UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA

EDERSON GONÇALO LIMA ALBUQUERQUE

Aplicação de Modelo Matemático na Difusão de Inovação Tecnológica através das Equações Diferenciais Ordinárias

CASTANHAL-PA
2023

EDERSON GONÇALO LIMA ALBUQUERQUE

APLICAÇÃO DE MODELO MATEMÁTICO NA DIFUSÃO DE INOVAÇÃO TECNOLÓGICA ATRAVÉS DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, como parte integrante dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr.Renato Germano Reis Nunes

CASTANHAL-PA
2023

EDERSON GONÇALO LIMA ALBUQUERQUE

APLICAÇÃO DE MODELO MATEMÁTICO NA DIFUSÃO DE INOVAÇÃO TECNOLÓGICA ATRAVÉS DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, como parte integrante dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Castanhal, 03 de março de 2023

BANCA EXAMINADORA

Renato Germano

Prof. Dr. Renato Germano Reis Nunes
Universidade Federal do Pará Orientador

José Geraldo Gonçalves da Silva

Prof. M. Eng. José Geraldo Gonçalves da Silva
Universidade Federal do Pará
Examinador

Roberta Modesto Braga

Profa. Dra. Roberta Modesto Braga
Universidade Federal do Pará
Examinador

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a Deus e a nossa mãe Maria Santíssima que não deixou eu desistir nos momentos difíceis, pois sempre que rezava pedindo sua intercessão com o intuito de me dar forças e coragem para lidar com os problemas e desafios da formação ,eu era atendido e sou muito grato por terem me proporcionado passar na universidade, realizando meu sonho e da minha família.

A minha mãe, ao meu pai e minha irmã e toda a família que não mediram esforços para me ajudar, me dando toda a força, incentivo estrutura na medida de suas condições. A minha prima Amanda que desde o primeiro dia de habilitação de Matrícula do curso esteve me ajudando nos momentos em que era solicitada, juntamente com os meus tios Valderi e Antônio e a minha tia Auxiliadora.

A meu grupo de trabalho da faculdade; Debora, Higor, Vitor e Alaine que são os amigos que a universidade me proporcionou conhecer e vou levar para a vida toda, sem eles essa caminhada sem dúvidas seria muito mais complicada. Agradeço todas as pessoas que direta ou indiretamente fizeram parte dessa conquista. A todos colegas da turma que fizeram parte da minha evolução não só como pessoa, mas também como profissional preste a se formar.

A Universidade Federal do Pará me proporcionou enfrentar minhas “limitações” resultando por meio da formação do curso em uma pessoa mais independente e, dessa forma, agradeço a todos os professores por ter feito parte dessa evolução. Em especial, agradeço imensamente ao meu orientador, Professor Renato Germano que me norteou nas produções de trabalhos científicos para a apresentação em eventos e na etapa final do curso.

"Dedico esta conquista a minha família de modo geral pelos incentivos, apoios e orações. Em especial, a minha mãe que é a grande responsável por essa conquista"

RESUMO

A difusão de inovação tecnológica estudada através de modelos que em sua composição usa as equações diferenciais ordinárias como o modelo matemático logístico que será usado para modelar o comportamento dos dados bibliográficos da *netflix* e *whatsapp* e com isso se dará o estudo de caso sobre essas duas empresas. Dessa forma, o desenvolvimento dessa pesquisa poderá levar mais pessoas a desenvolver novos trabalhos com modelos matemáticos para analisar ou fazer previsões acerca do fenômeno contemporâneo estudado. O estudo de caso será uma abordagem quantitativa onde a pesquisa dos dados das empresas serão coletados por meio da internet e com isso ter uma análise fenomenológica da difusão de inovação tecnológica a partir das equações diferenciais ordinárias onde os dados bibliográficos serão analisados e interpretados a partir dos gráficos construído através do software *Qtiplot* para obter os resultados dos parâmetros da função sigmoide quando for ajustada aos dados das empresas

Palavras-chave: Modelo Matemático. Equações Diferenciais. Inovação Tecnológica.

ABSTRACT

The diffusion of technological innovation studied through models that in its composition uses ordinary differential equations as the mathematical logistic model that will be used to model the behavior of bibliographic data from netflix and whatsapp and with this will be the case study about these two companies. Thus, the development of this research may lead more people to develop new works with mathematical models to analyze or make predictions about the contemporary phenomenon studied. The case study will be a quantitative approach where the research of company data will be collected through the Internet and with this have a phenomenological analysis of the diffusion of technological innovation from the common differential equations where the bibliographic | data will be analyzed and interpreted from the graphs constructed through the Qtiplot software to obtain the results of the parameters of the sigmoid function when it is adjusted to the data of the companies.

Keywords: mathematical model. differential equations. technological innovation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A globalização proporcionou o avanço da tecnologia a vários países do mundo, possibilitando o surgimento de várias empresas que ganharam o mercado internacional, dentre várias, estão a *netflix* e o *whatsapp* que foram escolhidos para a realização do trabalho pelo fato de serem populares no mundo e terem dados disponíveis. O número de usuários de ambos os aplicativos é enorme em vários países e, dessa forma, há um comportamento com relação aos usuários da *netflix* e do *whatsapp* em função dos anos que os mesmos estão oferecendo seus serviços que podem ser analisados, ajudando a compreender a difusão de inovação tecnológica.

Nessa perspectiva, recorremos ao estudo das equações diferenciais ordinárias, pois na matemática aplicada possibilita a aplicação em diversas áreas do conhecimento a partir de modelos matemáticos prontos ou reajustados com objetivo de descrever fenômenos ou situações do mundo real, podendo ser aplicados no âmbito da biologia, química, física e outras áreas. Na biologia, as equações diferenciais têm um papel importante para modelar o crescimento de populações.

Os modelos matemáticos têm a finalidade de modelar problemas de forma precisa ou aproximada da realidade estudada. Segundo Bassanezi (2002,p.326) "uma única equação ou sistema pode servir para modelar situações de naturezas completamente diversas." Dessa forma, para o estudo da difusão de tecnologia propomos o modelo logístico a fim de encontrar os parâmetros que melhor se ajustam aos dados bibliográficos do trabalho. Com isso, é possível modelar os dados experimentais da empresa *netflix* e do aplicativo *whatsapp* e prever o momento em que esses dados bibliográficos vão se estabilizar por meio de equações diferenciais ordinárias logísticas?

Partindo dessa problemática o objetivo geral da pesquisa é usar um modelo matemático para modelar o número de usuários da *netflix* e *whatsapp* em função dos anos com base nas equações diferenciais ordinárias logísticas que através de um programa de computador serão geradas as informações para analisar os parâmetros. Os objetivos específicos são: coletar os dados bibliográficos e modelar a quantidade de usuários das empresas, criar os gráficos de dispersão, analisar o comportamento, ajustar a função sigmoide nos dados e analisar os parâmetros obtidos.

Com base nesta aplicação poderá levar outras pessoas dos cursos do âmbitos das exatas a desenvolver novos trabalhos sobre modelos matemáticos com objetivo de analisar ou desenvolver previsões para estudo da difusão de inovação tecnológica.

Dessa forma, o trabalho terá uma abordagem quantitativa onde a pesquisa e a coleta dos dados das empresas serão por meio da internet e com isso faremos uma análise desses dados bibliográficos a partir da difusão de inovação tecnológica com base nos estudos sobre as equações diferenciais ordinárias.

A estrutura do trabalho contará com referencial teórico que reunirá o resumo de algumas obras para introduzir as equações diferenciais ordinárias (EDO), que abordará os tipos de equações diferenciais e suas soluções, as equações diferenciais de primeira ordem e suas definições e problemas. Na sequência vem a modelagem com as equações diferenciais de primeira ordem, falando das equações logísticas e suas soluções.

Na fase do procedimento metodológico onde vai ser tratado do método para a coleta dos dados bibliográficos da *netflix* e *whatsapp*, em seguida serão abordados os resultados e discussões a partir dos gráficos criados a fim de analisar seu comportamento e logo em seguida os resultados obtidos por meio dos parâmetros da aplicação.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Nessa fase, para podermos abordar o conteúdo, partimos do resumo de algumas obras dos autores Zill e Cullen (2001) e Zill (2016) que tratam das definições acerca das equações diferenciais ordinárias com relação às suas classificações e suas soluções. Nas equações diferenciais de primeira ordem, definindo o problema de valor inicial, teorema da existência e unicidade, variáveis separáveis e outros abordados nesta etapa. A autora Vilhena (2015) e os autores Yartey e Ribeiro (2017) foram escolhidos para podemos apresentar alguns exemplos do conteúdos das equações diferenciais ordinárias.

2.1.1 Definição e terminologia

Segundo Bassanezi (2022) quando as situações modeladas envolvem variáveis contínuas, evoluindo em relação a outras, o modelo matemático adequado a essa situação são as equações diferenciais. Logo, a função $y = f(x)$ e sua derivada

$$\tfrac{dy}{dx} = f'(x)$$

sendo x uma função dela mesma, podendo ser calculadas por regras apropriadas, como por exemplo $y = e^{x^3}$ que calculada através da regra da cadeia, resulta em $dy/dx = 3x^2e^{x^3}$ e se mudamos e^{3x} pelo símbolo y , no lado direito da derivada, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2y \tag{1}$$

Dessa forma, ao substituir o símbolo y na derivada, deparamos com o problema que envolve equações diferenciais, ou seja, dada uma equação $dy/dx = 3x^2y$ encontre uma função $y = f(x)$ que satisfaça a equação.
A equação (1) é chamada de equação diferencial e para podemos entender esse assunto, abordaremos sua definição.

Definição 1. *Uma equação que contém as derivadas de uma ou mais funções não conhecidas(ou variáveis dependentes), em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de* **equação diferencial (ED)***. As equações diferenciai são* *classificadas em **tipo, ordem e linearidade** para poder entender melhor as equações diferenciais, vamos tratar de abordar cada uma delas*

2.1.2 Classificação pelo Tipo

Há dois tipos de equações diferenciais que são chamadas de **equação diferencial ordinária (EDO)** e a **equação diferencial parcial (EDP)**. Contudo, ambas possuem equações com características diferentes. A EDO contém equações com derivadas ordinárias que podem ter uma ou mais variáveis dependentes, porém pode contar com somente uma variável independente. Por exemplo,

$$\frac{dy}{dx} + 6y = e^x.$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = 2x.$$

$$(y - x)dx - 5xdy = 0.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 8y = 0.$$

todas são exemplos de equações diferenciais ordinárias. A EDP são aquelas que possuem uma ou mais variáveis dependentes e mais de duas variáveis independentes. Por exemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} + 3y\frac{\partial u}{\partial y} = u.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial u}{\partial t}.$$

são equações diferenciais parciais.

2.1.3 Classificação pela Ordem

Quando se fala em classificação pela ordem em uma equação diferencial (**EDO ou EDP**), estamos falando da ordem da sua maior derivada. Por exemplo,

$$\frac{\partial^2 y}{dx^2} - \left(\frac{\partial y}{dx}\right)^3 + 5x = 2x.$$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, pois só possui uma variável independente e sua maior ordem está na primeira expressão. A forma geral da equação diferencial ordinária de ordem n em uma variável dependente é representada por

$$F(x, y, y', ..., y^n) = 0. \tag{2}$$

Sendo F uma função de valores reais de $n + 2$ variáveis, $x, y, y', ..., y^n$, e onde $y^n = d^n y/dx^n$. A equação diferencial

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', ..., y^{n-1}).$$

onde f é conhecida como a forma normal de (2), que é uma função contínua de valores reais. Logo, a forma normal

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y').$$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}, ..., \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \tag{3}$$

das equações diferenciais gerais de primeira, segunda e n-ésima ordem serão representadas dessa forma no decorrer do trabalho, sendo essa última a forma geral representada simbolicamente.

2.1.4 Classificação por Linearidade

As equações diferenciais podem ser classificadas como **linear** e **não-linear**. Para uma equação diferencial ser linear têm que ter duas características e a partir da equação diferencial linear abaixo podemos visualizar

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Com isso, a primeira característica é que as variáveis dependentes y e todas suas derivadas são do primeiro grau e a segunda característica é que cada coeficiente depende só da variável independente x. As equações diferenciais não-linear, são aquelas que fogem das características citadas acima. Dessa forma, as equações

$$xdy + ydx = 0.$$

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 5y = e^x.$$

São exemplos de EDOs de primeira, segunda e terceira ordem lineares, respectivamente. Entretanto, as equações

$$\frac{d^3y}{dx^3} + sen(y) = 0.$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} + y^2 = 0.$$

São exemplos de equações diferenciais não-linear de terceira e quinta ordem, respectivamente (ZILL, 2016).

2.1.5 Solução para EDOs

A seguir vamos abordar a definição de uma solução para as equações diferenciais ordinárias e no decorrer do trabalho vamos tratar de alguns exemplos com objetivo de facilitar o entendimento.

Definição 2. *Qualquer função h definida em algum intervalo I, que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de solução para a equação no intervalo I. Ou melhor, uma solução para a EDO.*

$$H(x, y, y', y'', y''', y'''', ..., y^n) = 0.$$

é uma função h que possui pelo menos n derivadas e que satisfaz a equação (3); isto é,

$$H(x, h(x), h'(x), h''(x), h'''(x), ..., h^n(x)) = 0.$$

isso é para todo x no intervalo I.

Observação. Dependendo do contexto, o intervalo I pode representar um intervalo aberto (a, b), um intervalo fechado $[a, b]$, um intervalo infinito $(0, \infty)$ e assim por diante.

Exemplo 1. *Verifique se a função* $y(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$ *é uma solução da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dt} + 20y = 24 \tag{4}$$

Solução: Se $y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$, então sua derivada é $y' = 24e^{-20t}$, substituindo na equação (4), temos que:

$$\frac{dy}{dt} + 20y = 24$$
$$24e^{-20t} + 20(\frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}) = 24.$$
$$24e^{-20t} + \frac{120}{5} - \frac{120}{5}e^{-20t} = 24.$$
$$24e^{-20t} + 24 - 24e^{-20t} = 24.$$
$$24 = 24.$$

A função $y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$ é uma solução da equação diferencial dada, para todo x real. (VILHENA, 2015).

Exemplo 2. *Verifique se a função* $y(x) = 2x^2 - 1 + Ce^{-2x^2}$ *, com C constante, é solução da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x^3 \tag{5}$$

Solução:

Se $y(x) = 2x^2 - 1 + Ce^{-2x^2}$, então sua derivada é

$$y' = \frac{4xe^{2x^2} - 4xC}{e^{2x^2}}.$$

simplificando a derivada acima, ficará $y' = 4x - 4xCe^{-2x^2}$, substituindo na equação (5), temos:

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x^3.$$
$$\frac{dy}{dx} = 4x - 4xCe^{-2x^2}.$$
$$4x - 4xCe^{-2x^2} + 4x(2x^2 - 1 + Ce^{-2x^2}) = 8x^3.$$
$$4x - 4xCe^{-2x^2} + 8x^3 - 4x + 4xCe^{-2x^2} = 8x^3.$$
$$4x + 8x^3 - 4x = 8x^3.$$

$$8x^3 = 8x^3.$$

Com isso, a função $y(t) = 2x^2 - 1 + Ce^{-2x^2}$ satisfaz a equação diferencial (5), sendo assim uma solução da mesma.

Exemplo 3. *Verifique se a função $y(x) = xe^x$ é uma solução da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

, no intervalo ($-\infty, \infty$).

Solução: Se $y(x) = xe^x$, então suas derivadas primeira e segunda são: $y' = e^x + xe^x$ e $y'' = 2e^x + xe^x$, substituindo na equação $y'' - 2y' + y = 0$, temos:

$$(2e^x + xe^x) - 2(e^x + xe^x) + xe^x = 0.$$

$$2e^x + xe^x - 2e^x - 2xe^x + xe^x = 0.$$

$$2xe^x - 2xe^x = 0.$$

$$0 = 0.$$

Dessa forma, a função $y(x) = xe^x$ é uma solução da equação $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0.$

2.1.5.1 Solução explícitas

Definição 3. *Uma solução é chamada de **solução explícita** quando a variável dependente é apresentada somente em termos da variável independente $y = h(x)$ e das constantes quando substituída na equação diferencial.*

Exemplo 4. *Verifique que $y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$, sendo C uma constante real, é uma solução da equação diferencial $xy' + y = x^2$, para todo x pertencente ao conjunto dos números reais. Se $y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$, então sua derivada $y' = \frac{2x}{3} - \frac{c}{x^2}$, substituindo na equação diferencial dada, temos que:*

$$xy' + y - x^2 = 0.$$
$$x\left(\frac{2x}{3} - \frac{c}{x^2}\right) + \left(\frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}\right) - x^2 = 0.$$
$$\frac{2x^2}{3} - \frac{c}{x} + \frac{x^2}{3} - \frac{c}{x} - x^2 = 0.$$

$$x^2 - x^2 = 0.$$

$$0 = 0.$$

Logo, a função $y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$, satisfaz a equação diferencial $xy' + y = x^2$, sendo assim uma solução da mesma.

2.1.5.2 Solução implícita

Definição 4. *Uma relação $H(x, y) = 0$ é uma **solução implícita** de uma equação diferencial ordinária $F(x, y, y', y'', y''', y'''', ..., y^n) = 0$, em um intervalo I, se a mesma definir uma ou mais soluções explícitas que atenda a relação e a equação diferencial em I.*

Exemplo 5. *Verifique se a relação $x^2 + y^2 = 16$ é uma solução implícita da equação diferencial $y' = -\frac{x}{y}$, no intervalo $-4 < x < 4$.*

Solução: Fazendo $f(x, y) = 0$, temos por derivação implícita, que:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(16).$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Resolvendo essa última equação em termos de derivadas, temos que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y}.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Chegamos na equação diferencial dada. Como a mesma é uma solução implícita simples, vamos resolver $x^2 + y^2 = 16$ para y em termos de x. Logo,

$$y = \pm\sqrt{16 - x^2}.$$

As duas funções que satisfazem a relação e são soluções explícitas definidas no intervalo $-4 < x < 4$.

2.1.6 Número de Solução

Resolvendo uma equação diferencial de primeira ordem $F(x, y, y', y'', y''', ..., y^n) = 0$, achamos, normalmente, uma família de funções $H(x, y, c) = 0$ ou uma família de curvas, contendo um parâmetro arbitrário de forma que a solução da equação diferencial é dada a partir de cada membro da família. De modo geral, ao resolver uma equação de n-ésima ordem $F(x, y, y', y'', y''', ..., y^n) = 0$ estaremos buscando uma família a n-parâmetros de soluções $H(x, y, c_1, c_2, c3, ..., c_n) = 0$

2.1.6.1 Solução Particular

Definição 5. *Uma solução para uma equação diferencial que não depende de parâmetros arbitrários é chamada de **solução particular**.*

Exemplo 6. *A função $y = \frac{c}{x} + 1$ é uma família de solução de um parâmetro c, se atribuímos valores a constante, estaremos achando uma solução particular e, com isso, a função $y = \frac{1}{x} + 1$ é uma solução particular correspondente a $c = 1$ da equação diferencial $xy' + y = 1$.*

2.1.6.2 Solução Geral

Definição 6. *Se toda solução da EDO de ordem n, $F(x, y, y', y'', y''', ..., y^n) = 0$ em um intervalo I, podendo ser obtida de $H(x, y, c_1, c_2, c3, ..., c_n)$ através de uma escolha apropriada dos $c_i, i = 1, 2, 3, ..., n$ falamos que a família é a **solução geral** da equação diferencial.*

Exemplo 7. *A função $y = \frac{c}{x} + 1$, para qualquer valor que a constante c assumir é uma solução da equação diferencial $xy' + y = 1$, no intervalo $(0, \infty)$.*

Solução: Se $y = \frac{c}{x} + 1$, então sua derivada $y' = \frac{-c}{x^2}$, substituindo na equação, temos:

$$xy' + y = 1.$$

$$x(\frac{-c}{x^2}) + \frac{c}{x} + 1 = 1.$$

$$\frac{-c}{x} + \frac{c}{x} = 1 - 1.$$

$$\frac{c}{x} = \frac{c}{x}.$$

Logo, $y = \frac{c}{x} + 1$ é uma solução geral da equação diferencial dada.

2.1.6.3 Solução Singular

Definição 7. *Uma equação diferencial que as vezes a solução não da de ser encontrada especificando os parâmetros de uma família de soluções, está solução é chamada de* ***solução singular****.*

Exemplo 8. *Sendo a função* $y(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$ *a solução geral da equação* $y' = xy^{1/2}$ *e quando* $c = 0$*, a solução particular obtida é* $y(x) = \frac{1}{16}x^4$*, porém,* $y(x) = 0$ *é uma solução singular, pois não pertence a família de soluções dada por* $y(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$*, uma vez que não é possível obter* $y(x) = 0$ *atribuindo valores a constante* c*.*

2.2 RESUMO SOBRE AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

2.2.1 Problema de Valor Inicial

Definição 8. *Uma equação diferencial de primeira ordem, sujeita a condição inicial é dada por:*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = h(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

onde x_0 *é um número pertencente ao intervalo* I *e* y_0 *é um número real arbitrário. A solução* $y = y(x)$ *deste problema é uma solução da equação diferencial* $\frac{dy}{dx} = h(x,y)$ *que satisfaz a condição inicial* $y(x_0) = y_0$*. Logo, é chamada de* ***problema de valor inicial****.*

Dessa forma, podemos dizer que é chamado de valor inicial uma equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = h(x,y).$$

que quando procuramos uma solução da equação diferencial $y' = h(x,y)$ em um intervalo I contendo x_0 de modo que o seu gráfico passa pelo ponto (x_0, y_0).

Exemplo 9. *O problema de valor inicial dado pela EDO*

$$\begin{cases} y' = (1-2x)y^2 \\ y(0) = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Escrevendo em termos dy/dx, temos

$$\frac{dy}{dx} = (1-2x)y^2.$$

Separando os termos dy e dx na equação

$$\frac{dy}{y^2} = (1-2x)dx.$$

Integrando cada membro da equação

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int (1-2x)dx.$$
$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int (1-2x)dx.$$
$$-\frac{1}{y} = x - x^2 + C.$$
$$y^{-1} = -x + x^2 - C.$$

Dessa forma, chegamos em uma solução geral inversa, porém uma solução desse problema deve satisfazer a condição inicial $y(0) = -1/6.$

$$y(0)^{-1} = -C.$$
$$(-\frac{1}{6})^{-1} = -C.$$
$$c = 6.$$

segue que

$$\frac{1}{y(x)} = x^2 - x - 6.$$

Logo, a solução satisfaz a condição inicial, pois é uma solução que satisfaz a condição inicial da equação diferencial.

2.2.2 Teorema de Existência e Unicidade

Nesta etapa, vamos compreender se uma solução existe e, quando existir, se é a única solução para o problema, porém não é objetivo deste trabalho demonstrar o teorema, pois o teorema devido ao matemático Frances Charles Émile Picard, nos dá condições para garantir existência e unicidade de soluções.

Definição 9. *Dado o retângulo R contido em $\mathbb{R}^2$ definido por $\alpha < x < \beta$, $a < y < b$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $h(x, y)$ e a derivada parcial de y é contínua em R, então a solução $y(x)$ existe e é única.*

Exemplo 10. *Dado a equação diferencial*

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Pelo teorema da existência e unicidade vamos analisar uma $h(x, y) = y^2$ definida em todo o plano, $R = \mathbb{R}^2$, sendo a função continua em R e sua derivada parcial $\frac{\partial h}{\partial y} = 2y$, também continua em R, então pelo teorema no ponto $(1, 1)$ existe uma solução.

Solução: Resolvendo a equação diferencial integrando em ambos os lados, temos

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx.$$
$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int dx.$$
$$-\frac{1}{y} = x + C.$$
$$y^{-1} = C - x.$$
$$y(x) = \frac{1}{C - x}.$$

Chegamos em uma solução da equação diferencial.Entretanto, como queremos resolver o dado inicial $y(1) = 1$

$$1 = y(1) = \frac{1}{C - 1}.$$
$$C - 1 = 1.$$
$$C = 2.$$

Então a curva que passa pelo ponto $(1, 1)$ é dado pela função

$$y(x) = \frac{1}{2 - x}.$$

Deste modo, temos que a solução do P.V.I não só existe como também é única.

2.2.3 Variáveis Separáveis

Definição 10. *Uma equação diferencial escrita da forma*

$$g(y)dy = f(x)dx.$$

é chamada de equações separáveis, pois as variáveis dessa equação são separadas pela igualdade.

Exemplo 11. *Uma equação separável pode ser escrita da forma*

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x).$$

e se $y = h(x)$ representar uma equação do tipo

$$g(h(x))h'(x) = f(x).$$

integrando ambos os lados, temos

$$\int g(h(x))h'(x)dx = \int f(x)dx + c.$$

porém, $dy = h'(x)dx$ e substituindo na expressão acima, temos o procedimento para a resolução de equações separáveis

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c.$$

Agora, vamos resolver um problema específico fazendo uso de procedimento para a resolução de equação diferencial de primeira ordem $9y\frac{dy}{dx} + 4x = 0$.

Solução: Para encontrar a solução da equação diferencial, temos que em um primeiro momento separar as variáveis

$$9ydy = -4xdx.$$

Agora, integramos ambos os lados

$$\int 9ydy = \int -4xdx.$$

$$\frac{9y^2}{2} = \frac{4x^2}{2} + C \Rightarrow 4x^2 + 9y^2 = C_1; C_1 = 2C.$$

Logo a solução geral da equação diferencial é dado por $4x^2+9y^2 = C_1$ (YARTEY; RIBEIRO, 2017).

2.2.4 Equação Homogênea

Para iniciarmos o conceito de equação homogênea, primeiramente, temos que abordar e definir uma função homogênea para podermos tratar sobre os métodos de resolução da mesma.

Definição 11. *Dizemos que a função g é uma função homogênea de grau n, se ocorre que*

$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n g(x, y).$$

Exemplo 12. *Dada uma função*

$$g(x, y) = x^3 + x^2 y.$$

calculando, temos

$$g(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 + (\lambda x)^2(\lambda y).$$
$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^3 + \lambda^2 x^2 \lambda y.$$
$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^3 + \lambda^3 x^2 y.$$
$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3(x^3 + x^2 y).$$
$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 g(x, y).$$

Logo a função $g(x, y)$ é uma função homogênea de grau 3.

Definição 12. *Uma equação diferencial escrita da forma*

$$\alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy = 0.$$

*sendo α e β funções homogêneas e de mesmo grau é chamada de **equação homogênea***

2.2.4.1 Método de Solução

Para encontrarmos a solução de uma equação homogênea, podemos encontrar transformando a equação homogênea em uma equação separável, através da mudança de variável, especificamente, fazendo a mudança $y = ux$. Desta forma, seja $y = ux$

e sua diferencial $dy = xdu + udx$, substituindo na equação diferencial $\alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy = 0$, temos

$$\alpha(x,ux)dx + \beta(x,ux)[xdu + udx] = 0.$$

Agora, podemos escrever isolando a variável x pela propriedade da homogeneidade e por meio de cálculos simples podemos chegar em equação separável

$$\begin{aligned}
x^n\alpha(1,u)dx + x^n\beta(1,u)[xdu + udx] = 0. \\
x^n\alpha(1,u)dx + x\beta(1,u)du + x^n u\beta(1,u)dx = 0. \\
[\alpha(1,u) + u\beta(1,u)]dx + x\beta(1,u)du = 0. \\
\frac{dx}{x} + \frac{\beta(1,u)du}{\alpha(1,u) + u\beta(1,u)} = 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, chegamos em uma equação separável através da substituição de variável.

Exemplo 13. *Dada a equação diferencial*

$$(y + x)dx - xdy = 0.$$

Note que é uma equação homogênea de grau 1 e, com isso, vamos escrevê-la como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + x}{x}.$$

Substituindo $y = xu$ na equação acima, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d(ux)}{dx} &= \frac{ux + x}{x}. \\
\frac{du}{dx}x + u\frac{dx}{dx} &= \frac{x(u+1)}{x}. \\
\frac{du}{dx}x + u &= u + 1. \\
x\frac{du}{dx} &= 1.
\end{aligned}$$

Chegamos em uma equação separável, então separando as variáveis e integrando em ambos os lados, temos

$$\int du = \int \frac{dx}{x}.$$

$$u = ln|x| + c.$$

Logo a solução geral do problema é

$$\frac{y}{x} = ln|x| + c \Rightarrow y = xln|x| + cx.$$

2.2.4.2 Equação Exatas

Uma função diferenciável g com duas variáveis x e y, dada por $g(x, y) = c$, sendo c uma constante e, com isso, a diferencial total é definida por

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy.$$

Logo, se $g(x, y) = c$, então $dg = 0$.

Exemplo 14. *Considerando a diferencial total da função* $g(x, y) = x^2y + 3y^3x = c$

Solução Calculando suas derivadas parciais, temos

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy + 3y^3 \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + 9y^2x.$$

Logo, obtemos

$$dg = (2xy + 3y^3)dx + (x^2 + 9y^2x)dy = 0.$$

rescrevendo a equação

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + 3y^3}{x^2 + 9y^2x}.$$

Seja g uma função diferenciável a uma família de curvas $g(x, y) = c$ sempre corresponderá a uma equação diferencial da forma $\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy = 0.$

Definição 13. *Uma expressão do tipo*

$$\alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy.$$

é chamada diferencial exata se uma função g atender a condição: $g_x = \alpha$ e $g_y = \beta$, então a equação diferencial

$$\alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy = 0.$$

é chamada uma equação diferencial exata.

Exemplo 15. *Considere a equação diferencial*

$$(9x^2 + 2y^2 + 2)dx + (4xy + 12y^2)dy = 0.$$

sendo $\alpha(x,y) = 9x^2 + 2y^2 + 2$ e $\beta(x,y) = 4xy + 12y^2$.

Note que é uma equação exata e se $g(x,y) = 3x^3 + 2xy^2 + 4y^3 + 2x$, então

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 9x^2 + 2y^2 + 2 = \alpha(x,y) \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 4xy + 12y^2 = \beta(x,y).$$

a solução geral é $3x^3 + 2xy^2 + 4y^3 + 2x = c$.

Teorema. Sejam as funções α e β e suas derivadas parciais (α_x, β_y), contínuas num domínio retangular R definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Então, uma equação diferencial $\alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy = 0$ é exata se, e somente se, a igualdade for verdadeira $\alpha_y = \beta_x$.

Demonstração

Para simplificar a demonstração vamos supor que $\alpha(x,y)$ e $\beta(x,y)$ tenha derivadas parciais de primeira ordem contínuas em $\mathbb{R}^2$. Agora se a expressão $\alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy$ é exata, então existe uma função g de classe C^2, tal que

$$\alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy.$$

para todo (x,y) em R. Logo

$$\alpha(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x} \quad e \quad \beta(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \quad e \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}.$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}.$$

Dessa forma, as derivadas parciais mistas são iguais pelo fato da continuidade das derivadas parciais de segunda ordem. Agora, teremos que provar a existência de uma função $G = G(x, y)$, tal que

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \alpha(x, y) \quad e \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \beta(x, y).$$

de modo que a equação diferencial ordinária $\alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy = 0$ seja exata. Logo, tomamos a relação $G_x = \alpha(x, y)$ e integrando em relação a x. Obtemos

$$G(x, y) = \int \alpha(x, y)dx + k(y). \tag{6}$$

onde k é uma constante de integração. Agora, vamos calcular a derivada parcial da equação (6) em relação a variável y

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int \alpha(x, y)dx + k'(y).$$

Fazendo a mudança $\frac{\partial G}{\partial y} = \beta(x, y)$, temos que

$$k'(y) = \beta(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int \alpha(x, y)dx. \tag{7}$$

e agora vamos integrar a equação (7) em relação a variável y e logo depois substituímos na equação (6). A solução para a equação diferencial é dada por $G(x, y) = c$.

Nota. É importante saber que a expressão

$$\beta(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int \alpha(x, y)dx.$$

na equação (7) independe da variável x, pois

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\beta(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int \alpha(x, y)dx\right] = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} \int \partial(x, y)dx\right) = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0.$$

2.2.5 Equações Lineares

Definição 14. *Uma equação diferencial da forma* $a_1(x)y' + a_0(x)y = s(x)$ *dividi por* $a_1(x)$*, resulta em uma equação diferencial* $y' + R(x)y = S(x)$

$$y' + R(x)y = S(x). \tag{8}$$

chamada de equação linear na forma geral. Dessa forma, uma solução para a equação (8) em um intervalo I*, em que* $R(x)$ *e* $S(x)$ *são funções contínuas, será mostrada nessa etapa.*

Fator de Integração

Escrevendo a equação (8) usando diferenciais, temos

$$dy + [R(x)y - S(x)]dx = 0.$$

Logo, podemos encontrar uma função $\lambda(x)$, pois é uma equação linear e somos capazes de transformar em uma equação diferencial exata

$$\lambda(x)dy + \lambda(x)[R(x)y - S(x)]dx = 0.$$

A expressão $\lambda(x)dy + \lambda(x)[R(x)y - S(x)]dx$ é uma diferencial exata. Dessa forma, o lado esquerdo da expressão é exata se

$$\frac{\partial}{\partial x}\lambda(x) = \frac{\partial \lambda(x)}{\partial y}[R(x)y - S(x)] \ \Rightarrow \ \frac{d\lambda}{dx} = \lambda R(x) \ \Rightarrow \ \frac{d\lambda}{\lambda} = R(x)dx.$$

A equação acima pode ser resolvida integrando ambos os lados, pois a mesma é uma equação separável. Logo, temos

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int R(x)dx.$$
$$In|\lambda| = \int R(x)dx.$$

$$\lambda(x) = e^{\int R(x)dx}. \tag{9}$$

Logo, a função $\lambda(x)$ é um **fator de integração** e a solução da equação (8) é dada por

$$y = e^{-\int R(x)dx}\left[e^{\int R(x)dx}S(x)dx + C\right]. \tag{10}$$

A solução em questão é obtida quando multiplicamos ambos os lados da equação (8) pelo fator de integração (9), obtendo

$$\frac{dy}{dx}e^{\int R(x)dx} + R(x)e^{\int R(x)dx}y = e^{\int R(x)dx}S(x).$$

Observe que, o lado esquerdo da equação é a derivada de um produto em relação ao fator y

$$\frac{d}{dx}[e^{\int R(x)dx}y] = e^{\int R(x)dx}S(x).$$

integrando ambos os lados da equação acima, obtemos

$$e^{\int R(x)dx}y = \int e^{\int R(x)dx}S(x)dx + C.$$

resolvendo em relação a y chegaremos na solução (10).

Exemplo 16. *Dada a equação diferencial*

$$x\frac{dy}{dx} + (x+1)y = x.$$

Solução: Primeiro vamos dividir a equação por ,$x > o$, para deixar na forma de uma equação linear e, com isso, temos

$$\frac{x}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{(x+1)y}{x} = \frac{x}{x}.$$
$$\frac{dy}{dx} + \frac{(x+1)}{x}y = 1.$$

sendo $R(x) = \frac{(x+1)}{x}$, deste modo o fator integrante será:

$$\lambda(x) = e^{\int(1+\frac{1}{x})dx} = e^{x+ln|x|} = xe^x.$$

Multiplicando o fator integrante na equação diferencial linear dada, temos

$$xe^x\frac{dy}{dx} + \frac{(x+1)}{x}xe^xy = xe^x.$$

Sendo $xe^x\frac{dy}{dx} + \frac{(x+1)}{x}xe^xy = \frac{d}{dx}(xe^xy)$. Logo, obtemos

$$\frac{d}{dx}(xe^xy) = xe^x.$$

Agora, vamos integrar em ambos os lados da equação

$$\int \frac{d}{dx}(xe^xy) = \int xe^x.$$
$$xe^xy = xe^x - \int e^x dx.$$
$$xe^xy = xe^x - e^x + C.$$
$$y = \frac{xe^x}{xe^x} - \frac{e^x}{xe^x} + \frac{C}{xe^x}.$$
$$y = 1 - \frac{1}{x} + \frac{C}{xe^x}.$$

Dessa forma, chegamos na solução geral da equação diferencial linear do exemplo.

2.3 MODELOS MATEMÁTICOS A PARTIR DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Nesta etapa do trabalho, vamos abordar a equação logística e suas soluções como a função logística, função sigmoide e o gráfico da solução. Para Bassanezi (2002, p.326) "O trabalho com modelos com poucas variáveis sugerimos a opção pelos determinísticos baseados em equações diferenciais ordinárias".

2.3.1 Equação Logística

Para analisar o comportamento de uma determinada população são formulados modelos que atendam ao propósito, se o objetivo do pesquisador é encontrar uma função que represente o crescimento de uma população sem um inibidor de crescimento, a função ideal é dada por

$$\frac{dP}{dt} = k(P)P. \tag{11}$$

Com isso, temos a taxa de variação da população em função do tempo (11), sendo k uma constante. O matemático belga Pierre François Verhlst, por volta de 1840 começou o estudo sobre os modelos matemáticos para conseguir fazer uma previsão do crescimento de uma determinada população humana e, dessa forma, o seu modelo supõe que uma população cresce em um determinado período e depois tende a se estabilizar. Umas das equações estudadas por ele foi

$$\frac{dP}{dt} = P(c - aP). \tag{12}$$

é chamada de equação logística, onde P denota a população e t o tempo, sendo c e a constantes positivas.

A solução dessa equação diferencial (12) é chamada de **função logística** e o gráfico é chamado de curva logística (ZILL; CULLEN, 2001).

2.3.2 Solução da Equação Logística

Uma forma para resolver a equação (12) é através de alguns procedimentos que se iniciam pela separação de variáveis. Logo, temos que:

$$\frac{dP}{P(c - aP)} = dt.$$

Decompondo o lado esquerdo da equação diferencial em frações parciais e depois integrando, temos

$$dP(\frac{\frac{1}{c}}{P} + \frac{\frac{a}{c}}{c - aP}) = dt.$$

$$\frac{1}{c}ln|P| - \frac{1}{c}ln|c - aP| = t + C.$$

$$ln|\frac{P}{c - aP}| = ct + cC.$$

$$\frac{P}{c - aP} = C_1e^{ct}; \;\; C_1 = cC.$$

isolando $P(t)$, temos

$$P(t) = \frac{cC_1e^{ct}}{1 + aC_1e^{ct}}.$$

$$P(t) = \frac{cC_1}{aC_1 + e^{-ct}}. \tag{13}$$

Dessa forma, se for dada $P(0) = P_0, P_0 \neq c/a$, implicar que a equação $P/(c - aP) = C_1e^{ct}$ fica na forma:

$$C_1 = \frac{P_0}{c - aP_0}.$$

Substituindo em (13), temos:

$$P(t) = \frac{cP_0}{aP_0 + (c - aP_0)e^{-ct}}. \tag{14}$$

Logo,(14) é uma solução para a equação logística (12).
A função $P(t)$ dada por:

$$P(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} = \frac{e^t}{e^t + 1}. \tag{15}$$

é chamada de **função logística padrão** para todo $t\epsilon(-\infty, \infty)$ que é também conhecida como **função sigmoide** (NANTOMAH, 2019).

A função logística é uma função sigmoidais de crescimento. Entretanto, não é a única e, com isso, também temos a função Boltzmann que sua expressão matemática de $h(t)$, sendo $t \geqslant 0$, é da forma

$$\frac{\lambda}{1 + e^{\frac{t-\beta}{\delta}}} + \alpha. \tag{16}$$

Com as restrições para os parâmetros $\lambda < 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\delta > 0$ e $\alpha > [-\lambda/(1 + e^{-\beta/\delta})]$. (FLORENTINO et al., 2010).

2.3.3 Modelos de regressão não-linear

Há diversos modelos de regressão não-linear, entretanto, para o presente trabalho serão abordados somente a função logísticas e a função boltzman que são funções sigmoidais e podem ser simbolizados pela $h(t;\theta)$ e um componente aleatório e_i.

$$Y_i = h(t_i;\theta) + e_i.$$

Com estes modelos de regressão não-linear poderá encontrar estimativas e os erros padrões aproximados para os parâmetros ajustados as funções sigmoidais. Deste modo, a partir expressão 16, temos

$$h(t;\theta) = \frac{\lambda}{1 + e^{\frac{t-\beta}{\delta}}} + \alpha.$$

uma forma do modelo de regressão não-linear de Boltzman.

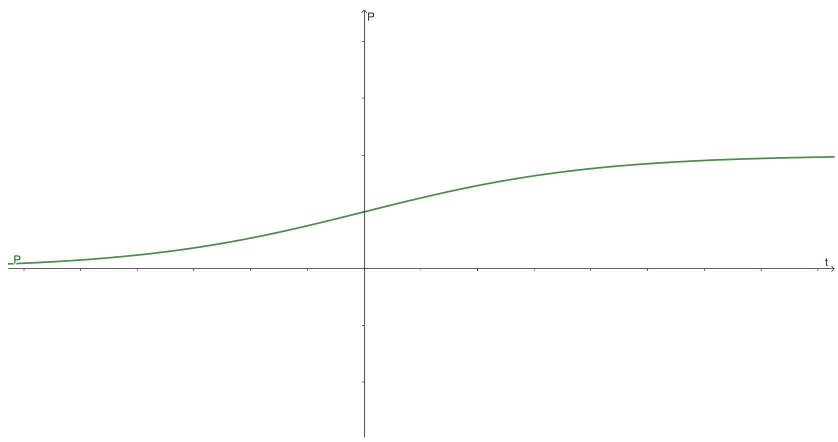
Logo, o gráfico das funções sigmoidais têm como característica o gráfico em forma de "s", de onde deu origem ao seu nome(a letra S em grego corresponde letra grega sigma).

A função sigmoide foi usada pelo matemático P. F. Verhulst e outros pesquisadores com o objetivo de modelar o crescimento populacional de civilizações humanas até colônias de bactérias (WOOD, 2023).

2.3.4 Gráfico das funções

Os gráficos das funções sigmoidais são em forma de S e a função logística padrão ou curva logística (15) pode ser obtido de forma bem simples, a variável t que representa na maioria dos casos o tempo, dificilmente assumirá valores negativos. Segundo Zill (2016) as curvas logísticas provaram ser muito eficiente na previsão dos padrões de crescimento de determinados tipos de pulga-d'águas(Daphnia), bactérias e protozoário em um meio limitado.

Figura 1 – Gráfico da Função 15



Fonte: Próprio autor, 2023

Podemos notar que a figura 1 se assemelha a forma de um S sendo característica da função sigmoide. Os valores de saída dessa função na maioria dos casos vão estar em um intervalo $(0, 1)$.

Exemplo 17. *Um estudante ao voltar para a faculdade portando um vírus da gripe, conforme os dias foram passando o número de infectados foram aumentando, por ser um ambiente fechado, logo o vírus se propagou em um local que contêm 1000 pessoas. Dessa forma, a partir da condição inicial* $P(0) = 1$ *e supondo que ninguém deixe a universidade, podemos prever o número de infectados por meio da equação (12), com isso*

$$\frac{dP}{dt} = kP(1000 - P).$$

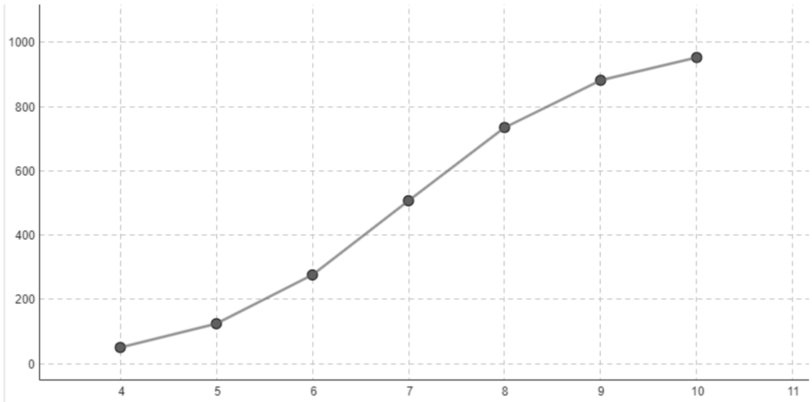
sendo $c = 1000k$ e $a = k$. Após quatro dias $P(4) = 50$, logo os dados foram obtidos e construído o gráfico da solução

Tabela 1 – Número de infectados em função do tempo

t(dias)	4	5	6	7	8	9	10
P(Nº. de infectados)	50	124	276	507	735	882	953

Fonte:(ZILL, 2016)

Figura 2 – Gráfico do Número de infectados em função do tempo



Fonte:(ZILL, 2016)

O gráfico da função $P(t)$ mostra o comportamento do número de infectados em função do tempo t e, com isso, podemos perceber que conforme os dias vão passando o número de infectado vai se aproximando da solução de equilíbrio ($P = 1000$).

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A seguir vamos apresentar os dados coletados da empresa *netflix* e do aplicativo *whatsapp* e logo depois vamos criar o gráfico de cada caso a partir do *software Qtiplot* para que possamos analisar o comportamento dados reais em função dos anos representados graficamente.

O algoritmo de Leveberg-Marquardt (LMA ou LM) será abordado para ajustar os dados bibliográficos a curva logística, pois esse algoritmo é eficaz na resolução de problemas de ajuste de curvas e, com isso, encontrar os parâmetros do ajuste da função sigmoide aos dados bibliográficos do trabalho (JI, 2020).

3.1 Dados da *Netflix* e *Whatsapp*

3.1.1 Informação da *Netflix*

A *Netflix* oferece uma vasta variedade de séries, documentários e filmes, tudo isso é oferecido de forma online, porém esse serviço é exclusivo apenas para assinantes (NETFLIX, 2023).

A empresa é conhecida mundialmente por conta do sucesso dos seus conteúdos que envolvem pessoas de todas as idades. Dessa forma, a empresa foi escolhida para servir como base de estudos para analisarmos como o comportamento de uma inovação tecnológica se propaga durante um período de tempo, por meio do números de assinantes anuais.

.

Tabela 2 – Número de usuários (em milhões) em função dos anos da *Netflix*.

2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
21,50	25,71	35,63	47,99	62,71	79,90	99,04	124,35	151,56	192,95	209

Fonte: (BUSINESSOFAPPS, 2023)

A empresa em questão está no mercado oferecendo na modalidade de serviço de *streaming online* para assinantes desde 2010 e para essa pesquisa obtemos apenas os dados de 2011 a 2021 através do site www.businessofapps.com, porém é suficiente. Chegamos nesse site por meio de pesquisas realizadas pela web, nele conseguimos os dados do número de assinantes de cada primeiro trimestre dos anos de 2011 a 2021. Logo, a tabela 2 traz os dados.

3.1.2 Informações do *Whatsapp*

O *Whatsapp* é um aplicativo de mensagens instantâneas que possibilita uma pessoa se comunicar com outra de forma rápida, simples e confiável por meio de mensagem de texto, chamadas de voz e de vídeo em grupo ou individual, além de oferecer a possibilitar o compartilhamento de imagens, vídeos e áudios.

É um aplicativo gratuito e para usar seus serviços não necessita de uma conexão forte com a internet, logo, o mesmo se tornou muito utilizado no dia a dia das pessoas ao redor do mundo (WHATSAPP, 2023).

Deste modo, por se tratar de um aplicativo que surgiu no mercado tecnológico oferecendo serviços que no decorrer dos anos os números de usuários aumentaram significativamente ao redor do mundo se deu o interesse em obter esses dados para podermos analisar o comportamento que essa difusão tecnológica vem causando no decorrer desses anos.

A coleta de dados do aplicativo de mensagem instantânea foi através do mesmo site www.businessofapps.com onde conseguimos obter informações sobre o número de usuários em milhões em função do ano. Segue na tabela

Tabela 3 – Número de usuários (em milhões) em função dos anos do *Whatsapp*.

2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
69	189	356	628	1013	1276	1499	1730	2065	2245	2376

Fonte: (BUSINESSOFAPPS, 2023)

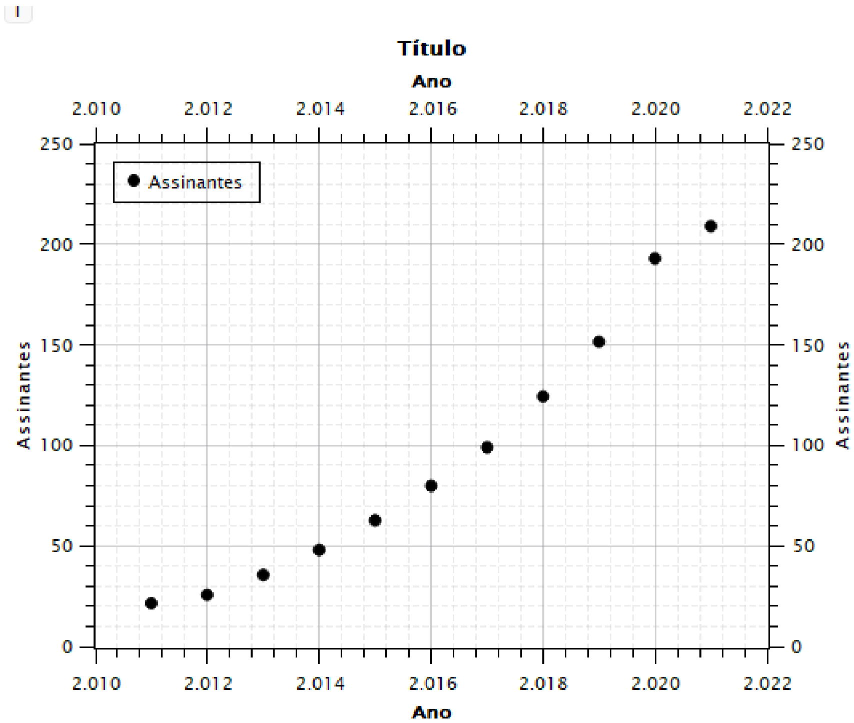
Com a tabela podemos identificar a quantidade de usuários do *Whatsapp* em relação ao primeiro trimestre de cada ano. Os números de usuários aumentaram significativamente de acordo com esses dados.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Caso *Netflix*

Os dados da tabela 2 serão plotados em um programa de computador chamado *Qtiplot* responsável pela criação dos gráficos. Logo, o número de assinantes da empresa em função dos anos vai passar por um ajuste não linear a fim de encontrar os parâmetros desses dados. Dessa forma, temos

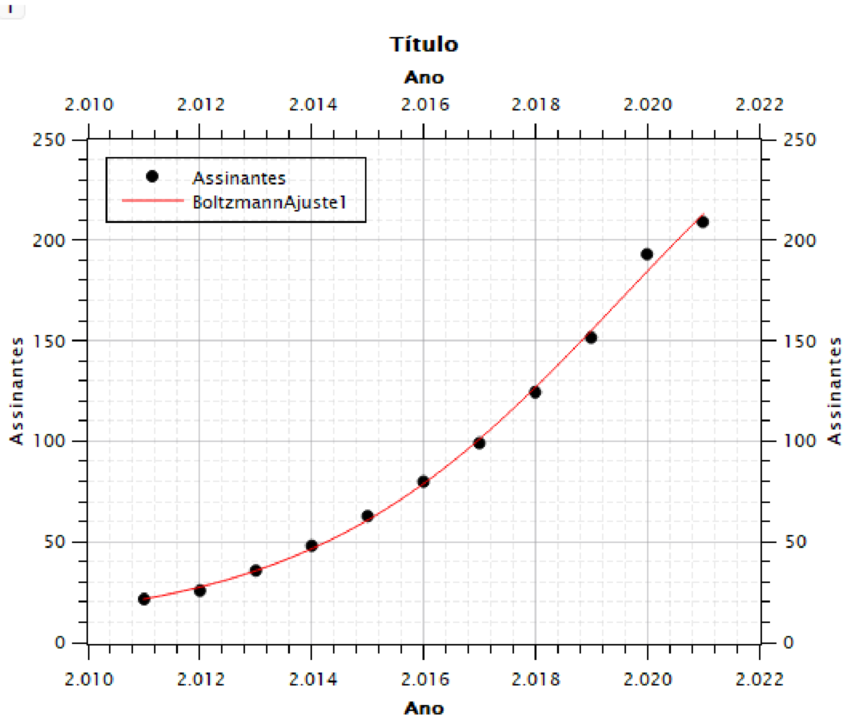
Figura 3 – Gráfico do Número de assinantes em função dos anos da *Netflix*.



Fonte: Próprio autor, 2023

Ao verificar o gráfico da da Figura 3 podemos observar que houve um crescimento significativo dos números de assinantes no decorrer dos anos, porém nos anos de 2020 a 2021 o valor tende a se estabilizar para um valor constante. A função que tem esse comportamento é a função sigmoide ou função logística padrão que no exemplo da figura 1 é abordado seu comportamento. Dessa forma, com base nessas informações vamos ajustar a função sigmoide aos dados a fim de encontrar os parâmetros que melhor ajusta aos dados.

Figura 4 – Gráfico do Ajuste não linear dos dados.



Fonte: Próprio autor, 2023

Figura 5 – Parâmetros da função sigmoide.

```
&Registro de resultados

[2022-10-14 13:44:29        Gráfico: "Gráfico1"]
Regressão de Boltzmann (Sigmoidal) do conjunto de dados: Tabela1_Assinantes,
Ordenar: Não
Método de ponderação: Sem ponderação
Levenberg-Marquardt escalado algorítmo com tolerância = 0,0001
De x = 2,0110000000000e+03 a x = 2,0210000000000e+03

Parâmetro                   Valor                  Erro
--------------------------------------------------------------------------
A1 (valor inicial)          6,8226259503427e+00    9,0681640125208e+00
A2 (valor final)            3,3527175369490e+02    6,4389091733890e+01
x0 (centro)                 2,0195483266318e+03    1,0238255919976e+00
dx (constante de tempo)     2,7942199128314e+00    5,3040757199422e-01
--------------------------------------------------------------------------
Erros foram multiplicados com sqrt(Chi^2/doF) = 4,1484341288925e+00

Estatísticas                          Tabela1_Assinantes
-------------------------------------------------------------------------
N (pontos de dados)                   11
Graus de liberdade (doF)              7
Chi^2/doF                             1,7209505721760e+01
RSS (Soma residual dos quadrados)     1,2046654005232e+02
R                                     9,9862615980009e-01
R^2                                   9,9725420703708e-01
R^2 ajustado                          9,9607743862440e-01
RMSE (Raiz do erro quadrado médio)    4,1484341288925e+00
Interações                            15
Status                                success
-------------------------------------------------------------------------
```

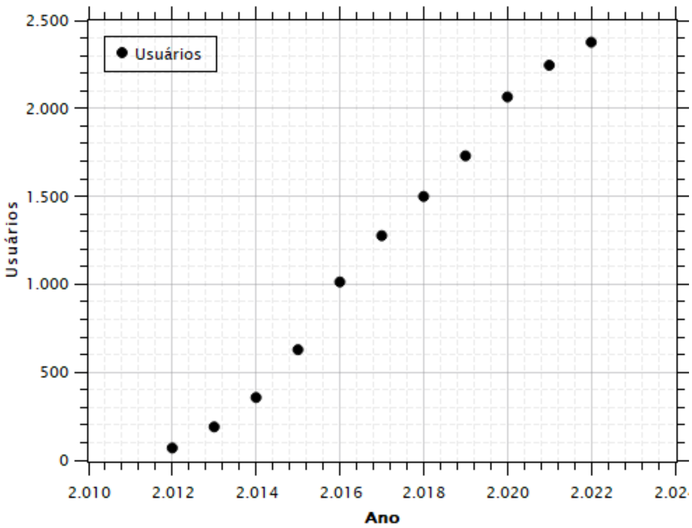
Fonte: Próprio autor, 2023

Logo, a Figura 4 traz o ajuste não linear dos dados bibliográficos ajustadas a função sigmoide que se ajustou perfeitamente e a Figura 5 mostra os resultados dos parâmetros da função sigmoide ao ser ajustada aos dados reais e, dessa forma, podemos concluir que uma equação diferencial ordinária logística descreve o comportamento dos dados da *Netflix* durante os anos de 2011 a 2021.

4.2 Caso *Whatsapp*

A partir dos dados reais criamos um gráfico de dispersão como mostra a Figura 6

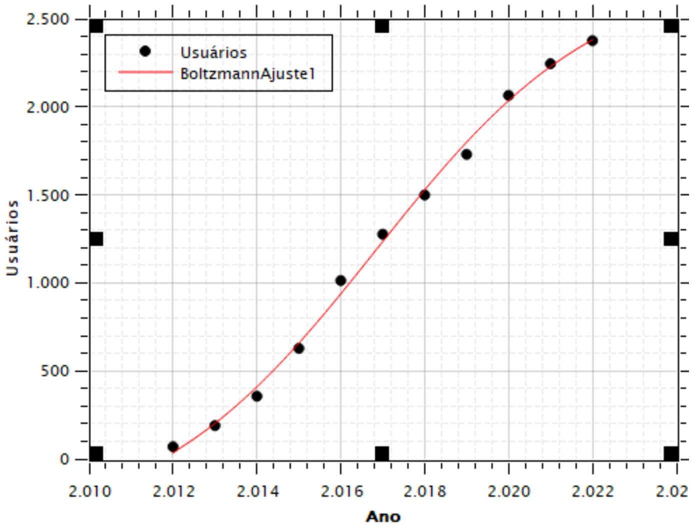
Figura 6 – Dados bibliográficos dos usuários do *Whatsapp* em função tempo.



Fonte: Próprio autor, 2023

Ao analisar o gráfico podemos perceber que o número de usuários cresce durante um determinado período e tende a se estabilizar. O gráfico se assemelha um pouco com a letra S que é uma característica da função sigmoide. Com isso, ajustaremos a o gráfico a função sigmoide para conseguir os valores dos parâmetros dessa comparação.

Figura 7 – A função sigmoide com o ajuste não linear dos valores experimentais.



Fonte: Próprio autor, 2023

O ajuste da função sigmoide da Figura 7 será discutida com os valores dos parâmetros que a a Figura 8 aborda abaixo.

Figura 8 – Parâmetros do ajuste da função sigmoide.

[2022-11-06 10:14:59 Gráfico: "Gráfico1"]
Regressão de Boltzmann (Sigmoidal) do conjunto de dados: Tabela1_Usuários,
usando função: A2+(A1-A2)/(1+exp((x-x0)/dx))
Ordenar: Não
Método de ponderação: Sem ponderação
Levenberg-Marquardt escalado algorítmo com tolerância = 0,0001
De x = 2,0120000000000e+03 a x = 2,0220000000000e+03

Parâmetro	Valor	Erro
A1 (valor inicial)	-4,1698305764579e+02	2,1733207264048e+02
A2 (valor final)	2,7887389813693e+03	1,9884462893975e+02
x0 (centro)	2,0168380094412e+03	2,8131640435751e-01
dx (constante de tempo)	2,6819343111457e+00	4,6008807760041e-01

Erros foram multiplicados com sqrt(Chi^2/doF) = 5,2310510348793e+01

Estatísticas	Tabela1_Usuários
N (pontos de dados)	11
Graus de liberdade (doF)	7
Chi^2/doF	2,7363894929512e+03
RSS (Soma residual dos quadrados)	1,9154726450658e+04
R	9,9862488658037e-01
R^2	9,9725166409766e-01
R^2 ajustado	9,9607380585380e-01
RMSE (Raiz do erro quadrado médio)	5,2310510348793e+01
Interações	6
Status	success

Fonte: Próprio autor, 2023

Com base nessas informações podemos perceber que os valores da função sigmoide estão quase entrando em equilíbrio com os dados reais da pesquisa, pois a Figura 8 traz os valores dos parâmetros que possui um erro muito pequeno. Dessa forma, podemos concluir que a EDO logística descreve muito bem o comportamento dos usuários do *Whatsapp* e ajudando a entender o processo de difusão dessa inovação tecnológica durante o período de 2012 a 2022.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho sobre estudo de caso foi baseado em estudos feitos sobre as equações diferenciais ordinárias que possui uma vasta diversidades de modelos matemáticos que possibilita o pesquisador aplicá-la em várias situações e, com isso, propomos usar o modelo que se baseia nas as equações logísticas para realizar um estudo da difusão de tecnologias na sociedade que a partir dos dados reais coletados do número de usuários do *Whatsapp* e da empresa *Netflix* em função dos anos, conseguimos obter depois dos ajustes uma aproximação dos dados bibliográficos com a função logística.

Logo, podemos modelar a difusão dessas inovações tecnológicas chamadas de *Netflix* e *Whatsapp*, durante o período em questão, através de uma EDO logística, ajudando a entender o comportamento do número de usuários das empresas na sociedade.Entretanto, não deu para prever ano exato que esses dados bibliográficos vão se estabilizar, porém através dos ajustes da função sigmoide aos dados bibliográficos do trabalho, podemos concluir que estes já estão se esbalizando para valores constantes neste período analisado.

Portanto, a partir desse trabalho poderá ser desenvolvido outros que tenha como base modelos matemáticos e nas suas formulações as equações diferenciais ordinárias para desenvolver pesquisas no âmbito da inovação tecnológica na sociedade.

REFERÊNCIAS

BUSINESSOFAPPS. **App Data: Get the latest download, usage, user and demographic data and statistics for apps, influencers and social media**. 2023. Acessado em 10/02/2023. Disponível em: <https://www.businessofapps.com/>.

FLORENTINO, H. de O.; BISCARO, A. de F. V.; PASSOS., J. R. de S. **FUNÇÕES SIGMOIDAIS APLICADAS NA DETERMINAÇÃO DA ATIVIDADE METANOGÊNICA ESPECÍFICA - AME**. 2010. Acessado em 06/02/2023. Disponível em: <http://jaguar.fcav.unesp.br/RME/fasciculos/v28/v28_n1/A10_Helenice.pdf>.

JI, Q. **Levenberg-Marquardt Algorithm**. 2020. Acessado em 07/02/2023. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/levenberg-marquardt-algorithm>.

NANTOMAH, K. **On Some Properties of the Sigmoid Function**. 2019. Acessado em 15/02/2023. Disponível em: <www.asiamath.org>.

NETFLIX. **Filmes, séries e muito mais. Sem limites. Assista onde quiser. Cancele quando quiser.** 2023. Acessado em 17/02/2023. Disponível em: <https://www.netflix.com/br/>.

VILHENA, M. L. M. **Uma Breve Introdução as Equações Diferenciais: Alguns Tipos de Equações Diferenciais Ordinárias.** Tese (Graduação), 2015.

WHATSAPP. **Sobre o WhatsApp**. 2023. Acessado em 17/02/2023. Disponível em: <https://www.whatsapp.com/>.

WOOD, T. **Sigmoid Function**. 2023. Acessado em 15/02/2023. Disponível em: <https://deepai.org/machine-learning-glossary-and-terms/sigmoid-function>.

YARTEY, J. N. A.; RIBEIRO, S. S. **EQUAÇÕES DIFERENCIAIS**. Salvador–BA: UFBA, Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação a Distância, 2017.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicação em Modelagem**. 10. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2016. –.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. 3. ed. [S.l.]: Pearson Education, 2001. v. 1.

APÊNDICE A – TRABALHO APRESENTADO NO V SIMPÓSIO DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO DA UFPA - CAMPUS CASTANHAL

DIFUSÃO DE INOVAÇÃO TECNOLÓGICA ATRAVÉS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS – O CASO DA NETFLIX

DIFFUSION OF TECHNOLOGICAL INNOVATION THROUGH ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS – THE CASE OF NETFLIX

DIFUSIÓN DE LA INNOVACIÓN TECNOLÓGICA MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS - EL CASO DE NETFLIX

Ederson Gonçalo Lima Albuquer[1]
Renato Germano[2]

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem Matemática. Equação diferencial. Inovação tecnológica. Netflix.

INTRODUÇÃO

A Modelagem Matemática na formação do aluno de licenciatura em Matemática é muito importante, pois é uma estratégia de ensino que possibilita a aplicação dos conteúdos matemáticos no dia a dia dos estudantes, permitido que o mesmo entenda e aprenda os assuntos de forma significativa e, com isso, essa estratégia acaba ajudando o ensino e aprendizagem da matemática no âmbito escolar. “Uma modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender, enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças”.(BASSANEZI, 2002, p. 177).

Para Burak (1992 apud FURTADO et al, 2017):

> A modelagem matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões.

Deste modo, a modelagem matemática pode ser voltada ao ensino e aprendizagem da matemática e também a matemática aplicada criando modelos matemáticos ou adotando modelos já existente para elaboração de pesquisas, pois segundo Silveira e Miola(2008 apud FURTADO et al, 2017), comentam que:

---

[1] Estudante do Curso de Licenciatura em Matemática da UFPA, ederson.goncalo.9@gmail.com
[2] Professor da Faculdade de Matemática - UFPA, rgermano@ufpa.br

> A Modelagem Matemática tem suas origens plantadas na matemática aplicada. Ela é utilizada entre os matemáticos aplicados como o principal processo para obtenção de um modelo que expõe, em uma linguagem matemática, conjunto de símbolos e relações matemáticas [...].

Nessa perspectiva, o presente trabalho vem trazendo a modelagem matemática como recurso para obtermos modelos que satisfaça a nossa pesquisa, trazendo resultados que se aproxime da realidade, através de recursos tecnológicos que facilitem a compreensão e a visualização dos resultados.

Uso de EDO na modelagem matemática segundo Bassanezi (2002) pode ser considerada com arte de aplicar matemática a situações problemáticas, usando como processo comum a modelagem matemática. Ele também fala que devido à estabilidade e a regularidade das soluções dos sistemas de equações diferenciais ordinárias, tornou-se o alvo preferido dos matemáticos.

O processo de propagação de inovação tecnológica pode ser modelado da mesma forma que a propagação de um vírus, isto é, pode-se usar os mesmos métodos matemáticos utilizados na epidemiologia matemática. Existem diversos modelos de propagação de inovação tecnológica na sociedade que utilizam equações diferenciais ordinárias (EDO) em suas formulações. Neste trabalho propomos utilizar o chamado modelo logístico para a difusão de uma inovação tecnológica. Comparamos com dados reais dos novos assinantes da Netflix, no intervalo de 2011 a 2021.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Equações diferenciais ordinárias (EDO) de acordo com Bassanezi (2002, p. 124) são definidas quando temos apenas uma variável independente, o modelo matemático é dado em termos de equações diferenciais ordinárias, ou seja, quando o domínio da função $y(x)$ está contida no conjunto dos números reais, isto é, tem apenas 1 dimensão, podendo ser classificada de acordo com sua maior derivada que chamamos de maior ordem. Resolver uma EDO consiste em encontrar curvas $y = y(x)$, de modo que a direção da reta tangente em cada ponto de uma destas curvas coincida com o valor pré estabelecido pela função $f(x;y)$ neste ponto, para o caso de uma EDO de primeira ordem, dada por

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Dessa forma, uma equação diferencial pode admitir infinitas soluções (uma para cada valor da constante). Dentro das Equações diferenciais, temos as equações logísticas que foi utilizada inicialmente para descrever um modelo de crescimento populacional publicado inicialmente por Pierre Verhulst (1845, 1847). O Modelo de Verhurst supõe que uma população, vivendo num determinado meio, deverá crescer até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar. O modelo em questão parte da ideia de considerar a taxa de crescimento da população proporcional à população em cada instante. Dessa forma, temos

$$\frac{dP}{dt} = k(P)P$$

Uma das soluções desta última é a função sigmoide, que é uma função matemática bastante utilizada no âmbito da economia e da computação. A sua expressão matemática mais simples é da forma

$$y(t) = \frac{1}{1+e^{\ -1}}$$

Em termos matemáticos diz-se que esta é uma função suave e é continuamente diferenciável. O gráfico da função sigmoide se assemelha ao S, por isso o nome sigmoide. Os dados inseridos na função vão ter como resultado sempre valores entre 0 e 1.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os dados da pesquisa foram obtidos no site www.businessofapps.com, nele conseguimos obter informações do número de assinantes anuais da Netflix. Com isso, conseguiremos fazer o ajuste dos dados reais com a solução da EDO logística. Na tabela 1, estão as quantidades de assinantes em milhões em função do ano.

Tabela 1: Quantidades de usuários (em milhões) em função dos anos da Netflix

0	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
0	21,50	25,71	35,63	47,99	62,71	79,90	99,04	124,35	151,56	192,95	209,00

Fonte: businessofapps.com, 2022.

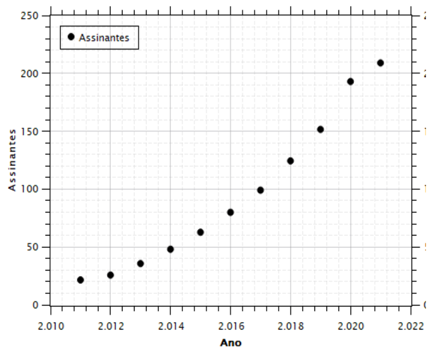
Nesta tabela estão contidos os dados do ano em relação ao número de assinantes que a plataforma de stream online teve durante esse período de 2011 a 2021. Com base nessas informações que a aplicação vai se desenvolver. Dessa forma, vamos construir um gráfico com base nesses dados para visualizar o seu comportamento e analisar os dados a partir dos resultados que o programa que será utilizado no processo vai para a gente.

Faremos um ajuste não linear dos dados experimentais a fim de encontrar os parâmetros ótimos que melhor descrevem os dados.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O gráfico de dispersão dos dados experimentais estão mostrados na figura 1.

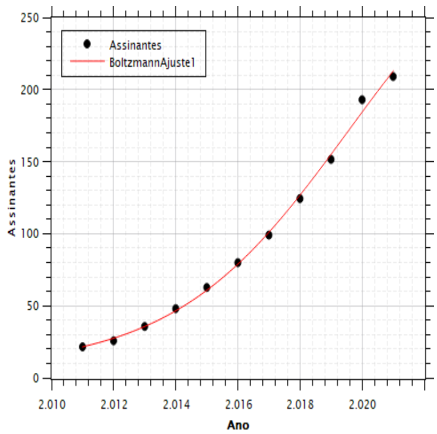
Figura 1: Valores experimentais dos assinantes da Netflix em função do tempo.



Fonte: Próprio autor, 2022.

Podemos afirmar a partir da figura 1 que a quantidade de assinantes cresce por um determinado período e depois tende se estabilizar para um valor constante, que é um comportamento típico de uma função sigmoide. Dessa forma, com base neste comportamento, ajustamos sigmoide a fim de encontrar os parâmetros ótimos que melhor ajustam os dados experimentais. Na figura 2 é apresentado o resultado deste ajuste.

Figura 2: Ajuste não linear dos valores experimentais com a função sigmoide.



Fonte: Próprio autor, 2022

Os resultados de forma detalhada se encontram na Figura 3, todos os dados relacionados aos parâmetros, valores e erros da aplicação.

Figura 3: Parâmetros do ajuste da função sigmoide.

```
[2022-10-14 13:44:29          Gráfico: "Gráfico1"]
Regressão de Boltzmann (Sigmoidal) do conjunto de dados: Tabela1_Assinantes,
usando função: A2+(A1-A2)/(1+exp((x-x0)/dx))
Ordenar: Não
Método de ponderação: Sem ponderação
Levenberg-Marquardt escalado algorítmo com tolerância = 0,0001
De x = 2,0110000000000e+03 a x = 2,0210000000000e+03

Parâmetro                  Valor                  Erro
------------------------------------------------------------------------
A1 (valor inicial)         6,8226259503427e+00    9,0681640125208e+00
A2 (valor final)           3,3527175369490e+02    6,4389091733890e+01
x0 (centro)                2,0195483266318e+03    1,0238255919976e+00
dx (constante de tempo)    2,7942199128314e+00    5,3040757199422e-01
------------------------------------------------------------------------
Erros foram multiplicados com sqrt(Chi^2/doF) = 4,1484341288925e+00

Estatísticas                             Tabela1_Assinantes
------------------------------------------------------------------------
N (pontos de dados)                      11
Graus de liberdade (doF)                 7
Chi^2/doF                                1,7209505721760e+01
RSS (Soma residual dos quadrados)        1,2046654005232e+02
R                                        9,9862615980009e-01
R^2                                      9,9725420703708e-01
R^2 ajustado                             9,9607743862440e-01
RMSE (Raiz do erro quadrado médio)       4,1484341288925e+00
Interações                               15
Status                                   success
------------------------------------------------------------------------
```

Fonte: Próprio autor, 2022

Com estes resultados, notamos que a função sigmoide ajusta muito bem com os dados experimentais dos usuários da Netflix, no intervalo de 2011 até 2021. Portanto, conclui-se que a EDO logística modela o comportamento dos usuários da netflix, isto é, modela o processo de como esta inovação tecnológica se difundiu na sociedade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho propomos um modelo baseado na equação diferencial ordinária logística para o estudo da difusão de tecnologia. Tais difusões podem ser modeladas em analogia com os modelos de epidemiologia matemática. Coletamos dados reais da quantidade de usuários da Netflix em função do tempo, no intervalo de 2011 até 2021. Depois dos ajustes, notou-se que os dados foram bem descritos pelo modelo proposto, o que corrobora com a possibilidade de poder- se modelar a difusão dos usuários da Netflix na sociedade através de uma EDO

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. 4º Edição. Campinas-SP: Contexto,1 agosto 2002

businessofapps.com. Acesso em 05 set. 2022.

MANSOOR, I. BusinessofApps, 2022. **Estatística de Receita e Uso da Netflix**. Dispo- nível em: Estatísticas de Receita e Uso da Netflix (2022) - Negócios de Aplica- tivos (businessofapps.com) . Acesso em: 14 out. 2022

https://www.netflix.com/br/. Acesso em 19 out. 2022.

SANTO, A. O. E, FURTADO, A. B, SOUZA, E. S. R. **Modelagem na Educação Matemática e Científica**: práticas e análises. Belém-Pará: Editora Açaí, 2007