é invariante por um subgrupo G de isometrias de \mathbb{E}^n se $g(S) = S$ para todo $g \in G$.

Observação: uma reta r pode ser invariante mesmo com uma transformação $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ qualquer não sendo invariante para o conjunto de seus pontos. Sendo X o conjunto dos pontos de uma reta r , temos que r invariante não implica que $f(X) = X$ para cada $X \in r$.

Definição 22. Dado um grupo G com elemento de identidade e , um subgrupo H e um subgrupo normal $N \triangleleft G$, as seguintes declarações são equivalentes:

- i) G é o produto dos subgrupos, $G = NH$, e esses subgrupos têm intersecção trivial: $M \cap N\{e\}$.

- ii) Para cada $g \in G$, existem $n \in N$ e $h \in H$ únicos tais que $g = nh$.
- iii) Para cada $g \in G$ existem $h \in H$ e $n \in N$ únicos tais que $g = hn$.
- iv) A composição $\pi \circ i$ da inclusão natural $i : H \rightarrow G$ com a projeção natural $\pi : G \rightarrow G/N$ é um isomorfismo entre H e o grupo quociente G/N .
- v) Existe um homomorfismo $G \rightarrow H$ que é a identidade em H e cujo núcleo é N . Em outras palavras, há uma sequência exata cindida $1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1$ de grupos (também conhecida como extensão de grupo de N por H).

Se qualquer uma dessas afirmações for válida (e, portanto, todas elas forem válidas, devido à sua equivalência), diz-se que G é o produto semidireto de N e H , escrito

$$G = N \rtimes H \quad \text{ou} \quad G = H \rtimes N$$

ou que G cinde sobre N ; diz-se também que G é um produto semidireto de H agindo sobre N , ou mesmo um produto semidireto de H e N . Para evitar ambiguidades, é aconselhável especificar qual dos subgrupos é normal.

Definição 23. Sejam $(G, *)$ e (H, \cdot) grupos. Pode-se formar um novo grupo $(G \times H, \bullet)$ denominado produto direto, onde

$$(g_1, h_1) \bullet (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \cdot h_2)$$

Capítulo 2

Grupos de Rosácea e de Friso

Neste capítulo trabalharemos os Grupos de Rosácea e de Friso, além das demonstrações dos teoremas a respeito da classificação desses grupos. Ao final do capítulo será feito um estudo dos modelos algébricos dos grupos de simetria.

2.1 Resultados Preliminares

Antes de iniciarmos as discussões desta seção, é interessante relembrar que σ_M é uma meia volta centrada em M , σ_r é uma reflexão tendo r como reta de simetria, $\rho_{A,\theta}$ é uma rotação de centro A e ângulo de rotação θ e $\tau_{A,B}$ é uma translação no vetor \overrightarrow{AB} . Alguns teoremas terão suas demonstrações omitidas, pois utilizam um encademanento de outros teoremas, o que não é objetivo deste, porém, ao decorrer do surgimento desses, serão indicadas as referências as quais possuem tais demonstrações. Os teoremas aqui enunciados serão utilizados nas demonstrações dos teoremas de Leonardo e da classificação dos Grupos de Friso.

Teorema 7. Se Q é ponto médio de P e R , então $\sigma_Q \circ \sigma_P = \tau_{P,R} = \sigma_R \circ \sigma_Q$.

Demonstração. Tomando $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$,

$$\begin{aligned}\sigma_Q \circ \sigma_P(x, y) &= \sigma_Q(-x + 2a, -y + 2b) \\ &= (-(-x + 2a) + 2c, -(-y + 2b) + 2d) \\ &= (x + 2(c - a), y + 2(d - b)).\end{aligned}$$

Uma vez que $\sigma_Q \circ \sigma_P$ tem equações $x' = x + 2(c - a)$ e $y' = y + 2(d - b)$, então $\sigma_Q \circ \sigma_P$ é uma translação. Note que isso prova que a composição de duas meias-voltas é uma translação.

Suponha que R seja o ponto tal que Q seja o ponto médio de \overline{PR} . Então, $\sigma_Q \circ \sigma_P(P) = \sigma_Q(P) = R$ e $\sigma_R \circ \sigma_Q(P) = \sigma_R(R) = R$. Como existe uma única translação que leva P em R , segue que $\sigma_Q \circ \sigma_P$ e $\sigma_R \circ \sigma_Q$ deve ser $\tau_{P,R}$.

□

Teorema 8. O produto de três meias voltas é uma meia volta. Em particular, se os pontos P, Q e R são não colineares, então $\sigma_R \circ \sigma_Q \circ \sigma_P = \sigma_S$, onde $PQRS$ é um paralelogramo.

Demonstração. Tomando $P = (a, b)$, $Q = (c, d)$ e $R = (e, f)$, temos:

$$\begin{aligned} \sigma_R \circ \sigma_Q \circ \sigma_P(x, y) &= \sigma_R \circ \sigma_Q(-x + 2a, -y + 2b) \\ &= \sigma_R(-(-x + 2c) + 2a, -(-y + 2d) + 2b) \\ &= (-x + 2e + 2a - 2c, -y + 2f + 2b - 2d) \\ &= (-x + 2[a - c + e], -y + 2[b - d + f]) \end{aligned}$$

Com $S = (a - c + e, b - d + f)$

□

Teorema 9. $\sigma_R \circ \sigma_Q \circ \sigma_P = \sigma_P \circ \sigma_Q \circ \sigma_R$ para quaisquer pontos P, Q, R .

Demonstração. Se a composta das meias-voltas $\sigma_Q \sigma_P = \tau_{P,Q} \implies \tau_{P,Q}^{-1} = \sigma_P \circ \sigma_Q$, assim, $\sigma_Q \circ \sigma_P = \sigma_P \circ \sigma_Q$, se, e somente se $P = Q$.

No entanto, há um teorema presente na página 30 de [5] que garante que para quaisquer pontos P, Q e R , existe um ponto S tal que o produto de três meias voltas é

$$\sigma_R \circ \sigma_Q \circ \sigma_P = \sigma_S = \sigma_S^{-1} = (\sigma_R \circ \sigma_Q \circ \sigma_P)^{-1} = \sigma_R^{-1} \circ \sigma_Q^{-1} \circ \sigma_P^{-1} = \sigma_P \circ \sigma_Q \circ \sigma_R$$

□

As meias-voltas não formam um grupo por si só: como já vimos no teorema 7, o produto de duas meias-voltas é uma translação e uma vez que uma translação é um produto de duas

meias-voltas, então o produto, em qualquer ordem, de uma translação e uma meia-volta é uma meia-volta. Isso pode ser verificado na página 29 de [5].

Teorema 10. (Teorema da classificação de isometrias do plano) Cada isometria não identitária do plano é exatamente uma das seguintes: Translação, rotação, reflexão ou reflexão com deslizamento.

Este teorema é consequência da caracterização das matrizes ortogonais 2×2 . Uma outra demonstração deste teorema consta na página 65 de [12].

Definição 24. Uma isometria que é obtida como produto de um número ímpar de reflexões é dita uma isometria ímpar. Uma isometria que é obtida a partir de um número par de reflexões é dita uma isometria par.

Nesta definição e nos teoremas a seguir existe, de forma intrínseca, a propriedade de que qualquer isometria pode ser decomposta em duas ou três reflexões. Esta afirmação é baseada nos capítulos 6 e 7 de [12] e também é demonstrada para translações e rotações no teorema 15. As demonstrações dos teoremas a seguir constam nas páginas 53 e 65 respectivamente de [12]. Esta definição e os teoremas a seguir nos auxiliam na demonstração do teorema de Leonardo.

Teorema 11. A composição de isometrias pares gera uma isometria par. A composição de isometrias ímpares gera uma isometria par. A composição de isometrias pares e ímpares gera uma isometria ímpar.

Teorema 12. Uma isometria dita ímpar é uma reflexão ou reflexão com deslizamento. Uma isometria par é uma translação ou rotação.

Definição 25 (Involução). Uma função $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ é dita involutiva se invertível e $f = f^{-1}$.

Teorema 13. Se $s = r$, então $\sigma_r \circ \sigma_s$ é a identidade. Se $s // r$, então $\sigma_r \circ \sigma_s$ é uma translação. Se s for concorrente a r em O e o ângulo da reta r para a reta s é o ângulo orientado não obtuso $\alpha = A\hat{O}B$, então $\sigma_r \circ \sigma_s = \rho_{O, 2\alpha}$.

Demonstração. Note que se $s = r$, $\sigma_r \circ \sigma_s$ é a identidade dado que reflexões são involuções. Se $s // r$, tomemos $A \in r$ e $B \in s$ tal que AB seja perpendicular a r e s . Tomemos $v = \overrightarrow{AB}$. Logo, $\sigma_r \circ \sigma_s = \tau_{A,C}$, com \overrightarrow{AC} equipolente a $2\overrightarrow{AB}$. Se s for concorrente a r em O , note que

o ângulo entre s e r é $\widehat{BOA} = -\alpha$. Seja s' concorrente a r em O com ângulo orientado não obtuso sendo α , temos:

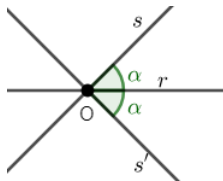


Figura 2.1: Composição de reflexões com retas concorrentes

Assim, afirmamos que $\sigma_r \circ \sigma_s = \rho_{O,2\alpha}$. Logo, a composição de duas reflexões cujas retas são concorrentes nos devolve uma rotação.

□

Teorema 14. Rotações não identitárias com centros diferentes não comutam.

A demonstração deste teorema consta na página 56 de [12].

Teorema 15. Para quaisquer rotações $\rho_{O,\alpha} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ e $\rho_{O',\beta} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ com $O \neq O'$ e $(\alpha + \beta) \not\equiv 360^\circ$, vale que $\rho_{O,\alpha} \circ \rho_{O',\beta} = \rho_{O'',\alpha+\beta}$.

Demonstração. O argumento utilizado nesta demonstração faz referência teorema 13. Seja $r = \overleftrightarrow{OO'}$. Tomemos a reta s , concorrente a r em O , tal que o ângulo entre r e s seja $\alpha/2$ e uma reta t , concorrente a r por O' , de modo que o ângulo de t para r seja $\beta/2$. Existem duas possibilidades, dado que s e t podem ser concorrentes ou paralelas. Se as retas forem paralelas, temos $\rho_{O,\alpha} \circ \rho_{O',\beta}$ sendo uma translação, dado o teorema 13. Se s e t se encontram no ponto O'' , temos que $\rho_{O,\alpha} = \sigma_s \circ \sigma_r$ e $\rho_{O',\beta} = \sigma_t \circ \sigma_r$, tal que

$$\rho_{O,\alpha} \circ \rho_{O',\beta} = \sigma_s \circ \sigma_r \circ \sigma_r \circ \sigma_t = \sigma_s \sigma_t$$

Assim, $\sigma_s \circ \sigma_t$ é a rotação em torno de O'' com ângulo igual ao dobro do ângulo da reta t para a reta s , o qual é igual $(\alpha + \beta)/2$. Desta forma, $\sigma_s \circ \sigma_t$ é a rotação em torno de O'' com ângulo $\alpha + \beta$, ou seja,

$$\rho_{O,\alpha} \circ \rho_{O',\beta} = \rho_{O'',\alpha+\beta}$$

□

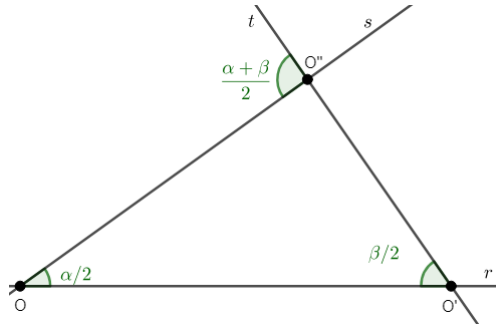


Figura 2.2: Composição de rotações não concêntricas

Teorema 16 (Composições de rotações e translações).

- i) Uma rotação de ângulo α seguida por uma rotação de ângulo θ é uma rotação de ângulo $(\alpha + \theta)$ se $\alpha \not\equiv \theta \pmod{360^\circ}$. Se $\alpha \equiv \theta \pmod{360^\circ}$, a composição destas rotações nos resulta em uma translação.

Note que se $\alpha \equiv \theta \pmod{360^\circ}$ a composição ser uma translação é demonstrada pelo teorema 7. Se as rotações tiverem o mesmo centro, a composição destas ser uma rotação de $(\alpha + \theta)$ é demonstrada pela proposição 4. O caso em que as rotações tem centros diferentes é demonstrado pelo teorema 15.

- ii) Uma translação não identitária seguida por uma rotação não identitária de ângulo α é uma rotação de ângulo α .

Seja $\tau_{A,B} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ e $\rho_{O,\alpha} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$. Temos que $\tau_{A,B} \circ \rho_{O,\alpha}$ é uma isometria par, pelo teorema 11. Assim, esta é uma rotação ou uma translação. Porém, note que esta não pode ser uma translação: se $\tau_{A,B} \circ \rho_{O,\alpha}$ for uma translação, então para quaisquer pontos $X, Y \in \mathbb{E}^2$ tal que $\tau_{A,B} \circ \rho_{O,\alpha}(X) = X'$ e $\tau_{A,B} \circ \rho_{O,\alpha}(Y) = Y'$, os segmentos XX' e YY' seriam equipolentes, mas isto não é verdade se $\tau_{A,B} \circ \rho_{O,\alpha}$. Para verificar isto, basta tomar X tal que $\overrightarrow{\rho_{O,\alpha}(X)O} = \overrightarrow{AB}$, logo, $X = \tau_{A,B}(\rho_{O,\alpha}(X)) = O$ e $Y = O$. Note que se $\alpha = 180^\circ$, tem-se $\overrightarrow{XX'} = -\overrightarrow{YY'}$. Logo, $\tau_{A,B} \circ \rho_{O,\alpha}$ é uma rotação.

- iii) Uma rotação não identitária de ângulo α seguida por uma translação não identitária é uma rotação de ângulo α .

O argumento que prova este item é análogo ao anterior.

- iv) Uma translação seguida por uma translação é uma translação.

Note que uma translação $\tau_{P,Q}(X) = (x + a, y + b)$ com $P = (x_0, y_0)$, $Q = (x_1, y_1)$ e $X = (x, y)$, sendo $a = x_0 - x_1$ e $b = y_0 - y_1$ e $\tau_{R,S}(x) = (x + c, y + d)$ com $R = (x_2, y_2)$ e $S = (x_3, y_3)$, tal que $c = x_2 - x_3$ e $d = y_2 - y_3$, temos:

$$\tau_{P,Q} \circ \tau_{R,S}(x, y) = \tau_{P,Q}(x + c, y + d) = (x + a + c, y + b + d) = (x + (a + c), y + (b + d)).$$

Este resultado é uma consequência direta de uma soma de vetores, onde dados $u, v \in \mathbb{E}^2$, temos $u + v$ sendo um vetor também.

Este Teorema será crucial na demonstração do Teorema de Leonardo e no teorema de classificação dos sete tipos de grupos de friso. Sua demonstração consta na página 57 de [12].

2.2 Grupos de Rosácea

Os Grupos de Rosácea são grupos finitos de isometrias classificados pelo teorema de Leonardo, sendo esses grupos cíclicos ou diedrais.

2.2.1 Teorema de Leonardo

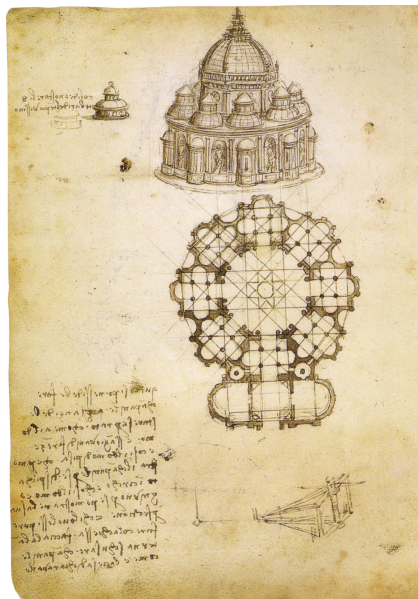


Figura 2.3: Anotações de Leonardo Da Vinci sobre as simetrias de um edifício

Leonardo Da Vinci (1452 - 1519) determinou sistematicamente as possíveis simetrias de um edifício e como fixar capelas e nichos sem destruir o núcleo da simetria. O Teorema de Leonardo é a prova da afirmação sistemática de Leonardo, cujos termos afirmam que os grupos finitos de isometrias são ou grupos cíclicos C_n ou grupos diedrais D_n .

Teorema 17. (Teorema de Leonardo) Se G é subgrupo finito de $\text{Isom}\mathbb{E}^2$, então G é isomorfo a C_n ou a D_n para algum $n \geq 1$.

Demonstração. Seja G um subgrupo finito de $\text{Isom}\mathbb{E}^2$. Separemos esta demonstração na prova de alguns resultados. O compilado destes resultados é a prova do teorema de Leonardo.

Afirmção 1. Não existem translações e reflexões com deslizamento em G .

Note que G não pode conter uma translação não identitária ou uma reflexão com deslizamento, pois qualquer uma dessas geraria um subgrupo infinito em G . Podemos concluir pelo teorema 10 que G contém apenas rotações e reflexões. Vamos considerar os casos em que G contém apenas rotações e o caso que contém alguma reflexão.

Afirmção 2. Todas as rotações de G são centradas em um ponto A .

Suponha que G contém apenas rotações, e que G contém uma rotação não identitária $\rho_{A,\theta}$. Tomemos uma segunda rotação não identitária $\rho_{B,\phi}$ pertencente a G , com $B \neq A$. Logo, G contém a composição:

$$\rho_{B,\phi}^{-1} \circ \rho_{A,\theta}^{-1} \circ \rho_{B,\phi} \circ \rho_{A,\theta} \tag{2.1}$$

Pelo teorema 14, temos que as rotações não identitárias com centros diferentes em (2.1) não comutam e pelo teorema 16 esta composição seria uma translação não idetitária, pois os ângulos de rotação de $\rho_{B,\phi}^{-1}$ e $\rho_{A,\theta}^{-1}$ são $-\phi$ e $-\theta$ respectivamente. Assim, a soma dos ângulos das rotações de (2.1) é congruente a 360° . Pelo primeira afirmação temos que translações não identitárias não pertencem a G . Logo, todas as rotações de G são centradas em um único ponto A .

Afirmção 3. Se G não contém reflexões, então é isomorfo a um grupo cíclico C_n para algum n inteiro.

Notemos que $\rho_{A,\theta}^{-1} = \rho_{A,-\theta}$ está em G se $\rho_{A,\theta} \in G$, pois são inversos, e que todos os elementos de G podem ser escritos na forma $\rho_{A,\theta}$ com $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$. Dado que G é finito,

tomemos $p = \rho_{A,\phi}$, onde ϕ tem um valor mínimo positivo. Se $\rho_{A,\psi} \in G$, tendo $\psi > 0$, então $\psi - k\phi$ não pode ser positivo e menor que ϕ para qualquer k inteiro pela minimilidade de ϕ . Então $\psi = k\phi$ para algum inteiro k e $p^k = \rho_{A,\psi}$. Em outras palavras, todos os elementos em G são potências de p . Concluimos que se G não contém reflexões, então G é cíclico C_n para algum n inteiro.

Afirmção 4. Se G contém rotações e reflexões, então é isomorfo a um grupo diedral D_n .

Consideremos o caso onde G contém uma reflexão. Tomemos e sendo a identidade, que é uma isometria par. Dado que a inversa de qualquer isometria par tem a mesma paridade e que o produto de duas isometrias pares é uma isometria par, então segue-se que o subconjunto de todas as isometrias pares em G formam um subgrupo finito em G . Pela afirmação 3, notamos que esse subgrupo deve ser o grupo cíclico C_n gerado por uma rotação p , com centro A . Então as isometrias pares em G são as n rotações p, p^2, \dots, p^n com $p^n = e$.

Suponhamos que G tem m reflexões. Se σ é uma reflexão em G , então as n isometrias $p\sigma, p^2\sigma, \dots, p^n\sigma$ são ímpares, dado que a combinação de isometrias pares com ímpares nos devolve uma isometria ímpar. Sabemos que o grupo G não contém reflexões com deslizamento. Logo, o único tipo de isometria ímpar que este pode conter são as reflexões. Assim, temos o subgrupo de isometrias pares de G contendo $P = \{p, p^2, \dots, p^n\}$ e o subconjunto das isometrias ímpares de G sendo $I = \{\sigma, p\sigma, p^2\sigma, \dots, p^n\sigma\}$. Deste modo, $n \leq m$. Contudo as m isometrias ímpares multiplicadas por σ nos devolvem m isometrias pares distintas. Logo, $m \leq n$. Consequentemente $m = n$ e G contém $2n$ elementos gerados por uma rotação p e uma reflexão σ . Se $n = 1$, então $G = \langle \sigma \rangle$. Se $n > 1$, então $p\sigma$ deve ser uma reflexão sobre uma reta que passa pelo centro de A . Concluimos assim que um grupo finito de isometrias que contem uma reflexão é um grupo diedral D_n para um n inteiro.

Com a junção dos quatro resultados acima, concluimos a demonstração do teorema de Leornado. □

Nas próximas imagens podemos notar dois tipos de Grupos de Rósacea, sendo um deles C_2 e o outro, se analizarmos só o centro desta, temos um diedral D_8 .



Figura 2.4: Cêramica Marajoara exposta no Museu Emílio Goeldi

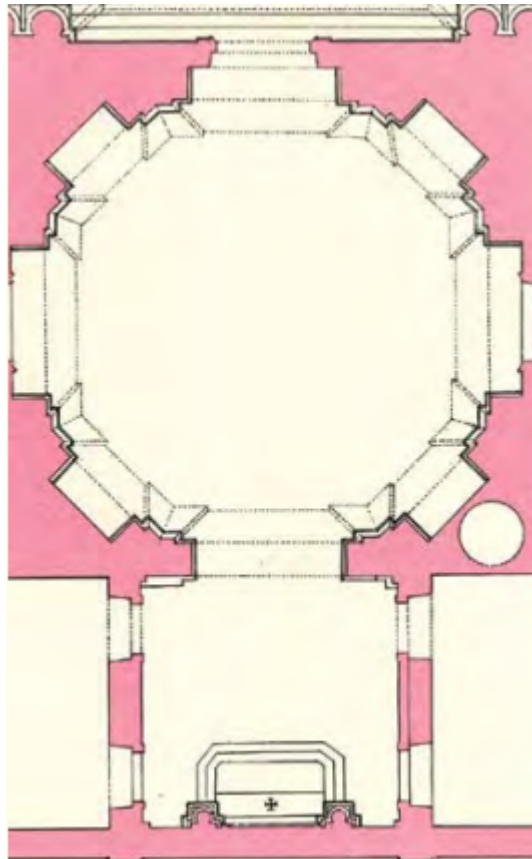


Figura 2.5: Planta Octogonal da igreja de São João

O exemplo a seguir tem como objetivo deixar de forma mais explícita o que seria um valor mínimo positivo para os ângulos de rotações pertencentes a um certo grupo, como acontece na afirmação 3 do teorema de Leonardo.

Exemplo. 3. Suponha que G é um grupo finito de isometrias. Se $\rho_{A,60^\circ}$ e $\rho_{A,45^\circ}$ pertencem

a G , quais são as outras rotações que pertencem a G necessariamente? Qual seria o menor intervalo entre ângulos?.

Note que a partir de algumas composições, verificamos um comportamento recorrente, sendo o menor intervalo entre ângulos de 15° . Um exemplo é compor

$$\rho_{A,60^\circ} \circ \rho_{A,45^\circ}^{-1} = \rho_{A,60^\circ} \circ \rho_{A,-45^\circ} = \rho_{A,15^\circ}$$

Suponhamos que $\rho_{A,\alpha} \in G$, tal que $\alpha \neq k \cdot 15^\circ$. Sabemos que $\rho_{A,\alpha}$ pode ser reescrito como uma composição de $\rho_{A,60^\circ}$ e $\rho_{A,45^\circ}$. Assim;

$$\begin{aligned} \rho_{A,\alpha} &= \rho_{A,60^\circ}^n \circ \rho_{A,45^\circ}^m \\ &= \rho_{A,n \cdot 60^\circ} \circ \rho_{A,m \cdot 45^\circ} \end{aligned}$$

Isto implica,

$$\begin{aligned} \alpha &= n \cdot 60^\circ + m \cdot 45^\circ \\ \alpha &= n \cdot 4 \cdot 15^\circ + m \cdot 3 \cdot 15^\circ \\ \alpha &= 15^\circ \cdot (4n + 3m) \end{aligned}$$

Logo, recaímos em um absurdo. Assim, o grupo G contém apenas rotações do tipo $\{P_{A,k \cdot 15^\circ} | k \in \mathbb{Z}\}$. Sendo $\phi = 15^\circ$.

2.3 Grupos de Friso

A seguir, definiremos os grupos de friso e demonstraremos o teorema que classifica os sete tipos de grupos de friso.

Definição 26. Um grupo F formado por isometrias que mantêm uma determinada reta c invariante e cujas translações formam um grupo cíclico infinito é denominado: grupo de friso com centro c . Definimos friso como sendo uma figura plana que admite para seu grupo de simetria um grupo de friso.

Obs. Se um grupo de friso contém uma rotação, o ângulo é de 180° , dado que outros

ângulos de rotação implicariam em translações que não conservariam a reta c invariante.

Sendo G um grupo e $S \subseteq G$, temos $\langle S \rangle$ sendo o subgrupo de G gerado por S . Abaixo temos alguns contra exemplos de grupos que não são de friso.

Exemplo. 4.

$$G = \left\langle \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix} \right) \right\rangle$$

$$H = \left\langle \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+\alpha \\ y \end{pmatrix} \right) \right\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Exemplo. 5 (Grupos dos Papéis de Parede). Os grupos de Papel de Parede são grupos de isometrias do plano cujas translações constituem um grupo do tipo $\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C} \rangle$, com A , B e C pontos não colineares. Os grupos de papel de parede são exemplos de grupos de isometrias que não são grupos de friso.

Observação: O primeiro grupo do exemplo 4 é um dos grupos de papel de parede.

A seguir temos um dos principais teoremas deste trabalho, junto com o teorema de Leonardo, sendo este o teorema que classifica os tipos de grupos de friso.

Teorema 18. Seja F um grupo de friso com centro c , cujas translações formam um grupo gerado pela translação τ . Se F contém uma meia volta, suponha que F contém a σ_A , a meia volta centrada em A ; se F contém uma reflexão baseada em uma reta perpendicular a c , suponha F contém σ_a , com $a \perp c$. Seja γ for a reflexão com deslizamento com eixo c tal que $\gamma^2 = \tau$. Então, F é um dos sete distintos grupos de frisos.

$$F_1 = \langle \tau \rangle \quad \tau \text{ é translação.}$$

$$F_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle \quad \tau \text{ é translação e } \sigma_c \text{ é reflexão horizontal.}$$

$$F_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \rangle \quad \tau \text{ é translação e } \sigma_a \text{ reflexão vertical.}$$

$$F_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle \quad \tau \text{ é translação e } \sigma_A \text{ é meia volta.}$$

$$F_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle \quad \tau \text{ é translação, } \sigma_A \text{ é meia volta e } \sigma_c \text{ é reflexão horizontal.}$$

$$F_2^2 = \langle \gamma, \sigma_A \rangle \quad \gamma \text{ é reflexão com deslizamento e } \sigma_A \text{ é meia volta.}$$

$$F_1^3 = \langle \gamma \rangle \quad \gamma \text{ é reflexão com deslizamento .}$$

Para auxiliar no endimento da demonstração a figura 2.15 pode ser consultada

Demonstração. Para iniciarmos a demonstração dos sete tipos distintos de grupos de frisos vamos escolher um ponto A sobre a reta c como:

- Se F contém meias-voltas então A é escolhido como sendo o centro de uma delas, como dito no enunciado.
- Se F não contém meias-voltas, mas contém reflexões em retas perpendiculares a c , então escolhemos A como sendo a interseção de uma dessas retas e c .
- Se F não contém meias-voltas e não contém reflexões em retas perpendiculares a c , então escolhemos A como sendo qualquer ponto da reta c .

Tomemos a translação $\tau \in F$, onde $\tau^i = \tau \circ \tau \circ \dots \circ \tau$ (i vezes), e A_i é definido por $\tau^i(A) = A_i$, com $i \in \mathbb{Z}$. Veja que $A_0 = A$, e uma vez que $\tau^n(A_i) = \tau^{n+i}(A)$, então toda translação em F é igual aquela que leva algum A_i em algum A_j . Seja M o ponto médio entre A e $A_1 = \tau(A)$, e definimos que $M_i = \tau^i(M) = \text{com } i \in \mathbb{Z}$, ou seja, M_i é o ponto médio entre A_i e A_{i+1} , bem como o ponto médio entre $A_0 = A$ e A_{2i+1} .

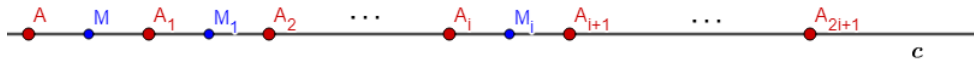


Figura 2.6: Translações nos grupos de friso

Analisemos as possibilidades para F .

i) $F_1 = \langle \tau \rangle$ é o grupo gerado por uma única translação.

A primeira possibilidade é F ser exatamente o grupo gerado por apenas τ , onde este subgrupo de F será denotado por F_1 , isto é, $F_1 = \langle \tau \rangle$. Um padrão de friso que tem F_1 como seu grupo de simetria não tem ponto de simetria, não tem reta de simetria e não é fixado por uma reflexão com deslizamento. As figuras referentes aos padrões de simetrias dos frisos a seguir foram extraídas de [12].

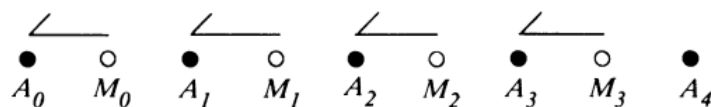


Figura 2.7: Padrão de simetria de F_1

Notemos que as translações mantêm a reta c fixada e que uma translação não idêntica que não fixa os pontos de uma reta, pode fixar a reta. Outras isometrias pares além das translações que fixam a reta c são as meias-voltas com centro em c .

ii) $F_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle$ é o grupo gerado por translação e meia volta.

Consideremos agora o caso em que F , além de translações, contém também meias-voltas, cujo centro necessariamente pertence a c .

Dado que $\tau, \sigma_A \in F$, vejamos $\sigma_M \in F$. Se um ponto Q é ponto médio de P e R , então pelo teorema 7, temos $\sigma_Q \circ \sigma_P = \tau_{P,R} = \sigma_R \circ \sigma_Q$. Como meias-voltas são involuções (uma involução é função α tal que $\alpha \circ \alpha = \text{identidade}$), logo:

$$\sigma_A = \sigma_A^{-1} \implies \tau \circ \sigma_A = \tau \circ \sigma_A^{-1}$$

Pelo teorema 7, temos:

$$\sigma_M \circ \sigma_A = \tau \implies \sigma_M \circ \sigma_A \circ \sigma_A = \tau \circ \sigma_A \implies \sigma_M = \tau \sigma_A.$$

Temos assim $\sigma_M \in F$. Pelo teorema 5, temos que F contém a meia-volta centrada em cada A_i e M_i . Agora suponhamos que P é o centro de alguma meia-volta em F . Então $\sigma_P \circ \sigma_A \in F$, e como $\sigma_P \circ \sigma_A$ é uma translação, pelo teorema 7, temos $\sigma_P \circ \sigma_A(A) = \tau^n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, $\sigma_P(A) = A_n$ para algum n e, pela definição de meia-volta, P é o ponto médio de A e A_n . Logo P é algum M_i . Consequentemente, F contém exatamente aquelas meias-voltas que tem centro A_i e aquelas que tem centro M_i . Note que pelas expressões vistas a cima, temos que toda isometria de F é a composta de τ e σ_A ou de σ_A com σ_M . Denotamos então $F_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle = \langle \sigma_A, \sigma_M \rangle$. Um friso padrão tendo F_2 como seu grupo de simetria tem pontos de simetria, porém não tem retas de simetria. Consequentemente, se F contém isometrias pares então F necessariamente é F_1 ou F_2 .



Figura 2.8: Padrão de simetria de F_2

iii) $F_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle$ é o grupo gerado por translação e reflexão horizontal.

A seguir, analisaremos os casos em que F não tem mais apenas isometrias pares. Consideremos uma isometria ímpar, sendo esta uma reflexão σ_c . Lembremos que σ_c é tal que, fixa uma reta arbitrária l se, e só se $c = l$ ou $c \perp l$. Nas figuras a seguir temos exemplos de l diferente de c e não perpendicular e na outra temos l perpendicular a c .

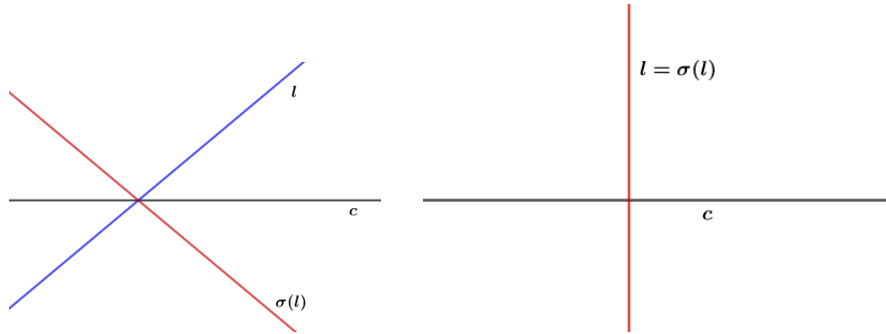


Figura 2.9: Imagens de l por σ_c

Denotemos esse novo grupo por F_1^1 , isto é, $F_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle$. Uma vez que $\tau \circ \sigma_c = \sigma_c \circ \tau$, F_1^1 é um grupo abeliano e todo elemento é da forma $\sigma_c^j \circ \tau^i$. Podemos verificar $\tau \circ \sigma_c = \sigma_c \circ \tau$ analiticamente e faremos isso tomando a liberdade de considerar coordenadas, com a reta c como o eixo X do plano cartesiano. Com isso, $\sigma_c(x, y) = (x, -y)$ e $\tau(x, y) = (x + \alpha, y)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim:

$$\tau \circ \sigma_c(x, y) = \tau(x, -y) = (x + \alpha, -y)$$

$$\sigma_c \circ \tau(x, y) = \sigma_c(x + \alpha, y) = (x + \alpha, -y)$$

Ainda, se $n \neq 0$, então F_1^1 contém uma reflexão com deslizamento $\tau^n \circ \sigma_c$ de eixo c que leva A em A_n . Um padrão de friso tendo F_1^1 como seu grupo de simetria não tem nenhum ponto de simetria e o centro é uma reta de simetria.

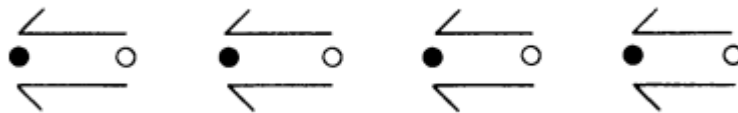


Figura 2.10: Padrão de simetria de F_1^1

iv) $F_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle$ é o grupo gerado por translação, reflexão horizontal e meia volta.

Tomemos σ_c em F_2 , teremos assim $F_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle$, onde os elementos deste grupo são

da forma $\sigma_c^k \circ \sigma_A^j \circ \tau^i$, dado que: $\tau \circ \sigma_c = \sigma_c \circ \tau$ que foi verificado em iii), $\tau \circ \sigma_A = \sigma_A \circ \tau^{-1}$ pelo teorema 7, e $\sigma_c \circ \sigma_A = \sigma_A \circ \sigma_c$, que pode ser verificado analiticamente ou pelo teorema 4. Sabemos que σ_A e σ_c são involuções, logo, basta considerar $j, k \in \{0, 1\}$. Se $n \neq 0$, então F_2^1 contém uma reflexão com deslizamento $\sigma_c \circ \tau^n$ com eixo c que leva A em A_n . Temos F_2^1 contendo $\tau^{2i} \circ \sigma_A \circ \sigma_c$ que é a reflexão na reta perpendicular a c em A_i e F_2^1 contém $\tau^{2i+1} \circ \sigma_c \circ \sigma_A$ o qual é uma reflexão perpendicular a c e em M_i . Se a é uma reta perpendicular a c em A , então

$$F_2^1 = \langle \tau, \sigma_a, \sigma_c \rangle$$

Um padrão de friso tendo F_2^1 como grupo de simetria tem um ponto de simetria e o centro é uma reta de simetria.

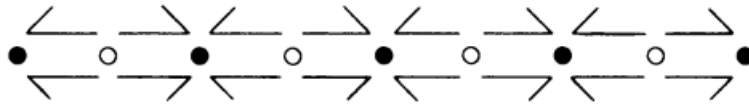


Figura 2.11: Padrão de simetria de F_2^1

v) $F_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \rangle$ é o grupo gerado por translação e reflexão vertical.

Tomemos F_1 e adicionemos σ_a onde a é uma reta perpendicular a c no ponto A . Como $\tau \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \tau^{-1}$, então todo elemento F_1^2 é da forma $\sigma_a^j \circ \tau^i$. Podemos considerar coordenadas a fim de verificar analiticamente que $\tau \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \tau^{-1}$. Considerando $\tau(x, y) = (x + b, y)$ e $\sigma_a(x, y) = (-x, y)$, temos:

$$\tau \circ \sigma_a = \tau \circ (-x, y) = (-x + b, y) \quad e \quad \sigma_a \circ \tau^{-1} = \sigma_a(x - b, y) = (-x + b, y)$$

Temos que F_1^2 não contém σ_c , mas pelo teorema 5, contém todas as reflexões de retas que são perpendiculares a c em A_i e M_i . Um padrão de friso tendo F_1^2 como seu grupo de simetria, não tem ponto de simetria, tem uma reta de simetria, mas o centro não é uma reta de simetria.

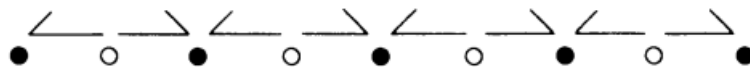


Figura 2.12: Padrão de simetria de F_1^2

vi) $F_2^2 = \langle \gamma, \sigma_A \rangle$ é o grupo gerado por reflexão com deslizamento e meia volta.

Tomemos uma reflexão σ_q em F_2 e denotemos esse grupo por $F_2^2 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_q \rangle$. Podemos separar q em dois casos.

(a) Se $q \neq c$ e $q \perp c$ em A_i ou M_i , logo, recaímos no caso F_1^2 .

(b) Suponhamos $q \neq c$ e $q \perp c$ e que q não passa por A_i ou M_i .

Pelo teorema 5 $\sigma_q(A)$ necessariamente é o centro de uma meia volta de F . Dado que $q \cap c \neq A_i$ e $q \cap c \neq M_i$ com $q \perp c$, logo, o que resta é q como mediatriz de $\overline{AM_i}$, para algum i . Como as meias-voltas estão em F , a segunda parte do teorema 5 exige que F deve conter a reflexão na mediatriz $\overline{AM_i}$, para cada i . Conseqüentemente F contém σ_q , em que q é a mediatriz $\overline{AM_i}$. Se a reta $a \perp c$ em A , F não pode conter simultaneamente σ_q e σ_a pois, se isso ocorrer, pelo teorema 7, a translação $\sigma_p \circ \sigma_a$ levaria A em M , dado que pelo teorema 7, $\sigma_a \circ \sigma_p = \tau^i$ e no começo da demonstração foi dito que as translações $\tau^i(A) = A_i$, mas nunca levam A em M_i . Temos também, que $\sigma_a = \sigma_c \circ \sigma_A$, que pode ser verificado analiticamente ou pelo teorema 4, implicando em $\sigma_p \circ \sigma_a = \sigma_p \circ \sigma_c \circ \sigma_A$. Segue que F não pode conter simultaneamente σ_p e σ_c . Com isso, temos então considerados todos os casos possíveis de maneiras de adicionar reflexões a F_2 . Seja, $F_2^2 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_p \rangle$, em que p é a mediatriz de \overline{AM} . Note que F_2^2 contém uma reflexão com deslizamento $\sigma_p \circ \sigma_A$ com eixo c que leva A em M . Seja $\gamma = \sigma_p \circ \sigma_A$. Logo, $\tau = \gamma^2$ e $\sigma_p = \gamma \circ \sigma_A$. Com isto:

$$F_2^2 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_p \rangle = \langle \gamma, \sigma_A \rangle$$

Observe que F_2^2 não contém σ_c pelas condições anteriores. O padrão do friso tendo F_2^2 como seu grupo de simetria, tem um ponto de simetria, uma reta de simetria, mas o centro não é uma reta de simetria.



Figura 2.13: Padrão de simetria de F_2^2

vii) $F_1^3 = \langle \gamma \rangle$ é o grupo gerado por reflexão com deslizamento .

Até este momento da demonstração consideramos todas as possibilidades para F não necessariamente conter uma reflexão com deslizamento. Tomemos $\alpha \in F$, sendo α uma reflexão com deslizamento. A reflexão com deslizamento α tem eixo c e α^2 é uma translação que fixa c . Temos dois casos.

(a) $\alpha^2 = \tau^{2n}$

No primeiro caso, $\alpha^2 = \tau^{2n}$, como α e τ comutam, então $(\alpha \circ \tau^{-n})^2$ é a identidade. Logo, a isometria involutiva ímpar $\alpha \circ \tau^{-n}$ necessariamente é σ_c . Com isto, $\alpha = \sigma_c \circ \tau^n$. Neste caso, F contém σ_c e $\sigma_c \circ \tau^n$, para algum inteiro n . Se F não contém meias-voltas, voltamos ao caso F_1^1 e se contém meias-voltas, voltamos ao caso F_2^1 .

(b) $\alpha^2 = \tau^{2n+1}$

Suponhamos que $\alpha^2 = \tau^{2n+1}$, temos $\tau = (\tau^{-n} \circ \alpha)^2$, dado que:

$$\tau^{2n+1} \circ \tau^{-2n} = \tau^{2n} \circ \tau \circ \tau^{-2n} = \tau$$

Seja $\gamma = \tau^{-n} \circ \alpha$. Então γ é uma isometria ímpar cujo quadrado é τ . Consequentemente γ é a única reflexão com deslizamento de eixo c que leva A em M .

Uma vez que $\gamma^{2m} = \tau^m$ e $\gamma^{2m+1} = \tau^m \circ \gamma$, segue que as reflexões com deslizamento em F são exatamente aquelas da forma $\tau^m \circ \gamma$. Assim,

$$F_1^3 = \langle \gamma \rangle,$$

em que γ é a reflexão com deslizamento de eixo c , tal que $\gamma^2 = \tau$.

Um padrão de friso tendo F_1^3 como grupo de simetria não tem ponto de simetria, não tem reta de simetria e é fixado por uma reflexão com deslizamento.

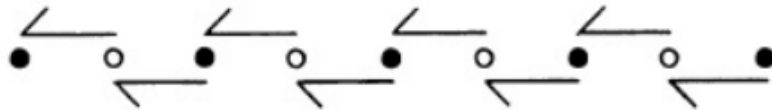


Figura 2.14: Padrão de simetria de F_1^3

Suponha que F contém isometrias adicionais a aquelas geradas pela reflexão com deslizamento γ com eixo c , em que $\gamma^2 = \tau$. Como o quadrado da translação $\sigma_c \circ \gamma$ é τ então $\sigma_c \circ \gamma$ não pertence a $\langle \tau \rangle$. Logo, σ_c não pode estar em F .

Se F contém σ_l , com $l \perp c$, então F contém a meia-volta $\sigma_l \circ \gamma$. E se F contém uma meia-volta, então contém necessariamente σ_A . Neste caso, F contém σ_A e a reflexão com deslizamento γ de centro c , tal que $\gamma^2 = \tau$. Conseqüentemente F é F_2^2 .

Temos finalmente esgotado todas as possibilidades. Portanto os sete grupos de simetria são: $F_1 = \langle \tau \rangle$, $F_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle$, $F_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \rangle$, $F_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle$, $F_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle$, $F_2^2 = \langle \gamma, \sigma_A \rangle$ e $F_1^3 = \langle \gamma \rangle$.

□

A partir do teorema dos grupos de friso, a identificação das figuras com esses padrões podem ser feitas a partir do seguinte fluxograma:

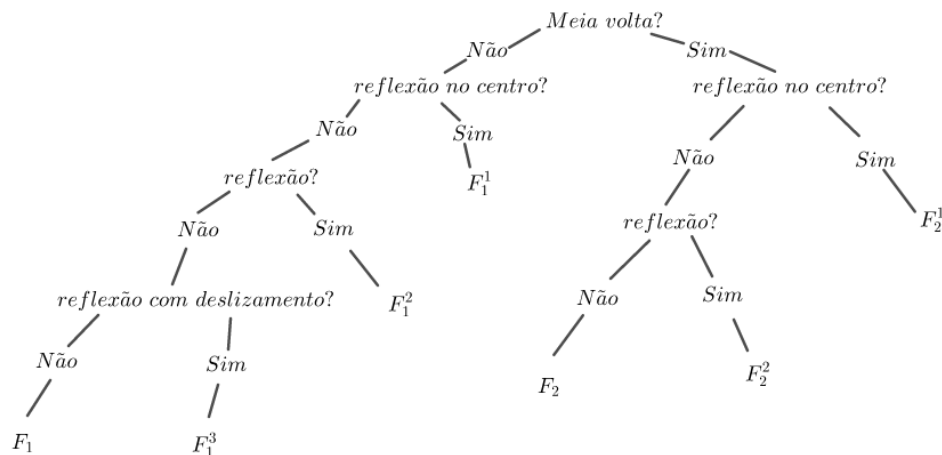


Figura 2.15: Fluxograma de identificação dos padrões de friso

2.4 Isomorfismos dos Grupos de Simetria

Os isomorfismos entre grupos são uma ferramenta poderosíssima para o estudo destes. Quando temos um grupo que ainda não conhecemos tanto sobre a interação de seus elementos, garantir um isomorfismo com um grupo mais conhecido, nos poupa muito trabalho, dado que as propriedades pertencentes ao grupo “mais conhecido” passam a serem válidas

para o nosso grupo “pouco conhecido”. Nesta seção procuramos estabelecer isomorfismos de grupos “mais conhecidos” com grupos de simetria. Temos como principal motivação desta, obter o que se chama de “modelos algébricos” de grupos, no nosso caso, os grupos de simetria. Utilizaremos a notação de apresentação de grupos para nos auxiliar no estabelecimento dos isomorfismos de grupos. Não entraremos em tantos detalhes sobre as apresentações de grupos, mas a referência [13] trata com mais aprofundamento desta parte.

2.4.1 Grupo Cíclico Finito

O primeiro caso que avaliaremos é G sendo um grupo de isometria finito. Um detalhe interessante é que G não pode conter uma translação ou reflexão com deslizamento, mas G pode conter rotações não-identitárias de mesmo centro ou uma reflexão. Primeiro analisaremos esses casos de forma separada, dado que um grupo G tendo rotações de mesmo centro e uma reflexão recai no grupo diedral, o que ainda será explorado mais a frente.

Lema 1. $C_n = \langle a \mid a^n \rangle \simeq \mathbb{Z}_n \quad (n \geq 2)$

Demonstração. Seja G um grupo cíclico finito de ordem n . Então, G é isomorfo ao grupo aditivo \mathbb{Z}_n (classes dos restos *mod* n). Consideremos f , tal que

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z}_n &\rightarrow G \\ \bar{k} &\mapsto g^k \end{aligned}$$

Se G cíclico de ordem n , então $\exists g \in G$ tal que $G = \langle g \rangle$ com os elementos do conjunto associado a G sendo $\{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$. Verifiquemos os seguintes itens abaixo.

I) f é um homomorfismo.

Sejam $\bar{k}, \bar{t} \in \mathbb{Z}_n$.

$$f(\bar{k} + \bar{t}) = f(\overline{k+t}) = g^{k+t} = g^k \cdot g^t = f(\bar{k}) \cdot f(\bar{t})$$

II) f é injetiva.

Sabemos que f é injetiva se

$$n(f) = \{\bar{k} \in \mathbb{Z}; f(k) = e\} = e$$

Temos os valores de \bar{k} sendo as classes $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}$ e sabendo que $g^k = e \rightarrow k = 0$, logo, apenas 0 é tal que $g^0 = e$. Assim, f é injetiva.

III) f é sobrejetiva.

Dado $g^t \in G$ segue que os possíveis valores de t são $0, 1, 2, \dots, n-1$. Então, basta considerar n a classe representada pelo t , ou seja, $\bar{t} \in \mathbb{Z}_n$, para se ter $f(\bar{t}) = g^t$. Logo, f é sobrejetiva.

Assim,

$$C_n = \langle a \mid a^n \rangle \simeq \mathbb{Z}_n \quad (n \geq 2)$$

□

2.4.2 Grupo Cíclico Infinito

Lema 2. $C_\infty = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$

Sendo G um grupo cíclico infinito, neste caso podemos considerar $a \in G$ sendo a uma translação. Verifiquemos $G \simeq \mathbb{Z}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z} &\rightarrow G \\ n &\mapsto a^n \end{aligned}$$

I) f é um homomorfismo.

Sendo G cíclico e $m, n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$f(m+n) = a^{m+n} = a^m \cdot a^n = f(m) \cdot f(n)$$

II) f é injeção.

Sabemos que f é injetiva se

$$n(f) = \{\bar{k} \in \mathbb{Z}; f(k) = e\} = e$$

temos $f(k) = a^k$ e $a^k = 1$ se $k = 0$. Logo, f é injetiva.

III) f é sobrejetiva.

f é sobrejetiva, pois dado $a^m \in G$, temos que $f(m) = a^m$.

$$C_\infty = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

□

2.4.3 Grupo Diedral Finito

Um grupo diedral é o grupo de simetrias de um polígono regular de n lados qualquer, que se representa quer por D_n , quer por D_{2n} (essa notação está associada a ordem do grupo). Sua apresentação é dada por $D_n = \langle r, s \mid r^n = s^2 = e, sr^n s^{-1} = r^{-n} \rangle$. Esta apresentação e a de outros grupos de simetria podem ser encontradas em [4].

Lema 3. $D_n = \langle r, s \mid r^n = s^2 = e, sr^k s^{-1} = r^{-k} \rangle \simeq \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$ ($n \geq 2$)

Quando trabalhamos um isomorfismo de um grupo G para um grupo H gerado por um produto semi-direto, podemos primeiro achar dois subgrupos complementares em relação a G e após isso, tomar um grupo isomorfo a este produto semi-direto. Tomemos os subgrupos gerados por $\langle r \rangle$, $\langle s \rangle$ e vamos provar que esses são complementares.

Demonstração.

I) Vejamos que $\langle r \rangle \langle s \rangle = D_n$.

Sabemos que cada elemento de D_n pode ser escrito como $r^k e$ ou $r^k s$, com $r^k \in \langle r \rangle$ e $s \in \langle s \rangle$ e e pertence a ambos. Então cada elemento de D_n pode ser escrito como o produto de $\langle r \rangle \langle s \rangle$ e este produto nos devolve D_n .

II) $\langle r \rangle \cap \langle s \rangle = e$

$\langle r \rangle$ tem os elementos $\{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ e $\langle s \rangle$ tem os elementos $\{e, s\}$ com $s \neq r$. Logo,
 $\langle r \rangle \cap \langle s \rangle = e$.

III) $\langle r \rangle$ deve ser normal em D_n .

Temos $\langle r \rangle \triangleleft D_n$, porque se olhamos nos elementos de $\langle s \rangle$ sendo $\{e, s\}$, podemos conjugar com os elementos de $\langle r \rangle$ e teremos:

$$\begin{aligned} er^k e^{-1} &= r^k \\ r^s &= srs = r^{n-1}; \quad r^{n-1} \in \langle r \rangle \end{aligned}$$

Logo, $D_n \simeq \langle r \rangle \rtimes \langle s \rangle$. Pela definição de produto semi-direto, temos:

$$\begin{aligned} &\langle r \rangle \rtimes \langle s \rangle \\ (r^k, h), h \in \langle s \rangle &\rightarrow (r^a, h_1)(r^b, h_2) = (r^a h_1 r^b h_1^{-1}, h_1 h_2) \end{aligned}$$

Podemos notar a conjugação $h_1 r^b h_1^{-1} = \psi h_1(r^b)$, tendo que $\psi_e(r^b) = er^b e^{-1} = r^b$ e $\psi_s(r^b) = sr^b s^{-1} = r^{-b}$. Assim, podemos notar a operação do produto semi-direto como:

$$\begin{aligned} &\langle r \rangle \rtimes \langle s \rangle \\ (r^k, h), h \in \langle s \rangle &\rightarrow (r^a, h_1)(r^b, h_2) = (r^a \psi_{h_1}(r^b), h_1 h_2) \end{aligned}$$

Note que, tendo $\langle r \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$ e $\langle s \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$, temos que:

$$\begin{array}{ccc} & & D_n \simeq \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2 \\ \langle r \rangle \simeq \mathbb{Z}_n & \langle s \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 & \\ r^k \mapsto k & ; \quad e \mapsto 0 \implies & (a, x)(b, y) = (a + \psi_x(b), x + y) \\ & s \mapsto 1 & \psi_0(b) = b \\ & & \psi_1(b) = b \end{array}$$

□

Nos exemplos 6 e 7 vemos que, dado um isomorfismo entre grupos temos a estrutura algébrica é preservada.

Exemplo. 6.

$$\begin{aligned}(r^4e)(r^3s) &= r^7s \\ (4,0)(3,1) &= (4 + \psi_0(3), 0 + 1) = (7,1)\end{aligned}$$

Exemplo. 7.

$$\begin{aligned}(r^5s)(r^6s) &= r^5r^{-6}ss = r^{-1} \\ (5,1)(6,1) &= (5 + \psi_1(6), 1 + 1) = (-1,0)\end{aligned}$$

Vemos assim que

$$D_n = \langle r, s \mid r^n = s^2 = e, sr^k s^{-1} = r^{-k} \rangle \simeq \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2 \quad (n \geq 2)$$

2.4.4 Grupo Diedral Infinito

Lema 4. $D_\infty = \langle r, s \mid s^2 = (rs)^2 = e \rangle \simeq \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$

Análogo a D_n , D_∞ pode ser expresso como o produto semi-direto de dois grupos, sendo $\langle r \rangle$ e $\langle s \rangle$ onde $\langle r \rangle$ é cíclico infinito e $\langle s \rangle$ é de ordem 2. Isso pode ser verificado analogamente aos itens I), II) e III) de D_n . Logo, $D_\infty \simeq \langle r \rangle \rtimes \langle s \rangle$. Pela definição de produto semi-direto, temos:

$$\begin{aligned}\langle r \rangle \rtimes \langle s \rangle \\ (r^k, h), h \in \langle s \rangle \rightarrow (r^a, h_1)(r^b, h_2) = (r^a h_1 r^b h_1^{-1}, h_1 h_2)\end{aligned}$$

Temos a conjugação $h_1 r^b h_1^{-1} = \psi_{h_1}(r^b)$, dado que $\psi_e(r^b) = e r^b e^{-1} = r^b$ e $\psi_s(r^b) = s r^b s^{-1} = r^{-b}$. Assim, podemos notar a operação do produto semi-direto como:

$$\begin{aligned}\langle r \rangle \rtimes \langle s \rangle \\ (r^k, h), h \in \langle s \rangle \implies (r^a, h_1)(r^b, h_2) = (r^a \psi_{h_1}(r^b), h_1 h_2)\end{aligned}$$

Note que tendo $\langle r \rangle \simeq \mathbb{Z}$ e $\langle s \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$, temos que:

$$\begin{array}{ccc}
 \langle r \rangle \simeq \mathbb{Z} & & D_\infty \simeq \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2 \\
 \langle s \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 & & \\
 r^k \mapsto k & ; & e \mapsto 0 \implies (a, x)(b, y) = (a + \psi_x(b), x + y) \\
 k \not\equiv 0 \pmod{r} & & s \mapsto 1 \implies \psi_0(b) = b \\
 & & \psi_1(b) = b
 \end{array}$$

Assim;

$$D_\infty = \langle r, s \mid s^2 = (rs)^2 = e \rangle \simeq \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$$

2.4.5 Grupos de Friso

Quando tratamos de grupos de friso, temos $F_1 = \langle \tau \rangle$ e $F_1^3 = \langle \gamma \rangle$ sendo grupos cíclicos de ordem infinita, logo, ambos são isomorfos a \mathbb{Z} . Note que os seguintes grupos: $F_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle$, $F_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle$, $F_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \mid \tau \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \tau^{-1} \rangle$, $F_2^2 = \langle \gamma, \sigma_A \rangle$ podem ser identificados como produtos semi-diretos de um grupo cíclico infinito $\langle \tau \rangle$ e um grupo cíclico de ordem dois, tal que F_1^1, F_2, F_1^2 e F_2^2 são isomorfos a $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ e a D_∞ . O grupo $F_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \mid \tau \circ \sigma_A = \sigma_A \circ \tau^{-1} \rangle$ pode ser identificado como o produto semi direto de um grupo cíclico infinito com o produto semi direto de dois grupos cíclicos de ordem dois, tal que F_2^1 é isomorfo ao produto semi direto $D_\infty \rtimes \mathbb{Z}_2$ e a $(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$. Note que estas relações foram verificadas na demonstração do teorema de classificação dos grupos de friso. Ficamos assim com a seguinte lista de isomorfismos.

$$F_1 = \langle \tau \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

$$F_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle \simeq \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$$

$$F_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \mid \tau \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \tau^{-1} \rangle \simeq D_\infty$$

$$F_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle \simeq D_\infty$$

$$F_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \mid \tau \circ \sigma_A = \sigma_A \circ \tau^{-1} \rangle = \langle \tau, \sigma_a, \sigma_c \rangle \simeq D_\infty \rtimes \mathbb{Z}_2$$

$$F_2^2 = \langle \gamma, \sigma_A \rangle \simeq D_\infty$$

$$F_1^3 = \langle \gamma \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

Capítulo 3

Padrões dos Grupos de simetria na Arte Indígena

A cultura indígena ao redor do mundo apresenta um variado acervo artístico, se manifestando em peças do dia a dia, armas, cestos, construções, nos grafismos corporais ou uma infinidade de objetos. As isometrias, segundo Lima (1996), são um assunto ainda pouco explorado para publicações. Quando tratamos da cultura paraense, conseguimos encontrar recortes de trabalhos que pautam isometrias, porém, que não necessariamente foram criadas aqui, mas sim, trazidas de outros locais ao redor do mundo. Como por exemplo, temos os azulejos, calçadas ou decorações em teatros. A partir da necessidade do estudo da riqueza dos padrões de simetria na cultura paraense e de forma a homenagear os povos originários paraenses, a seguir, estudaremos os padrões de simetrias presentes em obras da cultura Tembé e Marajora.

3.1 Grupos de Isometrias em Obras do Memorial Verônica Tembé

Batizado em homenagem a primeira cacica Tembé-Tenetehara, o Memorial dos Povos Originários da Amazônia Verônica Tembé, que está localizado no Parque Estadual do Utinga Camillo Vianna, o acervo proveniente do oeste paraense, conta com mais de 1.480 peças, salvaguardadas na reserva técnica do Sistema Integrado de Museus e Memo-

riais (SIMM/Secult). Os Temb  constituem o ramo ocidental dos Tenetehara. O grupo oriental   conhecido por Guajajara. De forma mais geral, pode-se afirmar que os Guajajara, ramo oriental dos Tenetehara, se localizam no Estado do Maranhão, enquanto os Temb , o ramo ocidental, no Estado do Pará. Neste capítulo acabamos por analisar apenas objetos do acervo do Memorial Verônica Temb . Vale ressaltar que existem isometrias nos mais variados aspectos dessa riquíssima cultura, como por exemplo em grafismos corporais presentes em rituais, no dia-a-dia, nos momentos de confraterniza o com outras sociedades e até mesmo em situa es tensas ou de guerra.

Ao analisarmos geometricamente os padrões das imagens (que contém as peças do acervo do Memorial Verônica Temb ), estamos analisando apenas os desenhos e não necessariamente as cores. As imagens foram deixadas em cores vivas para uma maior aprecia o e enriquecimento cultural. As fotografias aqui apresentadas tem algumas pequenas distor es devido a lente da câmera fotográfica. Por este motivo, para trabalhar com imagens em geral junto as isometrias, utilizaremos de aproxima es.

Peneira



Figura 3.1: Peneira

Tomemos $B \subseteq \mathbb{R}^2$, a região representada na figura 3.2, pertencente ao primeiro quadrante do plano cartesiano, com pontos de coordenadas (x, y) . Considere u a reta referente ao eixo OX, v a reta referente ao eixo OY e O o ponto $(0,0)$ do plano cartesiano. Podemos

obter a imagem da figura 3.1, percente ao Memorial Verônica Tembé a partir das seguintes isometrias:

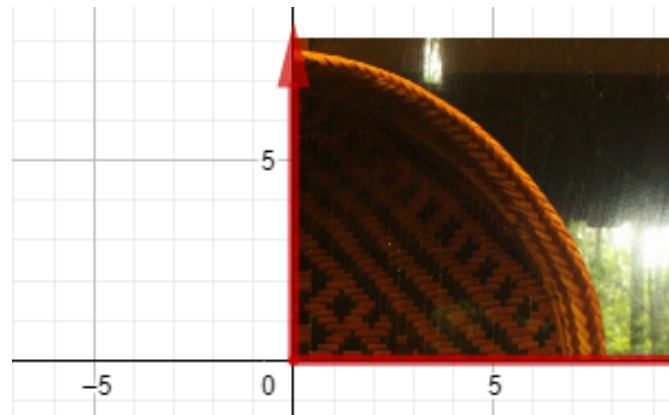


Figura 3.2: Região B

As Isometrias presentes na imagem são as reflexões $\sigma_v(x, y) = (-x, y)$, $\sigma_u(x, y) = (x, -y)$ e a meia-volta $\sigma_O(x, y) = (-x, -y)$. Aplicando σ_O e σ_v respectivamente, temos:

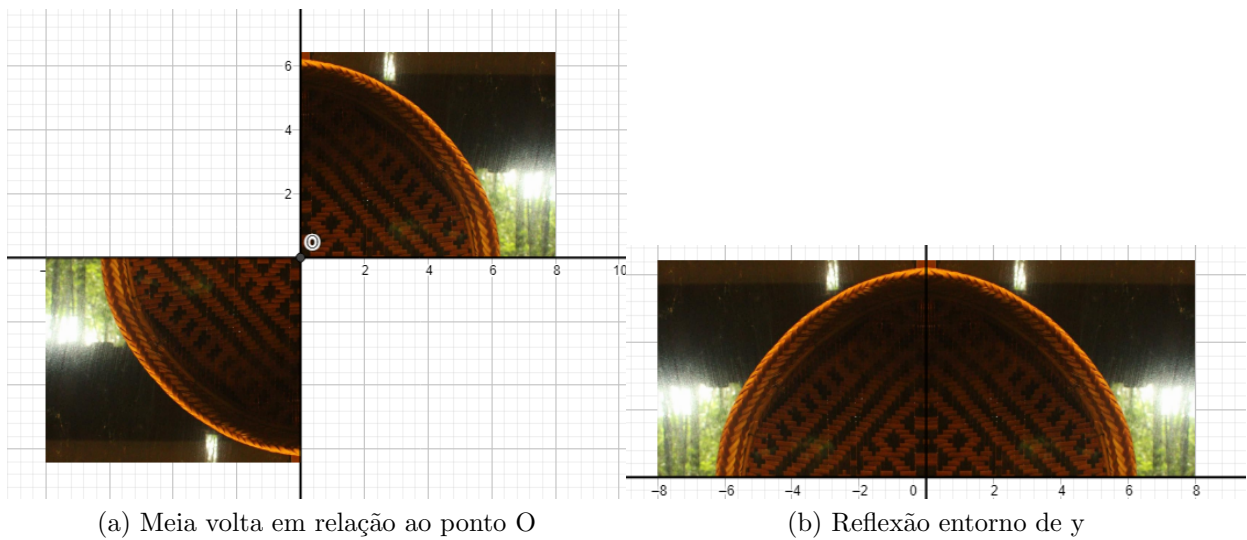


Figura 3.3: Meia volta e reflexão

Considerando a região B , tomando rotações sucessivas de 90° , podemos também a figura 3.1. Pelo Teorema 17, temos o grupo de simetria da peneira sendo isomorfo a C_n ou a D_n , como existem reflexões além das rotações neste grupo e, com uma breve análise, percebemos que o grupo de simetria desta figura é isomorfo a D_4 . Note que grupo de simetria deste objeto é do grupo de rosácea.

Observação: Veja que a reflexão neste caso não é simetria.

Cesto



Figura 3.4: Cesto

Este cesto presente na exposição do Memorial Verônica Tembé tem um padrão de simetria que contém apenas translações cíclicas, assim, podemos perceber este tipo de grupo de simetria como um grupo de friso com padrão de simetria F_1 . Podemos identificar esse grupo de friso utilizando o fluxograma dos grupos de friso da seguinte forma:

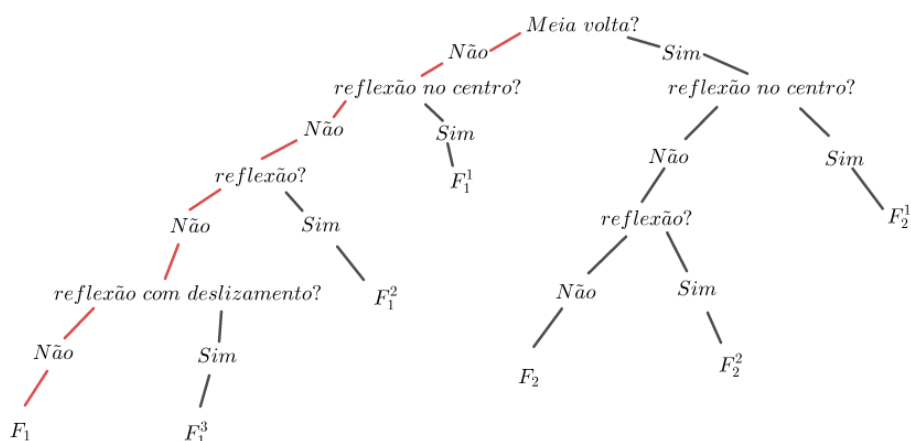


Figura 3.5: Fluxograma do padrão do Cesto

$F_1 = \langle \tau \rangle \rightarrow$ grupo gerado por uma única translação.

Vaso com reflexão com deslizamento e meia volta



Figura 3.6: Vaso com reflexão com deslizamento e meia volta

Utilizando do fluxograma, podemos identificar o grupo de friso F_2^2 no vaso.

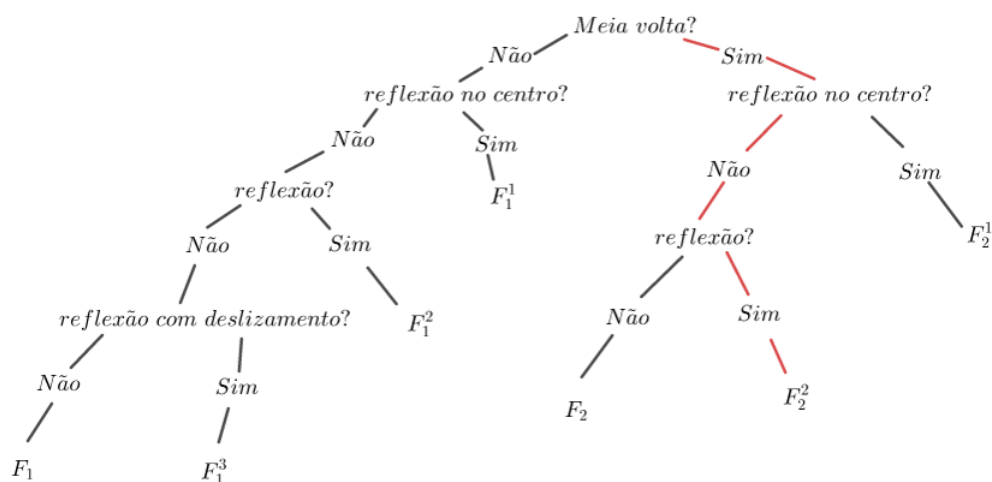


Figura 3.7: Fluxograma do padrão do vaso com reflexão com deslizamento e meia volta

$F_2^2 = \langle \gamma, \sigma_A \rangle \rightarrow$ reflexão com deslizamento e meia volta.

Vaso com translação e reflexão vertical



Figura 3.8: Vaso com translação e reflexão vertical

Utilizando do fluxograma, podemos identificar o grupo de friso F_1^2 no vaso.

$F_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \rangle \rightarrow$ translação e reflexão vertical.

3.2 Grupos de Isometrias na Feira do Artesanato do Paracuri



Figura 3.9: Feira do Artesanato Do Paracuri

Os marajoaras foram uma sociedade que floresceu na Ilha de Marajó. O arqueólogo Charles Mann sugere datas entre 400 e 1600 para o surgimento desse povo. Contudo existem registros de atividade humana desde 1000 a.C. Essa cultura alcançou o maior nível de complexidade social na pré-história brasileira, muito devido aos seus trabalhos sofisticados envolvendo cerâmica, grafismos e entre outros. Existem registros dessa cultura não somente em museus paraenses e brasileiros, mas em vários museus pelo mundo. O Museu Paraense Emílio Goeldi conta com um grande acervo de obras da cultura marajoara. No distrito de Icoraci, Belém do Pará, existe a cerâmica artesanal Icoaraciense que é influenciada pela cultura material indígena da Ilha do Marajó, em seus traços, métodos de produção e entre outros. A orla de Icoaraci conta com a Feira do Artesanato do Paracuri, local onde artesãos associados expõem suas produções de cerâmicas marajoaras e tapajônicas, além de cópias de obras expostas no Museu Emílio Goeldi.

Cuia



Figura 3.10: Cuia

Tomemos as seguintes retas na imagem a fim de analisarmos os padrões de simetria.

Trabalharemos com as regiões que estão determinadas entre duas retas de mesma cor, o que configura $\frac{1}{4}$ da figura. Sendo as regiões entre as retas j e i e as regiões entre as retas h e g . Note que se tomarmos rotações de 90° dessas regiões, conseguimos reconstruir a figura,



Figura 3.11: Análise do padrão de simetria da cuia

porém, se tomarmos reflexões dessas regiões em relação as retas, o padrão da imagem é modificado. Tomemos como exemplo as reflexões σ_g e σ_h , temos:

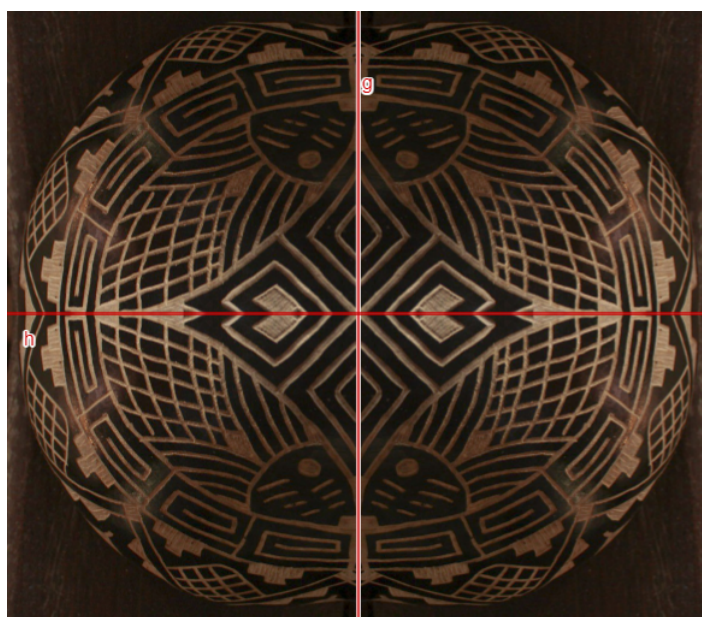


Figura 3.12: Análise sobre as reflexões não preservarem o padrão de simetria da cuia

Note que no padrão de simetria do grupo desta cuia não existem translações, nem reflexões, logo, este é um grupo cíclico C_4 , com esse padrão de simetria pertencendo aos grupos de rosácea.

Prato



Figura 3.13: Prato

Utilizando de retas assim como na “cuia”, percebemos que as reflexões não preservam os padrões de simetria deste objeto, porém, tomando apenas $\frac{1}{8}$ da figura e rotações de 45° , podemos formar a figura. Logo o padrão de simetria deste objeto pertence ao grupo cíclico C_8 , com este pertencente aos grupo de rosácea.

Prato 2



Figura 3.14: Prato 2

Podemos observar que neste segundo prato podemos considerar quatro retas distintas que

preservam a simetria, além disso, tomando apenas $\frac{1}{4}$ da figura e rotações de 90° , podemos formar a figura.

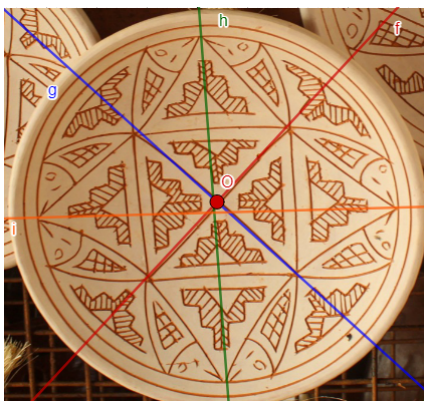


Figura 3.15: Análise do padrão de simetria do prato 2

Assim, o padrão de simetria deste objeto pertence ao grupo diedral:

$$D_n = \{e, \sigma_g, \sigma_h, \sigma_f, \sigma_l, \rho_{O,90^\circ}, \rho_{O,180^\circ}, \rho_{O,270^\circ}\}.$$

Observação: Note que estamos trabalhando com aproximações de simetrias

Vaso



Figura 3.16: Vaso com translação e meia volta

Para analisar os padrões deste vaso, tomemos as regiões determinadas pelas três faixas. A primeira e a última faixa tem o mesmo padrão. Tomemos a primeira faixa:

Note que na primeira faixa temos translações e meias-voltas e o tipo de padrão de simetria que esse grupo tem é do grupo de friso $F_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle$. Já na segunda faixa, o padrão



Figura 3.17: Fita do vaso com translação e meia volta

de friso que mais se aproxima é o F_1 , porém, existe um detalhe na figura que quebra esse padrão, então apenas as faixas inferiores e superiores tem um grupo de simetria.

Vaso 2



Figura 3.18: Vaso com translação

Note que as faixa superiores e inferiores tem o mesmo padrão de simetria. Este padrão apresenta apenas uma única translação, assim como o padrão da faixa central. Logo, o padrão de simetria desta figura pertence ao grupo de friso F_1 .

Cesto



Figura 3.19: Cesto com reflexão vertical e horizontal

Note que a faixa superior tem um padrão que preservado por uma meias volta, além da translação. O grupo de friso respectivo ao padrão superior é o F_2 . O outro padrão é preservado por uma reflexão vertical, uma reflexão horizontal e uma translação. O grupo de friso deste padrão é o F_2^1

Considerações Finais

O estudo das isometrias nos proporciona um mar de propriedades que nos auxiliam nas mais diversas áreas onde estas estão presentes. Ao associarmos o estudo abundante das isometrias a teoria dos grupos, abrimos novos caminhos e nos deparamos com novas formas de enxergar este conceito que é por muitas vezes associado apenas a geometria. Na busca por evidenciar a presença dos padrões referentes aos grupos de isometrias em objetos da cultura nortista, como vasos, cestos e outros, além de mostrar a riqueza de detalhes nesta, procuramos por formas de familiarizar aos leitores a padrões de grupos cíclicos, diedrais e de friso. Junto ao trabalho de exploração, a fim de levantar material para esta pesquisa, nos deparamos com outro objetivo, que foi o de catalogar os diferentes tipos de grupos de isometrias e as representações na arte Tembé e Marajoara. Durante este processo várias perguntas surgiram, como “por que alguns padrões tem maior recorrência que os demais?” ou “de onde surge o conhecimento atrelado a estes padrões por parte destas culturas”, além de processos de fabricação e suas respectivas simbologias. É nótavel o oceano de discussões que podem ser levantadas para tal assunto atrelado as culturas que foram superficialmente exploradas neste trabalho. Inicialmente um dos objetivos do trabalho também incluía os grupos de papel de parede, porém, as demontrações dos teoremas atrelados a estes e a sua baixa incidência nas culturas Tembé e Marajoara (tomando como base os itens trabalhados), acabaram por fazer com que este grupo de isometrias não fosse tão bem utilizado neste trabalho. Porém, vale ressaltar que em ambas as culturas foram encontrados itens que possuíam grupos de papel de parede, o que demonstra a presença dos grupos ornamentais do plano (grupos de rosácea, grupos de friso e grupos de papel de parede) em objetos da cultura Tembé e Marajoara. Podemos concluir desta forma não apenas a presença destes padrões de isometrias nessas culturas, mas a riqueza dos mais variados padrões obtidos pelos grupos ornamentais do plano.

Referências Bibliográficas

- [1] Brasil. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.
- [2] Crowe, Dorothy K. Washburn and Donald W. *Symmetries of Culture: Theory and Practice of Plane Pattern Analysis*. Dover Publications, 1988.
- [3] Doria, Celso Melchiades. *Geometrias: Euclidiana, esférica e hiperbólica. Textos Universitários*. SBM, 2019.
- [4] Gallian, Joseph A. *Contemporary abstract algebra*. Chapman and Hall/CRC, 2021.
- [5] Inforsato, Ana Paulo *Grupos de friso*. Dissertação de Mestrado - UNESP, 2018 .
- [6] Jesus, Ivanilton Sales de *Isometrias no Plano: Uma abordagem aplicável ao ensino básico*. Tese de Mestrado - UFBA, 2017.
- [7] Lima, Elon Lages *Álgebra linear. Coleção Matemática Universitária*. IMPA, 2014.
- [8] Lima, Elon Lages *A matemática do ensino médio. Coleção do Professor de Matemática*. SBM, 2000.
- [9] Lima, Elon Lages *Isometrias. Coleção do Professor de Matemática*. SBM, 1996.
- [10] Lima, Elon Lages *Coordenadas no Plano*. SBM, 2002.
- [11] Lima, Elon Lages *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. IMPA, 2014.
- [12] Martin, George E. *Transformation Geometry: An introduction to symmetry*. Springer Science and Business Media, 1982.
- [13] Martin, Paulo Agozzini. *Grupos, corpos e teoria de Galois*. Livraria da Física, 2010.

- [14] Moniz, Vera Maria Raposo. *Grupos de Simetria: identificação de padrões no património açoriano*. Tese de Mestrado - UAc, 2013.
- [15] Neves, Ivânica dos Santos; Cardoso, Ana Shirley Penaforte. *Patrimônio Cultural Tembé-Tenetebara*. IPHAN, 2015.
- [16] Rezende, Eliane Quelho Frota; De Queiroz, Maria Lúcia Bontorim. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. Editora da UNICAMP, 2008.
- [17] Santos, Telma Saraiva. *As Voltas do Tempo: As reminiscências de um projeto de identidade nacional na cerâmica “marajoara” de Icoaraci*. Dissertação de Mestrado - UFPA, 2011.
- [18] Silva, Renato Oliveira. *Isometrias*. Dissertação de Mestrado - UFCG, 2016.