



**Universidade Federal do Pará
Campus Universitário de Castanhal
Faculdade de Matemática
Licenciatura em Matemática**

Trabalho de Conclusão de Curso

**Espaços vetoriais de dimensão infinita,
tipos de convergências e aplicação em
integração numérica**

Winicius Noronha Gomes

2020

Espaços vetoriais de dimensão infinita, tipos de convergências e aplicação em integração numérica

Graduação

03/2016 – 02/2020

Submissão 13/02/2020

Defesa 18/02/2020

Versão Final 28/02/2020

Universidade Federal do Pará
Campus de Castanhal
Faculdade de Matemática

Winícius Noronha Gomes

winiciusng@gmail.com

Licenciado em Matemática 2019

UFPA-Castanhal

Banca Examinadora

Msc. Romário Silva Duarte

Doutorando em Matemática (UFPA) (Orientador)

Prof. Dr. Valdelírio da Silva e Silva

Membro da Faculdade

Prof. Dr. Arthur Almeida

Membro da Faculdade

Prof. Msc André Renan Lima

ICEN - UFPA

Dedicatória

Dedico este trabalho aqueles que sempre me amaram e fizeram o melhor por mim, ao meu pai Luis e minha mãe Francisca, minha querida Quinha.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente (como cristão que sou) a Deus por tantas bênçãos ao longo desse projeto.

Agradeço também a toda minha família que de alguma forma me ajudou. Agradeço aos meus amigos e professores da universidade pelas experiências vividas, como também a todos os demais amigos, em especial ao meu orientador Romário Silva Duarte que não apenas no TCC mas também na vida foi alguém que me orientou com excelência, um verdadeiro amigo ao qual sou muito grato.

Epígrafe

“O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário.”

(Albert Einstein)

Resumo

Neste trabalho, trataremos de alguns tópicos referentes ao estudo de análise funcional, dando destaque para as propriedades e estruturas de espaços vetoriais de dimensão infinita em relação aos espaços de dimensão finita. Também mostraremos como resultado da teoria construída uma aplicação em integração numérica, na qual, mediante o estudo de convergências e dos teoremas para integração numérica será possível obter como corolários as regras do trapézio e de Simpson. Por fim, faremos alguns testes envolvendo os corolários evidenciando o que foi discutido durante o trabalho.

Palavras chaves: Espaços vetoriais de dimensão infinita, Espaços de Banach, Convergências e Integração numérica.

Abstract

In this paper, we will deal with some topics related to the study of functional analysis, highlighting the properties and structures of vector spaces of infinite dimension in relation to spaces of finite dimension. We will also show, as a result of the constructed theory, an application in numerical integration, in which, through the study of convergences and the theorems of numerical integration, it will be possible to obtain as corollaries the trapezoid and Simpson rules. Finally, we will do some tests involving the corollaries, highlighting what was discussed during the work.

Keywords: Infinite dimension vector spaces, Banach Spaces, Convergences and Numerical integration.

Sumário

1	Introdução	8
2	Espaços Vetoriais Normados	9
2.1	Espaços vetoriais	9
2.1.1	Subespaços Vetoriais	11
2.1.2	Dependencia e independencia linear de vetores	12
2.1.3	Base	12
2.1.4	Dimensão	13
2.2	Espaços vetoriais Normados	14
2.3	Sequências em Espaços Normados	17
3	Espaços de Banach	20
4	Funcionais Lineares e Espaços Duais	23
4.1	Funcionais lineares e contínuos	24
4.2	Princípio da Limitação Uniforme	26
5	Convergências em espaços vetoriais normados	28
5.1	Convergências em Espaços Normados	29
5.2	Convergência nos Espaços Duais	30
6	Aplicações em integração numérica	33
6.1	Simulações Numéricas	41
	Referências Bibliográficas	44
	Apêndice	45
A	Scripts usados na avaliação dos testes	46
A.1	Regra do trapézio	46
A.2	Regra 1/3 de Simpson para a função $f(x) = e^x$	47
A.3	Regra 1/3 de Simpson para a função $f(x) = \cos(kx)$	48

1

Introdução

A Análise funcional, área da matemática que contempla os estudos apresentados neste trabalho, é o ramo dentro da análise matemática que faz estudo dos espaços de funções e tem como base os conceitos de álgebra linear e análise na reta (análise real), ou como diria o prof Dr. Marcelo Vianna, atual diretor geral do IMPA "A análise funcional é , a grosso modo, álgebra linear em espaços de dimensão infinita".

Atualmente, a análise funcional tem importante papel dentro da pesquisa matemática, pois possui diversas aplicações de sentido prático, como também em problemas propriamente matemáticos, a citar, em transformada de Fourier, equações diferenciais, equações integrais, no cálculo das variações, análise complexa, teoria da medida, mecânica quântica, programação convexa, entre outros. Devemos ainda destacar que se trata de algo recente, historicamente falando, pois foi no final da década de 20 quando se publicou alguns dos resultados que compõem os "fundamentos" da análise funcional, a saber, o princípio da limitação uniforme, teorema da aplicação aberta, teorema do gráfico fechado e teorema de Hahn-Banach, através de matemáticos como Banach, Steinhaus, Hahn, von Neumann, Hilbert, entre outros.

Neste trabalho, vamos abordar apenas alguns tópicos da análise funcional, afinal de contas, trata-se de um estudo muito extenso. Faremos um breve resumo sobre espaços de dimensão finita dando destaque para o comportamento e aplicações de espaços vetoriais de dimensão infinita, pois como veremos neste trabalho muitos resultados que são triviais em espaços de dimensão finita não são para dimensão infinita. Em determinados momentos é interessante que o leitor tenha uma certa sensibilidade pois existem ideias sutis que fazem total diferença.

Dentre os espaços vetoriais normados de dimensão infinita abordaremos em especial ao espaço de Banach o qual será de total importância para o desenvolvimento seguinte do trabalho. Faremos também estudo de alguns tipos de convergências em espaços normados e em seguida mostraremos uma aplicação em integração numérica correlacionando, portanto, toda a teoria apresentada ao longo deste trabalho. Para isso, usaremos o software livre Scilab, no qual serão feitos os códigos para os testes.

Cabe ressaltar também que não estamos interessados em fazer uma análise matemática mais profunda sobre os tópicos aqui abordados, assim, omitimos as demonstrações dos teoremas que podem ser melhor vistas em [KREYSIZG \(1978\)](#) e [BREZIS \(2011\)](#).

2

Espaços Vetoriais Normados

Os espaços vetoriais consistem em uma importante estrutura para espaços de objetos matemáticos. Neste sentido, quando falamos em espaços vetoriais estamos nos referindo a estrutura conferida a um determinado conjunto de objetos matemáticos que nos permite resolver determinados problemas [HOFFMAN \(1971\)](#).

2.1 Espaços vetoriais

Definição 1. (*Espaços Vetoriais*) Um espaço vetorial (ou espaço linear) é uma estrutura matemática que atende aos seguintes critérios:

1- Um corpo K de escalares.

2- Um corpo E de objetos denominados vetores.

3- Uma regra (operação), dita adição de vetores, que associa a cada par de vetores u, v em E um vetor $u + v$ em E , denominado a soma de $u + v$. Tal que ocorre:

3(a) $u + v = v + u$ (Comutatividade).

3(b) $u + (v + w) = (u + v) + w$ (Associatividade).

3(c) $u + 0 = u$ (0 é o vetor nulo e é único).

3(d) $u + (-u) = 0$ ($\forall u \in E \exists! (-u) \in E$ que satisfaz a igualdade).

4- Uma regra (operação), dita multiplicação por escalar, que associa a cada escalar $\alpha \in K$ e a cada vetor $u \in E$ um vetor $\alpha u \in E$, denominado o produto de α por u , tal que:

4(a) $1u = u; \forall u \in E$ (Elemento neutro).

4(b) $(\alpha_1 \alpha_2)u = \alpha_1(\alpha_2 u)$ (associatividade)

4(c) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (distributividade por escalar).

4(d) $(\alpha_1 + \alpha_2)u = \alpha_1 u + \alpha_2 u$ (distributividade por vetor).

Os itens da definição anterior são chamados de axiomas de espaço vetorial. Portanto, se determinado espaço de objetos matemáticos possui esta estrutura, então podemos dizer que se trata de um espaço vetorial e seus elementos são chamados de vetores.

Exemplo 1. O espaço, $\mathbb{R}^n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) ; u_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n\}$, o conjunto das n -uplas de números reais é um espaço vetorial.

Onde as operações de adição e multiplicação por escalar são as clássicas, dadas por:

$$1) u + v = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

$$2) \alpha u = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n)$$

Exemplo 2. O espaço das matrizes quadradas M_n , é um espaço vetorial com as operações de soma de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar usuais.

Exemplo 3. O espaço $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ é contínua}\}$, isto é, o espaço das funções contínuas definidas sobre um intervalo fechado e limitado, munido das operações de soma de funções e multiplicação por um escalar usuais, é um espaço vetorial.

Note que nos exemplos acima, temos espaços vetoriais de natureza distintas. De fato, neste trabalho estamos interessados em estudar estruturas mais gerais para espaços vetoriais, de modo que em alguns casos não teremos nem mesmo como ter uma visão geométrica dos espaços os quais estamos trabalhando, como nos exemplos 2 e 3.

De maneira geral, a estrutura de espaço vetorial é uma estrutura básica que podemos conferir a um determinado espaço para que possamos resolver equações lineares com os elementos deste espaço. Neste sentido, vamos definir o que seria uma combinação linear para elementos de um espaço vetorial.

Definição 2. (Combinação Linear) Um vetor v é dito combinação linear dos vetores u_1, u_2, \dots, u_n em E se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, tais que:

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

ou seja,

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$$

É importante observar que a estrutura de um espaço vetorial está apoiada sobre a forte estrutura do corpo K . Neste trabalho, devido as aplicações que faremos, estamos mais interessados em trabalhar com espaços definidos sobre o corpo dos números reais, isto é, $K = \mathbb{R}$, no entanto, salvo pequenas adaptações técnicas, também podemos usar o corpo dos números complexos, ou seja, $K = \mathbb{C}$.

2.1.1 Subespaços Vetoriais

Definição 3. (*Subespaços Vetoriais*) Seja E um espaço vetorial sobre o corpo K . Um subespaço de E é um subconjunto W de E que é um espaço vetorial sobre K com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar de E .

Observe que como $W \subset E$, então, salvo as operações de fechamento e a existência do elemento neutro, todos os outros axiomas do espaço vetorial são válidos para os elementos de W .

Assim, para provarmos que $W \subset E$, é um subespaço vetorial de E , basta provarmos:

- $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$
- $u = 0 \in W$
- $\forall u \in W \Rightarrow (-u) \in W$

Exemplo 4. O espaço, $\mathbb{R}_{n-1} = \{(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, 0) ; u_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n-1\}$, é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n .

Observamos que, a princípio, poderia-se pensar que o espaço \mathbb{R}_{n-1} do exemplo anterior é o espaço \mathbb{R}^{n-1} . No entanto, apesar de poderem ser identificados como o mesmo espaço devido a semelhança de seus elementos, estes espaços são de naturezas distintas, uma vez que os elementos de \mathbb{R}_{n-1} tem uma componente a mais que os elementos de \mathbb{R}^{n-1} . Este exemplo nos mostra como é delicado os estudos acerca das estruturas de espaços.

Exemplo 5. Uma matriz $n \times n$ quadrada A sobre \mathbb{R} é simétrica se $A_{ij} = A_{ji}$. As matrizes simétricas formam um subespaço do espaço de todas as $n \times n$ matrizes sobre \mathbb{R} .

Exemplo 6. O conjunto $P_k[a, b]$ dos polinômios de grau menor ou igual a k , é um subespaço vetorial de $C[a, b]$.

Uma importante propriedade de espaços vetoriais é que dado um subconjunto qualquer de vetores de um espaço vetorial, sempre poderemos conseguir um subespaço vetorial que contém esses vetores. Para isto, basta que tomemos o conjunto de todas as combinações lineares possíveis com os elementos deste subconjunto [LIMA \(2014\)](#). Vamos definir de maneira mais formal esta propriedade.

Definição 4. (*Subespaço Gerado*) Seja $S \subset E$, um subconjunto de E . Chamamos de subespaço gerado por S , o conjunto formado por todas as combinações lineares dos elementos de S . Tal espaço é denotado por $[S]$ ou $\langle S \rangle$.

2.1.2 Dependência e independência linear de vetores

Definição 5. (*Vetores Linearmente Dependentes*) Seja E um espaço vetorial sobre o corpo K . um subconjunto $S \subset E$ é dito linearmente dependente (LD) se existirem vetores $u_1, u_2, \dots, u_n \subset S$ distintos e escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \subset K$ não todos nulos, tais que:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0$$

Em outras palavras, um vetor ser linearmente dependente (LD) significa que este vetor pode ser escrito como uma combinação linear de outros vetores. Um conjunto que não é linearmente dependente (LD) é dito linearmente independente (LI).

Definição 6. Um conjunto S de vetores é linearmente independente se todo subconjunto finito de S é linearmente independente, ou seja, se, e somente se para todo $u_1, u_2, \dots, u_n \subset S$ distintos ocorrer:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

2.1.3 Base

Definição 7. Seja E um espaço vetorial. Uma base de E é um conjunto de vetores linearmente independentes em E que geram E .

Ou seja, dizer que E é gerado por determinados vetores (LI), implica dizer que E é o resultado de todas as combinações lineares desses vetores (LI) e que tais vetores formam uma base para E .

Exemplo 7. O conjunto S constituído dos vetores e_1, e_2, \dots, e_n definidos por:

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

é uma base para \mathbb{R}^n .

De fato, sejam $u_1, u_2, \dots, u_n \subset \mathbb{R}$, tal que $u = (u_1, \dots, u_n)$, então note que

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n = \sum_{i=1}^n u_i e_i$$

Isso mostra que e_1, e_2, \dots, e_n geram \mathbb{R}^n . Além disso, seja $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ e

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$$

De onde,

$$\lambda_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$$

Dessa forma, o conjunto $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma base de \mathbb{R}^n . Essa base é particularmente denominada de **base canônica** de \mathbb{R}^n .

Exemplo 8. *Seja $M_{2 \times 2}$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem dois. Então, os elementos da forma:*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formam uma base para este espaço.

Note que podemos usar o mesmo princípio para construir uma base para $M_{n \times n}$.

2.1.4 Dimensão

Definição 8. *Se E é um espaço vetorial de dimensão finita, a dimensão de E é definida como sendo o número de elementos de uma base de E , e usaremos a seguinte notação: $\dim E$.*

Dizemos que um espaço vetorial E é de dimensão finita se ele possui uma base finita.

Proposição 1. *Se E é um espaço vetorial de dimensão finita, então quaisquer duas bases de E tem o mesmo número (finito) de elementos.*

Proposição 2. *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo K e seja $W \subset E$ um subespaço vetorial de E . Se $\dim(E) = n$, então $\dim(W) \leq n$.*

Exemplo 9. *Da definição de dimensão e do exemplo 7, temos que o espaço \mathbb{R}^n tem dimensão n .*

Exemplo 10. *Da definição de dimensão e do exemplo 8, temos que o espaço $M_{n \times n}$ tem dimensão n^2 .*

Para os dois exemplos dados acima temos espaços de dimensão finita, no entanto, existem espaços com dimensão infinita, conforme veremos no próximo exemplo.

Exemplo 11. *O espaço $C[a, b]$ tem dimensão infinita*

Demonstração. De fato, seja $P_k[a, b] \subset C[a, b]$ o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a $k \in \mathbb{N}$. Tais funções são contínuas em um intervalo fechado e limitado. Além disso, essas funções tem a seguinte forma:

$$p_k \in P_k[a, b] \Rightarrow p_k = a_0 + a_1x^1 + \dots + a_kx^k$$

Facilmente vemos que uma base para o espaço $P_k[a, b]$ pode ser dada por

$$S_k = \{1, x^1, \dots, x^k\}$$

portanto, a dimensão de $P_k[a, b]$ é $k + 1$.

Assim, suponhamos que a dimensão de $C[a, b]$ seja $n \in \mathbb{N}$, então basta tomarmos o subespaço $P_n[a, b]$ e teremos um subespaço de $C[a, b]$ cuja dimensão, conforme vimos acima, é maior que a dimensão do espaço, o que é absurdo segundo a proposição 2. Portanto, não podemos admitir que a dimensão do Espaço das Funções Contínuas em um intervalo fechado seja finita, só restanto dizer que este espaço tem dimensão infinita. \square

2.2 Espaços vetoriais Normados

Conforme dito nas seções anteriores, estamos trabalhando com espaços mais gerais, os quais em determinados casos não apresentam uma interpretação geométrica. No entanto, vamos definir uma estrutura que se assemelha a noção geométrica de comprimento. Tal estrutura nos permitirá definir convergência para sequências em espaços gerais de maneira semelhante a noção de convergência no conjunto dos números reais.

Definição 9. (Norma) Seja E um espaço vetorial, uma norma $\|\cdot\|$ no espaço E é uma função $\|\cdot\| : E \rightarrow K$ tal que, $\forall u, v \in E$, e $\forall \lambda \in K$. São válidas as seguintes propriedades:

$$N1) \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

$$N2) \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$$

$$N3) \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

OBS: Note que das condições N1, N2, N3 também podemos obter que

$$N4) \|u\| \geq 0, \forall u \in E.$$

Assim, um espaço vetorial normado ou tão somente "espaço normado", trata-se do par:

$$(E, \|\cdot\|)$$

Onde E é um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ uma norma em E . Quando necessário podemos usar a notação $\|\cdot\|_E$ para indicar que se refere a norma do espaço E .

Exemplo 12. A seguinte função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 : \quad \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ u = (u_1, u_2, \dots, u_n) &\mapsto \|u\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Define uma norma sobre o espaço \mathbb{R}^n , formados por elementos da forma (u_1, u_2, \dots, u_n) que são n -uplas de números reais. Assim, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ é um espaço normado e denominamos esta norma por **norma euclidiana**.

Note que para o exemplo 12 das n -uplas de números reais, também poderíamos definir as seguintes normas

$$(i) \|u\|_s = \sum_{i=1}^n |u_i|$$

$$(ii) \|u\|_{max} = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|$$

chamadas respectivamente de **norma da soma** e **norma do máximo**.

Exemplo 13. Sob o espaço vetorial das seqüências limitadas, ou seja, $l^\infty = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} ; |x_n| < C \forall n \in \mathbb{N}\}$, considere a seguinte função:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : \quad l^\infty &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto \|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \end{aligned}$$

Esta função define uma norma sobre este espaço e o par $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço normado. Tal norma é chamada de **norma da convergência uniforme**.

Exemplo 14. Seja $1 \leq p < \infty$, vamos considerar o seguinte espaço:

$$l^p = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} ; x_i \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

chamado de espaço das funções p -somáveis. Sob este espaço podemos definir a seguinte função:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : \quad l^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} &\longmapsto \|u\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Então o par $(l_p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço normado.

Observação: É interessante destacar que se tomarmos $p = 2$, esta norma é uma generalização da norma euclidiana. Uma vez que o somatório na norma euclidiana está definido para um limite finito, enquanto que para o espaço l_2 , será um somatório infinito, isto é, uma série numérica.

Exemplo 15. Vamos considerar o espaço das funções contínuas definidas em um intervalo limitado e fechado, isto é,

$$C[a, b] = \{u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} ; u \text{ é contínua}\}$$

Sob este espaço definimos a seguinte função:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{C[a,b]} : \quad C[a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \|u\|_{C[a,b]} = \int_a^b |u(t)| dt \end{aligned}$$

a qual define uma norma sob $C[a, b]$ e o par ordenado $(C[a, b], \|\cdot\|_{C[a,b]})$ é um espaço normado.

Assim, sob um determinado espaço vetorial podem ser definidas diferentes normas e cada norma agregará uma noção de distância diferente.

No entanto, podemos ter normas que são equivalentes, ou seja, dados $\varepsilon > 0$ e $x, y \in (E, \|\cdot\|_1)$ tal que

$$\|x - y\|_1 < \varepsilon$$

então, para o espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|_2)$, existe $C > 0$, verificando

$$\|x - y\|_2 < C\varepsilon$$

De maneira prática, duas normas são equivalentes, quando podemos manter a aproximação de dois elementos de E por ambas as normas.

Definição 10. (*Normas Equivalentes*) Dado duas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_0$ em um espaço vetorial E , elas são ditas equivalentes quando existem $a, b \in K$, $0 < a \leq b$, tais que:

$$a\|u\|_0 \leq \|u\| \leq b\|u\|_0 ; \forall u \in E, a, b \in K$$

Em espaços de dimensão finita, todas as normas são equivalentes. No entanto, isto não é verdade para espaços de dimensão infinita, o que nos indica que o estudo de espaços de dimensão infinita é mais delicado.

2.3 Sequências em Espaços Normados

A noção de convergência de sequências é essencial para a análise matemática, pois nos permite, entre outras vantagens, aproximar objetos matemáticos com estruturas mais complexas por outros objetos de estrutura mais simples.

Neste sentido, assim como podemos definir convergência de sequências de números reais, através da estrutura de norma podemos também definir uma convergência de sequências para espaços de dimensão infinita.

Definição 11. (*Convergência em norma*) Seja E um espaço vetorial normado e tomamos $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ uma sequência de elementos de E . Dizemos então que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $u \in E$ e denotamos por $u_n \rightarrow u$, se tivermos:

$$\|u_n - u\|_E \rightarrow 0$$

Note que pela definição da norma, $s_n = \|u_n - u\|_E$, é uma sequência de números reais e portanto esta noção de convergência está bem definida, de modo que as propriedades das sequências de números reais serão "herdadas" naturalmente por essa noção de convergência.

Também através da estrutura de norma podemos definir um conceito de limitação para sequências em espaços normados mais gerais.

Definição 12. (*Sequências Limitadas em Espaços Normados*) Uma sequência (u_n) em um espaço normado E , chama-se limitada se existe $M > 0$ tal que:

$$\|u_n\|_E < M, \forall n \in \mathbb{N}$$

Naturalmente, temos algumas propriedades importantes que são herdadas da convergência e limitação de sequências reais através da estrutura de norma para os espaços mais gerais.

Proposição 3. Se uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em um espaço normado E é convergente, então ela é limitada.

Proposição 4. *Se uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ num espaço normado E é convergente, então seu limite é único.*

Também podemos definir sequências de Cauchy para espaços de dimensão infinita. Tais sequências merecem destaque nos estudos destes espaços devido a uma peculiaridade que analisaremos mais adiante.

Definição 13. *(Sequências de Cauchy em Espaços Normados) Uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em um espaço normado E é dita sequência de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$, existir um natural $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tal que:*

$$\|u_m - u_n\|_E < \varepsilon, \quad \forall m, n \geq N_0$$

As sequências de Cauchy são importantes na análise matemática pois para sequências de números reais toda sequência de Cauchy é também uma sequência convergente, assim como toda sequência convergente é de Cauchy, ou seja, são noções equivalentes FIGUEIREDO (2013). Por vezes, é mais simples provar que uma sequência é de Cauchy do que provar que ela converge.

No entanto, as sequências de Cauchy em espaços de dimensão infinita não herdarão todas as propriedades das sequências de Cauchy de números reais. Dessa forma, a seguir temos duas importantes propriedades que serão herdadas.

Proposição 5. *Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.*

Proposição 6. *Seja E um espaço normado. Se $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente, então $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente e converge para o limite da subsequência.*

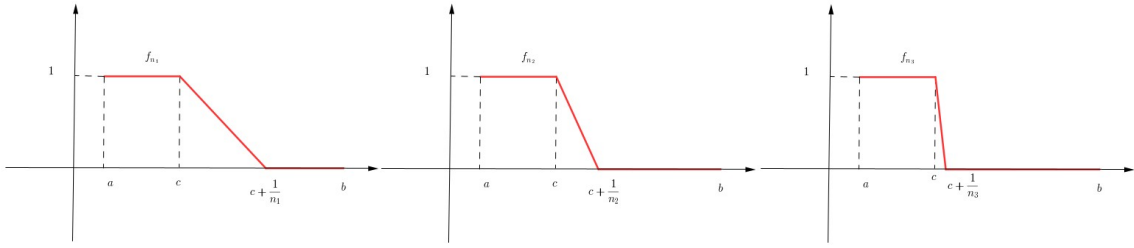
Uma propriedade importante que perdemos quando trabalhamos com espaços vetoriais normados de maneira geral, ou seja, sem levar em consideração a dimensão do espaço, é o fato de toda sequência de Cauchy ser convergente. De fato, esta propriedade é válida para sequências de números reais, no entanto, para espaços mais gerais isto nem sempre ocorre. Conforme podemos ver no exemplo a seguir.

Exemplo 16. *Seja o espaço $(C[a, b], \|\cdot\|_{C[a, b]})$ um espaço normado com*

$$\|u\|_{C[a, b]} = \int_a^b |u(t)| dt$$

E seja a sequência de funções $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dada por :

$$u_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \leq t < c \\ -nt + (1 + nc), & \text{se } c \leq t < c + 1/n \\ 0, & \text{se } c + 1/n \leq t \leq b \end{cases}$$



Então temos que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C[a, b]$, no entanto, ela converge para uma função que não é contínua em $[a, b]$, de modo que seu limite não está em $C[a, b]$.

De fato, para $n \geq m$, olhando para a definição de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ temos que $u_m(t) - u_n(t) \geq 0$, daí podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 \|u_n - u_m\|_{C[a,b]} &= \int_a^b |u_m(t) - u_n(t)| dx \\
 &= \int_a^b u_m(t) dt - \int_a^b u_n(t) dt \\
 &= \left[\int_a^c u_m dt + \int_c^{c+1/m} u_m(t) dt + \int_{c+1/m}^b u_m(t) dt \right] - \\
 &\quad \left[\int_a^c u_n dt + \int_c^{c+1/n} u_n(t) dt + \int_{c+1/n}^b u_n(t) dt \right] \\
 &= \int_c^{c+1/m} (-mt + (1 + mc)) dt - \int_c^{c+1/n} (-nt + (1 + nc)) dt \\
 &= \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n} \leq \left(\frac{1}{2}\right) \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| < \epsilon
 \end{aligned}$$

Assim $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $(C[a, b], \|\cdot\|_{C[a,b]})$. Por outro lado, fazendo $n \rightarrow +\infty$ temos que:

$$u_n \rightarrow u, \text{ onde } u = \begin{cases} 1, & \text{se } a \leq t \leq c \\ 0, & \text{se } c < t \leq b \end{cases}$$

mas $u \notin C[a, b]$.

O fato de nem toda sequência de Cauchy convergir para um elemento do espaço, quando estamos lidando com espaços mais gerais, motiva a definição de um espaço onde isto de fato sempre ocorra. Tais espaços possuem importantes propriedades que são as bases para diversas aplicações.

3

Espaços de Banach

Agora será apresentado um tipo especial de espaço vetorial, chamado espaço de Banach, o qual é definido justamente para solucionar o problema mencionado no final do capítulo anterior.

Definição 14. *Um espaço normado E é chamado de Espaço de Banach ou completo se, e somente se, toda sequência de Cauchy é convergente (em E).*

Nos espaços de Banach ocorre que toda sequência de Cauchy irá convergir (dentro do próprio espaço) e esta é uma propriedade muito importante a qual permite resolver diversos problemas [NOWOSAD \(1967\)](#). Além disso, vale destacar ao leitor que a forma como a norma é definida sobre determinado espaço faz total diferença, de modo que a depender da norma escolhida um mesmo espaço vetorial pode ser Banach ou não, conforme podemos observar no seguinte exemplo.

Exemplo 17. *Considere o espaço normado das funções contínuas, tal como foi definido no exemplo 16*

$$C[a, b] = \{u; u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é contínua}\}$$

No entanto, vamos definir sobre este espaço a norma da convergência uniforme, ou seja:

$$\|u\|_0 = \sup_{t \in [a, b]} |u(t)| \tag{3.1}$$

Neste caso, para a norma da convergência uniforme o espaço $C[a, b]$ as sequências de Cauchy sempre vão convergir dentro do próprio Espaço $C[a, b]$, ou seja, o espaço $(C[a, b], \|\cdot\|_0)$ é um Espaço de Banach.

De fato, Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas sobre o intervalo $[a, b]$, e além disso uma sequência de Cauchy. Então,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; m, n \geq n_0 \Rightarrow \|u_m - u_n\|_0 < \epsilon \tag{3.2}$$

$$\Rightarrow \sup_{a \leq t \leq b} |u_m(t) - u_n(t)| < \epsilon \Rightarrow |u_m(t) - u_n(t)| \leq \epsilon/3 \quad \forall t \in [a, b]. \tag{3.3}$$

Assim, para cada $t \in C[a, b]$ a seqüência real $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy e como os reais é completo então existe $a_t \in \mathbb{R}$ tal que

$$u_n(t) \rightarrow a_t \text{ em } \mathbb{R}, \quad n \rightarrow +\infty$$

Vamos definir a seguinte função:

$$\begin{cases} u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto u(t) = a_t \end{cases}$$

Ou seja

$$u_n(t) \rightarrow u(t)$$

Então dado $\epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_n(t) - u(t)| < \epsilon/3$$

Vamos mostrar que $u \in C[a, b]$.

De fato, seja $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C[a, b]$ uma seqüência convergente, então, como $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C[a, b]$

$$t_k \rightarrow t \text{ em } [a, b] \subset \mathbb{R} \Rightarrow u_n(t_k) \rightarrow u_n(t) \text{ em } \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

(da continuidade de u_n) Queremos provar que $u(t_k) \rightarrow u(t)$, ou seja,

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}; k \geq k_0 \Rightarrow |u(t_k) - u(t)| < \epsilon$$

Porém, de 2.4, temos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}; k \geq k_0 \Rightarrow |u_n(t_k) - u_n(t)| < \epsilon/3, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.5)$$

Considerando esta última implicação,tem-se:

$$|u(t_k) - u(t)| = |u(t_k) - u_n(t_k) + u_n(t_k) - u_n(t) + u_n(t) - u(t)| \quad (3.6)$$

$$\leq |u(t_k) - u_n(t_k)| + |u_n(t) - u(t)| + |u_n(t_k) - u_n(t)| \quad (3.7)$$

Então de 2.3 e 2.5, temos:

$$|u(t_k) - u(t)| \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \quad (3.8)$$

Provando assim que $u(t_k) \rightarrow u(t)$, de onde u é contínua, isto é, $u \in C[a, b]$. Resta provar que $u_n \rightarrow u$ em $(C[a, b], \|\cdot\|_0)$, isto é, que u_n converge uniformemente para u . No entanto, sabemos

pela definição de u que $\forall u \in [a, b]$:

$$u_n(t) \rightarrow u(t)$$

Ou seja, para cada $u \in [a, b]$ dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq n_0 \Rightarrow |u_n(t) - u(t)| < \epsilon$ como esta implicação é válida para todo $t \in [a, b]$ podemos tomar o supremo, de onde :

$$\sup_{t \in [a, b]} |u_n(t) - u(t)| < \epsilon \Rightarrow \|u_n - u\| < \epsilon \quad (3.9)$$

e portanto $u_n \rightarrow u$ em $(C[a, b], \|\cdot\|_0)$ Assim, provamos que a sequência de Cauchy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ arbitrária converge no espaço $(C[a, b], \|\cdot\|_0)$ e portanto este espaço é Banach.

Como mencionamos acima a depender da norma para um mesmo espaço vetorial podemos ou não ter um espaço de Banach, pois como vimos no exemplo 16 o espaço $C[a, b]$ com a norma da integral não é um espaço de Banach, mas foi mostrado que o mesmo espaço definido com a norma da convergência uniforme é um espaço de Banach.

Além disso, podemos destacar algumas importantes propriedades desses espaços.

Teorema 1. *Um subespaço W de um espaço de Banach E é completo (na norma induzida de E) se, e somente se, W é fechado.*

Teorema 2. *Todo espaço vetorial normado E de dimensão finita é um espaço de Banach.*

A partir dos teoremas acima pode-se notar que a estrutura de espaços vetoriais de dimensão finita estão compreendidos pela estrutura dos espaços de Banach, ou seja, os espaços vetoriais de dimensão finita são, na verdade, uma particularidade de espaços de Banach. Assim, todos os resultados referentes a espaços de Banach, podem ser aplicados para espaços vetoriais de dimensão finita, tornando o estudo destes espaços uma "generalização" da Álgebra Linear clássica.

Diversas aplicações podem ser estudadas através de funções que são definidas sobre espaços de Banach. Portanto, no próximo capítulo discutiremos este tipo de função e algumas de suas principais propriedades.

— Funcionais Lineares e Espaços Duais —

Diversos problemas da natureza são modelados através de ferramentas matemáticas que envolvem espaços de Banach. Por exemplo, as equações diferenciais são equações onde a variável independente é uma função e o espaço de funções contínuas, definida com a norma da convergência uniforme, dado no exemplo 17 é um espaço de Banach. Mais especificamente, toda aplicação que envolve o espaço de funções contínuas pode ser estudada através de aplicações da teoria de Espaços de Banach.

De maneira geral, muitas aplicações são estudadas através de "funções" definidas sobre Espaços Vetoriais e quando ocorre do espaço vetorial em questão ter dimensão infinita, as propriedades de Espaços de Banach se tornam muito úteis. Por exemplo, o ato de derivar uma função pode ser entendido como uma "função", isto é,

$$\begin{aligned} D : \quad C[a, b] &\longrightarrow C[a, b] \\ u &\longmapsto D(u) = \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

Assim, como o ato de integrar uma função em um determinado intervalo, pode ser entendido como uma "função":

$$\begin{aligned} I : \quad C[a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto I(u) = \int_a^b |u(t)| dt \end{aligned}$$

Portanto, é pertinente que estudemos as "funções" definidas sobre os Espaços Vetoriais, especialmente sobre os Espaços de Banach em virtude das vantagens que esta estrutura pode nos proporcionar.

Afim de não causar confusão, vamos definir o que seriam "funções" definidas sobre espaços vetoriais sem levar em consideração a dimensão do espaço.

Definição 15. (*Funcional*)

Um Funcional T é uma função em que o domínio $D(T)$ é um espaço vetorial e o contradomínio K um corpo de escalares.

Considere os exemplos a seguir:

Exemplo 18. Seja $T : M_n \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional onde M_n é o espaço das matrizes quadradas de ordem n tal que $A \mapsto T(A) = \text{Det}(A)$

Neste exemplo temos um funcional definido sobre um espaço de dimensão finita, conforme visto no exemplo 10.

Exemplo 19. Seja $I : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional dado por:

$$I : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto I(u) = \int_a^b |u(t)| dt$$

No exemplo acima temos um funcional definido sobre um espaço de dimensão infinita conforme visto anteriormente no exemplo 11.

Poderíamos também definir de maneira mais geral **Operadores** que consistem em funções nas quais tanto o domínio quanto o contradomínio são espaços vetoriais (podendo ser espaços vetoriais diferentes, mas definidos sobre o mesmo corpo de escalares) NOWOSAD (1967). No entanto, estes estudos apresentam maior complexidade e não fazem parte do objetivo deste trabalho.

4.1 Funcionais lineares e contínuos

Assim como fazemos para funções definidas sobre o conjunto dos números reais, podemos também definir uma noção de continuidade para funcionais.

Definição 16. (*Funcionais Contínuos*) Seja E um espaço vetorial normado e $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional, dizemos que T é contínuo se, e somente se

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E, u_n \rightarrow u \text{ em } E \Rightarrow T(u_n) \rightarrow T(u) \text{ em } \mathbb{R}$$

Também vamos definir um caso particular de funcionais, são os funcionais lineares os quais satisfazem as seguintes condições:

Definição 17. (*Funcionais Lineares*) Dizemos que um funcional é linear quando para quaisquer $u, v \in D(t)$ e qualquer escalar α , ocorra:

$$T1) T(u + v) = T(u) + T(v)$$

$$T2) T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

Dentre os funcionais podemos destacar aqueles que são lineares e contínuos pois estes são importantes devido a facilidade com que podemos manipulá-los, assim, vamos destacar um conjunto formado apenas por esses funcionais.

Definição 18. (*Espaço Dual*) Chamamos de Espaço Dual de E , ao espaço composto por todos os funcionais lineares e contínuos e representaremos por E^* . *MUSCAT (2014)*

Podemos também definir uma noção de norma sobre este espaço.

Definição 19. (*Norma de um funcional linear e contínuo*)

Seja um funcional $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f \in E^*$ (f é linear e contínuo), definimos sua norma da seguinte maneira:

$$\|f\| = \sup_{u \in E, u \neq 0} \frac{|f(u)|}{\|u\|} \quad (4.1)$$

OBS: Também podemos definir a norma para um funcional linear limitado $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ considerando apenas os elementos de $u \in E$ tais que $\|u\| = 1$, isto é:

$$\|f\| = \sup_{\|u\|=1} |f(u)| \quad (4.2)$$

Facilmente, verificamos que esta função define uma norma para os funcionais. Como consequência desta definição poderemos também definir uma noção de limitação para funcionais do espaço dual:

Definição 20. *Seja E um espaço normado, um funcional linear $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é dito limitado se existir $c > 0$ tal que:*

$$\|f\| \leq c$$

Note que

$$\|f\| \leq c \Rightarrow \sup_{u \in E, u \neq 0} \frac{|f(u)|}{\|u\|} \leq c$$

Portanto, podemos escrever a noção de limitação para funcionais do dual da seguinte maneira:

$$|f(u)| \leq c\|u\| \quad \forall u \in E$$

Vale destacar o seguinte teorema para espaços vetoriais normados:

Teorema 3. *Seja E um espaço vetorial normado e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear, então:*

$$f \text{ é limitada} \Leftrightarrow f \text{ é contínua}$$

Assim, poderíamos definir o dual de um espaço vetorial normado E , como o espaço dos funcionais definidos sobre E que são lineares e limitados (em vez de contínuos), visto que, em geral é mais fácil provar a limitação de um funcional do que a sua continuidade.

Além disso, os espaços duais de funcionais também possuem a estrutura de espaços de Banach, como veremos no seguinte teorema.

Teorema 4. *Todo espaço dual de funcionais é um espaço de Banach.*

4.2 Princípio da Limitação Uniforme

Um dos grandes teoremas para a análise em espaços vetoriais mais gerais é conhecido como o princípio da Limitação Uniforme ou Teorema de Banach-Steinhaus, o qual foi apresentado em 1927. Este teorema faz parte dos quatro pilares da análise em espaços normados, acompanhado dos teoremas de Hahn-Banach, teorema da Aplicação aberta e teorema do gráfico fechado, dentre os quais apenas os Teoremas de Hahn-Banach não exigem a completude dos espaços vetoriais em seus enunciados, ou seja, não exigem que o espaço seja de Banach [BOTELHO G. \(2015\)](#). Isso demonstra o quanto a estrutura dos Espaços de Banach é importante para o estudo de Espaços Vetoriais Normados.

Este teorema nos mostra que dado um espaço de Banach E , então se tivermos uma sequência de funcionais lineares e limitados, isto é, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E^*$, os quais são limitados em cada ponto do domínio, ou seja, para algum $M_u > 0$

$$|T_n(u)| \leq M_u, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } u \in E$$

Desse modo, também teremos uma limitação na norma dos funcionais, ou seja, existe um $M > 0$, tal que

$$\|T_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Isto significa que a limitação pontual para uma sequência de funcionais implica uma limitação mais "forte", também conhecida como limitação uniforme. A seguir, enunciamos o teorema de maneira mais formal.

Teorema 5. (*Princípio da Limitação Uniforme*) *Seja E um espaço de Banach e $\{T_i : E \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in A}$ uma família (não necessariamente enumerável) de funcionais lineares e limitados indexada em A . Então,*

$$|T_i(u)| \leq M_u, \forall i \in A \text{ e } u \in E \Rightarrow \|T_i\| \leq M, \forall i \in A$$

Notamos que no enunciado do Princípio da Limitação Uniforme, não exigimos que a sequência seja indexada em um conjunto enumerável o que torna o teorema ainda mais forte.

Existem diversas aplicações para o Teorema de Banach-Steinhaus, entre as quais podemos destacar as aplicações em séries de Fourier e nas propriedades de "convergência fraca" para Espaços Vetoriais Normados. Neste trabalho, nos concentraremos no segundo caso, assim, no próximo capítulo vamos discutir os diferentes tipos de convergência que podemos ter em espaços vetoriais normados e quais as vantagens que estes estudos podem trazer.

5

Convergências em espaços vetoriais normados

A noção de convergência de sequências é de grande importância na análise matemática, pois com ela, por exemplo, podemos aproximar elementos de natureza mais complexa por outros elementos mais "simples". Um exemplo desse tipo de aproximação consiste no Teorema da Aproximação de Weierstrass, o qual nos garante que podemos sempre aproximar uma função contínua definida sobre um conjunto compacto, na norma da convergência uniforme, por um polinômio. Ou seja, dado $u \in C[a, b]$ e $\varepsilon > 0$, existe um polinômio p_ε , tal que

$$\|u - p_\varepsilon\|_{C[a,b]} = \sup_{t \in [a,b]} |u(t) - p_\varepsilon(t)| < \varepsilon$$

Tomando $\varepsilon = \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, vamos encontrar uma sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polinômios os quais

$$\|u - p_n\|_{C[a,b]} = \sup_{t \in [a,b]} |u(t) - p_n(t)| < \frac{1}{n}$$

Ou seja,

$$\|u - p_n\|_{C[a,b]} \rightarrow 0$$

assim, para qualquer $u \in C[a, b]$, temos uma sequência de polinômios que convergem para u e denotamos por

$$p_n \rightarrow u$$

Note que esta aproximação depende essencialmente da norma da convergência uniforme, ou seja, se considerarmos um norma diferente para este espaço não poderemos garantir que o Teorema da Aproximação de Weierstrass, continuará válido. Além disso, os polinômios são

funções mais simples de se trabalhar o que pode apresentar vantagens quando se deseja estudar funções contínuas.

Assim, é importante que possamos definir outros tipos de convergência o que pode nos garantir outras aproximações. Neste capítulo, definiremos a noção de "convergência forte" e "convergência fraca" para espaços normados e para espaços Duais e apresentaremos suas principais vantagens.

5.1 Convergências em Espaços Normados

Dizer que uma sequência converge em um determinado espaço significa dizer que podemos aproximar um elemento deste espaço por elementos da sequência tanto quanto queiramos. A convergência é dita forte quando fazemos essa aproximação através da norma do espaço.

Definição 21. (*Convergência Forte*) Dizemos que uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pertencente a um espaço normado E converge fortemente se existe $u \in E$, tal que

$$\|u_n - u\|_E \rightarrow 0$$

O elemento u é chamado limite forte de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e representamos a convergência forte pela seguinte notação:

$$u_n \rightarrow u$$

É importante notar que se considerarmos E um espaço de Banach, então é redundante dizer que $u \in E$, uma vez que se a sequência converge, implica que esta é de Cauchy e pela definição de Espaços de Banach, ela convergirá para um elemento do próprio espaço.

Por outro lado, também podemos utilizar a estrutura do espaço dual para obter uma noção de aproximação e conseqüentemente uma nova convergência, chamada de convergência fraca.

Definição 22. (*Convergência Fraca*) Dizemos que uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pertencente a um espaço normado E converge fracamente se existe $u \in E$, tal que

$$f(u_n) \rightarrow f(u), \quad \forall f \in E^*, \quad n \rightarrow \infty$$

O elemento u é chamado de limite fraco de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e representamos a convergência fraca pela seguinte notação:

$$u_n \rightharpoonup u$$

Primeiramente, notamos que existem diferenças mais profundas entre as duas convergências mostradas acima, as quais estão ligadas a estrutura topológica do espaço. Tais diferenças não são necessárias para o nosso trabalho, mas podem ser melhor entendidas em (BREZIS, 2011).

Além disso, pode-se entender a denominação de convergência fraca pelo fato de que existem mais sequências que convergem através da definição de convergência fraca do que pela definição de convergência forte. No entanto, a convergência fraca apresenta as mesmas características da convergência forte, quanto a unicidade do limite, limite de subsequências e limitação da sequência; como podemos ver no seguinte teorema:

Teorema 6. *Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência fracamente convergente para u pertencente a um espaço normado E . Então*

- i) O limite fraco u de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é único.*
- ii) Toda subsequência de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fracamente para u .*
- iii) A sequência $(\|u_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.*

É importante notar que o item (iii) deste teorema só é possível de ser demonstrado através do Princípio da Limitação Uniforme.

Podemos também relacionar as duas convergências através do teorema seguinte.

Teorema 7. *Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência pertencente a um espaço normado E . Então*

- i) A convergência forte implica na convergência fraca.*
- ii) Se a dimensão de E é finita, então a convergência fraca implica na convergência forte e neste caso elas irão coincidir.*

O teorema acima deixa claro do porquê a convergência fraca não ser interessante no estudo de espaços de dimensão finita, pois, neste caso, a noção de convergência fraca coincide com a de convergência forte. Assim, essa convergência tem sua força e interesse como objeto de estudo mais notadamente para espaços de dimensão infinita.

5.2 Convergência nos Espaços Duais

Os Espaços Duais são constituídos por funcionais lineares e contínuos definidos sobre um espaço vetorial normado, conforme vimos na definição 18. Existem aplicações importantes para estes espaços, as quais levam em consideração sequências de funcionais. Portanto, vamos definir dois tipos de convergência nestes espaços.

Definição 23. *(Convergência Forte de Funcionais) Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E^*$ (uma sequência de funcionais), dada por $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$, onde E é um espaço normado e f_n são funcionais lineares e contínuos para todo $n \in \mathbb{N}$). Então, dizemos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortemente, se existir $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$\|f_n - f\|_{E^*} \rightarrow 0$$

O elemento f é chamado de limite forte de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e representamos a convergência por

$$f_n \rightarrow f$$

Notamos que como pelo teorema 4, todo espaço dual de funcionais de um espaço normado E , já é um espaço de Banach, portanto pela definição de Espaços de Banach, o limite forte f da definição acima está em E^* , ou seja, f é linear e contínua (ou linear e limitada).

Definição 24. (*Convergência Fraca* de Funcionais*) Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E^*$ (uma sequência de funcionais, dada por $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$, onde E é um espaço normado e f_n são lineares e contínuas para todo $n \in \mathbb{N}$). Desse modo, dizemos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fracamente* (fracamente estrela), se existir $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f_n(u) \rightarrow f(u), \quad \forall u \in E$$

O elemento f é chamado de limite fraco* (limite fraco estrela) de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e representamos a convergência por

$$f_n \rightarrow^w f$$

Primeiramente notamos que para os espaços duais a diferença entre as convergências forte e *fraco** são mais profundas e também estão ligadas a noções topológicas destes espaços, as quais podem ser melhores entendidas em [KREYSIZG \(1978\)](#).

Além disso, obviamente pode-se entender a denominação de convergência *fraca** pelo motivo de existirem mais sequências que convergem por essa definição do que pela definição de convergência forte. Entretanto, não-trivial é o fato de que poderíamos definir uma noção de convergência fraca para o espaços duais, neste caso, teríamos que definir o que seria o Dual de um espaço Dual, também chamados de Espaços Biduais e daí nos aproveitaríamos desta estrutura para definir a convergência fraca para espaços duais. Contudo, a convergência *fraca** é mais vantajosa em termos de aplicabilidade do que a convergência fraca para espaços duais. Mais detalhes destas discursões podem ser vistas em [KREYSIZG \(1978\)](#).

É importante destacarmos também que diferentemente da convergência forte para espaços duais, nada nos garante que o limite *fraco** é também linear e contínuo, ou seja, $f \in E^*$, pois o fato de E^* ser um espaço de Banach está ligado ao fato das sequências de Cauchy convergirem para elementos do próprio espaço apenas no sentido forte, isto é, na convergência em norma. Dessa forma, percebemos uma certa restrição para a convergência *fraca**, tanto mais com relação a sua aplicabilidade. Entretanto, através do Princípio da Limitação Uniforme podemos resolver este problema e demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 8. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E^*$, desde que E seja um espaço de Banach, então se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $fraco^*$ para f , teremos $f \in E^*$*

Notamos que a exigência fundamental para garantir que $f \in E^*$ é que E seja além de um espaço Normado, também um espaço de Banach. Além deste teorema, também podemos usar o Princípio da Limitação Uniforme e demonstrar um outro teorema muito útil para aplicações.

Teorema 9. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E^*$, desde que E seja um espaço de Banach e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convirja $fraco^*$ para f , então $f \in E^*$ se e somente se, a sequência $(\|f_n\|_{E^*})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.*

A convergência $fraco^*$ possui inúmeras aplicações em integração numérica, derivação numérica e interpolação. No próximo capítulo, vamos apresentar uma aplicação para este último teorema em integração numérica

6

— Aplicações em integração numérica —

A integração numérica consiste em métodos computacionais para obtenção de uma aproximação para a integral de uma função em um determinado intervalo, isto é, vamos obter um valor aproximado para

$$\int_a^b x(t) dt$$

Primeiramente tomamos alguns pontos no intervalo $[a, b]$ o qual chamamos de *nós* e determinados coeficientes os quais chamamos de *pesos*. Em seguida, aproximamos a integral por uma combinação linear entre os pesos e os valores de x aplicados aos nós.

A eficiência de um método numérico se dá por quão perto o valor da integração numérica está do valor analítico da integral, essa distância é conhecida como *erro* e a eficiência do método em obter erros cada vez menores é chamado de *acurácia*. Naturalmente, para que tenhamos métodos com maior acurácia, isto é, com menores erros, é necessário que haja uma maior quantidade de pesos e nós. [ARENALES SOUZA e DAREZZO \(2015\)](#)

Neste capítulo, vamos usar as noções de Espaços Normados e convergências para tratar do problema da integração numérica. Com efeito, vamos trabalhar com funções contínuas, isto significa que estamos trabalhando sobre o espaço $E = C[a, b]$ e já vimos no exemplo [17](#) que este espaço munido da norma da convergência uniforme, dada por

$$\|x\|_{C[a,b]} = \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|$$

Se trata de um Espaço de Banach.

Como estamos trabalhando com funções contínuas definidas sobre intervalos fechados e limitados, isto é, conjuntos compactos, então da análise real [LIMA \(2012\)](#) sabemos que tais funções atingem máximos e mínimos, de onde podemos reescrever a norma para $C[a, b]$ da seguinte maneira:

$$\|x\|_{C[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$$

Assim, vamos definir a integração de uma função $x \in C[a, b]$ como um funcional $f : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dado por:

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt \quad (6.1)$$

Escolhemos então uma quantidade $n \in \mathbb{N}$ de nó's:

$$a \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b$$

e de pesos

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

e definimos um outro funcional $f_0 : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$f_0(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x(t_k)$$

Note que para cada quantidade de pesos e nós, $n \in \mathbb{N}$, que tomamos, teremos um funcional da forma de f_0 diferente, então é interessante que indexemos os funcionais, os pesos e os nós sobre essa quantidade $n \in \mathbb{N}$, de onde, vamos obter uma sequência de funcionais, dada por:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^n x(t_k^n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2)$$

Observe que cada f_n é linear, pois é formada por uma combinação linear e além disso, podemos obter:

$$|f_n(x)| = \left| \sum_{k=0}^n \alpha_k^n x(t_k^n) \right| \leq \sum_{k=0}^n |\alpha_k^n| |x(t_k^n)| \leq \sum_{k=0}^n |\alpha_k^n| \max_{t \in [a, b]} |x(t_k^n)| = \left(\max_{t \in [a, b]} |x(t_k^n)| \right) \sum_{k=0}^n |\alpha_k^n|$$

E usando a definição de norma para $C[a, b]$ que definimos acima, teremos:

$$|f_n(x)| \leq \left(\sum_{k=0}^n |\alpha_k^n| \right) \|x\|_{C[a, b]}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (6.3)$$

E da definição de limitação para funcionais dada em 20, teremos que cada f_n é também limitado e consequentemente é contínuo. Assim, temos que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é formada de funcionais lineares e contínuos, ou seja,

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (C[a, b])^*$$

Podemos então demonstrar o seguinte teorema

Teorema 10. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C[a, b]$, então para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos*

$$\|f_n\|_{(C[a, b])^*} = \sum_{k=0}^n |\alpha_k^n|$$

Demonstração. Da definição de norma para funcionais do espaço dual, sabemos que

$$\|f_n\|_{(C[a, b])^*} = \sup_{x \in C[a, b], x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_{C[a, b]}}$$

Por outro lado, já mostramos que f_n verifica 6.3, ou seja,

$$|f_n(x)| \leq \left(\sum_{k=0}^n |\alpha_k^n| \right) \|x\|_{C[a, b]}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \neq 0$$

assim,

$$\frac{|f_n(x)|}{\|x\|_{C[a, b]}} \leq \sum_{k=0}^n |\alpha_k^n|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \neq 0$$

Daí, aplicando o supremo, teremos:

$$\sup_{x \in C[a, b], x \neq 0} \frac{|f_n(x)|}{\|x\|_{C[a, b]}} \leq \sum_{k=0}^n |\alpha_k^n|, \quad n \in \mathbb{N}$$

e da definição de norma para espaços duais, teremos:

$$\|f_n\|_{(C[a, b])^*} \leq \sum_{k=0}^n |\alpha_k^n|, \quad n \in \mathbb{N} \tag{6.4}$$

Por outro lado,

$$\sum_{k=0}^n |\alpha_k^n| \leq \sum_{k=0}^n |\alpha_k^n| |z(t_k^n)|$$

onde, $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $z(t) = 1$ para todo $t \in [a, b]$. Note que z é contínua e além disso,

$$\|z\|_{C[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |z(t)| = 1$$

Assim, podemos escrever:

$$\sum_{k=0}^n |\alpha_k^n| \leq \sum_{k=0}^n |\alpha_k^n| |z(t_k^n)| = f_n(z) \leq \sup_{x \in C[a,b], \|x\|=1} |f_n(x)|$$

E da observação que fizemos na definição de norma para funcionais lineares e limitados, esta expressão da direita é equivalente a norma, ou seja,

$$\sum_{k=0}^n |\alpha_k^n| \leq \|f_n\|_{(C[a,b])^*} \tag{6.5}$$

Portanto, de 6.4 e 6.5, teremos:

$$\|f_n\|_{(C[a,b])^*} = \sum_{k=0}^n |\alpha_k^n|$$

□

Vamos então definir o que é um método numérico convergente.

Definição 25. (*Método Convergente*) Um método de integração numérica definido por 6.2 é dito convergente para algum $x \in C[a, b]$, se para este x , tivermos:

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad n \rightarrow \infty$$

onde f é definido por 6.1.

Assim, podemos enunciar e demonstrar um teorema o qual nos permite dar condições necessárias e suficientes para que possamos ter um método de integração numérica convergente, o qual foi criado por G. Pólya(1933).

Teorema 11. (*Teorema da Integração Numérica de Pólya*)

Seja um processo de integração numérica dado por

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i^n x(t_i^n), \quad n = 1, 2, \dots \tag{6.6}$$

Que aproxima a integral analítica de $x \in C[a, b]$ e seja $p_k \in C[a, b]$ um polinômio de ordem $k \in \mathbb{N}$ que aproxima $x \in C[a, b]$ na norma $\|\cdot\|_{C[a,b]}$ e verifica

$$f_n(p_k) = f(p_k), \quad k \leq n \quad (6.7)$$

Então dizemos que para todo $x \in C[a, b]$, o processo de integração numérica $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $f(x)$, onde,

$$f(x) = \int_a^b x(t) dt$$

Se, e somente se, existe $c > 0$, tal que

$$\sum_{i=0}^n |\alpha_i^n| \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demonstração. Note que do teorema 9, dada $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (C[a, b])^*$, então desde que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convirja *fraco** para $g : [a, b]$, então $g \in (C[a, b])^*$ se e somente se existe $c > 0$, tal que

$$\|g_n\|_{(C[a,b])^*} \leq c$$

Como a sequência que define a integração numérica dada em 6.6 verifica $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (C[a, b])^*$, então só precisamos demonstrar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge *fraco** para f , isto é,

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad \forall x \in C[a, b]$$

Com efeito, de 6.7, temos que

$$f_n(p_j) = f(p_j)$$

Onde $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de polinômios de ordem menor ou igual a $n \in \mathbb{N}$ que aproxima a função $x \in C[a, b]$.

Portanto, como a integral da sequência de polinômios que aproxima $x \in C[a, b]$ vai também se aproximar da integral $f(x) = \int_a^b x(t) dt$, então para $j \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, podemos escrever

$$f_n(p_j) \rightarrow f(x), \quad \forall x \in C[a, b], \quad j \approx \infty \text{ e } n \rightarrow \infty$$

Agora, considerando $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, sabendo que cada f_n é contínua e a sequência de polinômios $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge para x na norma de $C[a, b]$, então:

$$f_n(p_j) \rightarrow f_n(x), \forall x \in C[a, b], n \approx \infty e j \rightarrow \infty$$

Destas duas convergências, podemos escrever

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - f(x) + f_n(p_j) - f_n(p_j)| \leq |f_n(x) - f_n(p_j)| + |f_n(p_j) - f(x)|$$

De onde, fixando $j \in \mathbb{N}$, suficientemente grande e fazendo $n \rightarrow \infty$, teremos:

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \forall x \in C[a, b]$$

Portanto, temos a convergência *fraco** e como já provamos que $f \in (C[a, b])^*$, então pelo teorema 9 isso equivale a dizer que

$$\|f_n\|_{(C[a, b])^*} \leq c$$

No entanto, pelo teorema 10, isto equivale a

$$\sum_{i=0}^n |\alpha_i^n| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$$

□

O teorema de Pólya nos indica que para termos um método de integração numérica convergente para a integral analítica é necessário e suficiente que o somatório formado pela soma dos pesos e indexada no número de pesos seja limitado.

Além disso, diversos métodos numéricos de interação utilizam-se de pesos positivos, de onde, tomando $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $z(t) = 1$, então $z \in C[a, b]$ e pelo teorema 11, podemos escrever:

$$f_n(z) = \sum_{i=0}^n \alpha_i^n = \sum_{i=0}^n |\alpha_i^n| = f(1) = \int_a^b dx = b - a, \forall n \in \mathbb{N}$$

ou seja,

$$\sum_{i=0}^n |\alpha_i^n| = b - a, \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim, utilizando o teorema de Pólya, podemos concluir que os métodos de integração numérica nos quais os pesos são sempre positivos serão convergentes. Ou seja, demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 12. (*Teorema de Steklov para Integração Numérica*)

O processo de integração numérica dado por

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i^n x(t_i^n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Satisfazendo 6.7 e usando pesos α_i^n positivos, converge para toda função contínua.

É importante notar também que os teoremas de Pólya e de Steklov's exigem que verifiquemos a igualdade 6.7, a qual significa que o método numérico possui erro zero para um polinômio de grau inferior ou igual a quantidade de pesos e que aproxime a função que se deseja integrar. Com efeito, todos os métodos numéricos que se utilizam de interpolação polinomial para aproximar a integral verificam tal propriedade. No entanto, se determinado método não utiliza a aproximação polinomial para produzir uma integração numérica, para que possamos encaixá-lo nas hipóteses dos teoremas 11 e 12 basta provar que o método verifica tal propriedade, o que não deve apresentar tanta dificuldade, pois polinômios são funções fáceis de manipular algebricamente e já provamos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são lineares.

Assim, podemos enunciar alguns corolários relacionados a métodos que partem da aproximação polinomial para obter a aproximação numérica para integral.

Corolário 1. (*Regra do Trapézio*) *O método de integração numérica conhecido como Regra do Trapézio, dado por:*

$$\int_a^b x(t) dt \approx h \left(\frac{1}{2} x(t_0) + x(t_1) + \dots + x(t_{n-1}) + \frac{1}{2} x(t_n) \right)$$

onde, $h = \frac{b-a}{n}$ e $t_i = a + ih$, é convergente.

Demonstração. De fato, o método da regra do trapézio utiliza-se de uma aproximação polinomial para obter a fórmula de integração numérica, assim, o mesmo já verifica a propriedade 6.7. Além disso,

$$\sum_{i=0}^n |\alpha_i^n| = \frac{h}{2} + \frac{h}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} h = h(1 + (n-1)) = \frac{b-a}{n} n = b-a$$

Ou seja,

$$\sum_{i=0}^n |\alpha_i^n| \leq b-a$$

e do teorema 11 temos que o método é convergente.

□

Corolário 2. (Regra de Simpson) O método de integração numérica conhecido como Regra do Simpson, dado por:

$$\begin{aligned} \int_a^b x(t)dt &\approx \frac{h}{3} (x(t_0) + 4x(t_1) + 2x(t_2) + \dots + 4x(t_{n-1}) + x(t_n)) \\ &\approx \frac{h}{3} (x(t_0) + x(t_n)) + \frac{4h}{3} \sum_{j \text{ ímpares}} x(t_j) + \frac{2h}{3} \sum_{j \text{ pares}} x(t_j) \end{aligned}$$

onde, $h = \frac{b-a}{n}$ e $t_i = a + ih$, é convergente.

Demonstração. A regra de Simpson é obtida através de aproximação polinômial, portanto já verifica a propriedade 6.7. Considere então, $n \in \mathbb{N}$, um número ímpar. Assim, a quantidade de índices pares e ímpares é a mesma e dada por $\frac{n+1}{2}$. Portanto, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n |\alpha_i^n| &= \frac{h}{3} + \frac{h}{3} + \sum_{j \text{ ímpares}} \frac{4h}{3} + \sum_{j \text{ pares}} \frac{2h}{3} = \frac{h}{3} \left(2 + 4 \left(\frac{n+1}{2} - 1 \right) + 2 \left(\frac{n+1}{2} - 1 \right) \right) \\ &= \frac{h}{3} \left(2 + 4 \left(\frac{n-1}{2} \right) + 2 \left(\frac{n-1}{2} \right) \right) \\ &= \frac{h}{3} (2 + 2(n-1) + 2(n-1)) \\ &= \frac{h}{3} (4n - 2) \\ &= \frac{b-a}{3} \left(4 - \frac{2}{n} \right) \\ &\leq \frac{4}{3} (b-a) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\sum_{i=0}^n |\alpha_i^n| \leq \frac{4}{3} (b-a), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e pelo teorema 11 temos que o método é convergente.

Por outro lado, considerando $n \in \mathbb{N}$ um número par, então a quantidade de índices pares será dada por $\frac{n}{2} + 1$ e a quantidade de ímpares será dada por $\frac{n}{2}$ e teremos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n |\alpha_i^n| &= \frac{h}{3} + \frac{h}{3} + \sum_{j \text{ ímpares}} \frac{4h}{3} + \sum_{j \text{ pares}} \frac{2h}{3} = \frac{h}{3} \left(2 + 4 \left(\frac{n}{2} - 1 \right) + 2 \left(\frac{n}{2} + 1 - 1 \right) \right) \\
&= \frac{h}{3} \left(2 + 4 \left(\frac{n-2}{2} \right) + 2 \left(\frac{n}{2} \right) \right) \\
&= \frac{h}{3} (2 + 2(n-2) + n) \\
&= \frac{h}{3} (3n - 2) \\
&= b - a \left(1 - \frac{2}{n} \right) \\
&\leq b - a
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\sum_{i=0}^n |\alpha_i^n| \leq (b - a), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e pelo teorema 11 temos que o método é convergente. □

6.1 Simulações Numéricas

Nesta seção faremos algumas simulações para exemplificar de maneira prática o processo de integração numérica, para as regras do trapézio e de Simpson que foram mostradas como corolários na seção anterior. Faremos uso do software livre Scilab e os códigos estarão disponíveis no apêndice A .

A tabela abaixo exhibe o erro absoluto referente a regra dos Trapésios e de Simpson para um número n de pontos.

n	<i>Trapésio</i>	<i>Simpson</i>
10	0.0014317	0.0000010
100	0.0000143	9.546D-11
1000	0.0000001	1.021D-14
10000	1.432D-09	1.110D-15
100000	1.432D-11	6.661D-15

Figura 6.1: Erro Absoluto para a integral da função $f(x) = e^x$; $x \in [0, 1]$

Assim pode-se perceber que tanto na regra do trapézio quanto para regra de Simpson ao passo que aumentamos os pontos o erro absoluto vai diminuindo, ou seja, a integral numérica vai convergindo para a integral analítica, e diga-se de passagem, para 100000 pontos os resultados são relativamente satisfatórios.

Em contrapartida, quando a função a ser integrada é muito oscilante esses métodos encontram uma certa dificuldade para convergirem, justamente porque para funções muito oscilantes será necessário um polinômio com grau mais elevado, daí para que possamos verificar a condição 6.7 do teorema de Pólya é necessário um número maior de pontos na discretização do domínio.

Para exemplificar, vamos observar na tabela seguinte o erro absoluto para o método de Simpson e usaremos a função $f(x) = \cos(kx)$; $x \in [0, 1]$ e $k \in \mathbb{R}$ e vamos variar k de modo que aumente as oscilações da função.

n	k	<i>Simpson</i>
10	1	0.0000005
10	5	0.0000686
10	20	0.0530069
100	1	4.675D-11
100	50	0.0000019
100	200	0.0007040
1000	1	5.329D-15
1000	500	0.0000003
1000	2000	0.0000750
10000	1	6. 1.332D-15
10000	5000	7.071D-08
10000	20000	0.0000047

Figura 6.2: Erro Absoluto para a integral da função $f(x) = \cos(kx)$; $x \in [0, 1]$ e $k \in \mathbb{R}$

Observe que ao aumentamos o valor de k para uma mesma quantidade de pontos o erro também aumenta, confirmando portanto o que afirmamos anteriormente.

Existem outras funções mais oscilantes onde pode-se perceber mais nitidamente a limitação desses métodos. Nosso intuito com este exemplo é mostrar que esta limitação vem da hipótese 6.7, na qual o método numérico deve ter erro zero para um polinômio que aproxime a função e que possua grau menor ou igual a quantidade de pesos, de modo que quanto mais oscilante for a função, maior o grau do polinômio que será usado na interpolação e conseqüentemente mais pontos deverão ser tomado na discretização do domínio para verificar-se 6.7 no teorema de Pólya.

Considerações finais

Neste trabalho fizemos estudo de alguns tópicos de análise funcional, vimos que ao trabalhar com espaços de dimensão infinita muitas propriedades triviais não são preservadas simplesmente, como por exemplo o fato de toda sequência de Cauchy ser convergente na reta, enquanto que para espaços de dimensão infinita isso não necessariamente ocorre.

Vimos também em resposta a essa problemática a definição de espaços de Banach, com a qual obtivemos uma estrutura bem mais 'completa' de modo que os estudos dos funcionais e também das convergências em espaços vetoriais nos possibilitaram resultados significativos. Assim, mostramos a integração numérica como uma aplicação da teoria mostrada ao longo do trabalho na qual obtivemos as regras do trapézio e de Simpson como corolários.

Vale também destacar que a análise funcional é vista em geral como disciplina de programas de mestrado e doutorado, dessa forma, a construção deste trabalho exigiu um estudo além das disciplinas necessárias para um curso de graduação em matemática. Portanto, espera-se que este trabalho tenha contribuído como material de estudo, como também, a satisfazer muitas curiosidades dentre as abordagens da análise funcional.

Referências Bibliográficas

ARENALES SOUZA E DAREZZO, A. *Cálculo Numérico: aprendizagem com apoio de software*. 2ª edição. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015. 33

BOTELHO G., P. D. T. E. V. *Fundamentos de Análise funcional*. Paraíba: SBM, 2015. 26

BREZIS, H. *functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. [S.l.]: springer, 2011. 8, 30

FIGUEIREDO, D. G. *Análise I*. Rio de Janeiro: LTC, 2013. 18

HOFFMAN, K. *Álgebra Linear*. [S.l.]: Polígono-USP, 1971. 9

KREYSIZG, E. *Introductory functional analysis with applications*. New York: Wiley, 1978. 8, 31

LIMA, E. L. *Análise Real: Funções de uma variável*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 33

LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 11

MUSCAT, J. *Functional analysis: An introduction to metrical spaces, Hilbert spaces and Banach algebras*. Springer: softcover ISBN, 2014. 25

NOWOSAD, P. *Introdução a análise funcional*. Poço de Caldas: colóquio Brasileiro de matemática, 6, 1967. 20, 24

Apêndice



Scripts usados na avaliação dos testes

A.1 Regra do trapézio

```
//Programa para calcular a integral de uma função usando a regra do trapézio

//Para a função f(x)=exp(x(i)).
a=input('valor de a: '); //Ponto mínimo do intervalo de integração.
b=input('valor de b: '); // Ponto máximo do intervalo de integração.
n=input('valor de n: '); //Número de pontos do intervalo.
x=linspace(a,b,n+1); // Cria um vetor de a até b com n+1 pontos
y=zeros(n+1) // Cria um vetor de zeros com n+1 entradas.

for i=1:n+1
y(i)=exp(x(i))
end

h=(b-a)/n;
k1=(y(1)+y(n+1))*(h/2);
k2=(sum(y(2:n)))*h;
c=k1+k2;

disp(c) // Valor numérico da integral.

//disp(y)

ana= exp(b)-exp(a) //Valor analítico da integral da função //
erro=abs(c-ana); // Erro absoluto tomando o módulo ("abs") da diferença entre a integral
// numérica (c) e a integral analítica (ana).

disp('O valor do erro é: ')
```

```
disp(erro) //Exibe o valor de "erro".
```

A.2 Regra 1/3 de Simpson para a função $f(x) = e^x$

```
//Programa para integração numerica via regra de simpson.
```

```
function[e]=simpson(a,b,n)
x=linspace(a,b,n+1); // criando o dominio
h=(b-a)/n // passo
y=zeros(n+1) // vetor para armazenar as imagens
for i=1:n+1
y(i)=exp(x(i)) // calculando a função no dominio
end
k1=(y(1) + y(n+1))*(h/3) // extremos do vetor
////////// caso de indices par //////////
if pmodulo(n,2)==0 // teste de paridade usando o resto da divisao por 2
k2=sum(y(3:2:n-1))*((2*h)/3) // calculando os somatorios
k3=sum(y(2:2:n))*((4*h)/3)
c=k1+k2+k3 // resultado
end
////////// caso de indices impar //////////
if pmodulo(n,2) ==0 // teste de paridade
k2=sum(y(3:2:n))*((2*h)/3) // calculando os somatórios
k3=sum(y(2:2:n-1))*((4*h)/3)
c=k1+k2+k3 // resultado
end
//////////
ana=exp(b)-exp(a) // valor analítico
disp(c)
e=abs(ana-c); // erro
disp('o erro absoluto é: ')
disp(e);
```

```

plot(y)
endfunction

```

A.3 Regra 1/3 de Simpson para a função $f(x) = \cos(kx)$

```

//Programa para integração numérica via regra de simpson.
function[e]=simpson(a,b,n,k)
x=linspace(a,b,n+1); // criando o dominio
h=(b-a)/n // passo
y=zeros(n+1) // vetor para armazenar as imagens
for i=1:n+1
y(i)=cos(k*x(i)) // calculando a função no dominio
end
k1=(y(1) + y(n+1))*(h/3) // extremos do vetor
//////////////////////////////// caso de indices par //////////////////////////////////
if pmodulo(n,2)==0 // teste de paridade usando o resto da divisao por 2
k2=sum(y(3:2:n-1))*((2*h)/3) // calculando os somatorios
k3=sum(y(2:2:n))*((4*h)/3)
c=k1+k2+k3 // resultado
end
//////////////////////////////// caso de indices impar //////////////////////////////////
if pmodulo(n,2) =0 // teste de paridade
k2=sum(y(3:2:n))*((2*h)/3) // calculando os somatórios
k3=sum(y(2:2:n-1))*((4*h)/3)
c=k1+k2+k3 // resultado
end
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
ana=(1/k)*(sin(b*k)-sin(a*k))// valor analítico
disp(c)
e=abs(ana-c); // erro
disp('o erro absoluto é: ')

```

```
disp(e);  
plot(y)  
endfunction
```