UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MIKAELY GERCILEN MOURA DE SOUZA

MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA PARA 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.

CASTANHAL – PA
2018

MIKAELY GERCILEN MOURA DE SOUZA

MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA PARA 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Castanhal, como requisito parcial para a obtenção do Titulo de Licenciada em Matemática. Orientador: Profº Dr. Arthur da Costa Almeida

CASTANHAL – PA

2018

MIKAELY GERCILEN MOURA DE SOUZA

MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA PARA 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Castanhal, como requisito parcial para a obtenção do Título de Licenciada em Matemática. Orientador: Profº Dr. Arthur da Costa Almeida

Aprovado em: 25 de abril de 2018

Conceito: EXCELENTE

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida

Faculdade de Matemática/ UFPA – Orientador

Profª. Drª. Gerlandia de Castro Silva Thijm

Faculdade de Matemática/ UFPA – Membro

Profª. Msc. Maria Eliana Soares

Faculdade de Matemática/ UFPA – Membro

Á minha linda mãe, inspiração e motivação das minhas realizações.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Senhor Jesus Cristo, pelo dom da vida, consolo nos momentos difíceis, e principalmente em atender minhas orações.

A minha família, que sempre oferece todo suporte para contribuir com meu crescimento, em especial a minha avó Júlia, por todo amor, carinho e proteção.

A minha querida mãe, que é meu grande exemplo de educadora, me ensinou a ler e escrever, e até hoje me incentiva a construir uma educação melhor.

Ao meu noivo, Gabriel, que desde o inicio do curso esteve ao meu lado sendo prestativo e compreensivo. E em situações de desânimo pude contar com palavras motivacionais.

As amigas que fiz na UFPA, Silmara e Andréia, que contribuíram para que esse período acadêmico fosse ainda mais marcante em minha vida.

A minha amiga da vida, Luanne, que esteve presente em minhas conquistas sempre com uma alegria contagiante.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Arthur Almeida, que me recebeu e auxiliou em minhas dúvidas.

“Educar não é repetir palavras, é criar ideias, é encantar.”

<u>Augusto Cury</u>

RESUMO

Este trabalho é fundamentado em uma pesquisa bibliográfica para colaborar com o ensino da Trigonometria e nas contribuições da Modelagem Matemática, uma metodologia de ensino com a capacidade de motivar os alunos a construir seu próprio conhecimento. Serão apresentados alguns argumentos sobre a Modelagem Matemática que conduza o entendimento dessa metodologia, assim como um pouco da história no decorrer de seu reconhecimento como ferramenta de aprendizagem e a atuação em sala de aula diante a sua proposta na educação. Com enfoque na trigonometria, terá um fundamento teórico sobre triângulos retângulos, como seus elementos e as razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente. O intuito de realizar uma aula mais contextualizada por meio de resolução de exercícios não satisfaz o ensino significativo, então a sugestão de uma atividade de acordo com as concepções de Burak na perspectiva dessa tendência metodológica evidencia a importância em buscar a mudança na educação, com a dedicação em tornar a educação matemática referência em qualidade.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Razões trigonométricas. Aprendizagem significativa.

ABSTRACT

This work is based on a bibliographical research to collaborate with the teaching of Trigonometry and the contributions of Mathematical Modeling, a methodology of teaching with the capacity to motivate students to build their own knowledge. Some arguments will be presented on Mathematical Modeling that will lead to the understanding of this methodology, as well as a bit of history in the course of its recognition as a learning tool and the classroom performance in front of its proposal in education. Focusing on trigonometry, it will have a theoretical basis on triangles rectangles, as their elements and the trigonometric reasons: sine, cosine and tangent. The intention of carrying out a more contextualized lesson through the resolution of exercises does not satisfy meaningful teaching, so the suggestion of an activity according to Burak's conceptions in the perspective of this methodological tendency highlights the importance of seeking change in education, with the dedication to making mathematics education a benchmark in quality.

Keywords: Mathematical Modeling. Trigonometric reasons. Meaningful learning.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Ao perceber a ineficiência em utilizar como único método o ensino tradicional, onde o aluno é mecanizado a decorar os processos de suas respostas sem conhecer a importância que essa ciência engloba em sua vida, o ensino da Matemática vivencia o desafio de inovar as metodologias em sala de aula, com a necessidade de aproximar teorias matemáticas às aplicações da realidade do dia-a-dia.

Então foi pensado de forma metodológica: Como envolver os alunos de ensino fundamental na aprendizagem de trigonometria e suas aplicações de acordo com a realidade do aluno? Uma das metodologias que busca a realidade e o contexto do aluno é a Modelagem Matemática que garante um desenvolvimento ao aluno à descoberta de conhecimentos matemáticos, essa tendência metodológica desenvolve as habilidades, competências, pensamentos críticos e reflexivos, portanto “acredita-se que a interação entre a realidade e a matemática proporciona ao aluno percepção do importante papel da matemática na sociedade e seu uso no cotidiano” (SANTOS E ROSA, 2008, p. 10).

Portanto, este trabalho apresenta uma proposta de atividade para o ensino da Trigonometria na perspectiva da Modelagem Matemática com desenvolvimento nas etapas propostas por Dionísio Burak (2010): escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento do(s) problema(s); resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema; crítica da(s) solução(es). Fundamentada numa pesquisa bibliográfica que permita uma ampla cobertura investigativa de pensadores argumentativos a esta metodologia com propostas e estratégias para a aprendizagem significativa. (GIL, 2002, p. 45)

1.1. OBJETIVOS

1.1.1. Objetivo Geral

Apresentar uma proposta didática para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo, através da Modelagem Matemática para desenvolver e valorizar o pensamento construtivo da aplicação prática em sala de aula, utilizando equipamento rudimentar como o medidor de ângulo.

1.1.2. Objetivos Específicos

- Valorizar o ensino da trigonometria.
- Apresentar atividades para o melhor entendimento entre modelagem matemática e trigonometria.
- Comparar uma atividade de trigonometria apresentada em um livro didático com uma atividade incluindo a modelagem matemática.
- Compreender estratégias envolvendo o medidor de ângulo.

1.2. ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA

Esta pesquisa bibliográfica apresenta quatro capítulos com tópicos que detalham o ensino da matemática, sendo uma das tendências matemáticas, alguns esclarecimentos sobre trigonometria e propostas para uma prática em sala de aula. No primeiro capítulo apresenta-se a introdução, onde se encontram uma justificativa, a problemática e os objetivos. No segundo capítulo retrata sobre a Modelagem Matemática, um breve registro da História da Modelagem matemática; e uma abordagem da Modelagem Matemática em sala de aula. No terceiro capítulo apresenta-se com clareza uma breve explanação sobre o histórico da trigonometria, as razões trigonométricas apresentadas em um livro didático com resoluções de exercícios em sala de aula. No quarto capítulo uma apresentação sintetizada da construção de um medidor de ângulos e a utilização para a proposta de Modelagem Matemática para o estudo da trigonometria no Ensino Fundamental com o medidor de ângulo. No quinto capítulo constam algumas considerações sobre desenvolver a metodologia de Modelagem Matemática para a busca de um bom resultado nas aulas de trigonometria com os recursos propostos na pesquisa.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA

O desenvolvimento de Tendências na Educação Matemática como metodologia de ensino surgiu a partir de exigências em que situações de mudanças ou adaptação fizeram-se necessário para uma educação de qualidade, com objetivo de mostrar ao aluno que a aprendizagem é uma ferramenta de auxílio para enxergar na sociedade um leque de aplicações das teorias Matemáticas e para D'Ambrosio (2002, p.31) "o ciclo de aquisição de conhecimento é deflagrado a partir da realidade, que é plena de fatos".

A Modelagem Matemática é uma metodologia que utiliza o cotidiano como busca para soluções matemáticas, aprendizagem por meio de situações-problemas da realidade que chegam as teorias matemáticas de forma crítica e criativa, para Bassanezi (2004, p.24), "a modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual".

Os motivos para utilizar essa metodologia para o ensino da matemática vêm criando forças já que os argumentos apresentados trazem uma expectativa de melhorias na aprendizagem, e segundo Barbosa (2004) são eles: "motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sociocultural da matemática", de tal forma que as atividades de Modelagem Matemática desafiam os educandos a analisar como a Matemática é aplicada em contextos sociais, construindo uma visão crítica capaz de identificar os conteúdos no processo da busca pela solução.

Para compreender a Modelagem Matemática, é preciso estabelecer a definição de modelo matemático, o qual McLone conceitua que "um modelo matemático é um construto matemático abstrato, simplificado que representa uma parte da realidade com algum objetivo particular" (1976 apud BASSANEZI, 2004, p.20), com essa definição tem-se o modelo como uma representação padrão de algo em estudo.

Para Bassanezi (2004, p. 20), "a importância do modelo matemático consiste em ter uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades, além de proporcionar um arsenal de resultados [...]". O modelo permite o caminho da situação real para o problema matemático, isto é, a busca por hipóteses para descrever matematicamente a solução do problema, então a Modelagem Matemática é o processo que encaminha para elaboração desse modelo. Santos e Rosa, ressaltam:

> Modelagem matemática é uma estratégia que requer a obtenção de modelo que busca descrever matematicamente uma situação real para em seguida compreender e estudá-lo, levantando dados e elaborando hipóteses sobre tais fenômenos. Nesta perspectiva, modelagem matemática pode ser vista como estratégia de ensino e aprendizagem. Pode-se entendê-la como uma abordagem de um problema real por meio da matemática, do problema serão extraídas as características pertinentes, elaboradas hipóteses e enfim feitas representações em variáveis matemáticas. (SANTOS E ROSA, 2008, p. 14).

Entende-se então, que modelagem é uma forma de interagir com a realidade na construção de saberes matemáticos, sendo "um ambiente de aprendizagem em que os alunos são convidados a investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade". (BARBOSA, 2007, p.161).

A Modelagem Matemática como metodologia de ensino, vem suprindo a necessidade de abordar situações problemas da realidade dos educandos como proposta de aprendizagem, estabelecendo a preocupação em tornar o aluno o principal responsável pelo seu ensino, pois sua curiosidade e criatividade são o meio que alcança soluções para seus questionamentos, e ao professor a tarefa de mediar o conhecimento aos alunos. Bassanezi (2004, p.38) afirma que a Modelagem no "processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno com o seu ambiente natural".

2.1. UM POUCO DA HISTÓRIA DA MODELAGEM MATEMÁTICA

A Matemática funciona como caminho para solucionar situações problemas desde muito tempo, sendo essa a finalidade para o surgimento dessa ciência, assim é possível associar a modelagem matemática a própria matemática, como afirmam

Bienbengut & Hein (2003, p.8), “a Modelagem Matemática é tão antiga como a própria matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos”.

Não é encontrado registros aos fatos ocorridos nos primórdios da humanidade com embasamento na Modelagem, porém é possível identificar modelos construídos desde as antiguidades e utilizados até hoje.

Consideram Santos e Rosa (2008), a invenção da roda pelos sumérios no ano de 3000 a. C, um dos primeiros modelos matemáticos criados pelo homem, com a finalidade de facilitar o transporte de cargas pesadas ao colocar sobre objetos rolantes, invés de carregar sobre os ombros. Na história Egípcia, em 300 a. C, também é possível notar modelos matemáticos, quando ocorriam as enchentes do Rio Nilo e desmarcava as divisas para o cultivo, era necessário medir a terra novamente, então a formulação de regras geométricas que conhecemos na atualidade.

A modelagem matemática surge ao encarar uma dada situação onde se devem alcançar representações matemáticas para a solução da situação-problema. Podemos relatar grandes contribuições de importantes filósofos para o inicio da modelagem matemática, citados por Santos e Rosa (2008, p.13).

Talles de Mileto (639-568 a.C) utilizou a semelhança de triângulos quando percebeu que poderia calcular a altura de pirâmides utilizando-se da sombra por elas projetadas, criando desta forma um modelo matemático; Pitágoras (570-500 a.C.) criou um modelo matemático para a música, onde observava o tamanho das cordas que produzem ondas sonoras em mútua harmonia; Platão (427-347 a.C.) desenvolveu um modelo que representava o universo baseado no dodecaedro; Eudóxio (400-350 a.C.) criou um modelo geométrico, com movimentos circulares e uniformes, que representava os fenômenos celestes, no qual a Terra ocupa o centro do universo; Eratóstenes (287-212 a.C.) elaborou um modelo matemático para calcular a circunferência da Terra.

Apesar de a Modelagem Matemática ter tais representações no decorrer da evolução cientifica, os debates como estratégia de ensino teve seu início na década de 70. Logo, a modelagem matemática também chegou ao Brasil, através dos principais precursores dessa metodologia no país, sendo eles professores doutores

Ubiratan D’Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi, na década de 80, ao participarem de vários eventos sobre o assunto no exterior, puderam assim realizar no Brasil pesquisas e levantamento de teses, e através de cursos de especialização conseguiram disseminar essa metodologia no Brasil.

Ferreira et al (2013) compreende o período do início da década de 70 ao término da década de 90, o momento de consolidação da Modelagem, com início ao “processo de verdadeirização desse discurso e vão instituindo a sua consolidação na Educação Matemática”. Para Veyne (2014, p.11) “a história não tem método: tentem pedir que lhes demonstrem seu método”, mas, não é por isso que se pode improvisar historiador, não se escreve a história política com as opiniões, ainda que respeitáveis, que se tem, pessoalmente sobre o assunto (VEYNE, 2014). As escolhas para a escrita da história da Modelagem Matemática na Educação Matemática Escolar no Brasil são livres, mas, não são improvisos.

A modelagem matemática é um processo para descrever, formular, modelar e resolver uma situação problema em qualquer área do conhecimento, encontrando-se já no início do século XX na literatura de Engenharia e Ciências Econômicas.

2.2. MODELAGEM MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

A Modelagem Matemática é uma estratégia utilizada no ensino aprendizagem, sendo “um dos caminhos a ser seguido para tornar um curso, em qualquer nível, mais atraente e agradável” argumenta Bassanezi (2004 p. 177). Infelizmente muitas escolas optam por um caminho mais prático, inacabável e pouca eficiência na aprendizagem, tanto por parte do professor como do aluno, utilizando sempre do ensino tradicional, sem a busca por outros meios para facilitar e até mesmo dá significância ao ensino aprendizagem.

Bassanezi (2004, p.177) completa ainda se a modelagem for eficiente e aplicada ela terá a magia de “fazer previsão, tomar decisões, explicar e entender, enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças”. Assim, ao reconhecer que para se chegarem a uma leitura, interpretação e resolução de problema matemático é necessário adquirir conhecimentos, experiências para que aconteça uma intervenção fazendo dele um propósito para o aprendizado, mas, é valido concordar com Cury (2008, p.48), que afirma, mesmo que pesquisas sejam feitas para entender os erros dos alunos e usá-los como instrumento de aprendizagem, o que demonstra é que o mais difícil é propor atividades que desafie o aluno e o leve a querer modificar sua atitude em frente ao erro.

Às vezes a falta de uma formação entre os educandos ou a busca por essa aceitação metodológicas em sala de aula por exigir planejamento antecipado afasta o desejo no ensino de tomar para si a responsabilidade de aderir a Modelagem Matemática nos conteúdos matemáticos. Para Niss et al (2007 apud BELTRAO, 2012, p. 14) é preciso que conheça as fases do desenvolvimento da Modelagem Matemática e suas aplicações no ensino da Matemática pois de acordo com o autor se pode traçar um panorama do desenvolvimento das Aplicações e Modelagem Matemática em três fases:

A primeira fase é a *da defesa* com a inclusão dos componentes relativos às Aplicações e Modelagem no ensino de matemática. A segunda fase, que pode ser denominada *fase do desenvolvimento c*aracterizada principalmente pela evolução real de currículos e materiais de vários níveis, de modo a abranger Aplicações e componentes de Modelagem para uso em sala de aula. A terceira é a *fase de maturação* com estudos empíricos de ensino e aprendizagem dando mais ênfase teórica das fases anteriores.

Contudo, os estudos vão se desenvolvendo compostos por trabalhos de pesquisadores atraídos por essa vertente dos estudos matemáticos, pois é importante ressaltar a importância das relações entre a Matemática e o mundo real e situar os debates sobre educação matemática, assim como as pesquisas e desenvolvimentos nessa área. Para Pozo (1998 p.9) “a solução de problema baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para suas próprias respostas, seu próprio conhecimento”, pois a modelagem matemática “transforma problemas do mundo real em problemas matemáticos” então cabe ao professor ter o conhecimento prévio da realidade a ser vivenciada para obter soluções cabíveis aos problemas matemáticos.

Segundo Almeida e Brito (2005), a razão para o professor fazer modelagem matemática em sala de aula, é a precisão de tornar nítido aos alunos à importância da matemática no mundo fora da escola. Portanto se faz necessário o professor ter a ousadia de implantar em suas aulas mudanças para uma prática mais sugestiva e eficaz e o aluno por sua vez entender que criando novos rumos a solucionar situação-problema se empenha as descobertas de um olhar real a um científico.

O ensino nas escolas tenta seguir o ritmo acelerado que as informações e tecnologias surgem na sociedade, inovando a maneira de agir e de pensar do individuo, assim intensificando a responsabilidade da escola em educar cidadãos com senso crítico, capazes de desempenhar em sua vida a aplicação teórica encontrada nas salas de aula, construindo estratégias para enfrentar a realidade com domínio e capacidade em identificar soluções através de seus conhecimentos.

Durante o desenvolvimento de trabalho de Modelagem Matemática, os alunos coletam informações, manipulam dados reais, vivem situações reais e consequentemente interpretam a solução encontrada através da resolução de problemas matemáticos, validam o modelo matemático, caminhando assim, para o pensamento crítico e reflexivo através da construção do saber. (MIGUEL, 2009, p. 11)

Considerando as configurações curriculares além dos projetos que ocorrem nas escolas, Barbosa (2001) classifica a Modelagem Matemática em sala de aula em diferentes formas:

A. O problema com as informações são apresentados pelo professor e os alunos têm a responsabilidade em chegar à resolução,

B. O professor envolve o aluno com problema de outra área do conhecimento ou de outra realidade para que o aluno faça o levantamento de dados para a resolução do problema.

C. O problema será desenvolvido pelo aluno como via de projeto, pois o aluno que escolherá o tema não matemático, mas de seu próprio interesse para coleta de dados, criação do modelo, resolução e validação.

Segundo Machado (2006, p. 25) é “importante que nas primeiras experiências com Modelagem Matemática é preferível optar por um tema único”, porque na realidade se torna benéfico à aprendizagem o professor “atender e orientar eficientemente a todos os grupos” de alunos envolvidos em uma atividade ou projeto de matemática. Para Bassanezi apud Barbosa (2003, p. 5) “além de aplicar conhecimentos já adquiridos, como tradicionalmente tem sido assinalado, há a possibilidade de os alunos adquirirem novos durante o próprio trabalho de Modelagem”.

Os professores sentem dificuldades em trabalhar as situações reais em sala de aula, que desenvolvam as situações levantadas do dia-a-dia dos alunos no cotidiano. Mesmo construindo pequenos ou grandes planejamentos nas escolas que desenvolvam o interesse dos alunos e as discussões sobre essa problemática é necessário inserir a Modelagem Matemática nas práticas pedagógicas no ensino da matemática em especial na resolução de problemas.

Barbosa (2004, p. 4) argumenta que:

> os professores podem tender a ver a Modelagem como uma abordagem adequada para o ensino de Matemática”, mas, ao pensar e ao fazer sua operacionalização, limitações no contexto de trabalho e em suas próprias competências são evidenciadas. Esta caracterização leva-nos a aprofundar a compreensão das perspectivas dos professores em contato com Modelagem.

A Modelagem vem como facilitadora do processo ensino aprendizagem também no quesito resolução de problema matemático, onde os alunos têm muitas dificuldades em solucionar aquela situação proposta pelo professor como algo insignificante para a vida do dia a dia. Para isso o professor tem que deixar de ser apenas o transmissor de conteúdos matemáticos, pois a “modelagem matemática redefine o papel do professor” dando a ele o “papel do co-participe , no sentido de ser apenas um orientador e condutor das atividades” (MACHADO, 2002 p 26).

Percebe-se então que a cada experiência com Modelagem Matemática tanto os professores como os alunos entram em contato com novos aspectos da matemática.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DA TRIGONOMETRIA

No ensino da trigonometria do ensino fundamental há uma infinidade de situações que serão apresentadas para dar significado a pesquisa, pois neste contexto serão definidas as relações e razões trigonométricas no triângulo retângulo. A iniciar com um breve histórico da origem da trigonometria.

3.1. BREVE HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA

A palavra Trigonometria vem do grego, *trigonon* que significa triângulo e *metria* trazendo a ideia de medida, assim esse ramo da matemática é responsável pela relação entre os lados e ângulos de um triângulo, onde é necessário que um de seus ângulos seja igual a 90º.

Segundo relatos de um artigo de Costa (2003), os primeiros indícios de rudimentos de trigonometria surgiram tanto no Egito quanto na Babilônia, a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. Sendo que no Egito, isto pode ser observado no Papiro Ahmes, um documento egípcio em matemática mais extenso que chegou aos nossos dias como uma cópia de um antigo papiro do sec. XIX a.C, e esteve em poder do escriba Ahmes. Hoje é conhecido como Papiro Rhind, por ter sido adquirido no Egito por H. Rhind.

Figura 1 - Uma parte do papiro Rhind. Depositado no Museu Britânico, Londres.

Fonte: http://www.matematica.br/historia/prhind.html

Evidenciou também a utilização da trigonometria nas medições das pirâmides, no Egito (1500 a.C. aproximadamente) com a ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical, sequências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia (relógios de sol).

Para Smith apud Costa (2003), os babilônios tinham grande interesse pela Astronomia, tanto por razões religiosas, quanto pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio, sendo impossível estudar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem usar triângulos, um sistema de unidades de medidas e uma escala. Eles também foram excelentes astrônomos e influenciaram os povos posteriores, construindo no século 28 a.C. um calendário astrológico e elaborando a partir do ano 747 a.C, uma tábua de eclipses lunares, chegando até os nossos dias.

Um importante conceito no desenvolvimento da Trigonometria é o conceito de ângulo e de como efetuar sua medida, uma vez que ele é fundamental em diversas situações, como na compreensão das razões trigonométricas em um triângulo retângulo (números que dependem dos ângulos agudos do triângulo e não da particular medida dos lados). (COSTA, 2003, p. 3)

3.2. TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Nesta seção, são aplicadas algumas atividades para alunos de 9º ano, retirado de um livro didático, que são comuns nas aulas, com objetivo em apresentar conhecimentos prévios e retomar conceitos e propriedades necessários para o ensino da trigonometria. Segundo os autores do livro didático, Centurión e Jakubovic (2012, p. 129 a 137), as propostas de ensino da trigonometria podem ser apresentadas da seguinte forma:

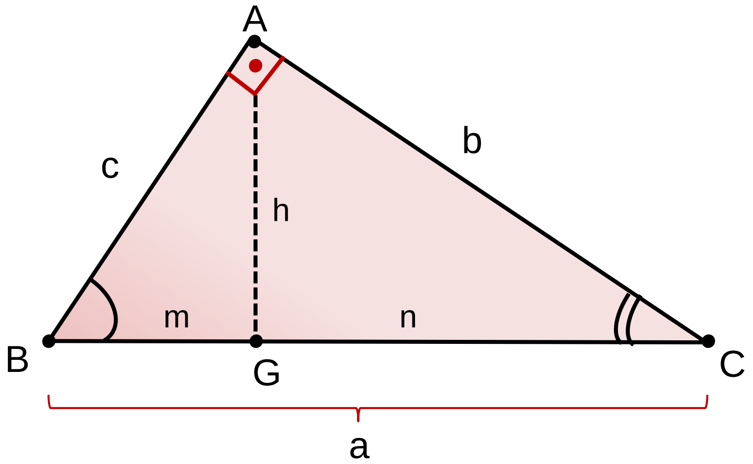
3.2.1. Elementos do Triângulo Retângulo

O estudo da semelhança entre triângulos retângulos pode-se notar as razões entre os lados dos triângulos nos resultados das propriedades de ângulos. E essas propriedades definem as relações métricas.

Sabe-se que um triângulo é retângulo quando um dos seus ângulos internos é reto, ou seja, mede 90º, cada um dos ângulos agudos é formado pela hipotenusa e por um cateto. Esse cateto é chamado de **cateto adjacente** a esse ângulo agudo. O cateto que não forma o ângulo em questão é chamado de **cateto oposto** a esse ângulo.

Dado um triângulo retângulo ABC, conforme a figura 2:

Figura 2 – Elementos do triângulo retângulo.



Fonte: A autora

Analisando as informações do triângulo, temos:

- Catetos são os lados que formam o ângulo reto
- Hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto
- **c** e **b** são as medidas dos catetos.
- **a** é a medida da hipotenusa
- **h** é a altura relativa à hipotenusa
- **m** e **n** são as medidas das projeções dos catetos **c** e **b**, respectivamente.

Em relação aos lados: AB, BC, AC, têm-se que os ângulos internos:

- Em relação a $\hat{B}$:

$\overline{AB}$ – Cateto adjacente ao ângulo $\hat{B}$.

$\overline{\mathrm{CA}}$ – Cateto oposto ao ângulo $\hat{\mathrm{B}}$.

- Em relação a $\hat{\mathrm{C}}$:

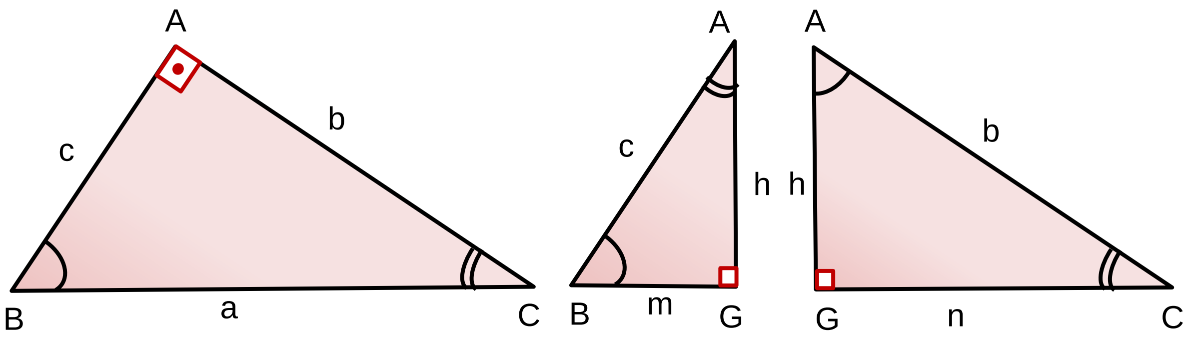
$\overline{\mathrm{CB}}$ – Cateto adjacente ao ângulo $\hat{\mathrm{C}}$.

$\overline{\mathrm{AB}}$ – Cateto oposto ao ângulo $\hat{\mathrm{C}}$.

Na figura anterior podemos observar três triângulos ΔABC, ΔGBA, ΔGAC, que são semelhantes por apresentarem ângulos dois a dois congruentes.

Para demonstrar algumas relações entre as medidas dos lados desses triângulos é prático desenha-los separadamente que maneira que facilite a visualização de seus dados:

Figura 3 - Triângulos retângulos



Fonte: A autora

Temos então as seguintes propriedades:

1ª Demonstração:

$$\Delta\mathrm{ABC} \sim \Delta\mathrm{GBA} \Rightarrow \frac{\mathrm{a}}{c} = \frac{c}{n}$$

$$\boxed{\mathbf{c^2 = am}}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta GAC \Rightarrow \frac{\mathrm{a}}{b} = \frac{b}{n}$$

$$\boxed{\mathbf{b^2 = an}}$$

Resulta que, em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela projeção ortogonal do cateto.

2ª Demonstração:

$$\Delta ABC \sim \Delta GBA \Rightarrow \frac{\mathrm{a}}{c} = \frac{b}{h}$$

$$\boxed{\mathbf{bc = ah}}$$

O produto dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela altura relativa a ela.

3ª Demonstração

$$\Delta GBA \sim \Delta GAC \Rightarrow \frac{\mathrm{h}}{m} = \frac{n}{h}$$

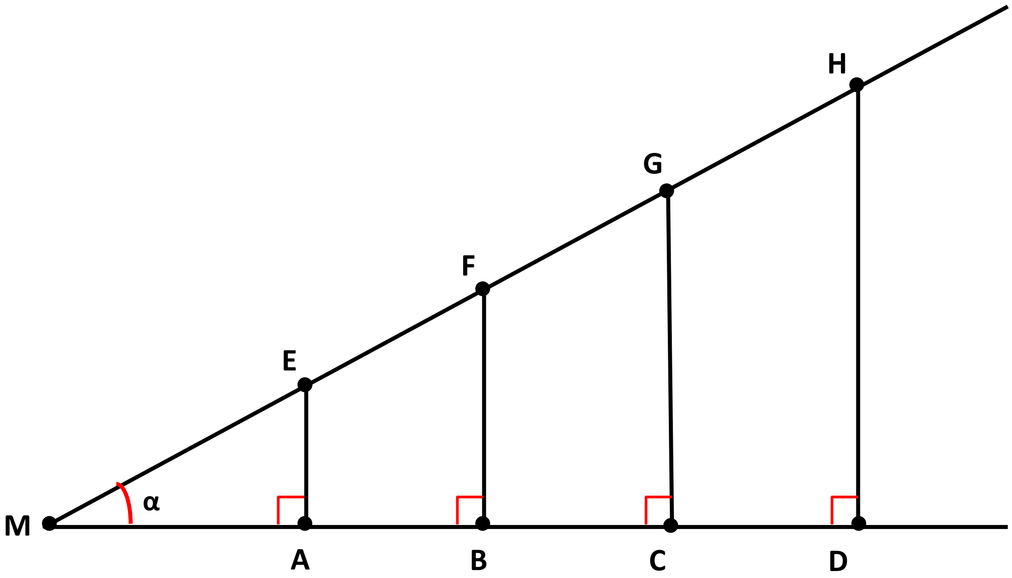
$$\boxed{\boldsymbol{h}^{\mathbf{2}} = \mathbf{mn}}$$

Isto é, a altura ao quadrado é igual ao produto das projeções ortogonais dos dois catetos.

3.2.2. Razões Trigonométricas

Para provar as três razões que relacionam as medidas dos lados e as medidas dos ângulos de um triângulo retângulo considera-se um ângulo qualquer de medida de α, gerando infinitos triângulos retângulos formados pela medida do ângulo α, como representado na figura 4:

Figura 4 - Triângulos retângulos formados por um único ângulo α



Fonte: A autora

Os triângulos ∆MEA, ∆MFB, ∆MGC e ∆MHD são semelhantes, então, a razão entre dois lados de um dos triângulos é igual à razão de dois lados correspondentes de outro triângulo semelhante.

Portanto:

$$\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{ME}} = \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{MF}} = \frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{MG}} = \frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{MH}} = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{ME}} = \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MF}} = \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MG}} = \frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{MH}} = \cos \alpha$$

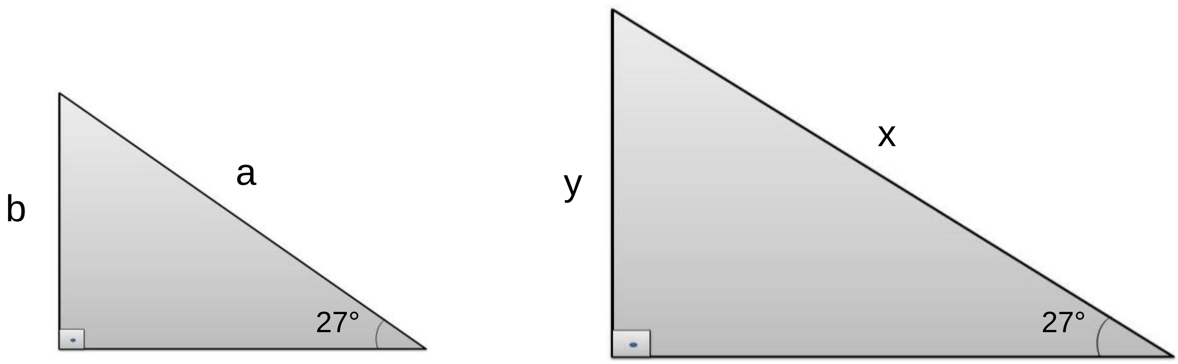
$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{MC}} = \frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{MD}} = \operatorname{tg} \alpha$$

3.2.3. Seno, Cosseno e Tangente.

As atividades a seguir, darão suporte às razões de seno, cosseno e tangente, para melhor compreensão na aprendizagem da Trigonometria.

ATIVIDADE 01: Considere dois triângulos retângulos e calcule o valor numérico do seno do ângulo 27°:

Figura 5 - Triângulos retângulos semelhantes com ângulo igual a 27°



Fonte: A autora.

Como eles são semelhantes, tem-se:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

Dessa proporção, deduzimos outra:

$$\frac{b}{a} = \frac{y}{x}$$

Ou seja, nos dois triângulos, a razão entre o **cateto oposto** ao ângulo de 27° e a **hipotenusa** é um mesmo valor numérico. Que número é esse? Vamos fazer o cálculo para os dois casos:

Conferindo as medidas de cada triângulo com a régua, podemos verificar que a = 4 cm; b = 1,8 cm, x= 6 cm e y= 2,7 cm. Assim temos:

No triângulo menor:

$$\frac{cateto\ oposto\ a\ 27°}{hipotenusa} = \frac{b}{a} = \frac{1{,}8\ cm}{4cm} = 0{,}45$$

No triângulo maior:

$$\frac{cateto\ oposto\ a\ 27°}{hipotenusa} = \frac{y}{x} = \frac{2{,}7\ cm}{6\ cm} = 0{,}45$$

Essa razão é chamada de **seno de 27°** e a indicamos por **sen 27°**

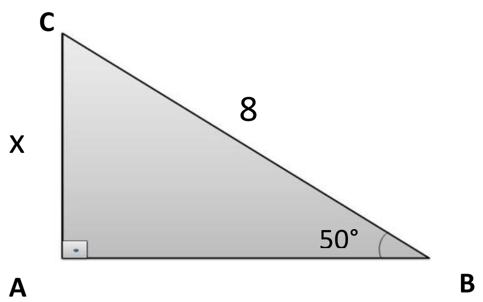
$$\boxed{sen\ 27° = 0{,}45}$$

Portanto a razão entre cateto oposto e hipotenusa é chamada de **seno do ângulo.**

Se $\hat{B}$ é um ângulo agudo de um triangulo retângulo, o seno de $\hat{B}$ é a razão entre o cateto oposto a $\hat{B}$ e a hipotenusa.

ATIVIDADE 02: Conhecendo as medidas de um lado e de um ângulo agudo do triângulo retângulo, vamos calcular a medida do lado oposto a esse ângulo.

Figura 6 - Triângulo retângulo com um ângulo de 50°.



Fonte: A autora.

Sabemos que:

$$sen\ 50° = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$$

Na tabela de senos, vemos que sen 50° ≅ 0,77.

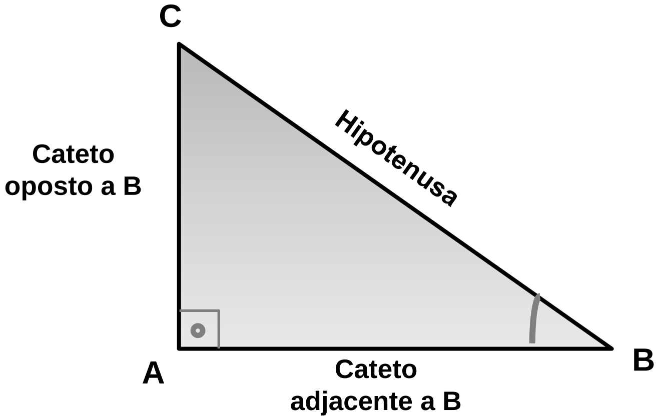
Então, sen 50° =

$$sen\ 50° = \frac{AC}{BC} \longrightarrow 0{,}77 = \frac{x}{8} \longrightarrow x = 6{,}16$$

Portanto o comprimento em centímetros calculado foi de 6,16.

Você já conhece uma das razões trigonométricas: **o seno.** Além do seno, são úteis duas razões trigonométricas: o **cosseno** e a **tangente**.

Figura 7 - Triângulo retângulo formado por um ângulo B



Fonte: A autora.

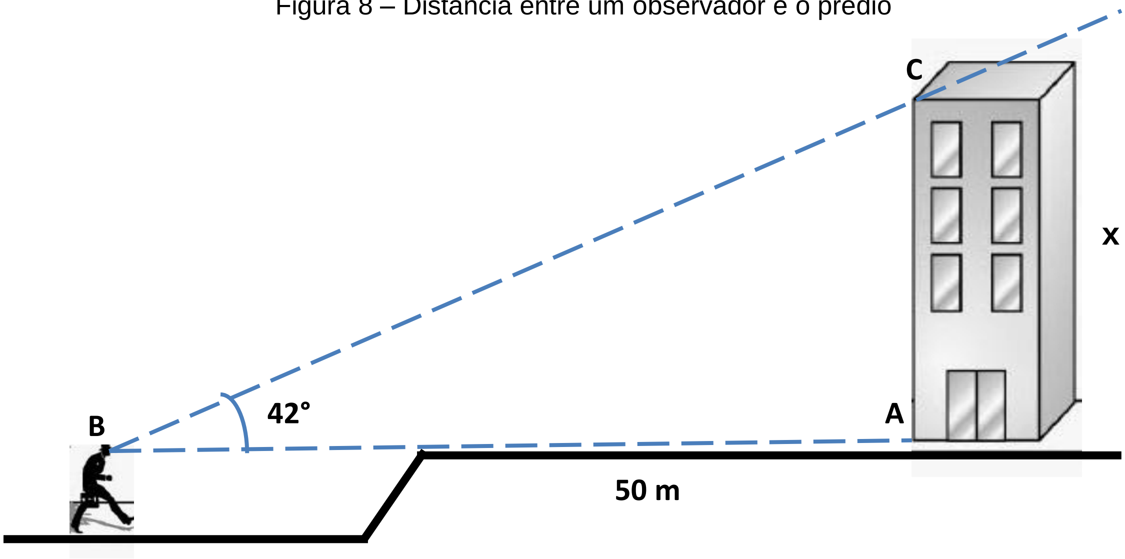
$$\boxed{\mathrm{sen}\ \hat{B} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{B}}{\text{hipotenusa}}}$$

$$\boxed{\cos\ \hat{B} = \frac{\text{cateto adjacente a } \hat{B}}{\text{hipotenusa}}}$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\ \hat{B} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{B}}{\text{cateto adjacente } \hat{B}}}$$

ATIVIDADE 03: Encontrar a altura de um edifício, sem medi-la diretamente. Inicialmente nos afastamos 50 metros do pé do edifício: sendo A o pé do edifício e B o ponto em que estamos afastados do prédio, temos AB=50m. Do ponto B, medimos o ângulo assinalado, sob o qual avistamos o topo do prédio. Vamos supor que $\hat{B}$ mede 42°.

Figura 8 – Distância entre um observador e o prédio



Fonte: A autora.

Nesse caso, conhecemos o cateto adjacente a 42°, e queremos obter o cateto oposto a 42°. A razão que envolve os dois catetos é a tangente do ângulo:

$$\boxed{tg\ 42° = \frac{cateto\ oposto\ a\ 42°}{cateto\ adjacente\ a 42°}}$$

Logo:

$$\mathbf{tg\ 42°} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{50}}$$

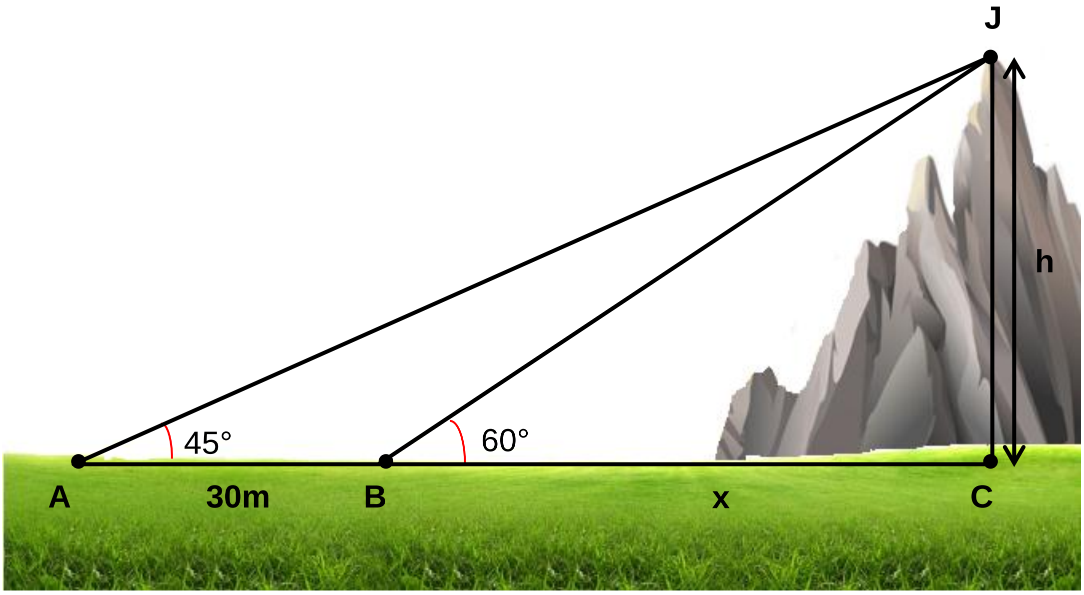
Consultando a tabela trigonométrica de 1° a 89°, vemos que tg **42°=** 0,9. Temos, então:

$$\mathbf{0,9} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{50}} \Rightarrow \mathbf{x = 45}$$

A altura do prédio é de 45 metros.

ATIVIDADE 4: Um observador avista uma montanha sob um ângulo de 45°, aproximando 30 metros da montanha passa a visualizá-la sob um ângulo de 60°. Como encontrar a medida da altura dessa montanha?

Figura 9 - Distância entre um observador e a montanha



Fonte: A autora.

Para encontrar a medida de **h,** utiliza-se a relação da tangente, já que temos o recurso dos dois catetos, sabendo que: tg 45°=1 e tg 60°=√3

No triangulo ΔACJ, temos:

$$tg\ 45° = \frac{h}{30+x} \Rightarrow 1 = \frac{h}{30+x} \Rightarrow h = 30 + x \qquad (1)$$

E no triangulo ΔBCJ, temos:

$$\mathrm{tg}\ 60° = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{x}} \Longrightarrow \mathrm{x} = \frac{\mathrm{h}}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), concluímos que:

$$h = 30 + \frac{\mathrm{h}}{\sqrt{3}} \Longrightarrow h = \frac{30\sqrt{3}+h}{\sqrt{3}} \Longrightarrow h = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \Longrightarrow h \cong 71$$

Por tanto, a altura da montanha é aproximadamente 71 metros.

4. PROPOSTA DE MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.

Neste capítulo será apresentada a confecção de um medidor de ângulos e uma atividade para incentivar alunos de 9º ano ao estudo da trigonometria com a interação de situações reais. Para Silva e Silva (2017, p. 3) “por tratar de situações que partem da realidade a modelagem matemática, aproxima os conteúdos matemáticos visto na escola com o cotidiano dos alunos”.

Com a proposta de incentivar os participantes a extrair definições de suas próprias praticas, assim como os antepassados com suas intuições conseguiram calcular alturas inacessíveis, é possível aprender a Matemática através das descobertas com uma aprendizagem diferente.

4.1. CONFECÇÃO E UTILIZAÇÃO DO MEDIDOR DE ÂNGULOS

Para melhor compreensão da função de um medidor de ângulo é importante confeccionar com os alunos para auxiliar na relação do ângulo entre as medidas de determinados objetos encontrados na escola, como uma porta, muro, cesta de basquete, uma árvore, entre outros.

Materiais para construção:

- Transferidor de 180º ou 360º
- Canudo
- Papel cartão
- Fita adesiva transparente
- Borracha ou pedrinha
- Barbante

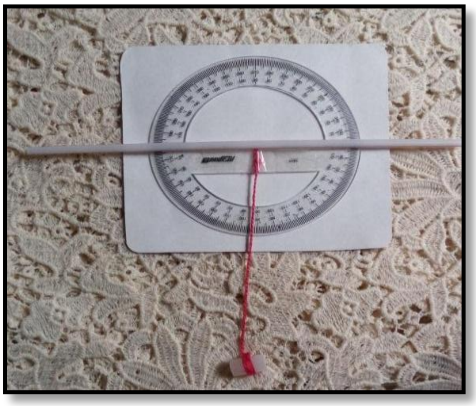
Inicie fixando no centro do transferidor uma extremidade do barbante e na outra amarre um objeto como uma pedrinha, borracha, entre outros, assim o peso auxiliará a marcação do ângulo.

Figura 10 - Confecção do medidor de ângulo I

Fonte: A autora.

Em seguida, com a fita adesiva prenda o canudo no diâmetro do transferidor que indica o ângulo de 180º, e logo após cole o transferidor no papelão já encapado com papel cartão.

Figura 11 - Confecção do medidor de ângulo II



Fonte: A autora.

Utilização do medidor de ângulos.

Neste momento, é ideal que o professor peça aos alunos que façam a medida de objetos no ambiente ou nas proximidades da escola.

Segue algumas indicações para o uso do medidor de ângulos:

1- Escolha um objeto de estudo com uma altura inacessível como árvore, poste, prédio e outros.

2- Nivele o transferidor de acordo com a estratégia do peso em direção ao ângulo de 90º, e visualize o topo do objeto através do canudo.

3- O ângulo formado será marcado pelo barbante, com auxilio de um colega defina o ângulo marcado, e compreenda que o ângulo que deverá ser usado será o complementar de 90º.

4- É importante saber a altura da pessoa que está observando pelo medidor de ângulo.

5- Medir a distância entre o observador e o objeto.

4.2. MEDINDO ALTURAS UTILIZANDO O MEDIDOR DE ÂNGULOS.

Aplicar a trigonometria como muitos professores fazem, apresentando atividades para o aluno resolver sem nenhuma interação do contexto, sem formular hipóteses, apenas definindo variáveis sobre um problema a qual será abordado por exemplos e conceitos matemáticos, o ensino da matemática não se torna real na vida do aluno. Segundo Ferri (2006 apud SILVA e SILVA, 2017, p. 3), a atividade de modelagem matemática representa dois mundos que interagem entre si, pode-se dizer que é o mundo real e o mundo da matemática, pois é na interação entre os dois que a modelagem matemática atua.

Essa atividade tem a proposta de aproximar os alunos de experimentos da Modelagem Matemática, que será realizada de acordo com as etapas proposta por Burak (2010): 1) escolha do tema; 2) pesquisa exploratória; 3) levantamento do(s) problema(s); 4) resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema; 5) análise crítica da(s) solução(es).

Inicialmente, deve ter uma orientação aos alunos sobre o projeto que será desenvolvido em determinadas aulas de acordo com cada etapa estabelecida, sendo de grande importância a participação de todos nos processos de modelagem matemática para um melhor resultado. É ideal solicitar a formação de grupos para a realização das atividades, deixando-os livres nessa escolha de acordo com a afinidade.

Os alunos devem compreender a respeito da Modelagem Matemática para ter afinidade do decorrer do processo de construção, logo, é necessário um dialogo com a turma sobre as suas propostas e perspectivas na aprendizagem.

De acordo com a proposta de Burak, a primeira etapa deve ser a **escolha do tema**, que na perspectiva da Modelagem Matemática tem que partir do interesse do grupo de estudantes, ocasionando a curiosidade ou a proposta da resolução de uma situação problema (BURAK, 2010, p. 19). E como o tema aqui proposto é a uso de um medidor de ângulos na trigonometria, uma conversa informal sobre o tema deve ser uma estratégia para avaliar o conhecimento dos alunos sobre o tema, assim como propor a seguinte situação: Como é possível medir a altura de um objeto inacessível utilizando um ângulo? Como um prédio, montanha ou árvore. É do interesse que exista diferentes soluções e debates, com a proposta de envolvê-los com o tema.

Com o tema escolhido, é o momento de guia-los para a segunda etapa, a **pesquisa exploratória**, que segundo Burak é necessário:

> conhecer mais sobre o tema, buscar informações no local onde se localiza o interesse do grupo de pessoas envolvidas, além de se constituir em uma das premissas para o trabalho nessa visão de Modelagem é uma etapa importante na formação de um estudante mais crítico. Entendemos, pois que para conhecer melhor algum objeto ou alguma coisa precisa se organizar, saber o que e como enunciar questões que produzam respostas às questões (BURAK, 2010, p. 21).

Nesse momento, o professor como mediador, incentivará os participantes a conhecer a ferramenta de pesquisa, podendo leva-los para um local mais amplo, como pátio da escola, quadra, ou jardim, assim, auxiliando na descoberta do uso do medidor de ângulos. É necessário escolher o objeto da pesquisa, para então nivelar o transferidor baseando na indicação do barbante no ângulo de 90º, e através do canudo observar um ponto que represente a altura do objeto, quando se faz isso o barbante se desloca pelo transferidor e tem-se o ângulo de observação. Deve medir a altura do observador e a distância entre o observador e o objeto. Todos os dados coletados devem ser descritos e organizados em uma tabela para facilitar a resolução da situação-problema.

Altura do aluno **(h_2)**	
Distância entre o observador e o objeto **(d)**	
Ângulo do medidor **(α)**	
Ângulo complementar **(α – 90º)**	
Altura do objeto **(H)**	

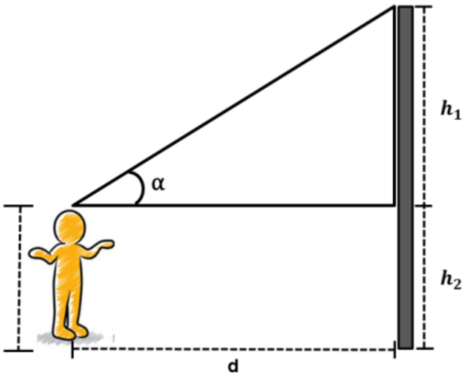
“Agora, é a etapa em que se inicia a ação matemática, propriamente dita, pois é o início do **levantamento dos problemas**, como resultado da pesquisa exploratória” (BURAK, 2010, p. 21). Os alunos serão orientados a propor situações/problemas baseado nos dados encontrados para instigar sua criatividade nas possibilidades de resoluções em cada situação inserida pela turma. Pode ocorrer questão como: Por que calcular o complementar do ângulo de 90º? Qual o objetivo do nivelamento? Posso atribuir minhas próprias medidas?

Na próxima etapa, os alunos deverão buscar soluções para os problemas levantados, com suporte para esse momento pode-se sugerir o uso do livro didático para auxiliar nos conteúdos matemáticos, pois na **resolução dos problemas e desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema,** requer um esforço para desenvolver habilidades matemáticas de forma que o aluno seja capacitado a construir seu conhecimento pelo significado que a matemática está representando na descoberta desse aprendizado, assim “as operações, as propriedades, e os diversos campos da matemática que se fazem presentes nessa etapa, sem dúvida atribuem significados aos conteúdos matemáticos.” (BURAK, 2010, p.22)

Segundo BURAK (2010), caso, o assunto ainda não tenha sido ministrado à turma, o professor no papel de mediador deve oferecer ao aluno a oportunidade para construir esse conhecimento, pois o fundamento da modelagem matemática em tornar o aluno responsável de seu aprendizado é primordial.

Com dados coletados, espera-se que os alunos representem a situação-problema em forma de desenho, para associar a construção do modelo no uso das relações trigonométricas na resolução da questão. Assim:

Figura 12 - Esquema para observar com o medidor de ângulo



Fonte: A autora.

Para determinar a medida do objeto, primeiro deve encontrar a medida de $\boldsymbol{h_1}$**,** e para calcular a razão entre dois catetos deve-se usar a tangente do ângulo em questão, logo:

$$tg(\alpha) = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

$$tg(\propto -90) = \frac{h_1}{d}$$

$$h_1 = tg(\propto -90).\, d$$

Com a medida de $\boldsymbol{h_1}$ definida**,** é fácil compreender que a altura total do objeto corresponde a $h_1 + h_2$, então:

$$H = h_1 + h_2$$

$$\boxed{\boldsymbol{H = tg(\propto -90).\, d + h_2}} \quad (3)$$

Portanto, a equação (3) é o modelo que pode ser utilizado para solucionar a altura de objetos inacessíveis com os dados de um ângulo encontrado por um medidor, a altura do observador e a distância até o objeto. A construção desse modelo "permite alcançar objetivos tais como: conjeturar, levantar hipóteses, experimentar, refletir, desenvolver a autonomia, a capacidade de buscar novas estratégias e encaminhamentos". (BURAK, 2010, p. 23)

Na finalização do desenvolvimento da atividade, a última etapa da modelagem matemática é **Análise crítica da(s) solução(ões)**, momento que os alunos compreenderão o caminho que seguiram para alcançar os resultados, sendo eles corretos ou não, a proposta dessa fase é socializar cada resultado. Para Burak:

> Esta etapa da Modelagem é um momento muito rico e especial para analisar e discutir a solução ou as soluções encontradas. É um momento em que se fazem as considerações e análise das hipóteses consideradas na etapa de levantamento dos problemas. Possibilita tanto o aprofundamento de aspectos matemáticos como dos aspectos não matemáticos envolvidos no tema. (BURAK, 2010, p.24)

Com a construção desse projeto, vale aproveitar mais um pouco e aprofundar no conteúdo para explorar melhor a trigonometria, invertendo o problema, com a proposta de encontrar a altura do observador, utilizando a relação trigonométrica seno, já com a altura do objeto definida. Outra possibilidade de pesquisa seria encontrar a medida da hipotenusa do problema, como o estudo abrange os triângulos retângulos utilizaria o Teorema de Pitágoras.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A educação, sendo de fundamental importância para o ser humano, tem encontrado diversas dificuldades em seus objetivos, com isso ocorre à necessidade de repensar novas ideologias para a aprendizagem garantir seu espaço na preferência dos alunos, principalmente na educação matemática que é o principal alvo de rejeição escolar, e a escolha do tema sobre a Modelagem Matemática veio do interesse de um ensino diferenciado nas aulas de Matemática, que visa um total envolvimento dos alunos ao desafia-los na construção de um novo modelo de ensino, quando o professor não é o único responsável em transmitir conhecimento, e os seus conteúdos não precisam de fórmulas decoradas e as resoluções não se ancoram em repetições.

Como foram analisadas as propostas de atividades do livro didático, percebemos que mesmo buscando contextualizar os comandos das questões, as resoluções continuam com cálculos mecanizados e sem significado para o aluno, e o interesse não é alcançado, pois não desperta a curiosidade em descobrir a matemática. E com a atividade em utilizar o medidor de ângulo como estratégia de ensino, de início já proporciona uma interação aos alunos em confeccionar o próprio material que dará suporte a pesquisa, assim os participantes enxergam com vários pontos de vista a situação-problema, e no decorrer do processo vai surgindo questionamento e interesse, ocasionando uma aprendizagem significativa e prazerosa.

Então, as possibilidades que a Modelagem Matemática oferece ao ensino da Matemática garante um desenvolvimento educacional direcionado a pratica social, rompendo paradigmas na construção de seu conhecimento em ter uma interação direta com o professor; trabalhar em grupo como estratégia para a socialização; facilitação na aprendizagem; e a capacidade em tornar o aluno mais atento às situações-problemas ao instigar o senso investigativo.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W; BRITO, D. O conceito de função em situações de modelagem matemática. **Revista Zetetikê**, v.12, n.23, p.42-61, jan/jun.2005.

BARBOSA, J.C. **A Prática dos Alunos no Ambiente de Modelagem Matemática**: O Esboço de um Framework. In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A.D., ARAÚJO, J.L. (org.). Modelagem Matemática na Educação Brasileira: Pesquisas Práticas Educacionais. Recife: SBEM, 2007.

______. **Modelagem matemática e os professores**: a questão da formação. Bolema, Rio Claro, n. 15, p. 5-23, 2001.

______. **Modelagem Matemática**: O que é? Por que? Como? *Veritati*, n. 4, p. 73-80, 2004. Disponível em <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br> Acesso em 17 jul. 2017

______. **Modelagem matemática e os futuros professores**. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 25., 2002, Caxambu. *Anai*s... Caxambu: ANPED, 2002. Disponível em <http://www.anped.org.br/24/T1974438136242.doc>. Acesso em: 10 fev. 2018.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BELTRAO, M. E. P.; **Aplicações e Modelagem Matemática:** Aspectos históricos. In: Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012, Petrópolis. Anais SBEM, 2012. Disponível em <http://www.sbembrasil.org.br/files/v_sipem/PDFs/GT05/CC88044823891_B.pdf> Acesso em: 17 ago. 2017.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 3.0L ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BURAK, D. **Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula.** Revista de Modelagem na Educação Matemática, v. 1, p. 10-27, 2010.

CENTURION, Marília. JAKUBOVIC, José. **Matemática nos dias de hoje:** na medida certa. 1.ed. São Paulo: Leya, 2015. 9º ano.

COSTA, N. M. L. **A História da Trigonometria.** 2003. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf> Acesso em: 09 fev. 2018

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

D`AMBRÓSIO, U. **A matemática nas escolas**. Educação Matemática em Revista, ano 9 nº 11A, edição especial, abril de 2002, pp29-33.

GIL, Antônio Carlos, 1946 - **Como elaborar projetos de pesquisa**/Antônio Carlos Gil. - 4. ed. - São Paulo : Atlas, 2002

FERREIRA, G. P; SILVEIRA, A.; DA SILVA, L. A. **A Modelagem Matemática ao longo da História e o surgimento da Modelação Matemática no Brasil. 2013.** Disponível em <http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/971_903_ID.pdf> Acesso em: 31 Jul. 2017.

MACHADO, Elisa Spode. **Modelagem Matemática e Resolução De Problemas**. Porto Alegre, 2006. Disponível em <http://repositorio.pucrs.br/dspace/handle/10923/2950> Acesso em: 18 out. 2017.

MIGUEL, Ivania Célia. **UMA PROPOSTA DE MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA À PRODUÇÃO DA FARINHA DE TRIGO**, 2009. Disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1498-8.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2017

POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas: aprender a resolver problemas, resolver problemas para aprender**. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

SANTOS, E. F.; ROSA, M. A. **Modelagem Matemática no ensino da Trigonometria.** 2008. 50 f. Monografia. Universidade Estadual De Goiás, Posse, 2008.

SILVA, R.M.; SILVA, K. A. P. **O uso do Teodolito em uma atividade de Modelagem Matemática envolvendo Trigonometria**. Encontro Paranaense de Educação Matemática, Unioeste de Cascavel, 2017

VEYNE, P. M.. **Como se escreve a história e Foucault revoluciona a história**. Trad. Alda Baltazar e Maria Auxiliadora Kneipp. 4 ed.. Brasília: Universidade, de Brasília, 2014.