UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA

KLEBER JOSÉ PAIXÃO ARAÚJO

UMA ABORDAGEM CONCEITUAL E PRÁTICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

BRAGANÇA-PA

2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA

KLEBER JOSÉ PAIXÃO ARAÚJO

UMA ABORDAGEM CONCEITUAL E PRÁTICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática como pré-requisito à obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Elizardo Fabricio Lucena-UFPA

BRAGANÇA-PA
2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA

KLEBER JOSÉ PAIXÃO ARAÚJO

UMA ABORDAGEM CONCEITUAL E PRÁTICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática como pré-requisito à obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Elizardo Fabricio Lucena

Banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
ELIZARDO FABRICIO LIMA LUCENA
Data: 21/11/2025 16:27:57-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr.Elizardo Fabricio Lima Lucena (Orientador)
UFPA/Bragança

Documento assinado digitalmente
EDSON JORGE DE MATOS
Data: 21/11/2025 16:40:17-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Edson Jorge de Matos (Membro interno)
UFPA/Bragança

Documento assinado digitalmente
LUIZ GUTEMBERG ROSARIO MIRANDA
Data: 21/11/2025 20:00:06-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Luiz Gutemberg Rosário Miranda (Membro externo)
UFPA/Salinópolis

Agradecimentos

De imediato, agradeço ao Senhor Deus por ter me dado direcionamento e forças para chegar até aqui, se não fosse por sua graça e amor irresistível não teria finalizado essa etapa de minha vida.

Em especial, dedico este trabalho as minhas filhas, Késsida Lorrana Ataíde Paixão e Karla Luana Ataíde Paixão, pois elas são a motivação de fazer-me querer continuar a vencer os obstáculos que surgem no decorrer de minha caminhada, por estarem ao meu lado todos os dias. Elas que fazem meu amanhecer e o anoitecer ser mais feliz e leve.

Agradeço aos meus pais, Maria Paixão Araújo e Haroldo Parente Paixão, por sempre me amar independentemente do que sou, obrigado por seus ensinamentos e dedicação, eles foram essenciais em toda a minha vida e continuam sendo.

Claro, não poderia esquecer dos amigos que no decorrer desta caminhada se tornaram verdadeiros irmãos, agradeço à vocês. Foram 4 anos de muitas lutas, risadas, brincadeiras e muitos ensinamentos, obrigado a cada um de vocês, membros da antiga matemática 2016, amigos, vocês são incríveis. Aprendi a amá-los e a amar esse curso incrível.

Meus singelos agradecimentos irão ao meu orientador prof. Dr. Elizardo Lucena e ao prof. Dr. Luiz Gutemberg, por me acompanharem nessa longa jornada para a síntese desse trabalho, pela disponibilidade em orientar-me e por todo o tempo de dedicação que disponibilizaram para que isso fosse possível. Muito obrigado!

Meus profundos agradecimentos a todos aqueles que passaram por minha vida e deixaram suas marcas.

“É preciso muita coragem para combater preconceitos e regimes opressivos, mas é preciso ainda mais coragem para admitir ignorância e se aventurar no desconhecido.”

YUVAL NOAH HARARI

Resumo

Em síntese, este trabalho tem por objetivo buscar estudar conceitos de Aritmética e utilizá-los em conteúdo de matemática financeira, ou seja, em problemas de juros simples e juros compostos. De imediato, tem-se incluso tópicos referente a definições de frações, porcentagens, fatores de desconto e acréscimos, bem como a forma como estes se relacionam. Posteriormente, tratar-se-á de temáticas que envolvam conhecimentos básicos importantes para entender a ideia da aplicação dos conceitos de matemática financeira aliado a um contexto social, a pesca do peixe pargo. Por fim, apresenta-se as definições, teoremas e demonstrações no tópico de matemática financeira, assim como uma aplicação prática de tal temas na realidade.

Palavras-chave: Aritmética · Ensino-Aprendizagem · Matemática Financeira · Aplicação.

Abstract

In summary, this work aims to study concepts of Arithmetic and use them in financial mathematics content, that is, in simple interest and compound interest problems. Immediately, topics related to definitions of fractions, percentages, discount and additions factors have been included, as well as the way they are related. Subsequently, we will deal with themes that involve basic knowledge that is important to understand the idea of applying the concepts of financial mathematics combined with a social context, fishing for snapper. Finally, the definitions, theorems and proofs in the topic of financial mathematics are presented, as well as a practical application of such themes in reality.

Key-words: Arithmetic · Teaching-Learning · Financial Math · Application.

Conteúdo

Introdução

Yuval Noah Harari afirma, em seu livro 21 lições para o século 21, que a única constante é a mudança. Parafraseando o autor, pode-se dizer que a matemática é mutável e como tal objetiva buscar sempre novas mudanças. E claro, para que isso possa acontecer é necessário, portanto, que conceitos, definições e praticidades matemáticas estejam intimamente ligadas com a convivência dos seres humanos.

Com o objetivo principal de trazer ao leitor uma excelente e bem cuidada edição de aplicações de regimes de juros simples e compostos, procurou-se estabelecer alguns conceitos iniciais da aritmética, a fim de proporcionar ao estudante um fácil entendimento do que será abordado ao longo desse trabalho de conclusão de curso; assim como a maneira pela qual tais modelos matemáticos podem ser manipulados para o estudo de objetos financeiros.

No entanto, o objetivo primordial desse trabalho é levar ao indivíduo a importância de se entender um pouco da matemática financeira, mostrando um jeito matemático de ver aplicações simples e do cotidiano sendo usados como artifícios para o ensino dessa parte da matemática.

Neste sentido, a aplicabilidade da matemática nas diversas áreas do conhecimento é muito presente, haja vista que é por meio dessa ciência que novos conceitos e fórmulas surgem, expandindo cada vez mais essa maravilhosa ciência, entre os quais podemos ver técnicas matemáticas em ambientes econômicos e sociais. Logo, a obtenção desse incremento envolve diversos modelos matemáticos, proporcionando uma abordagem precisa na coleta de dados para medir a rentabilidade de um capital aplicado a um processo de rendimento monetário.

Infere-se assim que os regimes de capitalização de juros simples e composto é bastante útil para entender como se dá o cálculo feito pelos bancos para fazer o capital render juros, como o leitor pode vivenciar isso na prática e mais, a aplicação é baseada em um valor de rendimento que não é aceito pelos bancos, mas que serve de mecanismo principal para o entendimento.

Por isso, a proposta de criar esse trabalho é basicamente proporcionar ao leitor o fácil entendimento de conceitos simples da matemática financeira, além de condicionar o leitor a vivenciar uma forma de seu meio social está inserido em fórmulas matemáticas. Isso justamente só foi possível depois de uma análise dos livros didáticos e após chegar à conclusão de que muitos dos exemplos e problemas abordados nos livros não condizem com a realidade dos alunos da região norte do país, em especial do Estado do Pará, no Brasil.

Por isso, tendo como base o que foi exposto acima, o principal foco deste trabalho é explanar alguns tópicos pertinentes ao entendimento de matemática financeira. Assim, serão descritos alguns dos tópicos para o entendimento dos exemplos.

A teoria de frações e, juntamente, de porcentagens são apêndices de aritmética estudados no ensino fundamental e no ensino médio. Cada parte foi desenvolvida na intenção de um estudante deste nível escolar, ao fazer uso desse trabalho, possa usufruir da simplicidade e entender os tópicos mais importantes para sua formação.

A síntese para a elaboração desse trabalho foi angariar os dados da empresa para que a aplicação matemática fosse a mais real possível, bem como o levantamento de dados bibliográficos do assunto, pesquisando diversas aplicações do tema em caráter social e econômico. Muitas dissertações e teses foram profundamente estudadas e revisadas para chegar ao que foi exposto no capítulo 4.

A partir disso, o método foi elaborado e os cálculos desenvolvidos para que assim chegasse a uma solução plausível sobre o assunto. Vale ressaltar a dificuldade em construir uma aplicação que fosse condizente com os conteúdos aqui estudado, o método que será abordado foi utilizado como medida de posição.

O capítulo 1 abordará o contexto histórico da matemática financeira, como surgiu, quais os avanços que ocorreram em cada época e o impacto que trouxe para a matemática, em especial a matemática financeira.

No capítulo 2 é abordado conceitos de frações, operações que envolvem frações, porcentagens e como se calcular a porcentagem de um número. Ainda sobre este capítulo, vai ser explanado os conceitos de propriedades frações acompanhadas de exemplos; o conceito básico de porcentagem, nesta parte, trata-se apenas de conceituações simples que não requerem aprofundamento sobre o assunto.

Evidentemente, no capítulo 3 abordará a parte mais profunda da temática, o qual está repleto de definições e exemplos com suas respectivas demonstrações; bem como tópicos abordando variações percentuais, fator de atualização, aumentos e descontos, etc.

A aplicação destacada vai usufruir de técnicas matemáticas para obtenção dos resultados. Ela está construída a partir do uso das duas definições apresentadas no capítulo 3, dissertado ao longo deste trabalho.

Destarte, o último capítulo apresenta as considerações finais, na qual sua composição dar-se-á por meio daquilo que se deseja mostrar ao estudante, tendo como base os experimentos desenvolvidos.

Capítulo 1

A origem da matemática financeira

A matemática, assim como a língua escrita e falada, sofre modificações constantes ao longo do tempo, justamente por se tratar de uma linguagem codificada por meio de números e sua interpretação leva o decodificador a conhecer a informação que se deseja passar após a leitura dos códigos que a constituem.

Por conta disso, entender como a matemática financeira se instaurou na sociedade antiga e moderna é primordial, porque a partir da evolução histórica ficará claro para o leitor os caminhos trilhados ao longo dos anos que sucederam o comércio e como a ideia de juros e lucros (isto não define apenas a matemática financeira, porque é apenas o início do estudo deste conteúdo) estão intimamente ligados com as práticas de negócios dentro das comunidades.

Assim, vale lembrar que os primeiros humanos, para garantir a sobrevivência, deveriam caçar, angariar alimentos e se abrigar em cavernas afim de satisfazer suas condições básicas, ou seja, o ser primitivo lutava todos os dias para garantir seu espaço e consequentemente sua sobrevivência. Por conseguinte, novas rotinas foram inseridas no cotidiano, tais como a construção de uma família e o abandono da vida nômade, se agrupando em grupos sociais e a adquirindo um "sistema de governo", com poucas regras, mas que para o período antigo já era um grande avanço.

Contudo, com o crescimento constante do grupo, o homem primitivo precisou criar novas técnicas para superar suas necessidades pessoais, como se alimentar todos os dias, um abrigo quente e confortável, evitar o desperdício de calorias, confeccionar roupas para abrigar-se do frio, etc.

Com a implementação de técnicas agrícolas e a estocagem de alimentos, as condições de sobrevivência foram aumentando e assim a implantação de um processo de troca foi criado. Em síntese, esse pequeno comércio era apenas de caráter alimentar, ou seja, não se tinha em mente a busca pelo lucro. As trocas, inicialmente, contemplavam todo o grupo, alimentando-o em período que antes era difícil de viver.

A partir de tal modificação nas relações sociais, a complexidade do mercado foi aumentando e o processo de troca foi assumindo novos paradigmas. De acordo com Perez [],

> *"Os povos ampliaram seu mercado para comercializar produtos, fossem eles matéria-prima ou produtos transformados. Entre os povos que se destacaram no comércio estão os chineses, indianos, hebreus e fenícios. Esses povos aperfeiçoaram o sistema de transporte terrestre e marítimo, para irem cada vez mais longe com suas mercadorias e trazer com eles novos produtos desconhecidos em suas terras de origem." (PEREZ, 2009, p. 14)*

É partir de marcas como essas, registradas acima, que as relações de comércio se potencializou e tornou-se peça chave para o desenvolvimento das mais variadas comunidades, fixando novos grupos sociais e estendendo as relações de lucro.

Por conta disso, pode-se dizer que a matemática financeira teve seu surgimento no período em que os ancestrais do homo sapiens deixou a vida nômade e aderiu a vida em sociedade. Assim, com as novas adequações e as mudanças de características nômades para sociais, a implementação de técnicas agrícolas, bem como as de caça e pesca possibilitou aos seres das comunidades realizarem trocas com os membros de outras sociedades. A expansão do comércio foi um fator crucial para que a matemática financeira fosse instaurada como prática de acúmulo de riquezas e destaque no meio social.

Diante disso, pode-se definir este ramo da matemática como sendo o processo de valorização do dinheiro em um curto espaço de tempo. Entende-se aqui dinheiro, não como o valor monetário moderno, mas sim como todo objeto que defina o quantitativo de posse/propriedade ao longo dos anos, isto é, dinheiro aqui será as sementes (base do valor monetário das sociedades que antecederam Cristo), propriedade de terras, propriedade sobre mão de obra (neste caso, mão de obra escrava) e, por fim a ideia de dinheiro que é usada atualmente. Logo, a definição de matemática financeira, de acordo com Júnior, pode ser definida como:

> *"A matemática financeira pode ser definida de forma mais simples sendo a aplicação da matemática para decisões de gestão a respeito de operações financeiras. Para que essas operações financeiras sejam executadas, é necessária a aplicação de cálculos apropriados, sendo que a análise detalhada desses cálculos é o objeto e preocupação da matemática financeira" (JÚNIOR, 2009, p. 04).*

Destarte, levando em consideração a afirmativa acima, considera-se que esse ramo da matemática, que está sendo definido ao longo deste trabalho, é exaltar os cálculos que estão sendo expostos indiretamente, escondidos através de técnicas de soluções matemática, ao leitor. Assim como foi de extrema importância a compreensão e a interpretação das técnicas usadas há milênios, novas compreensões podem surgir quando se tem uma análise precisa do código matemático que está sendo usado para representar o valor daquilo que está sendo objeto de pesquisa.

Capítulo 2

Noções Preliminares

Este tópico abordará alguns conceitos básicos da matemática, estudados no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, e que são temas extremamente importante para que os alunos aprendam de forma consistente a matemática financeira. Como meio de sustento para as definições, usar-se-á os livros bases do ensino fundamental, tais como "Teláris – Ensino Fundamental – Anos Finais" do autor Luiz Roberto Dante; "Matemática Compreensão e Prática" do autor Ênio Silveira; "Matemática – Ciência e Aplicações – Volume 02" dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo, Nilza de Almeida.

2.1 Noções de Frações como Porcentagem

Este tópico abordará os conceitos de frações, além de definir a ideia primária de porcentagem aplicadas em problemas fracionários. Isto é importante, justamente porque permiti um entendimento do real significado de frações e como estão intimamente ligadas as propriedades de porcentagens.

2.1.1 Frações

Antes de definir o que é uma fração em linguagem matemática, precisa-se antes de tudo entender como surgiu.

Assim, tem-se como contexto histórico a agricultura egípcia, haja vista que muitos dos agricultores dessa civilização possuíam terras próximas a margem do rio Nilo. Como se conhece, esse rio sofria por diversas mudanças, ora estava cheio ora estava vazio, em algumas partes do ano.

Quando tal mudança ocorria, no seu momento de cheia, levava qualquer tipo de marcação que estava próxima de suas margens, como cercas e barragens usadas para marcar as partes de terras de cada agricultor, sendo necessário demarcar novamente os limites dos terrenos, quando tal cheia acontecia. Isto é, novos cálculos precisavam ser realizados.

É claro que para fazer esse tipo de medições, eram necessárias pessoas que possuíam capacidades intelectuais suficientes para fazer os cálculos corretos, já que os agricultores não possuíam conhecimentos necessários para fazerem suas próprias marcações. O método utilizado para fazer tal marcação era o uso de cordas que tinham algumas marcações, seja pelo tamanho da corda, seja uma especifica, com uma unidade de medida assinalada. As pessoas que faziam uso da corda, teriam que ver quantas vezes ela cabia na lateral dos terrenos.

No entanto, mesmo que a unidade de medida fosse pequena sempre sobrava ou faltava corda para medir todas as laterais dos terrenos, raramente a medida cabia um dentro de uma representação de número inteiro. Ao final da medição, o valor que era mostrado era, por exemplo, nove "pedaços de corda" mais meio "pedaço de corda".

Como visto, esse tipo de representação dificilmente poderia ser escrito em formato de número inteiro, foi por razões como essas que os egípcios criaram um novo tipo de representação numérica, no caso as frações.

Sendo assim, pode-se inferir que a ideia de fração é bem simplista; partindo do ponto de vista literal do seu significado, ou seja, fração nada mais é que a representação de um objeto que foi repartido/dividido em diversas partes e ao se escolher algumas dessas partições a linguagem matemática por trás fica subentendida.

Por exemplo, um vendedor comprou uma caixa de maçã com 25 jambos dentro, em excelente estado para revender.

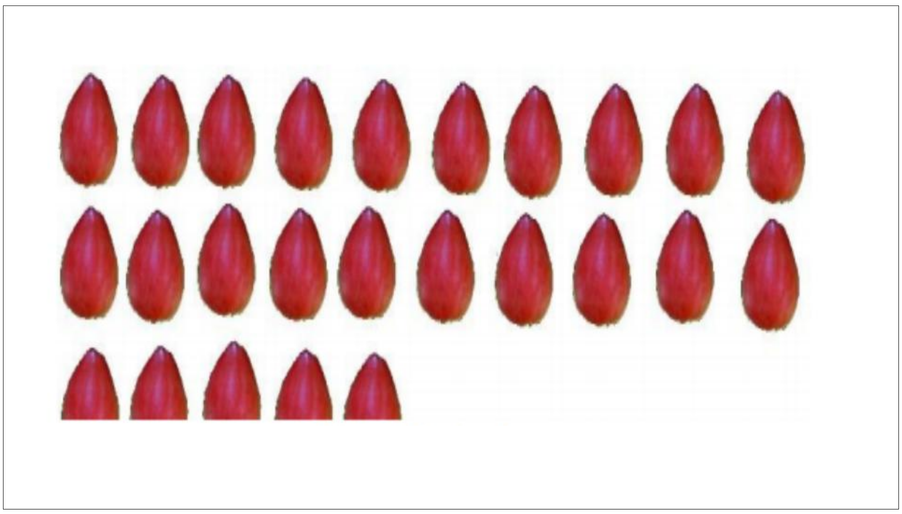

Figura 2.1: Jambos
Fonte: (Criada pelo autor)

Supondo que o vendedor dispõe apenas de 10 jambos e que o restante já foi vendido. A representação dos jambos que sobraram em forma de fração é dada por,

$$\frac{\text{número de jambos que sobraram}}{\text{número total de jmabos}} = \frac{10}{25}.$$

Note que a fração que representa a parte dos jambos que sobram da quantidade total é escrita como $\frac{10}{25}$. É importante ainda destacar que o numerador desta é 10 e o denominador é 25. Cada uma dessas partes possuem uma classificação, para este caso é dito como **termos** que compõem a fração.

Ademais, para se ler uma determinada fração, algo precisa ser levado em consideração, como por exemplo o número que está no denominador. É este número que dita como a fração será chamada. Assim, quando se tem frações de 1 a 9, lê-se da seguinte maneira.

- $\frac{1}{2}$: um meio, metade ou meio;
- $\frac{2}{3}$: dois terços;
- $\frac{3}{4}$: três quartos;
- $\frac{4}{5}$: um quinto;
- $\frac{5}{6}$: cinco sextos;
- $\frac{4}{7}$: quatro sétimos;
- $\frac{5}{8}$: cinco oitavos;
- $\frac{2}{9}$: dois nonos.

Agora, quando se tem frações com denominadores 10, 100 ou 1000, a classificação que elas recebem são denominadas como **frações decimais**.

- $\frac{9}{10}$: nove décimos;
- $\frac{3}{100}$: três centésimos;
- $\frac{12}{1000}$: doze milésimos.

No caso de as frações receberem denominadores cujo os valores não são os que estão descritos acima, uma nova classificação é usada. Logo, com outros números no denominador, primeiro falar-se-á o número que representa o numerador e em seguida o denominador, acrescido da palavra avos.

- $\frac{4}{16}$: quatro dezesseis avos;
- $\frac{3}{22}$: três vinte e dois avos;

- $\frac{6}{35}$: seis trinta e cinco avos.

É importante lembrar que as frações, assim como as outras partições da matemática, possuem algumas propriedades operacionais. Isto é, as frações possuem propriedades tais como adição e subtração com denominadores iguais, adição e subtração com denominadores diferentes, multiplicação envolvendo frações, divisão envolvendo frações. Cada uma dessas propriedades será descrita abaixo, todas elas com riquezas de detalhes.

2.1.2 Operações com Frações

Como as frações possuem uma representação numérica, fica evidente levar em consideração que algumas propriedades devam ser definidas, como por exemplo o uso de operações fundamentais, tais como **adição**, **subtração**, **multiplicação** e **divisão**. Não apenas isso, mas cada uma dessas operações fundamentais possui regras que precisam ser seguidas à risca, para que todo o cálculo existente possa ter legitimidade.

Dito isso, pode-se então começar com a primeira operação fundamental.

- **Adição e Subtração de Frações com Denominadores Iguais**.

Definição 2.1. *Quando se tem uma adição ou subtração entre duas frações, ambas com o mesmo denominador, conserva-se o denominador e soma ou subtrai os numeradores.*

Por exemplo, uma família decidiu viajar de automóvel para a cidade de Belém, no Pará. Em um determinado momento do trajeto, o motorista decidiu parar em um trecho da estrada para fazer um pequeno lanche. Um dos membros da família percebeu que havia uma marcação ao longo da via, fez um cálculo mental e constatou que haviam percorrido $\frac{2}{7}$ (dois sétimos) na primeira hora da viagem e $\frac{4}{7}$ (quatro sétimos) depois da segunda hora de viagem. qual foi a distância já percorrida pela família?

Para realizar os cálculos necessários para se chegar ao que se pede ao final do problema, precisa-se primeiro saber identificar as frações que estão descritas no problema acima. Logo,

$$\frac{2}{7} \text{ e } \frac{4}{7}$$

são as frações que estão inseridas no problema.

Para solucionar o problema, é necessário saber qual a distância total já percorrida pela família. Desta forma, fica claro que a operação a ser efetuada é de adição. Ou seja, queremos calcular

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7}.$$

Preservando os denominadores de cada fração, já que ambos são iguais, logo

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{2+4}{7} = \frac{6}{7}.$$

Portanto, a distância já percorrida pela família é $\frac{6}{7}$ (seis sétimos).

É importante que você, caro leitor, observe que ao realizar a soma desse problema, a primeira estratégia usada foi preservar o valor do denominador de ambas as frações, justamente porque nelas há o mesmo valor numérico. Foi por isso que apenas foi somado os valores do numerador de cada uma das frações.

Em um outro exemplo, podemos considerar que dois ônibus de viagem (**A** e **B**) percorreram $\frac{3}{8}$ (três oitavos) e $\frac{5}{8}$ (cinco oitavos) de uma distância, respectivamente. Qual deles fez o percurso maior? Quanto a mais do que o outro?

Antes de começar a descrever os cálculos que solucione o problema, começamos esquematizando o que está acontecendo, ver figura abaixo:

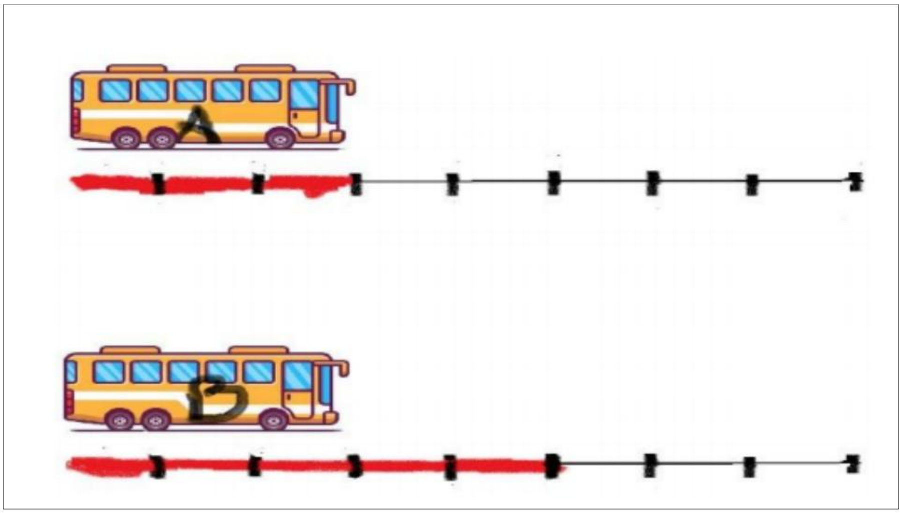

Figura 2.2: Esquema

Fonte: (criado pelo autor)

Então, como

$$\frac{5}{8} > \frac{3}{8},$$

isto infere que, devemos calcular

$$\frac{5}{8} - \frac{3}{8}.$$

Mantendo o mesmo denominador e somando apenas os numeradores, tem-se

$$\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8}.$$

Sendo assim, dos cálculos acima pode-se constatar que o ônibus **B** percorreu $\frac{2}{8}$ (dois oitavos) da distância a mais do que **A**.

Portanto, vimos acima o que acontece em uma adição ou subtração quando os denominadores da fração dada são iguais. No entanto, o que acontece com fração quando os valores dos denominadores são diferentes?

- **Adição e Subtração quando os Denominadores São Diferentes**.

Definição 2.2. *Quando se tem duas frações e os valores numéricos que os denominadores tem são diferentes, determinamos as frações equivalentes as frações dadas e que tenham o mesmo denominador. E por fim adicionamos ou subtraímos essas frações.*

Por exemplo, durante a manhã de um determinado dia, uma balsa que faz o transporte de automóveis e passageiro, percorreu, pela manhã, $\frac{3}{6}$ (três sextos) de uma distância e à tarde, $\frac{1}{9}$ (um nono). Que fração da distância ela percorreu nos dois períodos?

A situação acima solicita que seja obtido o valor total da distância percorrida pela balsa nos dois períodos. Para que esse valor seja determinado, precisamos somar as duas frações dadas. No entanto, há um critério especial para que essa fração possa ser somada e para isso é necessário que encontremos um denominador comum, para que a soma possa ser efetuada sem nenhuma interferência. Assim, temos que:

(i) Dada a seguinte fração $\frac{3}{6}$ (três sextos) e ao multiplicarmos o numerador e o denominador por 3, obtemos uma nova fração do tipo $\frac{9}{18}$ (nove dezoito avos).

(ii) Da mesma forma, a fração $\frac{1}{9}$ (um nono) pode ser transformada e o seu denominador ter o mesmo valor que o da anterior, basta multiplicar o numerador e o denominador por 2 ao mesmo tempo, e ao final chegar-se-á em $\frac{2}{18}$(dois dezoito avos).

Já que encontramos as frações com mesmo valor, então basta somar as frações, preservando o novo denominador. Logo,

$$\frac{3}{6} + \frac{1}{9} = \frac{9}{18} + \frac{2}{18}.$$

Conservando o denominador, já que possui o mesmo valor numérico, temos a seguinte soma

$$\frac{3}{6} + \frac{1}{9} = \frac{9}{18} + \frac{2}{18} = \frac{9+2}{18} = \frac{11}{18}.$$

Desta forma, a balsa percorreu $\frac{11}{18}$ (onze dezoito avos) da distância.

- **Multiplicação de Frações**.

Definição 2.3. *Para multiplicar uma fração por outra, basta multiplicar o numerador de uma pelo o numerador da outra, bem como o denominador de uma pelo denominador da outra.*

Note que quando se tem a multiplicação entre frações, fica claro que não há mistérios, basta seguir a definição ao pé da letra que acontece a síntese de uma nova fração, produto direto da interação das anteriores.

Por exemplo, Luciano comprou recentemente um terreno na vila sinhá, bairro de Bragança, no Estado do Pará. Ele quer usar $\frac{2}{7}$ (dois sétimos) desse terreno para fazer plantio de açaí e quer que $\frac{3}{8}$ (três oitavos) da parte com açaí tenham duas mudas juntas. Qual parte do terreno deverá ser plantada com duas mudas juntas?

Inicialmente, é preciso encontrar quanto é $\frac{3}{8}$ (três oitavos) de $\frac{2}{7}$ (dois sétimos) do terreno, ou seja, basta efetuar a multiplicação entre as seguintes frações $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}$ e o resultado é a parte que receberá o plantio. Logo, usando a definição de produto entre frações, temos

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 7},$$

efetuando a multiplicação do lado direito da igualdade, obtemos

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56}.$$

Desta forma, a parte do terreno que corresponde ao plantio de açaí com duas mudas é $\frac{6}{56}$ (seis cinquenta e seis avos).

- **Divisão entre Frações**.

As frações por si só já são divisões em sua essência, porém o que este tópico irá tratar não é do resultado dessa divisão, mas sim quando se tem uma divisão entre duas frações dadas.

Definição 2.4. *Em uma divisão cujo o numerador e o denominador, ambos são frações, com divisor diferente de zero, multiplicamos o primeiro termo pelo inverso do segundo.*

Note que ao tratarmos de uma divisão entre duas frações, é bom lembrar que essa definição é muito útil. Multiplicar uma fração pelo inverso da outra parece ser uma situação estranha, haja vista que uma divisão inicialmente se torna uma multiplicação. Para entender essa parte, veja o exemplo a seguir:

Em um determinado dia, um professor levou para sala de aula uma barra de chocolate para distribuir aos alunos, mas somente aqueles que estavam completando ano no mês. Ao chegar na última turma, o professor percebeu que havia $\frac{3}{5}$ (três quintos) dos alunos eram aniversariantes do mês, no entanto da barra de chocolate só restava $\frac{1}{4}$ (um quarto) para ser distribuída entre os aniversariantes. Então, que fração representa a quantidade de chocolate que cada aluno irá receber?

Como o problema pede que efetuemos uma divisão entre a quantidade de chocolate disponível em relação ao número de alunos aniversariante, então temos que determinar o seguinte

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}}.$$

Aplicando a definição acima, na qual fala sobre divisão envolvendo frações, obtemos

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3}.$$

Além disso, aplicando a propriedade multiplicativa entre frações, temos

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 3} = \frac{5}{12}.$$

Logo, cada aluno aniversariante receberá $\frac{5}{12}$ (cinco doze avos) da barra de chocolate.

2.2 Porcentagens

A ideia de porcentagem é bem antiga, embora a usamos com bastante frequência no dia a dia, seja para medir descontos ou aumentos, seja para diagnosticar um espaço amostral de uma determinada pesquisa. O conceito de porcentagem é bem recente, mas seu aparecimento há alguns anos nos traz uma certa curiosidade.

Dados históricos relatam que a ideia inicial de porcentagem surgiu na Roma, por volta de IX d.C, no período em que a sociedade é governada por um imperador. Segundo Dante 2016,

> *"O imperador Augusto (27 a.C e 14 d.C) impunha uma taxa de $\frac{1}{100}$ sobre os negócios realizados em leilões. O símbolo de porcentagem que conhecemos hoje só apareceu muito mais tarde. No século XV, os escribas italianos começaram a abreviar a expressão "por cento". Algumas das abreviações foram: P100; p cento e pc^{o}" (DANTE, 2016, p. 186).*

É impressionante como a linguagem e a representação de um conceito tão antigo sofreu diversas modificações ao longo dos anos. Parece algo surreal que um conhecimento tão antigo, hoje pode ser ensinado para qualquer indivíduo de uma sociedade. Mesmo que as mudanças na nomenclatura são verídicas, vale ressaltar que o ensino de porcentagem é primordial, atualmente, para a vida em sociedade.

Mesmo sendo uma linguagem cheias de conceitos e cálculos matemáticos, suas diversas aplicações superam qualquer área do conhecimento. As técnicas de porcentagens podem ser aplicadas tanto no ramo das ciências exatas, das ciências naturais, ciências humanas quanto nas ciências biológicas.

Por exemplo, de acordo com o CEMPRE (Compromisso Empresarial para Reciclagem), estima-se que a produção de resíduos sólidos no Brasil seja de 193642 toneladas por dia, tal quantitativo chega a ser assustador. No entanto, mesmo com a coleta de lixo acontecendo diariamente, cerca de 24 mil toneladas são descartadas de maneira irregular, de qualquer jeito, sem o mínimo de controle. A cobertura da coleta de lixo que é recolhido de forma regular, com as separações todas de acordo com os protocolos de descarte, é de 87,4% da população.

Assim, com a ideia de porcentagem já inserida na sua mente e como ela pode ter uma aplicação social, vamos defini-la de maneira mais firme, com ideias matemáticas.

Definição 2.5. *As porcentagens correspondem somente as frações de denominador 100 ou frações equivalentes a elas.*

Por exemplo, de acordo com estudos científicos, acredita-se que a quantidade de água que o nosso sangue possui é de aproximadamente 83% $\left(\text{oitenta e três por cento ou 83 em 100 ou } \frac{83}{100}\right)$. Isso quer dizer o seguinte, se um corpo humano tivesse 100 litros de sangue, 83 litros seriam de água.

Outro exemplo, Rita trabalha em uma loja de roupa no centro de Bragança ? PA. Ela recebe o seu salário ao final de 30 dias de cada mês. Supondo que hoje é o dia que Rita receberá seu salário. No entanto, ela já está de olho em uma blusa há muitos dias. Então, ao pegar o seu salário, ela retira 10% para comprar a blusa e 15% para comprar um livro do Harry Potter. Determine quanto Rita gastou do que tinha e qual a porcentagem do salário de Rita ainda falta gastar.

Para determinar os gastos que Rita realizou, bem como a porcentagem que ainda falta ela gastar, basta fazer algumas operações básicas para obter o resultado que se deseja. Assim,

(i) Se Rita gastou 10% com uma blusa e 15% com um livro do Harry Potter, então basta realizar a soma dos gastos, logo

$$10\% + 15\% = \frac{10}{100} + \frac{15}{100} = \frac{10+15}{100} = \frac{25}{100} = 25\%.$$

(ii) Como Rita já gastou 25% do seu salário, para descobrir quanto ela ainda falta gastar basta subtrair o que ela gastou pelo total. Assim, suponha que o total seja representado por 100%, então fazendo o seguinte cálculo, chega-se

$$100\% - 25\% = \frac{100}{100} + \frac{25}{100} = \frac{100-25}{100} = \frac{75}{100} = 75\%.$$

Portanto, o gasto que Rita teve é de 25% (vinte e cinco por cento) e o que ela ainda falta gastar do salário é 75% (setenta e cinco por cento).

2.2.1 Calculando a Porcentagem de um Número

Para se calcular a porcentagem de um número é bem simples, basta ter em mente o que se pretende descobrir e em seguida aplicar algumas técnicas matemáticas. Por isso, para facilitar o entendimento, vamos para a seguinte situação:

A turma de Licenciatura Plena em Matemática, ano 2016, da UFPA está programando uma excursão para o centro de astrologia, em Belém do Pará. Para essa excursão irão 80% dos alunos da classe. Se na turma tem 35 alunos, então quantos alunos participarão dessa excursão?

A solução mais útil para essa situação é a seguinte: precisa-se saber a quantidade de alunos que irão para a excursão, logo precisamos saber quanto é 80% de 35 alunos.

Note que, como visto anteriormente, 80% (oitenta por cento) em linguagem matemática fica 80% $=\frac{80}{100}$. Além disso, simplificando essa fração $\frac{80}{100}$ (oitenta centésimos), dividindo ambos os termos por 20, temos

$$\frac{80}{100} = \frac{80:20}{100:20} = \frac{4}{5}.$$

Logo, calcular 80% de 35 alunos é a mesma coisa que calcular $\frac{4}{5}$ (quatro quintos) de 35. Desta forma,

$$\frac{4}{5} \text{ de } 35 = 28,$$

isso porque,

$$\frac{4}{5} \text{ de } 35 = \frac{4}{5} \cdot 35 = \frac{4 \cdot 35}{5}.$$

Realizando primeiro a multiplicação, tem-se:

$$\frac{4}{5} \text{ de } 35 = \frac{140}{5} = 28.$$

Portanto, 80% de 35 = 28, isto é, nesta excursão para o centro de astrologia em Belém do Pará irão participar 28 alunos, os quais representam 80% dos alunos da turma de Licenciatura Plena em Matemática, ano 2016, da UFPA.

Realizando uma nova aplicação dos conceitos de porcentagens: supondo que em um jogo de basquete feminino, Valéria fez 32 pontos, que corresponde a 45% dos pontos feitos por sua equipe. Assim, se Valéria fez 32 pontos, quantos pontos fez a equipe em que Valéria faz parte?

Para descobrir a quantidade de pontos que a equipe de Valéria fez, precisamos encontrar uma operação que nos leve até o resultado que se deseja obter, para isso:

- Sabe-se que 45% de x = 32, então isso quer dizer que

$$\frac{45}{100} \text{ de } x = 32,$$

implicando que

$$\frac{45 \cdot x}{100} = 32,$$

de onde vem que

$$45 \cdot x = 32 \cdot 100,$$

resultando que

$$x = \frac{3200}{45} \approx 71.$$

Portanto, a equipe de Valéria fez 32 pontos ao final do jogo.

Capítulo 3

Matemática financeira

3.1 Variações percentuais

Os estudos sobre variações percentuais impactam até hoje o mercado brasileiro e está presente a todo momento diante dos membros da sociedade. Entender o que são as variações e como elas contribuem para a economia, é extremamente importante. Este tópico está reservado exclusivamente para explicar a aplicabilidade desse item, bem como saber se um determinado produto aumentou de preço ou diminuiu, para que ao fim o consumidor possa tomar a decisão mais justa, se compra ou não tal produto.

3.1.1 Fator de atualização

Quando se tem dois valores sendo vistos em um período de tempo diferente, dizemos então que estamos diante de um fator de atualização, ou seja, o fator de atualização (f) é a razão entre dois valores de uma grandeza em tempos diferentes (passado, presente ou futuro). Essa definição é bastante útil para aqueles que desejam trabalhar diretamente com a matemática financeira.

É importante lembrar que neste caso existem apenas três resultados possíveis na divisão de dois valores quaisquer. Esses valores, já são bem conhecidos, ou resulta em 1 ou é menor que 1 ou é maior que 1. Para o caso em que a divisão tem como resultado o número 1, então dizemos que os dois valores dados, anteriormente, são iguais, isto é, um valor é 100% do outro. É por conta dessa condição temos que $i = 1$, o qual é chamado de fator neutro.

No entanto, quando em uma divisão desse tipo o resultado for um número maior que 1, como no exemplo $\frac{T}{Q} = 1,03$, pode-se interpretar essa divisão de duas formas distintas:

(i) T é 3% maior que Q ou

(ii) T é 103% de Q (logo 3% maior).

Estas duas interpretações estão corretas e seu uso depende exclusivamente do contexto que serão inseridas.

Vimos que quando a divisão é igual a 1 significa que os dois valores dados são iguais, quando a divisão é maior que 1 significa que um dos valores se sobrepõem ao outro, mas o que acontece quando o resultado da divisão for um número menor que 1?

Para o caso em que a divisão resultar em um valor menor que 1, no caso de $\frac{T}{Q} = 0,75$, isso implica que o resultado também pode ser entendido de duas maneiras distintas:

(i) T é 25% menor do que Q ou

(ii) T é 75% de Q (então é 25% menor).

Da mesma forma que a proposição anterior, neste caso o que vai determinar qual das duas serão utilizadas é o contexto, mesmo que as duas interpretações permaneçam corretas.

Quando se pretende pôr em prática as primeiras interpretações deve-se ter em mente que os conceitos e saber realizar os cálculos que formam a taxa percentual a partir do valor de atualização que for dado. Assim,

- Se $f > 1$, então $f = 1 + i$; portanto a taxa é obtida $i = f - 1$, em valores decimais.
- Se $f < 1$, então $f = 1 - i$; portanto a taxa é obtida $i = 1 - f$, em valores decimais.

Logo,

- $f = 1,03$ implica que $i = 1,03 - 1 = 0,03 = 3\%$ (maior do que).
- $f = 0,75$ implica que $i = 1 - 0,75 = 0,25 = 25\%$ (menor do que).

3.1.2 Aumentos e descontos

A ideia de valor de aumento e de desconto é muito aplicada no dia, pois trata de um conhecimento que está em construção a todo o momento. Por isso, quando fazemos a comparação de dois valores diferentes de uma mesma grandeza, calculamos mentalmente se determinado preço aumentou ou diminuiu, sempre levando em consideração a comparação com outro objeto.

Por exemplo, quando se deseja fazer a comparação entre dois valores diferentes de uma mesma grandeza, ou seja, quando $f > 1$ significa aumento (acréscimo de um valor), quando $f < 1$ implica dizer que houve um desconto (perda de um valor), isso tudo porque o valor da grandeza variou ao longo do tempo, tendo sempre em mente a comparação com o valor antigo do objeto. Além disso, quando o fator $f = 1$ dizemos que o valor não sofreu alteração ao longo do tempo.

Dito isso, podemos descrever a fórmula matemática para obter o valor do fator de atualização da seguinte forma,

$$f = \frac{\text{valor novo}}{\text{valor antigo}}.$$

Logo, para interpretar os fatores de atualização, basta está ciente das seguintes condições:

(i) $f > 1$ implica em aumento, acréscimo ou ganho;

(ii) $f < 1$ implica em desconto, perda ou decréscimo;

(iii) $f = 1$ implica que não houve mudança na variação.

Por exemplo, o salário de um trabalhador que era de R$ 840,00 passou a ser de R$ 966,00. Qual foi a porcentagem de aumento?

Para resolver tal problema, vamos primeiro determinar a diferença entre os valores dados e saber de quanto foi o aumento. Logo,

$$R\$966,00 - R\$840,00 = R\$126,00.$$

Assim, temos que o valor do aumento em reais foi de 126. Agora, precisamos determinar quantos porcentos de 840 isso significa. Para isso, seja x o valor que se deseja procurar, então:

$$x \text{ de } 840 = 126,$$

implicando que

$$x = \frac{126}{840} = 0,15 = 15\%.$$

Por fim, 15% foi o aumento em porcentagem que alterou o salário desse trabalhador.

3.1.3 Aumentos e descontos sucessivos

Quando se tem vários aumentos e descontos sucessivos, em intervalos de tempo curtos, para juntar esses vários valores basta realizar uma multiplicação entre os vários fatores individuais, para assim, obter o fator de acumulação. Basicamente, esse processo todo pode ser entendido como o fator de atualização entre o primeiro e o último valor considerado, o que independe dos valores intermediários. A partir disso, tem-se a seguinte fórmula:

$$f_{\text{acumulado}} = f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n.$$

É importante se atentar para o seguinte: note que o fator de acumulação também é um fator de atualização e por conta disso, precisa ser entendido e lido como tal.

Podemos citar por exemplo uma questão adaptada da Vunesp: se a taxa de inflação de janeiro é de 6% e a de fevereiro é de 5%, então qual a taxa de inflação no bimestre janeiro/fevereiro?

Do problema podemos interpretar da seguinte forma, sabe-se que em janeiro que em janeiro a taxa era de $i = 6\%$, o que corresponde a

$$f_{\text{janeiro}} = 1,00 + i,$$

implicando que

$$f_{\text{janeiro}} = 1,00 + 0,06 = 1,06.$$

Além disso, no mês seguinte houve uma redução, passando a ser $i = 5\%$, mais uma vez correspondendo a

$$f_{\text{fevereiro}} = 1,00 + i,$$

implicando que

$$f_{\text{fevereiro}} = 1,00 + 0,05 = 1,05.$$

Assim, aplicando a fórmula do fator de acumulação, temos

$$f_{\text{acumulada}} = f_{\text{janeiro}} \cdot f_{\text{fevereiro}} = 1,06 \cdot 1,05 = 1,113$$

resultando que

$$f_{\text{acumulada}} = 1,00 + 0,113.$$

Portanto, a taxa de inflação no bimestre de janeiro/fevereiro é de $i = 11,13\%$.

3.1.4 Capitalização em regime de juros simples

Os cálculos que envolvem este tópico estão intimamente ligados com a ideia de empréstimos, vendas com pagamentos parcelados, acréscimo de um valor adicional sobre o valor em aberto, entre outros. Saber os conceitos que regem esse assunto estão constantemente ligados com o dia a dia das pessoas, por isso, esse tópico deve ser bastante estudado e com atenção.

Definição 3.1. *Sejam i a taxa de juros por unidade de tempo (podendo ser dia, mês, ano), n o número de períodos (unidades de tempo), C o* ***Valor Inicial****, chamado* ***Capital*** *e M_n o* ***Valor Final*** *após n períodos de tempo, chamado de* ***Montante****. Definimos* ***aplicação no regime de juros simples****, quando o montante M_n calculado após n períodos de tempo é igual ao montante M_{n-1} calculado após $n-1$ períodos de tempo adicionado ao produto $i \cdot C$.*

Quando se tem um regime de Juros Simples, o chamamos também regime de juros lineares. Podemos estabelecer a seguinte relação entre montante M_n, o valor após o n-ésimo período e o capital aplicado C dada por

$$M_n = C(1 + i \cdot n). \tag{3.1}$$

A fórmula acima pode ser encontrada da seguinte forma. Considere M_1 o valor do capital após o primeiro período, M_2 o valor do capital após o segundo período, M_3 o valor do capital após o terceiro período e M_n o valor do capital após o n período. Pela definição de aplicação em regime de juros simples, podemos obter a seguinte análise, no primeiro período o Montante anterior é o próprio valor inicial C, logo

$$M_1 = C + i \cdot C.$$

Por conseguinte, para M_2 temos que

$$M_2 = M_1 + i \cdot C.$$

Agora, para M_3 temos que

$$M_3 = M_2 + i \cdot C.$$

Por fim, usando a recorrencia temos que

$$M_n = M_{n-1} + i \cdot C.$$

Somando as n equações acima obtemos

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n &= C + i \cdot C + M_1 + i \cdot C + M_2 + i \cdot C + \cdots + M_{n-1} + i \cdot C \\ M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n &= C + M_1 + M_2 + \cdots + M_{n-1} + i \cdot n \cdot C \end{aligned}$$

Com isso, pode se observar que em ambos os membros a soma $M_1 + M_2 + M_3 + ... + M_{n-1}$ está presente, logo cancelando esses produtos entre si, chegamos a identidade de juros compostos dada em (3.1). Para simplificar a notação, o montante M_n será denotado apenas por M.

Outrossim, a expressão $C \cdot i \cdot n$ é chamada de **juros simples**, geralmente representada pela letra J.

Para que a fórmula (3.1) possa ser aplicada em problemas financeiro e os cálculos serem exatos, são necessárias duas condições:

(i) A taxa de juros simples (i) deve assumir o valor de número decimal e não o seu valor de porcentagem;

(ii) A taxa de juros simples e a medida de tempo precisam se corresponderem, ou seja, se o tempo for dado em meses, a taxa de juros também precisa ser fornecida em meses.

Dito isso, algumas abreviações são usadas para destacar a periodicidade das taxas de juros, tais como:

Abreviatura	**Significado**
a.d	ao dia
a.m	ao mês
a.b	ao bimestre
a.t	ao trimestre
a.s	ao semestre
a.a	ao ano

Tabela 1

Fonte: (Criada pelo autor)

Vale lembrar que, como os dias não são constantes ao longo dos meses, por convenção adota-se um mês com 30 dias e o ano com 360 dias, apenas para cálculos que envolvam temas de matemática financeira, salvo apenas quando o texto mencionar algum valor diferente.

Por exemplo, certo dia, um cliente do Banco Bradesco realizou uma aplicação de 823 reais a uma taxa de juros simples de 5% ao mês, durante um período de 5 meses. Qual será o valor resgatado ao final da aplicação?

Para calcular o valor resgatado ao final da aplicação, devemos calcular o montante que será retirado. Assim, do problema, temos as seguintes informações:

- Capital Inicial: 823 reais $\rightarrow C = 823$;

- Taxa de Juros: 5% ao mês = 0,05 ao mês $\rightarrow i = 0,05$;
- Período de aplicação: 5 meses $\rightarrow n = 5$.

Logo, usando esses dados na fórmula do montante, temos que

$$\begin{aligned} M &= 823(1 + 0,05 \cdot 5), \\ M &= 823(1 + 0,25) \\ M &= 823 \cdot 1,25 \\ M &= 1028,75. \end{aligned}$$

Portanto, ao final do período de 5 meses o valor que será retirado é de 1028,75 reais.

Outro exemplo, um capital de 230 reais foi aplicado por cinco meses no regime de juros simples, a uma taxa desconhecida i de juros. Após este período, foi resgatado um montante de 250 reais. Qual é o valor da taxa?

Do problema, temos as seguintes informações:

- Valor investido inicialmente: 230 reais $\rightarrow C = 230$;
- Período de aplicação: 5 meses $\rightarrow n = 5$;
- Montante ao final da aplicação: 250 reais $\rightarrow M = 250$;
- Taxa de juros: desconhecida, então definimos ela como apenas i.

É importante destacar que para resolver esse problema, podemos efetuar dois tipos de cálculos, porém chegando a um mesmo valor numérico ao final do processo. Primeiro, tentaremos encontrar o valor da taxa de juros sem precisar aplicar a propriedade distributiva dos números reais. Segundo, mostraremos o cálculo aplicando essa propriedade para que o leitor possa entender todo o processo lógico.

Observe que precisamos encontrar o valor da taxa e em seguida multiplicar por 100, tal que se obtenha o valor, em porcentagem, da taxa de juros. Primeiramente, façamos o uso da fórmula de juros simples sem aplicar a propriedade distributiva dos números reais. Assim, Substituindo os valores destacados anteriormente na fórmula (3.1), temos

$$\begin{aligned}
250 &= 230(1 + i \cdot 5),\\
\hookrightarrow \frac{250}{230} &= 1 + 5i\\
\hookrightarrow 1,08695 &= 1 + 5i\\
\hookrightarrow 5i &= 1,08695 - 1\\
\hookrightarrow 5i &= 0,08695\\
\hookrightarrow i &= \frac{0,08695}{5}\\
\hookrightarrow i &= 0,01739.
\end{aligned}$$

Como mencionado, o valor da taxa mesmo que encontrada em valor decimal, precisa ser modificada ao final e mostrada com o seu valor de porcentagem. Assim, basta efetuar a multiplicação da taxa de juros por 100%, logo

$$i = 0,01739 \cdot 100\% = 1,739\%.$$

Por fim, o valor assumido pela taxa de juros é de $1,739\%$ ao mês.

Outrossim, usando a propriedade distributiva dos números reais, temos que

$$\begin{aligned}
250 &= 230(1 + i \cdot 5),\\
\hookrightarrow 250 &= 230 + 1150i\\
\hookrightarrow 1150i &= 250 - 230\\
\hookrightarrow 1150i &= 20\\
\hookrightarrow i &= \frac{20}{1150}\\
\hookrightarrow i &= 0,01739.
\end{aligned}$$

Multiplicando i por 100% para obter o valor em porcentagem, temos

$$i = 0,01739 \cdot 100\% = 1,739\%.$$

Portanto, o valor encontrado para a taxa de juros é de $1,739\%$ ao mês.

É importante salientar, que a transformação da taxa de juros que está na unidade medida a para uma taxa que está na unidade de medida b, no regime de juros simples, é dada por

$$i_a = \frac{i_b}{m}, \tag{3.2}$$

onde m é número de b que cabe em uma unidade de a. Por emxemplo, a taxa de 9% ao mês é equivalente a taxa de $\frac{9}{30}\% = 0,3\%$ ao dia, em regime de juros simples, pois em 1 mês temos 30 dias. Já, a taxa de 2% ao mês é equivalente a taxa de $\frac{2}{\frac{1}{12}}\% = 2 \cdot 12 = 24\%$ ao ano, em regime de juros simples, pois em 1 mês temos $\frac{1}{12}$ anos.

3.2 Capitalização em regime de juros compostos

Para o caso em que se tem uma capitalização em regime de juros compostos, temos a seguinte definição:

Definição 3.2. *Sejam i a taxa de juros por unidade de tempo (podendo ser dia, mês, ano), n o número de períodos (unidades de tempo), C o* ***Valor Inicial****, chamado* ***Capital*** *e M_n o* ***Valor Final*** *após n períodos de tempo, chamado de* ***Montante****. Definimos* ***aplicação em regime de juros composto****, quando o montante M_n calculado após n períodos de tempo é igual ao montante $M_{n-1}(1+i)$, onde M_{n-1} é o montante após o $n-1$ período de tempo.*

Da definição acima, podemos escrever a seguinte relação entre o valor final M e o valor inicial C dada por:

$$M_n = C(1+i)^n. \tag{3.3}$$

A fórmula acima é proveniente de um processo organizacional que pode ser descrito com riquezas de detalhes, para que o leitor possa estar apto ao entendimento da construção matemática por trás da definição.

Por isso, seja M_1 o valor do capital após decorrido o primeiro período, M_2 o capital após o segundo período e assim por diante. Observe que, desde que a plicação é em regime de juros é dito composto, por definição temos que

$$\begin{aligned}
M_1 &= C(1+i), && (3.4)\\
M_2 &= M_1(1+i) && (3.5)\\
M_3 &= M_2(1+i) && (3.6)\\
&\vdots && (3.7)\\
M_n &= M_{n-1}(1+i). && (3.8)
\end{aligned}$$

Realizando a multiplicação de todas essas n equações, obtemos

$$\begin{aligned} M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot ... \cdot M_n &= C(1+i)M_1(1+i)M_2(1+i) \cdot ... \cdot M_{n-1}(1+i) \\ M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot ... \cdot M_n &= C \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot ... \cdot M_{n-1}(1+i)^n. \end{aligned}$$

Com isso, pode se observar que em ambos os membros o produto $M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot ... \cdot M_{n-1}$ está presente, logo cancelando esses produtos entre si, chegamos a identidade de juros compostos dada em (3.3). Além disso, é primordial analisar que os valores de capitalização em regime de juros compostos formam uma progressão do tipo geométrica, porque cada termo anterior formado é multiplicado por $1 + i$. Novamente para simplificar a notação, denotaremos o montante M_n apenas por M.

Por exemplo, uma aplicação especial rende 15% ao mês em um regime de juros compostos. Certa pessoa deseja aplicar a quantia de $R\$620,00$ durante três meses. Qual o montante gerado por essa aplicação?

O montante dessa aplicação ao final do período estipulado pode ser obtido da seguinte maneira

$$M = C(1+i)^n. \tag{3.9}$$

Do problema extraímos as seguintes informações:

- Capital: 620 reais $\rightarrow C = 620$;
- Taxa de: 15% ao mês $\rightarrow i = 0,15$ ao mês.
- Tempo de aplicação: 3 meses $\rightarrow n = 3$;
- Montante: é o que se pretende descobrir.

Logo, substituindo os valores na equação acima, temos

$$M = 620(1+0,15)^3. \tag{3.10}$$

Realizando a soma dentro dos parênteses, obtemos

$$M = 620 \cdot 1,15^3. \tag{3.11}$$

Em seguida, resolvendo a potência dada, temos

$$M = 620 \cdot 1,520875. \tag{3.12}$$

Resultando que

$$M = 942,9425 \approx 942,90. \tag{3.13}$$

Portanto, ao final do terceiro mês o montante será aproximadamente de $R\$\,942,90$.

Outro exemplo seria, o capital de $R\$\,2000,00$ aplicado a juros compostos, rende, depois de 4 meses, juros de $R\$\,165,00$. Qual foi a taxa de juros mensal?

As seguintes informações do enunciado são:

- Capital de: 2000 reais $\rightarrow C = 2000$;
- Juros de: $R\$\,165,00 \rightarrow M = 2000 + 165 = 2165$;
- Tempo de aplicação: 4 meses $\rightarrow n = 4$;
- Taxa: é o que se deseja saber.

Logo,

$$M = C(1+i)^n. \tag{3.14}$$

Substituindo os valores na equação acima, temos

$$2165 = 2000(1+i)^4. \tag{3.15}$$

Implicado que

$$(1+i)^4 = \frac{2165}{2000} = 1,0825, \tag{3.16}$$

Para resolver tal parte, é necessário saber a raiz quarta de 1,0825. Sendo que a raiz quarta desse número é 1,02005981. Logo,

$$1 + i = \sqrt[4]{1,0825} = 1,02005981. \tag{3.17}$$

Resultando que

$$i = 1,02005981 - 1 = 0,02005981. \tag{3.18}$$

Multiplicando por 100% a taxa i, para poder obter o valor da taxa em porcentagem, temos

$$i = 0,02005981 \cdot 100\% = 2,005981\% \approx 2,01\%. \tag{3.19}$$

Em suma, a taxa de juros mensal para essa aplicação foi de aproximadamente $2,01\%$ ao mês.

Diferentemente do regime de juros simples, a transformação da taxa de juros que está na unidade medida a para uma taxa que está na unidade de medida b, no regime de juros compostos, é dada por

$$i_a = \left[(1+i_b)^{\frac{1}{m}} - 1\right] 100\%, \tag{3.20}$$

onde m é número de b que cabe em uma unidade de a. Por emxemplo, a taxa de 9% ao mês é equivalente a taxa de

$$\left[(1+0,09)^{\frac{1}{30}} - 1\right] 100\%, \text{ ao dia,}$$

resultando em aproximadamente

$$0,28\%, \text{ ao dia,}$$

em regime de juros compostos, pois em 1 mês temos 30 dias.

Vale enfatizar que há uma grande e importante diferença entre a aplicação em regime de juros simples e a aplicação em regime de juros compostos. Deve-se perceber que no primeiro caso, os juros são calculados sobre o valor inicial. No caso dos juros compostos, são calculados em cima do valor do capital no período imediatamente anterior. Isso mostra que o crescimento do capital, geralmente, ocorre de maneira mais rápida com juros compostos do que com juros simples. O contrário só ocorre quando o período de tempo da aplicação é menor que a unidade de medidade da taxa de juros. Por exemplo, uma conta de energia no valor de 200 reais é quintada com um atraso de 5 dias, sabendo que a taxa de juros é de $0,6\%$ ao mês. Qual o regime de juros que beneficiará a empresa de energia?

- **Regime de juros simples**

As seguintes informações do enunciado são

- Capital de: 200 reais $\rightarrow C = 200$;
- Tempo de atraso: 5 dias $\rightarrow n = 5$;
- Taxa: $0,60\%$ ao mês $\rightarrow \frac{0,6}{30}\% = 0,02\%$ ao dia $i = 0,02$,
- Montante: é o que vamos determinar.

Assim, Substituindo os valores destacados anteriormente na fórmula (3.1), temos

$$\begin{aligned} M &= 200(1+0,02\cdot 5), \\ \hookrightarrow M &= 200(1+0,1) \\ \hookrightarrow M &= 200\cdot 1,1 \\ \hookrightarrow M &= 220. \end{aligned}$$

Assim, o valor recebido pela empresa de energia no regime de juros simples é 220 reais.

- **Regime de juros compostos**

As seguintes informações do enunciado são

- Capital de: 200 reais $\to C = 200$;
- Tempo de atraso: 5 dias $\to n = 5$;
- Taxa: $0,60\%$ ao mês $\to \left[(1+0,006)^{\frac{1}{30}} - 1\right] 100\% \approx 0,019\%$ ao dia $i = 0,019$,
- Montante: é o que vamos determinar.

Assim, Substituindo os valores destacados anteriormente na fórmula (3.1), temos

$$\begin{aligned} M &= 200(1+0,019)^5, \\ \hookrightarrow M &= 200 \cdot 1,019^5 \\ \hookrightarrow M &= 200 \cdot 1,098679244081099 \\ \hookrightarrow M &= 219,75. \end{aligned}$$

Assim, o valor recebido pela empresa de energia no regime de juros compostos é aproximadamente $219,75$ reais. Mesmo que, neste caso, a diferença é pouca, mas para empresa é mais vantajoso se usar o regime de juros simples.

Simbolicamente, podemos visualizar isso através das representações dos gráficos que representam o regime de juros simples e o regime de juros compostos dados por

Figura 3.1: Gráficos sibolizando os regimes de juros simples e compostos
Fonte: (criado pelo autor)

Observe que entre o início da aplicação e o primeiro periodo, o regime de juros simples é superior ao regime de juros compostos e que a parti do primeiro periodo isso se inverte.

Capítulo 4

Aplicação em Matemática Financeira

Este tópico trará ao leitor aplicações de alguns temas aqui estudado. Este foi criado justamente para trazer conhecimentos e práticas de como os assuntos de matemática financeira podem ser abordados.

Evidentemente, a matemática financeira tem diversas aplicabilidades nas relações humanas, seus conceitos podem ser vistos em diversas áreas que vão das ciências humanas até as sociais. Comumente, encontramos aplicações desses conceitos diretamente relacionados à problemas do tipo econômico. Vale lembrar que temas do ramo das ciências biológicas utilizam as técnicas de porcentagem para acoplar os seus espaços amostrais, quando há pesquisas científicas implementadas. São esses e muitos outros problemas que podem ser solucionados com o uso de conceitos da matemática financeira, basta que identifiquemos quais tópicos matemáticos os encaixam.

Graças a esses conceitos podemos explanar duas aplicações de assuntos do meio social que utilizam técnicas matemáticas que abordam temas financeiros, como por exemplo a exportação de peixes do tipo Pargo (Pagrus pagrus), seu processo de compra e venda; o aumento do combustível, especialmente da gasolina, no Brasil, ao longo do ano de 2021.

4.1 Pescaria do pargo (Pagrus pagrus)

Antes de iniciar o processo de captura da espécie em estudo, primeiro vamos expor algumas informações à respeito da produção, da captura e do processo de venda. Logo, a cidade de Bragança, localizada no Estado do Pará, possui uma das mais intensas e modernas infraestruturas disponível para a atividade pesqueira. Esta cidade é considerada uma das maiores produtoras de pescado de todo o Estado do Pará. Vale destacar que boa parte da produção pesqueira não permanece na cidade, tal produção é exportada para outros Estados do Brasil, como também para outros países. Além disso, a comunidade possui uma riqueza de caminhões frigoríficos responsáveis por transportar o pescado que chega aos seus portos. No que detém a comercialização dentro de tal município, destacamos o Mercado Municipal Central e o Mercado Municipal do Morro.

Isso tudo, apenas torna a atividade pesqueira tão intensa nesta localidade, porque a cidade apresenta uma boa estrutura para deter dois dos principais insumos para pescaria, o diesel e o gelo. A disponibilidade do gelo centraliza-se em quatro fábricas na sede do munícipio e quatro no interior, localizada na Vila de Bacuriteua.

Em se tratando do processo de captura do pescado em questão, pode-se dizer que a área que cobre a pescaria de tal espécie de peixe, no caso o Pargo, é bastante extensa e cobre cerca de 89.164 km^2, no Brasil. De acordo com Medeiros, essa área

> *"foi determinada através de registros da atividade pesqueira por entrevistas com mestres de barco e sistemas de mapas de bordo e do controle estatístico das exportações"(MEDEIROS, pag. 37, 2019).*

Hoje sabe-se que a área de pesca do peixe Pargo estende-se da costa do Estado do Amapá até o Estado do Ceará, com área de concentração nos Estados do Amapá e Pará, de acordo com dados disponibilizados pela Secretaria de Monitoramento e Controle da Pesca e Aquicultura ? SEMOC.

4.2 Poupança e Certificado de Depósito Bancário – Banco do Brasil

De maneira simples, podemos considerar a conta poupança como uma conta de depósitos remunerados pela TR (Taxa Referencial), a qual é inserida no valor inicial juros mensais para contas de pessoas físicas e juros trimestrais para contas de pessoas jurídicas. Vale destacar ainda que essa TR é para juros provenientes do mercado financeiro. Seu objetivo principal, quando criada, foi para determinar uma taxa base dos juros acumulados ao longo dos meses.

Assim, essa conta poupança é considerada um dos investimentos mais popular e tradicional do país, porque sua simplicidade na hora de realizar a aplicação e o resgate é bem prático. Além disso, é uma das aplicações com maiores índices de segurança, justamente por possuir regras regidas e fiscalizadas pelo Banco Central.

Outrossim, os valores que são inseridos nas contas poupanças são atualizados tendo como base a TR do dia que foi realizado o depósito. O cálculo para se obter a TR é realizado a partir da média das taxas de CDB, o qual estará prefixado, de 30 dias e sobre ela é aplicado uma redução definida pelo Banco Central.

O CDB (Certificado de Depósito Bancário) é um tipo de investimento de Renda Fixa, ou seja, são aquisições de contratos de empréstimos a um determinado banco. Tal aplicação rende juros acima daqueles que são gerados pelas cadernetas de poupanças. Seu limite de aplicação é de $R\$250.000,00$ por pessoa física.

No que tange o processo de rentabilidade, o CDB gera lucros maiores que a poupança, cerca de 100% em cima da taxa Selic, no entanto, o imposto de renda sobre essa aplicação é permitido enquanto que a poupança não apresenta correção de liquidez sobre o imposto de renda.

4.3 Aplicação

Consideremos de forma fictícia, os seguintes registros realizados por uma empresa fantasia, chamada **Q-Pesca**, situada no município de Bragança, no Estado do Pará, que realiza a comercialização da pesca do peixe pargo e o vende para uma empresa localizada no mesmo local. Por isso, apresenta-se a primeira tabela referente a primeira pescaria do mês de agosto do ano de 2021.

MAPA DE PPRODUÇÃO - A							
BARCO	*****	COMPETÊNCIA		08/2021		COMPRADOR	****
Exportação Evicerado	Contado						
	1º dia	2ºdia	3º dia	4º dia	Total/kg	Valor/kg	Valor Final
Pargo Grande	29		10		59	R$ 30,50	R$ 1.799,50
Pargo Médio	120	120	120	120	1730	R$ 30,50	R$ 52.765,00
	120	120	120	120			
	120	120	120	120			
	120	120	120	120			
	120	120	50				
Pargo Pequeno	50	10	20	10	47	R$ 21,50	R$ 1.010,50
Pargo Mole Médio	458	200	130		458	R$ 27,50	R$ 12.595,00
Pargo Mole Pequeno	4	7	5	10	4	R$ 18,50	R$ 74,00

Tabela 2 - Demonstrativo da Produção de Pargo. Primeira Pescaria do Mês de Agosto.

Fonte: (Criada pelo autor)

A partir de tais informações contidas na tabela, pode-se determinar um modelo matemático que descreve as teorias da matemática financeira que foram usadas para obter tais valores. Além disso, podemos considerar duas aplicações de regime para tais dados, como por exemplo uma aplicação em regime de juros simples e uma aplicação em regime de juros compostos. Por isso, basta inserir alguns dados econômicos que chegamos ao que se pede.

Inicialmente, determinar o valor total obtido pelas vendas no mapa de produção do tipo **A**, para que assim a organização do processo matemático seja possível. A tabela abaixo contém os valores finais da produção da primeira pescaria do mês de agosto, logo.

MAPA DE PRODUÇÃO – A					
BARCO	****	COMPETÊNCIA	08/2021	COMPRADOR	****
Exportação Evicerado		Total/kg	Valor/kg		Valor Final
Pargo Grande		59	R$ 30,50		R$ 1.799,50
Pargo Médio		1730	R$ 30,50		R$ 52.765,00
Pargo Pequeno		47	R$ 21,50		R$ 1.010,50
Pargo Mole Médio		458	R$ 27,50		R$ 12.595,00
Pargo Mole Pequeno		4	R$ 18,50		R$ 74,00
TOTAL					R$ 68.244,00

Tabela 3- Tabela Referente ao Total da Primeira Pescaria do Mês de Agosto.

Fonte: (Criada pelo autor)

A tabela acima será a base das aplicações que irão compor esse objeto de estudo, pois abordaremos de forma simples e dissertativa cada um dos conceitos estudados neste documento, em especial os de juros simples e compostos, para que o leitor possa ter uma noção de como é realizado tais estudos.

4.3.1 Aplicação de capitalização em regime de juros simples

Supondo que esse empresário aplique 30% do valor total da primeira produção em um determinado banco, com uma taxa de rendimento de 3% ao mês, além disso deixe o capital por um período de 6 meses, sobre um regime de juros simples. Quanto o proprietário do dinheiro receberá ao final da aplicação?

Para obtermos aquilo que se deseja acima, é preciso que alguns valores sejam definidos, por isso façamos os cálculos em partes e ao final soma-se os valores encontrados. Assim, considerando a primeira produção temos o valor total de $R\$\, 68.244,00$.

Deseja-se 30% do valor da primeira produção, então teremos que efetuar o cálculo usando conceitos de porcentagem. Como se quer 30% de 68.244,00, então em linguagem matemática temos que

$$30\% \text{ de } 68.244,00 = \frac{30}{100} \cdot 68.244,00 \tag{4.1}$$

Resultando em

$$20.473,20.$$

Logo, o valor para ser usado da primeira produção nos 6 meses de investimento é de $R\$\,20.473,20$.

Para descobrir o rendimento no período descrito, basta fazer a aplicação da fórmula dos juros simples. Do problema, temos as informações abaixo:

- Capital de: 20.473,20 reais $\rightarrow C = 20.473,20$;
- Tempo de aplicação: 6 meses $\rightarrow n = 6$;
- Taxa: 3% ao mês $\rightarrow i = 0,03$,
- Montante: é o que vamos determinar.

Substituindo as informações, na fórmula que representa o regime de juros simples, dada por

$$M = C(1 + i \cdot n) \tag{4.2}$$

chegamos à

$$M = 20.473,20(1 + 0,03 \cdot 6). \tag{4.3}$$

Resolvendo o produto dentro dos parênteses, tem-se que

$$M = 20.473,20(1 + 0,18). \tag{4.4}$$

Por fim, resolvendo a soma e o prodtudo, obtemos

$$M = 24.158,376. \tag{4.5}$$

Portanto, o proprietário receberá ao final da aplicação o valor de $R\$\,24.158,376$ ou um valor aproximado de $R\$\,24.158,38$.

4.3.2 Aplicação de capitalização em regime de juros compostos

Tendo como base os mesmos dados anteriormente, o qual foi estudado no sistema de capitalização de juros simples, faremos aqui uma abordagem de como seria o rendimento se o sistema de investimento aplicasse juros compostos sobre os investimentos.

Novamente, supondo que o empresário faça um investimento em um determinado banco e retire do total do que foi adquirido na produção 30%. Além disso, deixe esse capital rendendo por 6 meses à uma taxa de juros compostos de 3% ao mês. Qual o lucro que o empresário obterá ao final desse período?

Sabemos que 30% de $R\$\,68.244,00$ correspondente a $R\$\,20.473,20$. Tal valor foi descoberto usando conceitos básicos de fração e porcentagem, o qual pode ser encontrado com mais detalhes na aplicação acima.

Analogamente ao problema acima, temos as informações abaixo:

- Capital de: 20.473,20 reais $\rightarrow C = 20.473,20$;
- Tempo de aplicação: 6 meses $\rightarrow n = 6$;
- Taxa: 3% ao mês $\rightarrow i = 0,03$,
- Montante: é o que vamos determinar.

Substituindo as informações, na fórmula que representa o regime de juros compostos, dada por

$$M = C(1+i)^n \tag{4.6}$$

chegamos à

$$M = 20.473,20(1+0,03)^6. \tag{4.7}$$

De onde resulta que

$$\begin{aligned} M &= 20.473,20 \cdot 1,03^6 \\ M &= 20.473,20 \cdot 1,19405 \\ M &\approx 24.446. \end{aligned}$$

Portanto, o proprietário receberá ao final da aplicação feita em regime de juros compostos o valor aproximado de $R\$\,24.446,00$.

Observe, caro leitor, que há uma diferença forte entre os regimes de capitalização de juros simples do regime de capitalização de juros compostos, o que já era de se esperar, não só por causa da definição, mas porque com a aplicação se pode ver na prática essa diferença. Por isso, é muito importante entender cada um desses regimes para que desta forma seja possível o aprendizado de tais métodos.

Capítulo 5

Considerações Finais

De acordo com tudo aquilo exposto neste trabalho, objetivou-se tratar da importância da matemática financeira e sua aplicação em problemas financeiros do cotidiano do aluno/leitor, em especial da atual situação de uma empresa que movimenta um capital alto. A relação de conceitos matemáticos incorporados aos problemas aqui debatidos foi de suma importância.

Outrossim, tratando agora da parte central do estudo dos conceitos de matemática financeira, infere-se a relação matemática com a aplicação acima, garantindo ao leitor revisões de alguns conceitos básicos de frações, porcentagens, acréscimos e descontos, bem como o incremento de habilidades que auxiliam o leitor para a manipulação dos cálculos aqui realizados. Ratificando, não se pode deixar de mencionar que tal estudo é total essência para a sociedade brasileira, em especial para os leitores da região norte, haja vista que por meio desses resultados é possível ensinar matemática financeira de modo prático, proporcionando ao aluno uma visão de como tais conceitos estão inseridos em seu cotidiano.

Neste interim, por meio de tudo que foi explanado no decorrer deste trabalho, espera- se que o leitor possa ter amadurecido intelectualmente e entender como a linguagem matemática pode se tornar sua aliada na resolução de problemas. É importante ainda salientar o quanto essa parte da matemática financeira é pouco vista ao longo da formação do indivíduo e que muitos ainda não sabem (desconhecem) as fórmulas que são realizadas para se calcular o lucro de uma aplicação.

Por fim, mostrou-se de forma simples e elaborada a matemática como chave para entender a parte inicial de um estudo do meio financeiro, levando o indivíduo a oportunidade da interdisciplinaridade e da objetivação de qualquer área à transformação em ciência exata. Além do mais, pode-se concluir, sem perda de generalidade, que todos os objetos aqui explanados foram alcançados, bem como a demonstração da importância de aplicar um determinado conceito matemático ao meio social.

Bibliografia

[1] ALMEIDA, A. C.: **Trabalho de Matemática Financeira em uma Sala de Aula do Ensino Médio da Escola Pública**. Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas ? SP, 2004.

[2] AMARAL, G. P.: **Educação Matemática Financeira: Construção do Conceito de Moeda no Último ano do Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado, IFES, Vitória, 2013.

[3] BRITO, A. N. S.: **Matemática Financeira para o Ensino Fundamental II: Uma Sequência Didática para o Ensino que Promova Pequenos Empreendedores**. Dissertação de Mestrado (PROFMAT), UFT, Palmas, 2020.

[4] CÓSER FILHO, M. S.: **Aprendizagem de Matemática Financeira no Ensino Médio: Uma Proposta de Trabalho a partir de Planilhas Eletrônicas**. Dissertação de Mestrado, UFGRS, Porto Alegre, 2008.

[5] FARIA, W. L. S.: **Matemática Financeira Aplicada aos Ensinos Fundamental e Médio**. Dissertação de Mestrado (PROFMAT), UFG, Goiânia, 2015.

[6] HOLANDA, F. B.; MUNIZ NETO, A. C.: **Juros Simples e Compostos. Primeiro Ano do Ensino Médio**. Portal da Matemática, OBMEP, 2018.

[7] LIMA, C. B.; SÁ, I. P.: **Matemática Financeira no Ensino Fundamental**. Revista TECCEN , Vol. 3, Nº. 1, 2010.

[8] NASCIMENTO, P. E.: **A Formação do Aluno e a Visão do Professor do Ensino Médio em Relação à Matemática Financeira**. Dissertação de Mestrado, PUC, São Paulo, 2004.

[9] PEREZ, J. L. S.: **As Galerias Comerciais de Pelotas e a Percepção de Lugar**. Dissertação de Mestrado, UFRG, Rio Grande, 2009.

[10] REIS, S. R.: **Matemática Financeira na Perspectiva da Educação Matemática Crítica**. Dissertação de Mestrado (PROFMAT), UFSM, Santa Maria – RS, 2013.

[11] SCHNEIDER, I. J.: **Matemática Financeira: Um Conhecimento Importante e Necessário para a Vida das Pessoas**. Dissertação de Mestrado, UPF, Passo Fundo, 2008.

[12] SOUSA, G. A.; TORRACA, M. A. A.; NASSER, L. **Matemática Financeira na Formação de Professores**. Comité Latino Americano de Matemática Educativa A. C. UFRJ, Rio de janeiro, 2014.

[13] THEODORO, F. R. F.: **Matemática e Educação Financeira; Uma Experiência com o Ensino Médio**. Revista de Educação, Vol. 13, Nº. 15, 2010.