



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL  
FACULDADE DE MATEMÁTICA

ALDO SILVIO SIQUEIRA FAVACHO JUNIOR

**NÚMEROS NORMAIS**

CASTANHAL/PA  
2025

ALDO SILVIO SIQUEIRA FAVACHO JUNIOR

## **NÚMEROS NORMAIS**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, pela Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Nildsen Fernando Lisbôa da  
Silva  
Universidade Federal do Pará

CASTANHAL/PA  
2025

ALDO SILVIO SIQUEIRA FAVACHO JUNIOR

## NÚMEROS NORMAIS

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, pela Universidade Federal do Pará.

DATA DE APROVAÇÃO:

CONCEITO:

---

Prof. Dr. Nildsen Fernando Lisbôa da Silva  
Orientador -  
FACMAT/UFPA/CASTANHAL

---

Prof. Dr. Renato Germano Reis Nunes  
Membro - FACMAT/UFPA/CASTANHAL

---

Prof. M. Eng. José Geraldo Gonçalves da  
Silva  
Membro - FACMAT/UFPA/CASTANHAL

CASTANHAL/PA  
2025

## RESUMO

Este trabalho investiga as propriedades dos números normais, introduzidos por Borel (1909), que apresentam distribuição uniforme de dígitos em suas expansões decimais. O estudo combina análise teórica e computacional para examinar a distribuição de dígitos em números irracionais ( $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ), transcendentais ( $\pi, e$ ) e potências de inteiros ( $2^{10000000}, 7^{3576842}$ ), utilizando algoritmos em Python para processar milhões de dígitos. Os resultados mostram frequências próximas a 10% para cada dígito (base 10), com variações inferiores a 0,1%, corroborando indícios de normalidade. Além disso, aplicações em funções aleatórias, implementadas em Maple, demonstraram equivalência qualitativa entre dígitos de números normais e sequências pseudoaleatórias. Conclui-se que, embora a normalidade não possa ser provada computacionalmente, os resultados oferecem suporte empírico para conjecturas sobre a distribuição de dígitos nestes números, com implicações em teoria da computação e geração de aleatoriedade.

**Palavras-chave:** Números normais, Distribuição de dígitos, Análise computacional, Teoria dos números, Aleatoriedade.

## ABSTRACT

This work investigates the properties of normal numbers, introduced by Borel (1909), which exhibit uniform digit distribution in their decimal expansions. The study combines theoretical and computational analysis to examine digit distribution in irrational ( $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ), transcendental ( $\pi$ ,  $e$ ) numbers and integer powers ( $2^{10000000}$ ,  $7^{3576842}$ ), using Python algorithms to process millions of digits. Results show frequencies close to 10% for each digit (base 10), with variations below 0.1%, supporting evidence of normality. Furthermore, applications in random functions, implemented in Maple, demonstrated qualitative equivalence between digits of normal numbers and pseudo-random sequences. We conclude that, although normality cannot be computationally proven, the results provide empirical support for conjectures about digit distribution in these numbers, with implications for computation theory and randomness generation.

**Keywords:** Normal numbers, Digit distribution, Computational analysis, Number theory, Randomness.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – As curvas foram geradas por uma função randômica conforme definida em (3.1) . . . . .	14
Figura 3.2 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 0 no número irracional $\sqrt{2}$ .	16
Figura 3.3 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 9 no número irracional $\sqrt{2}$ .	16
Figura 3.4 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 0 no número irracional $\sqrt{3}$ .	17
Figura 3.5 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 9 no número irracional $\sqrt{2}$ .	18
Figura 3.6 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 0 no número transcendental $\pi$	19
Figura 3.7 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 9 no número transcendental $\pi$	19
Figura 3.8 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 0 no número transcendental $e$	20
Figura 3.9 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 9 no número transcendental $e$	21
Figura 3.10–Evolução da Frequência relativa do Dígito 0 no número $2^{10000000}$ . . . .	22
Figura 3.11–Evolução da Frequência relativa do Dígito 9 no número $2^{10000000}$ . . . .	22
Figura 3.12–Evolução da Frequência relativa do Dígito 0 no número $7^{3576842}$ . . . .	23
Figura 3.13–Evolução da Frequência relativa do Dígito 9 no número $7^{3576842}$ . . . .	24

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Distribuição de frequência dos 500000 primeiros dígitos de $\alpha_{10,3}$ . . . .	14
Tabela 3.2 – Distribuição de frequência dos 3000000 primeiros dígitos de $\sqrt{2}$ . . . .	15
Tabela 3.3 – Distribuição de frequência dos 3000000 primeiros dígitos de $\sqrt{3}$ . . . .	17
Tabela 3.4 – Distribuição de frequência dos 3000000 primeiros dígitos de $\pi$ . . . .	18
Tabela 3.5 – Distribuição de frequência dos 3000000 primeiros dígitos de $e$ . . . .	20
Tabela 3.6 – Distribuição de frequência dos 3000000 primeiros dígitos de $2^{10000000}$ . .	21
Tabela 3.7 – Distribuição de frequência dos 3000000 primeiros dígitos de $7^{3576842}$ . .	23

## 1 INTRODUÇÃO

Os números normais surgem no estudo das propriedades estatísticas dos dígitos de números reais e têm implicações importantes em diversas áreas da matemática, incluindo a teoria da probabilidade, a análise real e a teoria da computação. A noção de normalidade foi introduzida pelo matemático francês Émile Borel no início do século XX, e desde então tem sido objeto de estudo.

Para entender o que é um número normal, é necessário primeiro compreender a distribuição dos dígitos na expansão decimal (ou em qualquer outra base) de um número real. Um número real pode ser representado de várias maneiras, mas uma das mais comuns é a sua expansão decimal. Por exemplo, o número  $\pi$  tem uma expansão decimal infinita e não periódica: 3.1415926535... A questão que surge é: como os dígitos de 0 a 9 estão distribuídos nessa expansão? Cada dígito aparece com a mesma frequência?

Émile Borel (BOREL, 1909) definiu um número como sendo normal em uma dada base se, em sua expansão nessa base, todos os dígitos possíveis aparecem com a mesma frequência, e mais geralmente, todos os blocos de dígitos de um determinado comprimento aparecem com a mesma frequência. Por exemplo, na base 10, um número normal é aquele em que cada dígito de 0 a 9 aparece com uma frequência de  $1/10$ , cada bloco de dois dígitos (como "00", "01", ..., "99") aparece com uma frequência de  $1/100$ , e assim por diante.

A definição de Borel pode ser estendida para outras bases além da base 10. Um número é dito absolutamente normal se for normal em todas as bases. A normalidade absoluta é uma propriedade mais forte e mais rara do que a normalidade em uma base específica. Borel mostrou que quase todos os números reais são normais em todas as bases. No entanto, apesar de a maioria dos números serem normais, é extremamente difícil determinar se um número específico é normal ou não.

Um número que se acredita ser normal é o número  $\pi$ . Embora não se saiba com certeza se  $\pi$  é normal em qualquer base, acredita-se que ele seja, e essa conjectura tem sido objeto de muita pesquisa e experimentação computacional. Outro exemplo é o número de Champernowne, que é construído concatenando os números naturais em sequência: 0.123456789101112131415... Esse número é normal na base 10, mas não é absolutamente normal, pois sua normalidade depende da base em que é representado.

A normalidade de um número está intimamente relacionada com a noção de

aleatoriedade. Um número normal pode ser visto como um número cujos dígitos se comportam como se fossem gerados por um processo aleatório, onde cada dígito tem a mesma probabilidade de aparecer. Essa conexão com a aleatoriedade levou ao estudo dos números normais no contexto da teoria da computação e da complexidade algorítmica.

Apesar de sua definição simples, a normalidade é uma propriedade extremamente difícil de verificar. Até hoje, não se sabe se números importantes como  $\pi$ ,  $e$  (a base do logaritmo natural) ou  $\sqrt{2}$  são normais em qualquer base. A dificuldade em provar a normalidade desses números reside no fato de que a normalidade é uma propriedade global que depende de toda a expansão decimal do número, e não apenas de uma parte finita dela. Isso torna o problema intratável com as técnicas matemáticas atuais.

Além disso, a normalidade tem implicações importantes na teoria da computação. Por exemplo, se um número é normal, então ele contém todas as sequências finitas de dígitos possíveis em sua expansão. Isso significa que, em princípio, qualquer informação finita pode ser encontrada em algum lugar da expansão de um número normal. Essa propriedade tem sido explorada em estudos sobre a complexidade de sequências e a teoria da informação.

Neste trabalho se procurará ter uma ideia, através do uso de computador, do comportamento da distribuição dos dígitos dos números citados acima e de números da forma  $2^n, 3^n, m^n$ ;  $(m, n \in \mathbb{N})$ . Obviamente estes últimos números não podem ser tratados como números normais pois tem uma quantidade finita de dígitos e se fizer  $\lim_{n \rightarrow \infty} m^n$ ,  $m^n$  não será um número, mas os resultados para  $n$  muito grande são bem interessantes e merecem ser relatados nesse trabalho.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Definição de número normal

Um número real  $\alpha$  é dito ser *b-normal* ( $b \geq 2$ ) se cada sequência de dígitos de comprimento ( $k \geq 1$ ) ocorre com um limite de frequência esperado de valor  $b^{-k}$  na expansão de  $\alpha$  na base  $b$ , ou seja, se um número é normal na base 10 sua expansão decimal deverá conter o dígito 7 em uma quantidade que é igual a um décimo da quantidade de ocorrência de todos os dígitos (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) e para o caso da sequência de dígitos 37 esse valor deverá ser um centésimo da quantidade de ocorrência de todos os dígitos e assim por diante.

Formalmente o que foi colocado acima pode ser expresso como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n^b(\alpha, k)}{n} = \frac{1}{b^k} \quad (2.1)$$

onde  $N_n^b(\alpha, k)$  é o número de ocorrência de uma sequência de  $k$  dígitos, de um total de  $n$  dígitos, de um número real  $\alpha$  na base  $b$ . Um número que é normal para cada base inteira  $b \geq 2$  é dito ser absolutamente normal.

### 2.2 Avanços na teoria dos números normais

- 1909: Borel (BOREL, 1909) introduz o conceito de número normal e prova que quase todos os números reais são absolutamente normais.
- 1917: Sierpinski (SIERPIŃSKI, 1917) fornece uma prova alternativa de que quase todos os números reais são normais.
- 1933: Champernowne (CHAMPERNOWNE, 1933), um estudante de graduação, provou que o número

$$C_{10} = 0,123456789101112131415161718192021\dots,$$

formado a partir da concatenação dos inteiros positivos, é normal na base 10

- 1946: Copeland and Erdos (COPELAND; ERDŐS, 1946) provaram que o número 0.23571113171923293137..., obtido pela concatenação de números primos, é normal na base 10.
- 1946: Copeland e Erdos (COPELAND; ERDŐS, 1946) também conjecturaram que se  $f(x)$  é qualquer polinômio não constante cujo os valores para  $x = 1, 2, 3, \dots$  são inteiros positivos. então  $0.f(1)f(2)f(3)\dots$  is a normal number in base 10.

- 1952: Davenport e Erdos (DAVENPORT; ERDŐS, 1952) provaram a conjectura feita por Copeland e Erdos em 1946.
- 1992: Nakai e Shiokawa (NAKAI; SHIOKAWA, 1992) provaram que se  $f \in R[X]$  tal que  $f(x) > 0$  para  $x > 0$ , então o número real  $0.[f(1)][f(2)][f(3)]\dots$ , onde  $[f(n)]$  é a parte inteira de  $f(n)$  expressa na base  $q \geq 2$ , é normal na base  $q$ . Eles também mostraram que o mesmo resultado vale se  $f(x) = \alpha_0 x^{\beta_0} + \alpha_1 x^{\beta_1} + \dots + \alpha_d x^{\beta_d}$ , onde os  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  são números reais com  $\beta_0 > \beta_1 > \dots > \beta_d \geq 0$  e  $f(x) > 0$  para  $x > 0$ .
- 1997: Nakai e Shiokawa (NAKAI; SHIOKAWA, 1997) provaram que se  $f \in Z[X]$  é qualquer polinômio não constante tal que  $f(x) > 0$  para  $x > 0$ , então o número  $0.f(2)f(3)f(5)f(7)\dots f(p)\dots$  é normal na base 10.

### 2.3 Séries representando números normais

Em 1971, Stoneham considerou constantes representadas por séries convergentes como possíveis candidatas à normalidade.

Ninguém foi capaz de mostrar que  $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$  é um número normal. No entanto, Stoneham [24] conseguiu mostrar que o número

$$\alpha_{2,3} := \sum_{n=3^k > 1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k 2^{3^k}}$$

é normal na base 2. Em 2002, Bailey e Crandall (BAILEY; CRANDALL, 2002) provaram que, se  $b, c \geq 2$  são inteiros coprimos, então o número

$$\alpha_{b,c} := \sum_{n=c^k > 1}^{\infty} \frac{1}{nb^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c^k b^{c^k}}$$
 é normal na base  $b$ .

Eles até mostraram que se  $r = 0.r_1 r_2 \dots \in [0,1)$ , então  $\alpha_{2,3}(r) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n 2^{3^n + r_n}}$  é um número normal na base 2, fornecendo assim uma classe incontável de números normais na base 2.

### 2.4 Números anormais

Um número é dito *anormal* na base  $q$  se não for normal na base  $q$ . Por exemplo, o número binário

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}} = 0.101000011000010000000101000000001100000000001110\dots$$

é claramente anormal, pois pode-se facilmente mostrar que quase todos os seus dígitos na base 2 são zeros. Exceto pelos números racionais, não é tão fácil encontrar números anormais.

Um número é dito *absolutamente anormal* se não for normal em toda base  $q \geq 2$ . Em 2001 Martin [20] considerou a seguinte sequência

$$d_2 = 2^2, d_3 = 3^2, d_4 = 4^3, d_5 = 5^{16}, d_6 = 6^{30\,517\,578\,125}, \dots$$

com a regra recursiva

$$d_j = j^{d_{j-1}/(j-1)} \quad (j \geq 3).$$

Então ele provou que o número

$$\prod_{j=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{d_j}\right) = 0.6562499999956991 \underbrace{999\dots 999}_{23,747,291,559 \text{ 9*}} 85284042016\dots$$

é um número absolutamente anormal.

## 2.5 Distribuição dos dígitos de um número natural expresso em uma base B

Dada uma base  $B$ , qualquer número  $m$  pode ser expresso na forma

$$m = a_{\mu}B^{\mu} + a_{\mu-1}B^{\mu-1} + \dots + a_1B + a_0,$$

onde

$$1 \leq a_{\mu} < B, \quad 0 \leq a_i < B \text{ para } i < \mu.$$

Escreveremos simplesmente

$$m = a_{\mu}a_{\mu-1}\dots a_0$$

onde o que está à direita da equação é chamado de representação de  $m$  na base  $B$ . Os dígitos são

$$0, 1, 2, \dots, (B - 1)$$

Dado um inteiro  $m = a_\mu a_{\mu-1} \dots a_0$ , escreveremos  $s(m, a)$  para o número de vezes que o dígito  $a$  ocorre na representação de  $m$ . Da mesma forma, escreveremos  $s(m, b_1, b_2, \dots, b_k)$  para o número de vezes que  $k$  dígitos consecutivos na representação de  $m$  coincidem com os dígitos  $b_1, b_2, \dots, b_k$  em ordem.

Denota-se por  $\Theta$  qualquer número real do intervalo  $(-1, +1)$ , não necessariamente o mesmo número em duas instâncias diferentes.

Dado  $\varepsilon > 0$ , diz-se que o número  $m = a_\mu a_{\mu-1} \dots a_1 a_0$ , com  $\mu$  dígitos, é  $\varepsilon$ -normal se para cada dígito  $a$

$$s(m, a) = \left( \frac{1}{B} + \Theta\varepsilon \right) \mu.$$

Diz-se que  $m$  é  $(k, \varepsilon)$ -normal se para cada sequência  $b_1 b_2 \dots b_k$  de  $k$  dígitos

$$s(m, b_1 b_2 \dots b_k) = \left( \frac{1}{B^k} + \Theta\varepsilon \right) \mu.$$

### 3 RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados envolvendo a distribuição de dígitos de números normais, números irracionais,  $\pi$ ,  $e$  (constante de Euler), assim como também será tratada a distribuição de dígitos em números naturais. Os resultados foram obtidos através de programas de computador desenvolvidos na linguagem Python. Para o caso de estudo do número normal de Bailey e Crandall como variável randômica em funções randômicas foi usado o software Maple 18 sendo esses resultados apresentados em poster no 34 Colóquio de Matemática do Impa.

#### 3.1 Funções Randômicas baseadas em Números Normais

No ano de 1930, Kolmogorov e outros elaboraram as bases da teoria das funções aleatórias. Função aleatória é uma tentativa de representar a evolução no tempo (ou outro parâmetro de evolução) de um processo aleatório. Uma possibilidade para alcançar esse objetivo é definir uma função aleatória por meio de uma fórmula analítica, contendo parâmetros que são variáveis aleatórias. Por exemplo, pode-se considerar polinômios (comuns ou trigonométricos) com coeficientes aleatórios.

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k \cos(\omega_k t) + \nu_k \sin(\omega_k t)) \quad (3.1)$$

Bailey e Crandall (BAILEY; CRANDALL, 2002) provaram que o número

$$\alpha_{b,c} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^{c^k} c^k} \quad (3.2)$$

é *b-normal* sempre que  $b, c$  forem coprimos e  $b, c > 1$

A ideia é usar os dígitos de  $\alpha_{b,c}$  como uma variável randômica para construir funções randômicas.

A distribuição de frequência para os dez dígitos (0,1,2,...,9) do número normal  $\alpha_{10,3}$  é mostrada na tabela abaixo

Dígitos	Frequência	Freq. relativa (%)
0	49970	9.994
1	49993	9.999
2	49987	9.997
3	50020	10.004
4	50117	10.023
5	49941	9.988
6	49954	9.991
7	49978	9.995
8	50032	10.006
9	50008	10.002

Tabela 3.1 – Distribuição de frequência dos 500000 primeiros dígitos de  $\alpha_{10,3}$

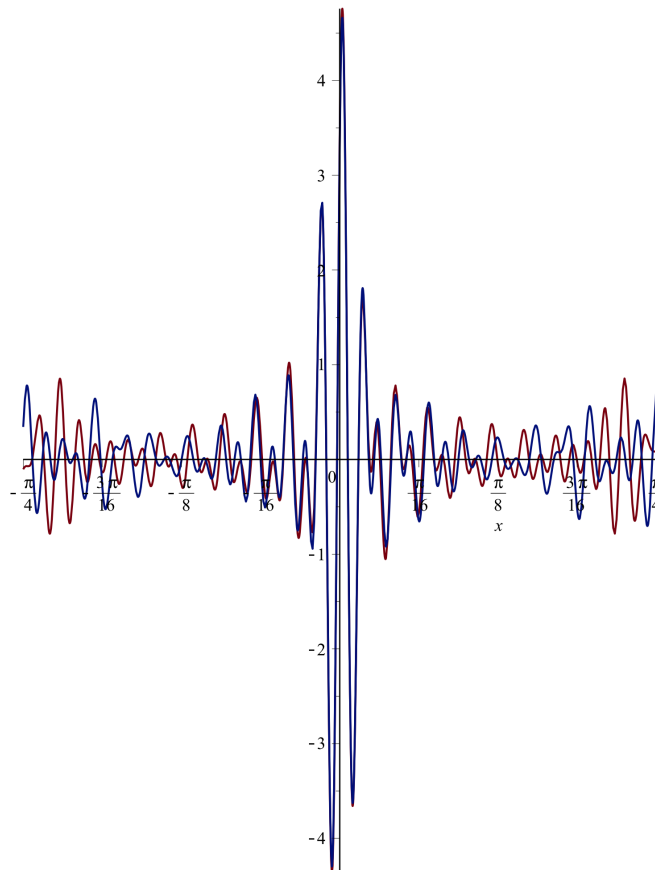


Figura 3.1 – As curvas foram geradas por uma função randômica conforme definida em (3.1)

Na construção do gráfico da figura 3.1 foram feitas as seguintes simplificações:  $\xi_k = \nu_k$ ,  $\omega_k = k$  and  $k = 1..75$ . Na linha vermelha os coeficientes são os dígitos de  $\alpha_{10,3}$ .

Na linha azul os coeficientes são gerados pelo gerador de números pseudo-random usando o Algoritmo de Congruência Linear.

Os resultados mostram que o aspecto qualitativo da função randômica permanece o mesmo para coeficientes gerados por números normais e geradores de números pseudo-random.

### 3.2 Números Irracionais

O primeiro número irracional a ser analisado será  $\sqrt{2}$ . A distribuição de seus dígitos em um conjunto de três milhões de dígitos depois da vírgula é apresentada na tabela abaixo.

Dígitos	Frequência	Freq. relativa (%)
0	299849	9.995
1	298831	9.961
2	299916	9.997
3	299955	9.998
4	300142	10.005
5	299619	9.987
6	301021	10.034
7	300015	10.000
8	300565	10.019
9	300087	10.003

Tabela 3.2 – Distribuição de frequência dos 3000000 primeiros dígitos de  $\sqrt{2}$

Pode-se observar que a distribuição dos dígitos aproxima-se bastante de uma distribuição uniforme com cada dígito tendo uma frequência relativa de aproximadamente 10%

Nos gráficos abaixo são mostrados as evoluções das frequências relativas dos dígitos 0 e 9, por exemplo. Percebe-se que quando o número de dígitos analisados não é tão grande a frequência relativa oscila bastante, mas a medida que o número de dígitos analisados aumenta o valor da frequência se estabiliza próximo do valor de 10%.

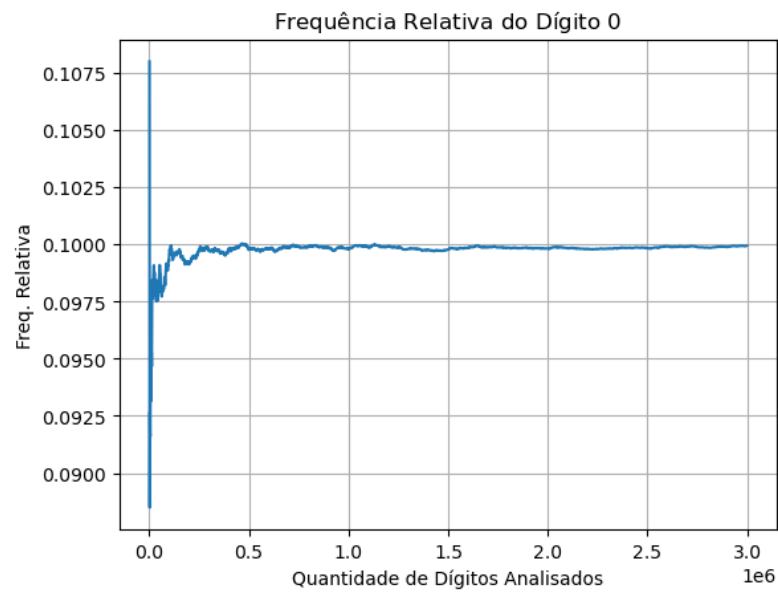


Figura 3.2 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 0 no número irracional  $\sqrt{2}$

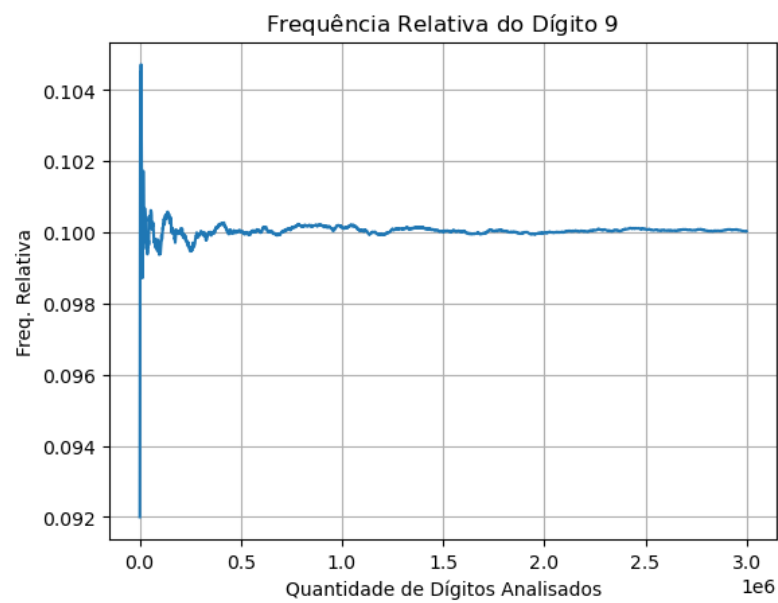


Figura 3.3 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 9 no número irracional  $\sqrt{2}$

No número irracional  $\sqrt{3}$  a distribuição de seus dígitos em três milhões de dígitos depois da vírgula é apresentada na tabela abaixo.

Dígitos	Frequência	Freq. relativa (%)
0	300087	10.003
1	299431	9.981
2	300553	10.018
3	300175	10.006
4	299579	9.986
5	299703	9.9901
6	301106	10.037
7	299350	9.978
8	299813	9.994
9	300203	10.007

Tabela 3.3 – Distribuição de frequência dos 3000000 primeiros dígitos de  $\sqrt{3}$

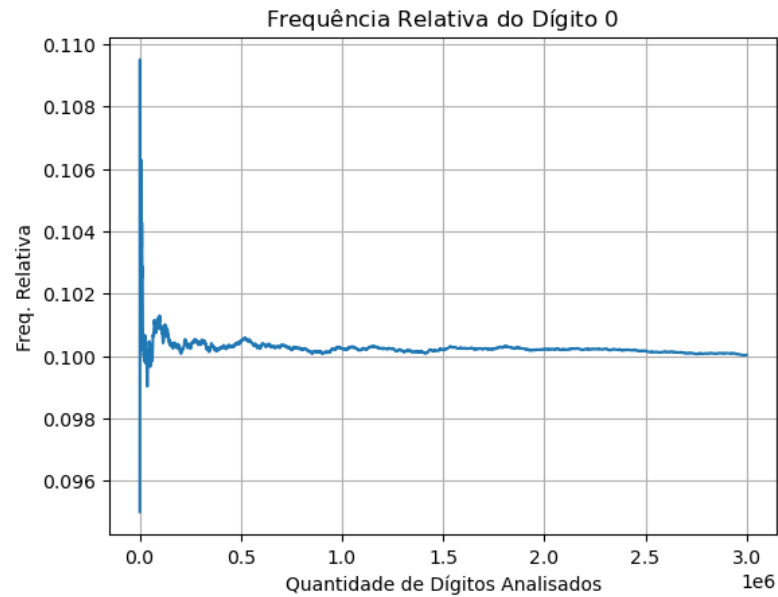


Figura 3.4 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 0 no número irracional  $\sqrt{3}$

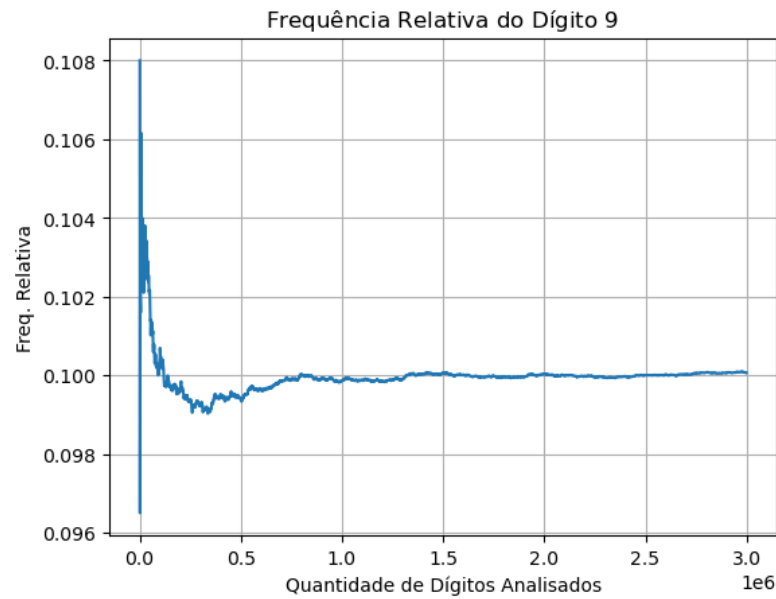


Figura 3.5 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 9 no número irracional  $\sqrt{2}$

### 3.3 Números Transcendentais

O comportamento da frequência de ocorrência dos dígitos nos números transcendentais (números que não são solução para uma equação polinomial não nula com coeficientes racionais)  $\pi$  e  $e$  será mostrado. A quantidade de dígitos analisada será a mesma, 3000000 de dígitos.

Os resultados para o número transcendental  $\pi$  são mostrados na tabela abaixo.

Dígitos	Frequência	Freq. relativa (%)
0	299451	9.982
1	299640	9.988
2	299867	9.996
3	300310	10.010
4	300235	10.008
5	300342	10.011
6	299461	9.982
7	300655	10.022
8	299440	9.981
9	300599	10.020

Tabela 3.4 – Distribuição de frequência dos 3000000 primeiros dígitos de  $\pi$

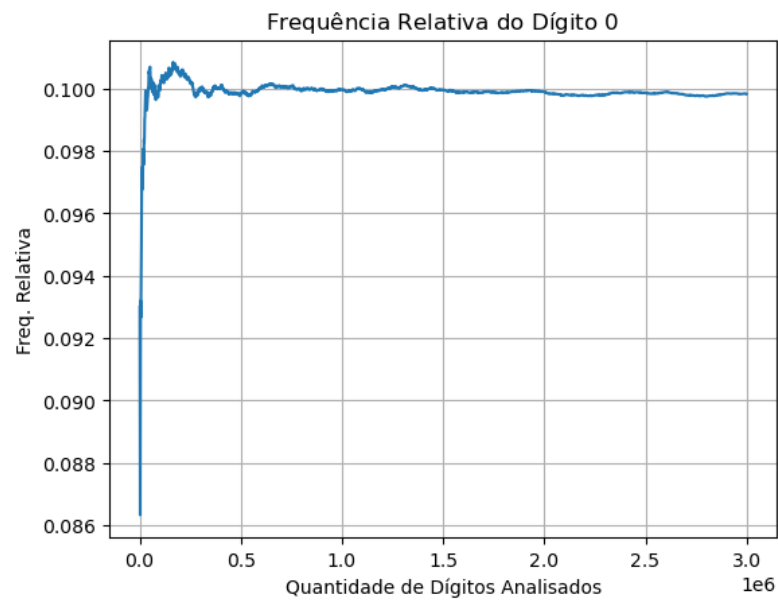


Figura 3.6 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 0 no número transcendental  $\pi$

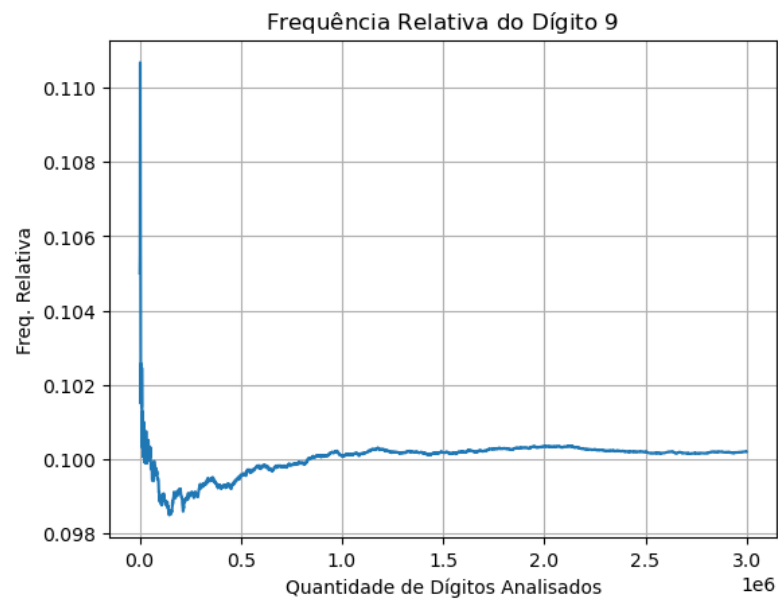


Figura 3.7 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 9 no número transcendental  $\pi$

Os resultados para o número transcendental  $e$  são mostrados na tabela abaixo.

Dígitos	Frequência	Freq. relativa (%)
0	298892	9.963
1	300417	10.014
2	299144	9.971
3	300682	10.023
4	300693	10.023
5	300229	10.008
6	300428	10.014
7	299946	9.998
8	299081	9.969
9	300488	10.016

Tabela 3.5 – Distribuição de frequência dos 3000000 primeiros dígitos de  $e$

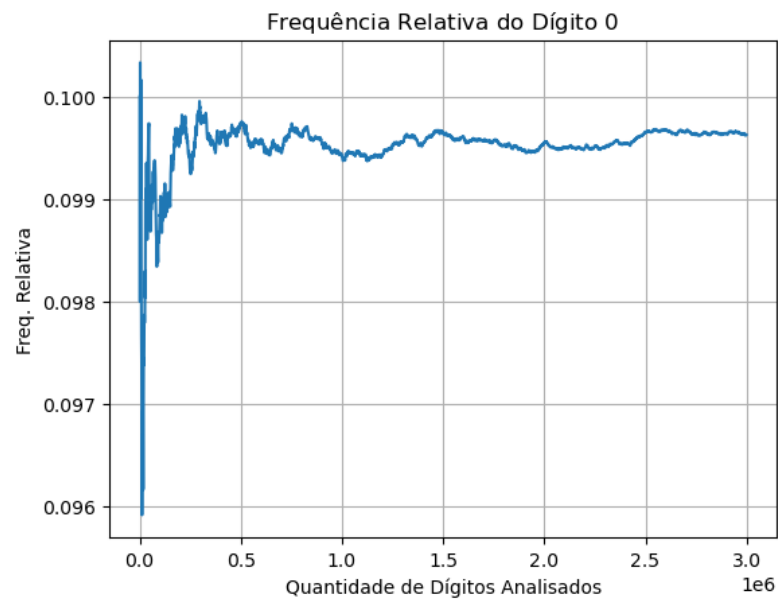


Figura 3.8 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 0 no número transcendental  $e$

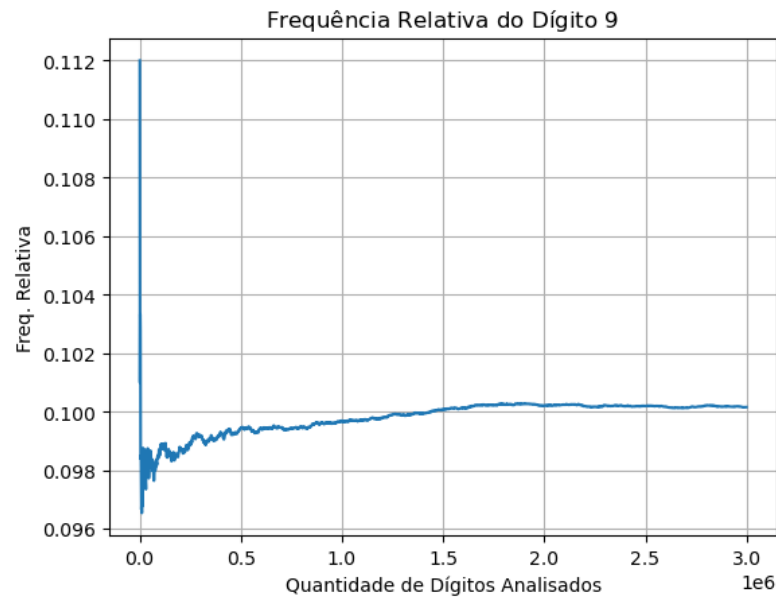


Figura 3.9 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 9 no número transcendental  $e$

### 3.4 Números da forma $a^b$

A definição de normalidade não se aplica para os números da forma  $a^b$  pois tais números tem uma quantidade finita de dígitos, mas são apresentados resultados, considerando três milhões de dígitos do número representado no sistema decimal, mostrando que a frequência relativa dos dez dígitos é próxima de 10%.

O primeiro número a ser considerado será o número  $2^{10000000}$ , esse número tem 3010300 dígitos, mas foi analisado somente os primeiros três milhões de dígitos.

A distribuição da frequência de ocorrência dos dígitos é mostrada na tabela abaixo.

Dígitos	Frequência	Freq. relativa (%)
0	299995	10.001
1	298642	9.955
2	300819	10.027
3	300587	10.020
4	300396	10.013
5	299936	9.998
6	300049	10.002
7	299808	9.994
8	300422	10.014
9	299344	9.978

Tabela 3.6 – Distribuição de frequência dos 3000000 primeiros dígitos de  $2^{10000000}$

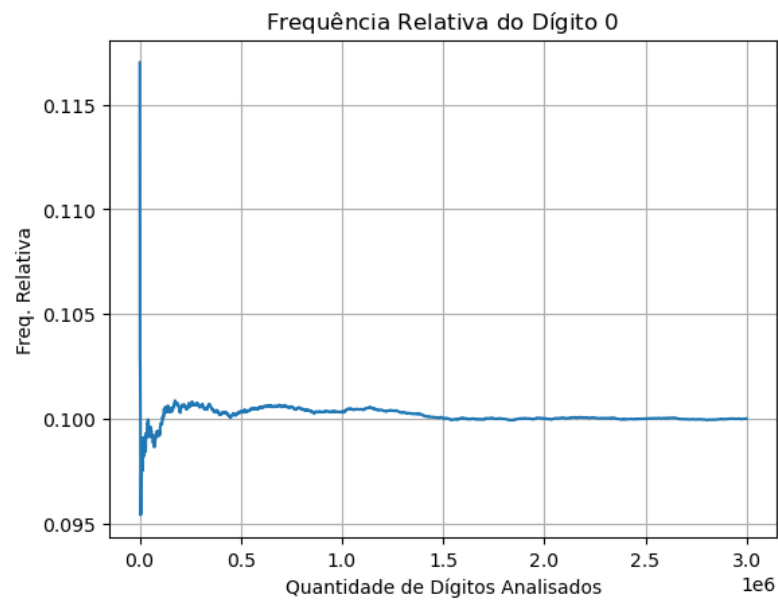


Figura 3.10 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 0 no número  $2^{10000000}$

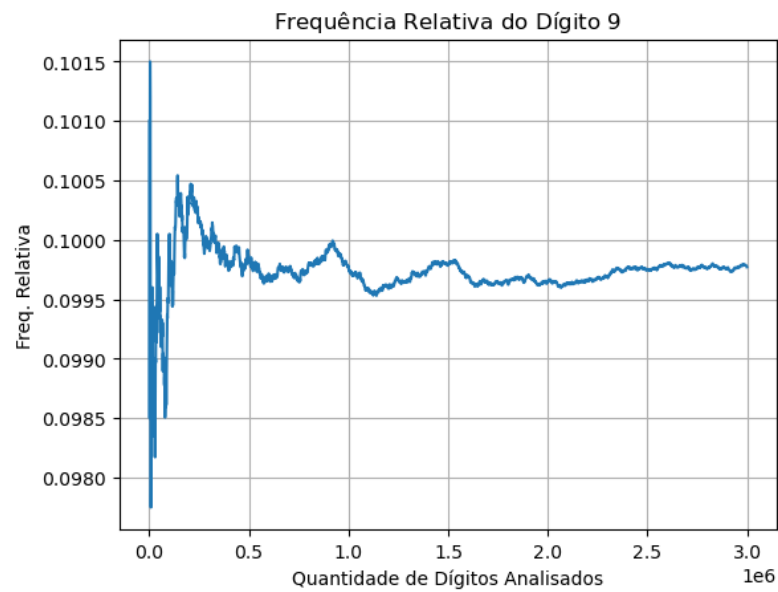


Figura 3.11 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 9 no número  $2^{10000000}$

Agora será analisado o número  $7^{3576842}$  que tem 3022783 dígitos. A distribuição da frequência de ocorrência dos dígitos é mostrada na tabela abaixo, considerando apenas os primeiros três milhões de dígitos.

Dígitos	Frequência	Freq. relativa (%)
0	299876	9.996
1	300983	10.033
2	299626	9.987
3	299873	9.996
4	300421	10.014
5	298996	9.966
6	300259	10.009
7	299936	9.998
8	300107	10.004
9	299921	9.997

Tabela 3.7 – Distribuição de frequência dos 3000000 primeiros dígitos de  $7^{3576842}$

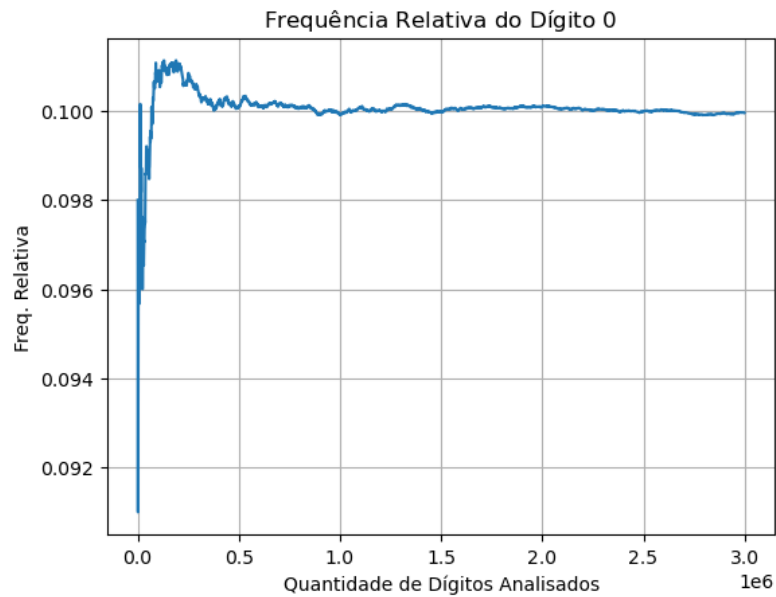


Figura 3.12 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 0 no número  $7^{3576842}$

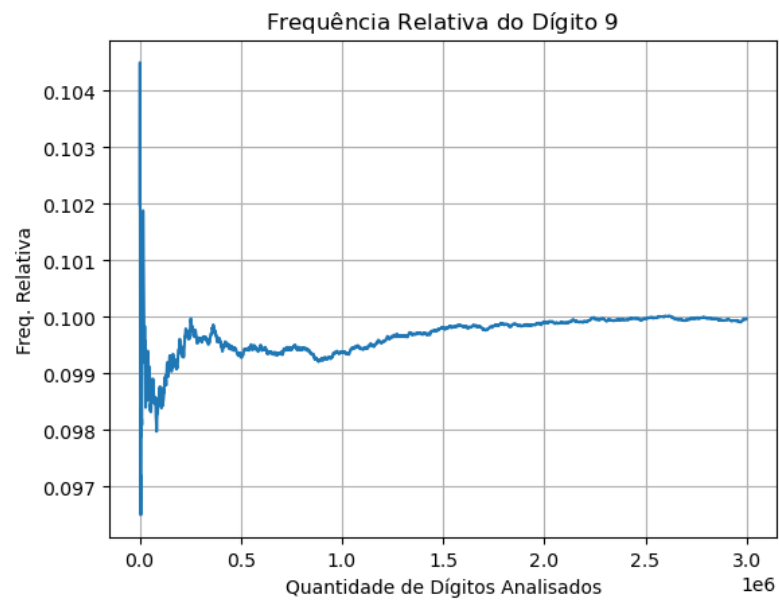


Figura 3.13 – Evolução da Frequência relativa do Dígito 9 no número  $7^{3576842}$

## 4 CONCLUSÃO

O trabalho apresenta um estudo das propriedades estatísticas e matemáticas dos números reais, com foco especial na normalidade e na distribuição de seus dígitos. Nessa pesquisa foram tratadas a definição clássica de números normais até a investigação empírica de números específicos, como  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\pi$ ,  $e$  e potências como  $2^{10000000}$  e  $7^{3576842}$ .

### 4.1 Resultados Computacionais

Os resultados foram obtidos a partir da análise computacional da distribuição de dígitos em números selecionados. Utilizando linguagens como Python e o software Maple, foram examinados milhões de dígitos de números irracionais ( $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ), transcendentais ( $\pi$ ,  $e$ ) e potências de inteiros ( $2^{10000000}$ ,  $7^{3576842}$ ). Os resultados são apresentados em tabelas e gráficos que mostram a frequência relativa de cada dígito, bem como sua evolução à medida que mais dígitos são considerados.

Para  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\pi$ ,  $e$ , a distribuição dos dígitos aproxima-se da uniformidade, com frequências relativas próximas a 10% para cada dígito (base 10). Por exemplo, em 3 milhões de dígitos de  $\pi$ , o dígito 7 aparece com frequência de 10.022%, enquanto o dígito "6" aparece com 9.982%. Esses resultados sustentam a conjectura de que esses números são normais, embora não constituam uma prova formal.

Números como  $2^{10000000}$  e  $7^{3576842}$ , embora tenham uma quantidade finita de dígitos, exibem distribuições próximas da uniformidade quando analisados em escalas grandes (milhões de dígitos). Por exemplo, em  $2^{10000000}$ , o dígito 0 aparece com 10.001% de frequência, enquanto o dígito 9 aparece com 9.978%. Isso sugere que, mesmo em casos finitos, a normalidade pode ser observada como uma tendência assintótica.

O número de Bailey e Crandall ( $\alpha_{10,3}$ ), que é comprovadamente normal na base 10, foi analisado em 500000 dígitos. Os resultados confirmam sua normalidade, com frequências próximas de 10% para cada dígito (por exemplo, 9.994% para o dígito 0 e 10.002% para 9). Além disso, é explorada a aplicação desses dígitos em funções aleatórias, comparando-os com geradores pseudoaleatórios. As curvas geradas são qualitativamente semelhantes, reforçando a utilidade de números normais em simulações de aleatoriedade.

## 4.2 Perspectivas Futuras

A busca por provas de normalidade para  $\pi$ ,  $e$  e outros números fundamentais continua sendo um dos problemas em aberto mais desafiadores. Técnicas avançadas em teoria dos números e análise podem ser necessárias para abordar essa questão.

Números normais podem ser usados como fontes de aleatoriedade em algoritmos criptográficos ou em testes estatísticos para geradores de números aleatórios. O estudo de suas propriedades em bases não decimais (como binária ou hexadecimal) também é relevante para aplicações em ciência da computação.

A construção de funções aleatórias baseadas em dígitos de números normais, como explorado no trabalho, pode ser estendida para simulações mais complexas em física e engenharia.

**REFERÊNCIAS**

- BAILEY, D.; CRANDALL, R. Random generators and normal numbers. **Exp. Math.**, v. 11, n. 4, p. 527–546, 2002.
- BOREL, M. Émile. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. **Supplemento di rend. circ. Mat. Palermo**, v. 27, p. 247–271, 1909.
- CHAMPERNOWNE, D. The construction of decimals normal in the scale of ten. **J. London Math. Soc.**, v. 8, p. 254–260, 1933.
- COPELAND, A.; ERDŐS, P. Note on normal numbers. **Bull. Amer. Math. Soc.**, v. 52, p. 857–860, 1946.
- DAVENPORT, H.; ERDŐS, P. Note on normal decimals. **Canadian Journal of Mathematics**, v. 4, p. 58–63, 1952.
- NAKAI, Y.; SHIOKAWA, I. Discrepancy estimates for a class of normal numbers. **Acta Arith.**, v. 62, n. 3, p. 271–284, 1992.
- NAKAI, Y.; SHIOKAWA, I. Normality of numbers generated by the values of polynomials at primes. **Acta Arith.**, v. 81, n. 4, p. 345–356, 1997.
- SIERPIŃSKI, W. Démonstration élémentaire du théorème de m. borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre. **Bull. Soc. Math. France**, v. 45, p. 127–132, 1917.