



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO MARAJÓ - BREVES
FACULDADE DE MATEMÁTICA

JEFERSON SANTOS DA SILVA

SITUAÇÕES DIDÁTICAS APLICADAS À ADIÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS: uma análise dos obstáculos epistemológicos e a busca de perspectivas para o ensino de matemática

BREVES-PA
2022

JEFERSON SANTOS DA SILVA

SITUAÇÕES DIDÁTICAS APLICADAS À ADIÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS: uma análise dos obstáculos epistemológicos e a busca de perspectivas para o ensino de matemática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática - FAMAT, do Campus Universitário do Marajó-Breves, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Professor Dr. Adriano Aparecido Soares da Rocha

Ficha catalográfica gerada automaticamente pelo módulo Ficat,
mediante os dados fornecidos pelo autor.

S586s Silva, Jeferson Santos.

Situações didáticas aplicadas à adição de números inteiros: Uma análise dos obstáculos epistemológicos e a busca de perspectivas para o ensino de matemática / Jeferson Santos Silva. — 2022.

46 f.

Orientador: Prof. Dr. Adriano Aparecido Soares da Rocha

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Breves, Faculdade de Matemática, Breves, 2022.

1. Situações didáticas. 2. Obstáculos epistemológicos. 3. Aprendizagem de matemática. I. Título.

CDD 510

JEFERSON SANTOS DA SILVA

SITUAÇÕES DIDÁTICAS APLICADAS À ADIÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS: uma análise dos obstáculos epistemológicos e a busca de perspectivas para o ensino de matemática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática - FAMAT, do Campus Universitário do Marajó-Breves, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Professor Dr. Adriano Aparecido Soares da Rocha

Data da aprovação: ____/____/____

Conceito: _____

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Adriano Aparecido Soares da Rocha
Universidade Federal do Pará

Prof. Dr. Alan Gonçalves Lacerda
Universidade Federal do Pará

Prof. Me. Luiz Antonio Ribeiro Neto de Oliveira
Universidade Federal do Pará

RESUMO

Este trabalho analisa o primeiro contato de um grupo de alunos do ensino fundamental de Breves, Marajó, com operações de adição no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, a fim de identificar e compreender os obstáculos de origem epistemológica, à luz da Teoria das Situações Didáticas (TSD). A análise se dará por meio de pesquisa bibliográfica e de dados obtidos em uma intervenção de ensino baseada em alguns conceitos chave da TSD. Com a fundamentação teórica deste trabalho e a intervenção prática, foi possível obter subsídios que possibilitam uma compreensão mais profunda dos impactos dos obstáculos epistemológicos na aprendizagem dos alunos do 7º ano no estudo da adição de números inteiros, o que por sua vez permite ao professor de matemática vislumbrar possibilidades para minimizar essas dificuldades.

Palavras-chave: Situações didáticas; Obstáculos epistemológicos; Aprendizagem de matemática.

ABSTRACT

This academic work analyzes the first contact of a group of elementary school students from Breves, Marajó, with addition operations in the set of integer numbers $\mathbb{Z}$, in order to identify and understand the obstacles of epistemological origin, according to the perspective of the Theory of Didactic Situations (TSD). The analysis will be done through bibliographic research and data obtained in a teaching intervention based on some key concepts of the TSD. With the theoretical foundation of this work and the practical intervention, it was possible to obtain subsidies that permit a deeper understanding of the impacts of epistemological obstacles for elementary school students in learning the addition of integers, which, in turn, makes possible for mathematics teachers to envision possibilities to minimize these difficulties.

Keywords: Didactic situations; Epistemological obstacles; Learning of Mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 -	Questões Aplicadas na Etapa 2 da intervenção.....	33
Figura 2 -	Esboços dos problemas aplicados aos alunos.....	34
Figura 3 -	Materiais usados na etapa 3.....	35

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -	Dados colhidos durante a etapa 1.....	31
Tabela 2 -	Dados colhidos durante a etapa 2.....	35

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	08
2	TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS.....	10
2.1	O milieu (meio).....	13
2.2	Conhecimentos e saberes.....	14
2.3	Autonomia de quem aprende.....	15
2.4	Variáveis didáticas.....	16
2.5	A dialética.....	17
2.6	Obstáculos.....	17
2.6.1	As manifestações dos obstáculos de aprendizagem.....	18
2.6.2	As raízes dos obstáculos.....	18
2.7	Classificação das situações didáticas.....	20
2.8	A institucionalização.....	21
2.9	O contrato didático.....	22
2.9.1	O contrato de iniciação.....	24
2.9.2	O contrato de utilização dos conhecimentos.....	24
3	UMA PROPOSTA DE ENSINO DE ADIÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS.....	25
3.1	Os números inteiros na escola.....	25
3.2	Evolução da concepção dos números inteiros.....	27
4	ATIVIDADE DE INTERVENÇÃO.....	31
4.1	Etapa 1 – Liberdade para os alunos formarem os problemas de adição em $\mathbb{Z}$.....	31
4.2	Etapa 2 – Diagnóstico dos obstáculos de base epistemológica.....	32
4.3	Etapa 3 - Adição de números negativos com o material concreto.	35
4.4	Etapa 4 – Formulação de justificativas.....	37
4.5	Análise da experiência.....	38
5	CONCLUSÃO.....	42
	REFERÊNCIAS.....	44

1 INTRODUÇÃO

A apropriação do conhecimento matemático é consensualmente considerada uma condição fundamental para o amadurecimento e inclusão do indivíduo na vida em sociedade. Por este motivo, a estrutura curricular do ensino da matemática e as metodologias pedagógicas relacionadas com esta disciplina têm sido objeto de intenso debate.

Nas décadas de 60 e 70, o ensino da matemática passou por profundas mudanças curriculares, com o objetivo de aproximá-lo do pensamento científico e tecnológico. O ensino passou a ser focado em estruturas matemáticas complexas, envolvendo álgebra, funções e teoria dos conjuntos, com definições que assumiam um caráter de abstração elevado. Portanto, aprender matemática a partir dessa proposta mostrou-se distante da realidade da educação básica.

Nas décadas seguintes, o ensino da matemática busca currículos e metodologias que possam favorecer a aprendizagem de conhecimentos e habilidades convencionalmente consideradas básicas e necessárias ao exercício da cidadania. Nessa nova perspectiva, há mais discussões sobre o papel ativo do aluno na construção de seus conhecimentos. Para os defensores dessa corrente de ensino, uma maior autonomia do aprendiz potencializa sua capacidade de organizar e utilizar o conhecimento matemático para resolver problemas relacionados à sua vida em sociedade. Nessa perspectiva, a exploração da Matemática a partir dos problemas vivenciados no cotidiano ganha mais relevância nas escolas (BRASIL, 1998).

Essa nova visão do ensino da matemática ganhou respaldo nos documentos oficiais da educação brasileira. A título de exemplo, temos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), na qual se afirma que os conteúdos, bem como as estratégias e procedimentos relacionados com a matemática, devem favorecer a análise e a tomada de decisão nas mais diversas situações do cotidiano. Assim, o ensino da matemática se dá no processo em que o indivíduo deve desenvolver habilidades, atitudes e valores fundamentais para sua vida dentro e fora da escola (BRASIL, 2018).

Apesar dessa busca por reformas no ensino da Matemática, constatamos que as práticas de ensino nessa disciplina se encontram em um momento confuso em que documentos oficiais e pesquisas científicas mostram caminhos promissores que

encontraram muitas barreiras para se consolidarem na educação brasileira. Existe uma lacuna substancial entre os objetivos do nosso sistema educacional e o que é efetivamente oferecido pelas políticas nacionais, que não permitem as melhores condições de trabalho e não atuam de forma satisfatória na promoção da formação continuada dos profissionais envolvidos no ensino da matemática.

Consequentemente, a falta de um terreno comum entre o que se pretende e o que é realmente ensinado afeta a qualidade da aprendizagem das crianças. O trabalho na educação básica geralmente não privilegia o ensino diversificado, o que faz com que o ensino da matemática seja baseado em metodologias que seguem a linha definição, exemplos, exercícios e avaliação. Não é objetivo de o nosso trabalho questionar a validade de tais metodologias, mas sugerimos a reflexão de que o ensino por uma única via parece distanciar a educação matemática de seus objetivos atuais. Essa reflexão é sustentada por estudos que afirmam que os processos relacionados à aprendizagem são influenciados tanto pelas circunstâncias do ambiente em que ocorrem quanto pelas particularidades dos sujeitos que aprendem (BROUSSEAU, 2008).

Para contribuir com essa reflexão, propomo-nos a analisar o delicado contato inicial das crianças com o conjunto dos números inteiros, um dos momentos que requer maior cuidado por parte do professor de matemática na educação básica. Este conjunto apresenta dificuldades para alunos e professores, como afirmam os estudos de Neto e Victer (2013), Medeiros e Medeiros (1992) e Chagas (2007).

Em meio a sua Teoria das Situações Didáticas, Guy Brousseau define os obstáculos de aprendizagem. Fundamentados nas definições de Brousseau a respeito dos obstáculos de aprendizagem, mais especificamente à luz do que o educador francês define como *obstáculos epistemológicos*, analisaremos as dificuldades em aprender conceitos de adição de números inteiros.

Portanto, com base na Teoria das Situações Didáticas, desenvolvemos uma sequência de atividades a fim de cumprir os seguintes objetivos:

- Identificar os obstáculos epistemológicos inerentes ao ensino da adição no conjunto dos números inteiros e sua influência na aprendizagem;
- Refletir sobre as perspectivas que a TSD pode oferecer para minimizar esses obstáculos.

A análise dos resultados tem um forte viés qualitativo na Teoria das Situações Didáticas, e as observações do professor são uma fonte essencial de elementos para investigação. Esses elementos podem ser produções textuais de alunos, respostas orais, condutas, gestos, comunicação com colegas, etc.

A pesquisa foi realizada no 7º ano do Ensino Fundamental da cidade de Breves, no Pará. A escolha da escola obedeceu a apenas um critério: ser escola pública de ensino fundamental. A seleção da turma, por sua vez, baseou-se no critério: ser uma turma do 7º ano do ensino fundamental.

No Capítulo 2 deste trabalho compreenderemos mais profundamente a Teoria das Situações Didáticas. No Capítulo 3, analisaremos o ensino dos números inteiros, bem como a evolução histórica desses conceitos, a fim de compreender as atuais dificuldades de aprendizagem intrínsecas a esse tema. No Capítulo 4, trataremos da descrição e análise das atividades de intervenção. Por fim, no Capítulo 5, apresentaremos nossas considerações sobre este trabalho.

2 A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Um dos principais pesquisadores na área de didática francesa, Guy Brousseau (Marrocos, 4 de fevereiro de 1933) mostrou cedo interesse em matemática, especialmente nas formas como as pessoas a aprendem. A partir da década de 1970, deu início a pesquisas sobre ensino e aprendizagem de matemática, com as quais elaborou a Teoria das Situações Didáticas (TSD). Nessa teoria, Brousseau se apoia em uma concepção de educação na qual a aprendizagem envolve simultaneamente dois processos: —um de enculturação e outro de adaptação independentell ¹ (BROUSSEAU, 2007, p. 14, tradução livre). Em outras palavras, a aprendizagem, segundo Brousseau, ocorre tanto em âmbito cercado de intenções pedagógicas explícitas quanto em contextos externos às instituições encarregadas de educar.

¹A enculturação é o processo pelo qual o indivíduo assimila elementos da cultura que o cerca, adquirindo valores, habilidades e comportamentos considerados necessários naquela cultura. Por sua vez, a adaptação independente refere-se à capacidade do ser humano de aprender e se desenvolver em quaisquer circunstâncias, mesmo aquelas sem intenções explícitas de ensino. É o processo no qual o indivíduo se adapta ao ambiente de forma natural.

Para chegar a esta conclusão, Brousseau se baseou em estudos como os de Jean William Piaget² e Lev Vygotsky (Oliveira, 2013 apud SILVA, 2015), que enfocam a aprendizagem fora dos limites dos muros escolares. Em sua teoria, Piaget (1971, p. 15) considera o conhecimento um "sistema de transformações" que altera as estruturas internas do indivíduo. A inteligência é, nesse ponto de vista, uma forma de adaptação —[...] do sujeito no meio em que está inserido (PÁDUA, 2009). Logo, o contexto externo é ativo no processo de moldagem das decisões, das percepções, do raciocínio, do pensamento (PIAGET, 1971). Já Lev Vygotsky destacou os processos relacionados à aprendizagem como produtos de interações socioculturais, o que também considera influências de fatores externos ao indivíduo. Na psicologia histórico-cultural, quem aprende não é passivo dentro do conjunto de processos de desenvolvimento (CHIARATTI; GONÇALVES; RICIERI; 2014 p. 125); pelo contrário, o indivíduo interage com seu ambiente, o transforma. A aprendizagem decorre dessa interação ativa no mundo externo.

Felipe (2001, p. 27) apresenta uma boa síntese de algumas das contribuições centrais de Vygotsky e Piaget para a educação:

Através do contato com seu próprio corpo, com as coisas do seu ambiente, bem como através da interação com outras crianças e adultos, as crianças vão desenvolvendo a capacidade afetiva, a sensibilidade e a autoestima, o raciocínio, o pensamento e a linguagem. A articulação entre os diferentes níveis de desenvolvimento (motor, afetivo e cognitivo) não se dá de forma isolada, mas sim de forma simultânea e integrada.

As concepções sobre aprendizagem apresentadas por Piaget e Vygotsky, embora divergentes em outros aspectos fundamentais, atribuem a aprendizagem a relações sistêmicas de adaptação e ação em ambientes externos ao ser humano. Este é o núcleo da pesquisa no campo da TSD.

² Embora Brousseau concorde com Piaget quanto às conexões entre a aprendizagem e os contatos com o ambiente material, ele discorda do pesquisador suíço sobre o peso da determinância da maturação biológica para que esse processo seja bem-sucedido.

As situações didáticas compreendem uma área de pesquisa incluída na didática da matemática³ e tem como objeto central tanto os instrumentos pedagógicos como as ações de ensino e aprendizagem. Em geral, as situações didáticas são fundamentadas no princípio de que, sem um planejamento didático cuidadosamente pensado, os dispositivos pedagógicos não levam os estudantes ao domínio dos saberes e conhecimentos que a vida em sociedade demanda. Essa concepção não apresenta contradição em relação ao princípio da enculturação e adaptação independente discutido por Brousseau (2007), afinal o autor fala precisamente de um sistema que não deve ser visto em uma perspectiva dicotômica. Os conhecimentos matemáticos são importantes não apenas no nível individual, mas também coletivamente, pois o homem é um ser social. Assim, a própria construção sociocultural da matemática define quais conhecimentos são e quais não são relevantes. Brousseau (2007, p. 11) afirma que as análises do atual papel social da matemática falam tanto do requisito de uma cultura matemática individual mínima quanto da necessidade de pensar no progresso científico e tecnológico. Sendo a matemática fundamentalmente importante para esse progresso, seu ensino é estritamente controlado, dirigido por diferentes instituições, campos científicos, disciplinas, sob o olhar atento da sociedade.

Pelo que foi analisado até aqui, as situações didáticas podem ser definidas como todo o contexto que circunda o aluno, incluindo o professor, quem mantém o diálogo (dentro da instituição educacional) entre o aprendiz e o conhecimento. No que diz respeito ao professor, a propósito, Brousseau também considera que este não deve ignorar as particularidades dos processos de ensino de conhecimentos matemáticos e nem aquelas que cada aluno carrega consigo. Afinal, os indivíduos não aprendem da mesma forma, no mesmo ritmo; e os conhecimentos, por sua vez, não são manifestados sob as mesmas circunstâncias por todas as pessoas⁴.

³ Brousseau (2007, p. 12) define a didática da matemática como o campo de pesquisa que busca analisar a comunicação dos conhecimentos matemáticos e suas transformações.

⁴ Brousseau (2007, p. 41) afirma que as variantes envolvidas no processo de ensino e aprendizagem relacionado a um mesmo conteúdo matemático podem apresentar grandes diferenças de complexidade, exigindo formas diferentes de ensinar e aprender um mesmo conteúdo.

2.1 O milieu (meio)

Como vimos até agora no Capítulo 2, os processos de aprendizagem estão conectados à capacidade inerente dos seres humanos de se adaptarem ao ambiente com o qual interagem. Com a teoria das situações didáticas, Brousseau propôs analisar essas interações no contexto educacional. Afinal de contas, uma escola também é dotada de relações sociais. Em uma escola, há atores diferentes, com papéis definidos; existem regras a serem seguidas e os objetivos a serem alcançados. Mas, embora funcione seguindo determinações específicas de determinados grupos, a escola é multicultural, um espaço para construção e troca de conhecimentos, o que acontece independentemente de quaisquer influências de regras, planos e leis (BROUSSEAU, 2008).

A escola compreende um contexto sistêmico que se adapta ao sujeito e exige adaptações por parte dele. À parcela desse ambiente educacional dotada de intenção pedagógica Brousseau (2007, p. 18) chama de *milieu* (o meio material). O meio material abrange quaisquer dispositivos com intenções de ensino.

Para exemplificar sua visão a respeito do *milieu*, Brousseau (2007, p. 15) analisa um dispositivo comumente usado no ensino tradicional: a resolução de exercícios. O processo de resolução de exercícios, segundo o autor, induz o aluno a usar de conhecimentos matemáticos específicos para estabelecer um estado favorável diante do problema, segundo um conjunto de regras a ser seguido. Nesse sistema, cada passo dado por quem aprende é planejado por quem ensina no momento em que elabora a atividade. Por meio da resolução dos exercícios, aquele que aprende familiariza-se gradualmente com o objeto de ensino. Isso ocorre porque são esses mesmos dispositivos que influenciam diretamente a manifestação do conhecimento.

O *milieu* não é a própria situação didática, mas um de seus agentes determinantes, como aluno e professor. Segundo Brousseau (2007, p. 32), as concepções atuais de ensino exigem que o professor provoque no aluno, através dos meios materiais, as adaptações socialmente desejadas. Esses problemas, escolhidos de forma que o aluno os aceite, devem conseguir, por meio de seu próprio movimento, que [o aluno] haja sobre eles, que reflita, que raciocine e evolua (BROUSSEAU, 2007, p. 32, tradução livre).

Por meio do ambiente material e das interações que estabelece ao longo de situações didáticas, a educação institucional pode ser aproximada das demandas da vida em sociedade, que requer estratégias e ações do indivíduo para superar problemas e integrar-se na articulação da vida coletiva.

2.2 Conhecimentos e saberes

Vimos que a Teoria das Situações Didáticas coloca mais protagonismo na construção de conhecimentos matemáticos por parte do próprio aluno, que, por meio de suas ações, dúvidas, erros, acertos, interações com seus pares e conclusões, pode participar ativamente na direção de seu próprio aprendizado. Tudo isso e é importante não esquecer deste detalhe partindo da elaboração e proposição, pelo professor, de um sistema de conteúdos, objetos, problematizações que desafiem o aluno (BROUSSEAU, 2007, p. 18).

À semelhança do que acontece na vida exterior à instituição escolar, o aluno aprende adaptando-se a um meio que é fonte de contradições, dificuldades, desequilíbrios⁵. Nessa lógica, as situações didáticas devem oferecer, em algum nível, desafios para aquele que aprende, para os quais ele deverá procurar soluções, pois os —[...] conhecimentos se manifestam essencialmente como instrumentos de controle das situaçõesll (Brousseau, 2007, p. 18, tradução livre). Assim, as situações de ensino não devem (pelo menos totalmente) escapar do contexto dos alunos envolvidos. O professor deve planejar, conceber e aplicar situações didáticas sem perder de vista os objetivos — na realidade do aluno — do conhecimento a ser desenvolvido, com vista nos saberes trabalhados (BROUSSEAU, 2008).

Mas os objetivos de um determinado conhecimento só podem ser delimitados se tivermos uma definição quanto ao significado deste termo. E, além disso, devemos entender a distinção entre conhecimentos e saberes.

⁵ Brousseau (2007 p. 31) analisa a concepção de desenvolvimento do indivíduo em Piaget e faz um paralelo com a aprendizagem na vida em sociedade, em que a evolução ocorre a partir de uma sucessão de adaptações.

Os conhecimentos, na Teoria das Situações Didáticas, são os meios transmissíveis (por imitação, comunicação, etc.) de controlar uma situação e obter dela determinado resultado conforme uma expectativa e exigência social. São, portanto, os instrumentos através dos quais o sujeito exerce influência sobre o meio material, sempre visando ao estabelecimento ou manutenção de um estado favorável (a resolução de um problema, a vitória em um jogo, a compreensão de determinados conceitos, etc.). Conhecimentos, portanto, são construídos da experiência, da interação com as situações didáticas e não didáticas (BROUSSEAU, 2008).

Por sua vez, os saberes são produtos culturais de uma instituição cujo objeto é identificar, analisar e organizar os conhecimentos de modo a incorporá-los à herança cultural de uma sociedade⁶. Assim, podemos concluir que conhecimentos só alcançam status de saberes no estágio em que são aceitos como produtos socioculturais úteis e legítimos. Nesse sentido, Brousseau identifica os conhecimentos que ele chama de canônicos, construídos de acordo com regras sociais e, portanto, inteligíveis pelo coletivo, [...] em conformidade com a vontade didática da sociedade, cuja importância é garantida pela história e cultura [...] (BROUSSEAU, 2007, p. 47, tradução livre).

2.3 Autonomia de quem aprende

Na Teoria das Situações Didáticas, as aulas também são reguladas por um conjunto de regras pré-estabelecidas, que compõem os chamados *contratos didáticos*. Falaremos mais detalhadamente sobre esse termo mais a frente; por enquanto, é importante saber que o contrato didático será o ponto de partida para situar o papel do professor (a maneira e a frequência de suas intervenções, como ele transmite as mensagens etc.) e do aluno (o nível de sua autonomia, suas expectativas em relação ao papel do professor e os saberes trabalhados).

⁶ Cf. BROUSSEAU, Guy. **Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: Didactico/Didactic to Algebra Study**. Libros del Zorzal, 2007. p. 28-29

Dessa forma, podemos assumir que, em contratos didáticos que regem aulas mais próximas do que consideramos atividades de ensino para o desenvolvimento da autonomia, as intervenções do professor devem conceber os momentos em que o aluno interage com o problema, tendo como principal ferramenta os seus próprios conhecimentos⁷, as soluções das quais ele dispunha antes da nova intervenção, sem aderir a respostas dadas pelo professor no momento da atividade (SILVA, 2008 apud SILVA; FERREIRA; TOZETTI, 2015), em um momento que o prepara para o que Brousseau (2007) chama de meio *adidático*⁸.

Teoricamente, fica evidente que em seus princípios básicos a Teoria das Situações Didáticas, em algum grau, busca por meios de aproximar mais o aluno da pesquisa, da ação mais autônoma, individual e coletiva sobre o objeto de estudo, bases do trabalho científico (BROUSSEAU, 2008; POMMER, 2008; SILVA, 2015).

Nesse processo, aquele que aprende experimenta, constrói conceitos progressivamente, a partir de descobertas (na maioria das vezes, em seu ponto de vista), por meio de suas próprias conjecturas.

2.4 Variáveis didáticas

Brousseau (1996) apud Gomes et al. (2017) define como *variáveis didáticas* os estágios das escolhas do professor em relação ao conteúdo, ao planejamento e à elaboração do ambiente em que o ensino se dará. Mais uma vez, Brousseau reforça a importância do papel do professor, esclarecendo que a Teoria das Situações Didáticas não diminui a responsabilidade docente no processo de ensino. Afinal, cabe ao professor, de posse dos conhecimentos a serem trabalhados, planejar e propor situações didáticas adequadas para oferecer aos alunos elementos que os levem às adaptações necessárias à aprendizagem que se pretende que ocorra.

O papel docente deve ser tratado com absoluto cuidado, pois, doutra forma, pode-se dar margem à interpretação de que o ensino ocorreria sem a necessidade

⁷ Exatamente por esse motivo, Brousseau aconselha os professores que considerarem suas atividades com base na metodologia de situações didáticas a não propor atividades muito difíceis — que possam se tornar enfadonhas ao longo do tempo — ou fáceis demais, não sendo desafiadoras.

⁸ Brousseau (2007, p. 31) considera como situações não didáticas todas aquelas não planejadas pelo professor, ou sem qualquer natureza pedagógica, e que levam os indivíduos a aprenderem; é uma situação que depende da percepção do indivíduo sobre a estrutura externa e as respostas dele necessárias.

de intervenção do professor, visão que vai de encontro à Teoria das Situações Didáticas⁹.

2.5 A dialética

Cada situação pode fazer com que o indivíduo evolua, aprenda, uma vez que a gênese de novos conhecimentos pode ser o resultado de uma sucessão de novas perguntas e respostas em um processo que Brousseau (2007, p. 29) chama de *dialética*.

Na dialética, sequências de situações de ação, formulação e validação podem acelerar o aprendizado. Dessa forma, ação, formulação, validação e institucionalização podem configurar uma ordem de progressão razoável para a construção de conhecimentos matemáticos (BROUSSEAU, 2007, p. 29).

2.6 Os obstáculos

Nas atividades realizadas pelo aluno, há superação dos obstáculos de aprendizagem. Obstáculos são conhecimentos, modelos regulares (saberes) sobre como proceder em um determinado conjunto de situações. Tais conhecimentos se mostram corretos e suficientes em determinadas circunstâncias, mas se tornam falsos, na verdade limitados, em contextos mais amplos (BROUSSEAU, 2007). Para Brousseau, superar obstáculos é um processo extremamente complexo e seu núcleo está precisamente no fato de que eles não são falsos conhecimentos. Sendo assim, o indivíduo não aceita de imediato as argumentações lógicas para substituir o conhecimento antigo pelo novo.

Um conhecimento novo, manifestado para responder ao escopo mais amplo, é estabelecido em oposição a um conhecimento antigo; utiliza outros pontos de vista, outros métodos¹¹ (Brousseau, 2007, p. 45, tradução livre). Trata-se de abandonar todo um conjunto de tratamentos para determinadas situações, que o indivíduo tem assimilado há mais tempo, já pronto e estabelecido, e dar lugar a um

⁹ Brousseau (2007, p. 31) afirma que um meio sem intenções didáticas é incapaz de proporcionar ao aluno as condições para que aprenda todos os conhecimentos culturais necessários para a vida em sociedade.

novo conjunto, ainda em construção e que geralmente desafia os fundamentos lógicos sobre os quais os modelos anteriores se firmaram. Certamente, é um desafio muito difícil, tanto para quem ensina como para quem aprende.

O obstáculo

não desaparece com a aprendizagem de um novo conhecimento. Pelo contrário, oferece resistência à sua aquisição, compreensão, freia sua aplicação, subsiste em um estado latente e reaparece de forma imprevista, em especial em seu âmbito anterior, quando as circunstâncias permitem. É inútil ignorar um obstáculo. Há de se descartá-lo explicitamente, integrar sua negação na aprendizagem de um conhecimento novo, particularmente sob a forma de contraexemplos. Neste sentido, é parte constituinte do saber (BROUSSEAU, 2007, p. 46, tradução livre).

2.6.1 As manifestações dos obstáculos de aprendizagem

Os obstáculos são manifestados por erros, que não ocorrem devido ao acaso. Se os obstáculos são conhecimentos corretos em uma determinada circunstância, é consistente pensar que os erros causados por eles não são erros no sentido mais rigoroso do termo.

Nesta lógica, há espaço para uma interpretação alternativa do erro — para além do clássico certificado de falha no processo de ensino. Na Teoria das Situações Didáticas, o erro é uma parte natural da aprendizagem, que pode ajudar o professor a definir as melhores estratégias a serem tomadas no planejamento e elaboração de suas intervenções. O erro pode ser uma ferramenta para criar novos problemas, situações didáticas, abrindo espaço para que a avaliação seja um momento de análise profunda sobre a aprendizagem (TEIXEIRA; PASSOS, 2013; SILVA, 2015).

2.6.2 As raízes dos obstáculos

Segundo Brousseau, os obstáculos podem ter ligação com (a numeração não é classificatória):

- (1) Escolhas didáticas do professor;
- (2) Restrições nos sujeitos em um dado momento de seu desenvolvimento;
- (3) Raízes socioculturais, que não dependem de sistemas educacionais;
- (4) Bases epistemológicas, na história dos conceitos, do que —[...] não se pode e nem se deve fugir pelo papel constitutivo que eles representam no

conhecimento visadoll (BROUSSEAU, 2008).

Os obstáculos de origem (1) estão no cerne do trabalho do professor e do projeto educacional que abrange tanto o que ensina quanto o que aprende (Brousseau, 1983 apud Almouloud, 2007 apud OLIVEIRA et al., 2012). Trazendo a análise ao alcance do campo de influência do professor, esses são obstáculos criados por meio de escolhas sobre como ensinar. Tomemos como exemplo o ensino de frações como representações de partes de um todo dividido em parcelas exatamente iguais — a maneira geralmente mais usada no ensino desse conteúdo. Observamos que, embora sejam ensinadas a formar frações por meio de divisão, as crianças têm alguma dificuldade em ver a própria fração como um modelo de divisão.

Os obstáculos de origem (2) mostram a influência de Jean Piaget na teoria de Brousseau, que, embora deixando a maturação em um plano de menor importância em relação à Epistemologia Genética, ainda a vê como fonte de obstáculos, na medida em que um indivíduo por vezes precisa amadurecer biologicamente e, por conseguinte, cognitivamente, para entender certos conhecimentos e saberes, especialmente quando o núcleo dessa compreensão se aproxima de campos mais abstratos. Não se pode esperar que crianças de seis anos de idade operem com números sem relacioná-los a objetos que possam ver e/ou tocar.

Por sua vez, os obstáculos de origem (3) influenciam diretamente o contato do conhecimento aprendido na escola com o conhecimento desenvolvido no ambiente adidático. Imaginemos o caso do zero absoluto e o zero na reta numérica do conjunto dos números inteiros. Em sua experiência diária, o indivíduo se familiariza com o zero absoluto, mas pode ter dificuldades em ver esse símbolo como um ponto de referência para definir a simetria entre números positivos e negativos, justamente por sua perspectiva sociocultural, construída ao longo de toda a sua vida, a respeito do dígito zero.

Por fim, os obstáculos de origem (4) estão presentes nas bases lógicas da construção do conhecimento. Também podemos identificar nessa natureza de obstáculos as raízes socioculturais. É a dificuldade histórica de se aceitar rupturas com estruturas lógicas, própria de determinados conhecimentos, e ceder espaço a novos modelos que desafiam bases científicas, filosóficas, religiosas etc.

2.7 Classificação das situações didáticas

Brousseau classifica as situações didáticas como:

- (1) *situação de ação*;
- (2) *situação de formulação*;
- (3) *situação de validação*.

A situação (1) corresponde ao estágio em que o aluno analisa a situação e, com base em suas percepções e conhecimento de maneiras de superar o problema ou jogo proposto, elabora e, se o contrato didático exigir, compartilha as primeiras respostas, geralmente desorganizadas e não demonstradas, com base em conclusões preliminares. Nesta fase, à medida que o aluno responde às situações propostas, suas conclusões amadurecem. Há um certo estágio em que o indivíduo percebe uma estratégia mais eficaz que as demais, no entanto, ele constata isso sem ainda obter argumentos lógicos para demonstrar sua hipótese. Tais estratégias são os *modelos implícitos* (BROUSSEAU, 2007, p. 24).

O modelo implícito será o modelo de gestão de conhecimentos que guiará as decisões e ações do indivíduo em situações didáticas. Isso continuará até que ele transforme seu modelo implícito em um teorema ou o descarte. É precisamente neste estágio de apreciação de modelos mais eficazes que se configura a situação

(2). Para definir a melhor estratégia para solucionar um determinado desafio, o aluno deve organizar suas observações e conclusões, separando as estratégias que funcionaram daquelas que não funcionaram. Dependendo da atividade e do contrato didático que a rege, pode ser necessária a interação de um aluno com um ou mais de seus pares (comunicação — oral, verbal, etc.) para que as conclusões sejam comunicadas e o grupo continue a troca de conclusões e discussões delas decorrentes.

Brousseau estabelece a presença constante do diálogo e da ação em grupo como uma das bases do ensino por meio das situações didáticas. Na análise de Silva (2008), durante os estudos em grupo, comparando (e, às vezes, confrontando) suas análises iniciais, dúvidas e conclusões com seus pares, o aluno estabelecerá com seu grupo uma situação favorável para que possa haver uma contribuição (coletiva) para a aprendizagem.

Finalmente, na situação (3), o aprendiz elabora argumentos explicados logicamente sobre suas estratégias para alcançar um estado favorável nas situações didáticas. É hora de expor teoremas para o professor ou para a turma (ou ambos), que também podem aparecer como soluções para os problemas propostos pelo professor. O aluno deve não apenas comunicar informações, mas também provar que o que ele afirma é verdadeiro dentro de um determinado sistema.

2.8 A institucionalização

Durante os experimentos de sua teoria no contexto educacional francês, Brousseau, percebeu que os professores demonstravam não querer passar de uma lição para outra sem antes revisar o que havia sido trabalhado com os alunos. Não consideraram suficientes as situações de ação, formulação e validação. Havia uma etapa ainda em falta.

Os professores precisavam dar status às produções dos alunos e organizá-las. Havia a necessidade de um estágio para escrever e analisar os fatos observados durante as aulas e, é claro, os conhecimentos a eles relacionados; situar o que fora trabalhado e o que os alunos entenderam; e, finalmente, fazer uma aproximação entre os saberes institucionais e os conhecimentos considerados pelos professores como mais relevantes ao longo de seus trabalhos por meio de situações didáticas.

Essa etapa do ensino através de situações didáticas Brousseau (2007, p. 98) chama de *institucionalização*. Nesta fase, o professor faz avaliações teóricas sobre a produção dos alunos. Destaca e mantém os modelos consistentes e descarta os inconsistentes, aproximando os primeiros a outras criações reconhecidas pela cultura e pela sociedade, conferindo-lhes o status de saber (BROUSSEAU, 2007, p. 28). Por meio dessa validação, o conhecimento trabalhado em situações didáticas pode finalmente integrar a herança do indivíduo.

Podemos agora considerar uma ordem de atividades à luz da Teoria das Situações Didáticas:

O conhecimento se origina da formulação de perguntas e respostas, da interação do aluno com situações didáticas. Ao longo dessas interações, situações de ação, formulação e validação se sucedem, chegando finalmente ao momento da institucionalização.

Não obstante a tentação de chegar à situação de institucionalização, há advertências a serem feitas sobre o momento certo para entrar nesta etapa. Almouloud (2007) apud Barbosa (2016) afirma que, se realizada precocemente, a institucionalização causa interrupções no processo de construção do conhecimento; por outro lado, quando realizada após o tempo adequado, [a institucionalização] colabora com interpretações imprecisas, atrasando o aprendizado.

2.9 O contrato didático

As situações didáticas funcionam dentro de um certo conjunto de regras, geralmente delimitadas pelo professor e pela ação em maior âmbito do sistema educacional. Brousseau (2007) fala sobre ter um contrato entre aluno, professor, conhecimento matemático e as instituições em âmbito maior, que atua na direção do processo de ensino.

A instituição decide o que o docente deve ensinar aos alunos; —lhe confere certa legitimidade para modificar o ensinado ou decidir sobre seu futuro (Brousseau, 2007, p. 69, tradução livre). Assim, a instituição, cuja influência abrange tanto o ensino quanto a aprendizagem, com seus mecanismos de controle (regras institucionais, diretrizes educacionais, mecanismos de avaliação) participa do contrato didático, definindo quais conhecimentos e saberes matemáticos devem ser trabalhados pelo professor e apropriados pelo estudante.

Entre professor e aluno, há um acordo sobre o papel de cada um nas situações didáticas. Inicialmente, o contrato decide até que ponto as intervenções do professor podem se estender e (explicitamente para aquele que ensina e, às vezes, implicitamente para aquele que aprende) quais resultados serão esperados em relação ao aprendizado.

Brousseau afirma que a visão da criança sobre o contrato didático não apresenta a objetividade das perspectivas da instituição e do professor, afinal, o aluno não sabe como acontece a sua aprendizagem e, pelo menos não minuciosamente — sabe que precisa aprender, mas não sabe o que e por que —, quais são os resultados que o professor e a instituição esperam dele (BROUSSEAU, 2007).

Assim, Brousseau (2007, p. 70) considera que o professor não pode se comprometer a levar o aluno a entender algum conceito, a aprender, e que ninguém

sabe como realmente levar alguém a construir conhecimentos matemáticos da maneira correta. Portanto, as cláusulas de um contrato didático não são escritas e podem ser quebradas, são voláteis; sendo assim, sanções em casos de rompimento de um contrato não podem ser previstas (BROUSSEAU, 2007, p. 70), pois o próprio rompimento do contrato didático não pode ser previsto. Devido à sua base não fundamentada em noções totalmente objetivas, os contratos didáticos apresentam rupturas.

Ao interagir com uma situação didática, o aluno pode, no processo de ação e adaptação, apresentar uma resposta que está além do escopo do contrato didático (resposta de natureza adidática) proposto inicialmente pelo professor [e pela instituição — vale lembrar]; se isso acontecer, cabe ao docente não aplicar sanções, mas propor um novo contrato didático, continuando o ensino.

Mesmo com sua natureza volátil e até ilusória, o estabelecimento de um contrato didático, segundo Brousseau, é fundamental para o sucesso do ensino, pois nas possibilidades de ações decorrentes das expectativas e especulações que professor e aluno despertam um no outro são criadas intervenções de ensino e respostas discentes aos problemas propostos.

Ricardo, Slongo e Pietrocola (2016) apontam para um paradoxo com relação ao papel docente em um contrato didático. Para os autores, o professor deve proceder de uma maneira que não explique tudo ao aluno e comprometa sua aprendizagem autônoma, sem, para isso, deixar de fazer a mediação necessária, momento em que pode haver a quebra do contrato didático.

Como no ensino por situações didáticas o professor atua como mediador entre o aluno e o objeto de conhecimento, um de seus papéis é encontrar um ponto de equilíbrio, no qual o espírito autônomo do estudante seja protagonista e a orientação docente esteja presente e atuante (RICARDO; SLONGO; PIETROCOLA, 2016).

Alguns dos contratos didáticos que consideramos importantes para esta pesquisa serão apresentados abaixo na perspectiva de Guy Brousseau.

2.9.1 O contrato de iniciação

Este contrato é estabelecido quando o professor determina um campo de conhecimento pelo qual o aluno pode iniciar seus estudos. Depois disso, o aprendiz (receptor) recebe mensagens do professor (remetente) contendo o conhecimento necessário e suficiente para suas interações iniciais com o ambiente material proposto.

Posteriormente, o receptor pode solicitar mais informações caso julgue que ainda não tem posse de detalhes o bastante para prosseguir nas atividades.

2.9.2 O contrato de utilização dos conhecimentos

Este contrato confere ao professor a responsabilidade de mostrar ao aluno as aplicações dos saberes que ele propõe ensinar. Por sua parte, o aluno deve procurar visualizar o campo de aplicações em que tais saberes desempenham um papel.

No entanto, existe saberes cujas aplicações podem não ser facilmente delimitadas, portanto, nesse caso, será necessário usar outros conhecimentos.

Brousseau adverte que "[...] as relações entre um saber determinado e suas aplicações são uma ficção, uma metáfora" (BROUSSEAU, 2007, p. 63, tradução livre). As aplicações dos saberes são produtos da atividade sociocultural humana, estabelecidas e legitimadas ao longo de anos. Assim, existem conhecimentos cuja aplicabilidade pode ainda não ter sido definida e nem há como prever quando será (e se será).

3 UMA PROPOSTA DE ENSINO DE ADIÇÃO COM NÚMEROS INTEIROS

A Teoria das Situações Didáticas nos diz que, na educação formal, a aprendizagem da matemática pode ocorrer com maior autonomia do aluno, por meio de sua ação e adaptação no ambiente organizado pelo professor (obviamente, com intenções didáticas). É uma construção contínua, que demanda que o aluno assuma um papel reflexivo não passivo, atuando sobre objetos de conhecimento.

Propomos planejar, elaborar e aplicar uma intervenção de ensino baseada nos preceitos da TSD. Para a realização das situações didáticas, selecionamos a adição com números inteiros como conteúdo principal. Para o contexto de aplicação das experiências desta pesquisa, escolhemos uma turma do sétimo ano da EMEF Professor Estevão Gomes, instituição que pertence ao sistema público de ensino do município de Breves, no Marajó.

Achamos conveniente que, antes de passarmos à aplicação propriamente dita, analisemos o que a literatura acadêmica tem a nos dizer sobre os obstáculos inerentes aos números inteiros. Naturalmente, nossa análise se concentrará inicialmente na esfera escolar. Posteriormente, leremos sobre a evolução histórica desses conceitos, que é relevante para a compreensão de seus obstáculos epistemológicos.

3.1 Os números inteiros na escola

Trabalhar com os números inteiros na educação básica é um grande desafio para professores e alunos¹⁰. Em geral, os alunos do sétimo ano, estágio em que o conjunto dos números inteiros começa a ser introduzido, têm dificuldade em entender conceitos básicos sobre operações que envolvem, especialmente, números negativos (SOARES, 2008 apud NETO, 2013; VICTER, 2013).

Em sua pesquisa sobre o ensino de números inteiros, Chagas (2007) conclui que um dos principais problemas no ensino desse conjunto se concentra na subtração de números negativos. Em seu estudo, a autora escreve sobre o conceito de ruptura pelo qual os alunos passam quando tem seus primeiros contatos com as possibilidades do universo dos números inteiros.

¹⁰ Dentre os trabalhos que apoiam esta afirmação estão Neto e Victor (2013); Medeiros e Medeiros (1992), Chagas (2007).

Ainda no mesmo estudo, Chagas (2007) propõe que a principal preocupação dos professores parece estar na explicação da regra de sinais.

Podemos citar como exemplo a situação apresentada por Chagas (2007) sobre a operação com subtração de números negativos. De acordo com a autora:

[...] em operações como $3 - (-2)$ [...] [os] alunos não compreendem com facilidade que subtrair -2 de 3 equivale a somar 2 a 3 . A dificuldade inicial deve-se em parte ao costume dos alunos com as operações em $\mathbb{N}$ e exemplos como esse geram uma ruptura nos conceitos trazidos até então. A permanência desta dificuldade está possivelmente relacionada à má compreensão de números opostos e a forma como o professor justifica a regra de sinais.

O exemplo citado por Chagas (2007) envolve, além dos conceitos de adição, conceitos de multiplicação e, portanto, está além do escopo do que este trabalho se propõe a analisar. Mas Jacon (2018) analisa as dificuldades de aprendizagem de números inteiros exclusivamente no campo da adição. Para o autor, os alunos têm dificuldade em compreender números inteiros porque associam seus conceitos com o —[...] conhecimento que já foi construído com os números naturais, em que as operações aparecem relacionadas a um modelo real (JACON, 2018).

Jacon (2018) traz como exemplo o problema de adição $2 - 4$, que foge totalmente à lógica dos números naturais, em que subtrair quatro unidades de duas unidades é considerado impossível para alunos que não conhecem os números inteiros (JACON, 2018).

Outro trabalho que aborda o ensino de números negativos em escolas públicas é o de Medeiros e Medeiros (1992). Esses autores consideram que aspectos intuitivos e formais dos números inteiros não andam de mãos dadas no processo de ensino. Para Medeiros e Medeiros (1992), o professor deve se preocupar em mostrar que os números inteiros são um construto humano, suscetíveis de inúmeras interpretações errôneas e dificuldades de aceitação ao longo de sua história. Por assim dizer, o valor da experimentação e da descoberta autônoma pode ser uma alternativa interessante para se ensinar conceitos de operações com números inteiros (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992).

Para isso, Medeiros e Medeiros (1992) falam em trabalhar com a noção intuitiva, que está presente no ser humano, mesmo quando a fundamentação lógica ainda não está totalmente preparada, afinal a "[...] matemática não é uma atividade realizada por um computador no vácuo [...] [é] uma atividade humana realizada à luz

de séculos de experiência humana, usando o cérebro humano, com todas as potencialidades e deficiências que isto implica" (STEWART; TALL, 1987, apud MEDEIROS; MEDEIROS, 1992).

3.2 Evolução da concepção dos números inteiros

A matemática é uma construção humana, resultado de milênios de esforço, de produções históricas de diferentes civilizações, com diferentes símbolos e em diferentes contextos. Veio de nossa necessidade de contar coisas, controlar e armazenar quantidades de alimentos, de animais, desvendar padrões climáticos para desenvolver a agricultura. E mais, a busca constante do homem para colonizar todos os espaços habitáveis do planeta, erguendo grandes civilizações em todo o mundo, teve a matemática como um grande alicerce.

A necessidade de contar objetos, até certo ponto, levou o homem a criar o conjunto de números que agora conhecemos como naturais. Com a reta numérica negativa, o conjunto de números inteiros foi concebido. Mas como surgiram os números negativos? Sua aceitação foi imediata?

As origens dos conhecimentos matemáticos geralmente não podem ser bem delimitadas. Existem várias dificuldades nesse sentido. O tempo pode destruir documentos e há casos em que as produções matemáticas não foram registradas, sendo transmitidas oralmente. No entanto, alguns estudos apontam para milênios atrás como uma época em que conceitos sobre números negativos começaram a ser usados (BOYER, 1974; STEWART, 2014).

A civilização chinesa, há cerca de 2.000 anos, já realizava operações, até certo ponto, usando números negativos (STEWART, 2014). Os chineses desenvolveram um sistema computacional tendo barras como instrumentos de contagem (BOYER, 1974). Durante os cálculos, as varetas eram manipuladas em um sistema posicional semelhante ao amplamente utilizado na matemática ocidental, baseado no sistema indo-arábico (BOYER, 1974, p. 145-147).

Os chineses usavam barras vermelhas para os termos a serem adicionados, e barras pretas para os termos a serem subtraídos. Para Stewart (2014), as barras pretas deste antigo sistema computacional ainda não representavam números negativos. No entanto, os fundamentos do conceito de números negativos começaram a ser estabelecidos nesta fase da história (STEWART, 2014), sendo um

deles a simetria dos números. Para seus cálculos, os chineses usavam as mesmas quantidades de barras pretas e vermelhas (STEWART, 2014). Embora já operassem usando conceitos de números negativos, os chineses não os aceitavam como resultado de equações (BOYER, 1974, p. 147).

Na Grécia antiga, as operações com sinais já pareciam, embora implicitamente, nos cálculos de Diofante de Alexandria (HOGBEN, 1949 apud MEDEIROS; MEDEIROS, 1992), —[...] na tentativa de abreviar os cálculos, embora esse mesmo matemático rejeitasse soluções negativas para equações.

As dificuldades em aceitar números negativos têm raízes históricas desde a descoberta desses números. Houve uma rejeição inicial de conceitos sobre números negativos que se estendeu aos séculos 18 e 19, com matemáticos como Euler e Leibniz. A aceitação de números negativos também foi um obstáculo a ser superado em estudos algébricos. Por exemplo, as equações do tipo $ax + b = 0$, em que a e b são maiores que zero, sempre possuem uma raiz negativa, considerada falsa por alguns dos grandes matemáticos da história.

Por sua vez, a civilização indiana aceitava o uso de números negativos, considerando-os úteis para a representação de dívidas em cálculos financeiros (STEWART, 1974). No entanto, alguns de seus matemáticos mais famosos mostraram ceticismo com relação a raízes negativas como soluções para equações (STRUKE, 1989 apud MEDEIROS; MEDEIROS, 1992).

Segundo Medeiros e Medeiros (1992) e Nilo (2013), a dificuldade de ver números negativos em bases concretas e manipuláveis era um dos principais obstáculos à sua aceitação.

A polêmica sobre a visualização dos negativos como verdadeiros números estava presa ao critério vigente de aceitação de novas idéias como boa matemática. Tal critério, de tradição grega, exigia para os negativos uma representação geométrica como a dos positivos de contagens ou medições. Exigia-se um modelo concreto do qual a nova idéia pudesse se constituir numa metáfora. A visão dos negativos com débitos, apesar de útil, parecia insatisfatória e não preenchia o requisito matemático da necessidade da metáfora (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992).

Até o século XVI, os resultados negativos das equações eram considerados absurdos ou pelo menos difíceis de aceitar. Mas essa linha de pensamento começou a mudar neste período da história. A interpretação de números negativos nos cálculos, embora às vezes parecesse não ter sentido, foi sendo gradualmente aceita.

No século XVII, números negativos começaram a aparecer em trabalhos acadêmicos, mas ainda sem que os matemáticos da época conseguissem explicar [...] didaticamente a validade dos números inteiros (NILO, 2013). Os grandes matemáticos do século XVII tentaram localizar o espaço dos números negativos na matemática, mas não obtiveram sucesso em construir uma resposta definitiva. Euler manipulou números negativos, mas não usou linguagem formal para tentar demonstrar as regras de sinais que envolvem operações com esses números; Carnot também não entendeu completamente os números negativos, diferenciando-os dos números positivos com a ideia de oposição à origem zero na reta numérica (NILO, 2013).

Um matemático essencial para a compreensão de números positivos na matemática moderna foi Simon Stevin. Este estudioso aceitou números negativos —[...] como raízes e coeficientes de equações com o uso da proposição de que as raízes negativas das equações são as raízes positivas da equação obtida pela substituição de x por $(-x)$ (SÁ; ANJOS, 2011). Também justificou geometricamente a regra de multiplicação de números negativos usando a identidade algébrica $(a - b) \cdot (c - d) = ac - ad - bc + bd$ (SÁ; ANJOS, 2011).

Outro matemático do século XVI que contribuiu muito para a aceitação de negativos na matemática ocidental foi Colin MacLaurin (1698-1746) em seu trabalho intitulado "Tratado da Álgebra". MacLaurin reconhecia os números negativos na condição de que eles estivessem ligados aos positivos. Em outras palavras, os números negativos eram os números de valores opostos aos positivos.

MacLaurin não admitia as operações de subtração somente com números negativos. Ele foi um dos primeiros matemáticos a fazer distinção entre zero absoluto e zero em relação à origem na reta numérica. Também elaborou uma definição da regra de sinais, —[...] dedução [que] deu início a uma era de formalismo até então inexistente (SÁ; ANJOS, 2011). MacLaurin foi um dos matemáticos da era moderna que chegou mais perto de definir números negativos (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992; SÁ; ANJOS, 2011).

Richard Dedekind também contribuiu muito para a aceitação de números negativos. Este matemático estabeleceu a subtração como uma operação inversa em relação à adição. Desse modo, Dedekind concluiu que se $a - b = c - d$, logo $a + d = c + b$. Assim, Dedekind demonstrou uma relação de equivalência entre números naturais, cujo conjunto será o próprio conjunto de números inteiros. Mas o

passo definitivo para a legitimação de números negativos foi dado por Hermann Hankel (HILLESHEIM; MORETTI, 2016, p. 250-251).

Hermann Hankel (1839-1873) estudou minuciosamente a teoria dos números complexos. No processo, ele resolveu o problema dos produtos com números negativos. Hankel não via obrigatoriedade em enxergar a matemática através de paralelos com o mundo real. Abandonando o ponto de vista concreto, Hankel propôs estender propriedades de multiplicação em $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$, resolvendo muitas das dúvidas que até então pairavam sobre os números negativos¹¹.

¹¹ Segundo Hillesheim e Moretti (2016, p. 251), no que diz respeito à construção dos conceitos de números relativos, ao buscarem exemplos de representações metafóricas desses números, os matemáticos não avançaram muito. Henkel, ao estender as propriedades de multiplicação de $\mathbb{R}^+$ para $\mathbb{R}$, estabeleceu uma convenção de cálculos que serviu de base para suas descobertas, fazendo com que as regras de sinais se tornassem necessárias para preservar o formalismo nos cálculos matemáticos.

4 ATIVIDADE DE INTERVENÇÃO

A intervenção pedagógica que ora relatamos foi aplicada em três datas (06/01/2020, 10/01/2020 e 13/01/2020), ao longo de seis horas de aula. No primeiro encontro, a turma contou com a presença de 18 alunos; no segundo e terceiro encontro, estiveram presentes respectivamente 17 e 16 alunos.

O professor da turma afirmou que já havia começado a ensinar a eles alguns conceitos básicos sobre os números inteiros, como a reta numérica e a simetria dos números inteiros.

Para melhor organizar o relato das atividades de intervenção, vamos dividi-lo em três etapas.

4.1 Etapa 1: Liberdade para os alunos formarem os problemas de adição em Z

Em 6 de janeiro de 2020, no início da aula, escrevemos a reta numérica no quadro, colocando os números positivos e negativos no intervalo $[-10, +10]$. Em seguida, demos aos alunos a seguinte atividade:

Formule problemas de adição entre pares de números entre os disponíveis na reta numérica.

A classe concluiu esta atividade trabalhando e resolvendo problemas de preferência sobre a adição de pares de números positivos. Em menor grau, eles resolveram problemas envolvendo números negativos, mas sempre emparelhados com um número positivo de módulo mais alto e seguindo a ordem positivo primeiro, negativo segundo. Um resumo dos procedimentos realizados pelos alunos na primeira atividade pode ser visto na Tabela 1:

Tabela 1 – Dados colhidos durante a Etapa 1.

Procedimento adotado	Número de alunos	Porcentagem
Utilizaram somente números positivos	12	67%
Utilizaram números positivos e negativos, organizando os problemas na forma $A - B$, com $ -B < A $.	06	33%
Total	18	100%

Fonte: O autor

Nesse primeiro momento, diagnosticamos que os alunos possuíam um modelo, um algoritmo implícito para calcular a adição, no qual havia pelo menos um número positivo que deveria ter um valor absoluto maior que o número negativo envolvido, caso houvesse.

Este é o algoritmo com o qual as crianças aprendem a operar a adição e subtração dentro dos números naturais, a partir da contagem de unidades. Em casos de problemas com números negativos, alguns alunos calcularam desenhando as unidades do número positivo em uma folha de papel e riscando essas unidades, representando o que seria subtraído, ou seja, o número negativo.

A princípio, fica evidente que a abordagem de adição com números negativos de valor absoluto maior do que os positivos quebraria completamente a lógica do algoritmo a que as crianças estavam acostumadas.

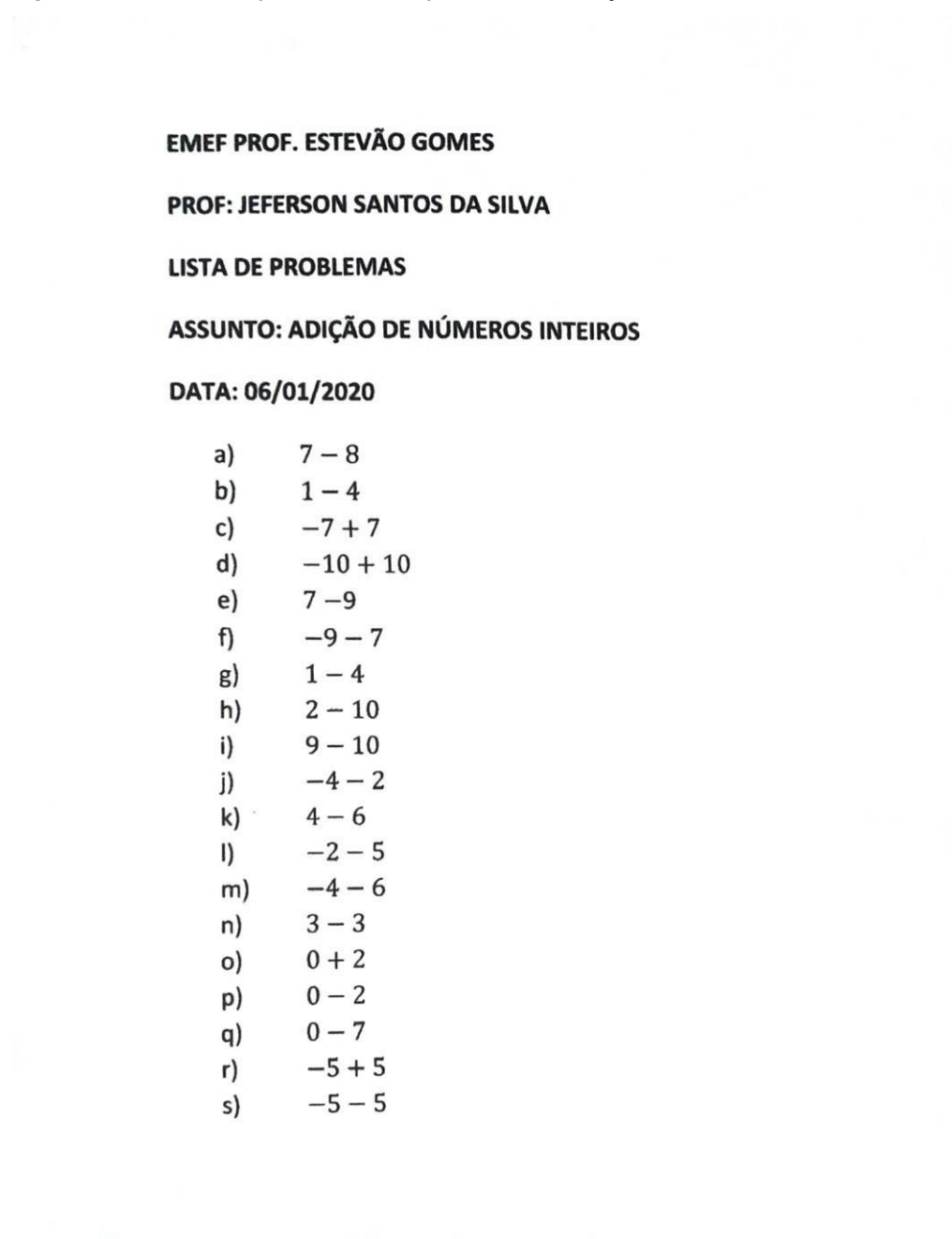
A primeira parte serviu de diagnóstico do algoritmo usado pelos alunos para operar a adição; agora, na segunda parte, também um diagnóstico, queríamos observar o que aconteceria quando as crianças entrassem em contato com os números inteiros. Elas tentariam usar o modelo de resolução que tinham para os números naturais? Segundo a Teoria das Situações Didáticas, esse processo ocorreria. Agora tentaríamos observar na prática.

4.2 Etapa 2: Diagnóstico dos obstáculos de base epistemológica

Ainda em 06 de janeiro de 2020, na segunda atividade, formulamos os problemas para os alunos. Como na primeira atividade, os problemas envolviam adição com pares de números inteiros no intervalo $[-10, +10]$, mas adicionamos situações que se estendem mais profundamente na estrutura lógica dos inteiros: problemas em que o número com sinal negativo aparece à esquerda do operador aritmético; problemas em que o número negativo tem módulo maior que o número positivo; problemas com pares de números negativos.

A seguir está a lista de questões que aplicamos na Etapa 2 da intervenção:

Figura 1 – Questões aplicadas na etapa 2 da intervenção



Fonte: Arquivo do autor

Os resultados que obtivemos confirmam que os alunos analisaram os problemas de acordo com o que sabiam sobre números naturais.

Para resolver os problemas, as crianças inverteram a ordem dos fatores, mantendo o sinal de menos (-) entre os números. Assim, reestruturaram o problema para ajustá-lo ao escopo lógico dos números naturais $\mathbb{N}$, aplicando conceitos da

Os alunos não adicionaram um número negativo a zero, mas sim seu simétrico positivo, então o resultado sempre foi maior que zero.

A seguir, apresentamos a Tabela 2 com a estrutura dos problemas e respectivos procedimentos tomados pelos alunos para a resolução.

Tabela 2 – Dados colhidos durante a Etapa 2.

Estrutura do problema	Procedimento associado
$A + (-B)$, com $ A < -B $	Inversão das parcelas utilizando a propriedade comutativa da adição nos números naturais; utilização do simétrico aditivo de $-B$ e do simétrico aditivo de A : $B - A$.
$0 - A$	Adição do simétrico aditivo de $-A$ ao número 0.
$-A - B$, com $ -A > -B $	Adição de $-B$ ao simétrico aditivo de $-A$: $A - B$.
$-A - B$, com $ -B > -A $	Inversão das parcelas pela propriedade comutativa da adição em $\mathbb{N}$; Adição de $-A$ ao simétrico aditivo de $-B$: $B - A$.

Fonte: O autor

4.3 Etapa 3: Adição de números negativos com o material concreto

Em 10 de janeiro de 2020, usamos um material manipulável projetado para auxiliar na adição de números inteiros por meio de análise geométrica da reta numérica e contagem. O material consistia em um conjunto de botões em que metade era azul e a outra metade vermelha, acompanhado de tiras de papel contendo uma representação da reta numérica no intervalo $[-20, +20]$. Os botões usados na intervenção podem ser visualizados na imagem abaixo:

Figura 3 – Materiais utilizados na etapa 3



Fonte: Arquivo do autor

A turma foi dividida em cinco grupos, cada um com 40 fichas (20 vermelhas e 20 azuis); e uma tira com um desenho da reta numérica foi distribuída para cada grupo. Em seguida, propusemos cinco listas com quatro problemas cada, envolvendo a adição de pares de números no intervalo $[-20, +20]$. Os problemas não se repetiam então cada grupo recebeu uma lista específica.

Em seguida, instruímos os alunos sobre as regras para o uso das fichas e do esboço da reta numérica. A seguir, apresentamos as condições que explicamos aos alunos para resolver os problemas propostos usando o recurso que lhes foi apresentado:

(I) As fichas azuis representam os números à direita do zero-origem, ou seja, os números positivos; e as fichas vermelhas representam os números à esquerda do zero-origem, os números negativos.

(II) Cada ficha representa uma unidade; portanto, por exemplo, o número $+3$ deverá ser representado por três fichas azuis, o número -4 , por quatro fichas vermelhas e assim por diante;

(III) Cada ficha significa o avanço de uma unidade na reta numérica, sempre se distanciando da origem [zero]; melhor exemplificado, uma ficha azul implica a distância de uma unidade com relação ao zero (isto é, o avanço de uma unidade para a direita); duas fichas são duas unidades; três fichas, três unidades e assim por diante; as fichas vermelhas devem ser operadas analogamente, mas à esquerda do zero-origem;

(IV) Fichas na mesma distância do zero-origem, nos lados opostos da reta numérica, resultam em valor nulo, ou seja, zero.

Assim, exemplificando, a primeira ficha à esquerda e a primeira ficha à direita resultam em zero; a segunda ficha à esquerda e a segunda ficha à direita resultam em zero; a terceira ficha à esquerda e a terceira ficha à direita resultam em zero, etc.

Findada a explicação sobre o funcionamento do recurso, os alunos resolveram os problemas propostos.

Não foi de imediato que eles entenderam o funcionamento do novo meio material. Resoluções em que o sinal dos números inteiros era interpretado pelos alunos como operador aritmético apareceram em algumas soluções.

Ao contrário das atividades anteriores, os alunos tiveram que refazer o problema no caso de uma resposta errada. Procuramos não interferir muito além de

explicar aos alunos, sempre que eles nos perguntavam, as regras de uso do meio material e um veredito sobre o resultado estar correto ou não.

Nesta atividade, devido ao pouco tempo que tivemos para aplicá-la, o cerne não foi a correção dos resultados dos alunos aos problemas propostos, mas sim observar o potencial do recurso em ajudar os alunos a ver os resultados de uma perspectiva geométrica.

4.4 Etapa 4: Formulação de justificativas

Na semana seguinte, 13 de janeiro de 2020, continuamos com a próxima atividade das situações didáticas propostas para a turma. Cinco novas listas de problemas foram distribuídas aos alunos, desta vez com dois problemas em cada lista, para tornar a atividade mais rápida. O foco desta atividade não foi a resolução de problemas em si, mas a elaboração de justificativas pelos alunos para as soluções por eles alcançadas.

Quando todos os cinco grupos haviam terminado, pedimos a atenção dos alunos para o quadro branco da sala. Escrevemos a adição $-10 + 10 = 0$ no quadro e pedimos aos alunos que verificassem, por meio das fichas, se o resultado era verdadeiro. Todos fizeram e confirmaram. Em seguida pedimos que eles verificassem os exemplos $-4 + 4$; $-6 + 6$; $+15 - 15$. Novamente, as crianças terminaram a tarefa e chegaram ao resultado correto para os três problemas. Então lhe demos a principal tarefa da atividade: Elaborar uma justificativa sobre por que o resultado era zero para aqueles problemas em particular.

Durante a meia hora seguinte, os alunos discutiram em seus grupos até que pudessem conjecturar justificativas.

Dos cinco grupos de alunos que organizamos para realizar esta sequência didática, dois terminaram a última atividade.

Vejamos as justificativas dos dois grupos, os quais nós identificamos genericamente como Grupo A e Grupo B.

Grupo A: Os números são iguais e isso resulta em zero porque as fichas vermelhas e fichas azuis se anulam.

Grupo B: Fichas na mesma distância do zero-origem, nos lados opostos da reta numérica, resultam em valor nulo, ou seja, zero.

Com isso, finalizamos nossa intervenção.

4.5 Análise da experiência

Propomos, como eixo central deste trabalho, analisar os obstáculos de origem epistemológica inerentes à adição de números inteiros no viés da Teoria das Situações Didáticas, fundamentados também pela pesquisa bibliográfica que abordamos nos subcapítulos 3.1 e 3.2 deste texto.

Durante a intervenção, identificamos evidências de dificuldades dos alunos em realizar procedimentos de adição com números inteiros e agora apresentaremos nossas conclusões sobre essas dificuldades de acordo com nosso embasamento teórico.

Acostumados com o conjunto de números naturais, os alunos tendem a não entender imediatamente os conceitos envolvidos nos números negativos. De acordo com nossa leitura da Teoria das Situações Didáticas, os obstáculos de origem em bases epistemológicas estão na natureza do conhecimento. O subcapítulo 3.2 nos revelou que esses obstáculos estão diretamente relacionados à escassez em comparação com os números naturais de possibilidades de fazer analogias entre os números negativos e o mundo concreto. Alguns conceitos envolvendo números negativos são um tanto abstratos e, como vimos no caso das raízes negativas das equações quadráticas, foram considerados absurdos por matemáticos brilhantes em algumas das civilizações mais avançadas de nosso passado.

Em que ponto da intervenção de ensino nós reconhecemos os obstáculos epistemológicos?

Identificamos esses obstáculos quando os alunos tentaram resolver os problemas com números inteiros usando conceitos de contagem desconsiderando os sinais dos números, os quais os alunos, por vezes suas respostas mostraram, interpretaram como operadores aritméticos.

O que levou os alunos a trilharem esse caminho para solucionar os problemas?

Podemos conjecturar uma hipótese a partir da leitura dos subcapítulos 3.1 e 3.2. Os primeiros contatos do ser humano com a matemática se dão nos processos de contagem, nas metáforas entre números e objetos concretos. Em comparação com os números positivos, essas metáforas são bastante limitadas quando se trata de números negativos. Os conceitos de contagem começam a ser construídos com a adição de um elemento a outro, apoiados na noção de conjuntos de coisas

visíveis. Como exemplo disso, temos a estreita ligação entre a representação de números com os dedos e o processamento de cálculos como procedimento no qual as crianças desenvolvem habilidades aritméticas.¹²

No caso da nossa intervenção, os alunos tentaram resolver os problemas com pares de inteiros estruturando-os da mesma forma que fazem no conjunto dos números naturais, ou seja, $A + B$, com $|A| \geq |B|$ ou $A + (-B)$ com $|A| \geq |-B|$. Isso ficou mais evidente nos problemas de adição de pares de números inteiros em que os módulos dos números negativos são maiores que os dos números positivos, e também nos problemas em que os números negativos aparecem à esquerda do operador aritmético, com os números positivos aparecendo à direita do operador.

Os alunos tentaram resolver esses problemas aplicando a propriedade comutativa da adição, verdadeira dentro dos números naturais N e inteiros Z , entretanto, fizeram isso sem considerar os sinais, comum nos cálculos com os números naturais, em que o sinal que geralmente aparece é o do operador aritmético.

E isso nos leva a uma reflexão sobre a convenção do uso do sinal positivo (+), que é omitido durante os primeiros anos da criança na escola, aparecendo apenas quando se inicia o estudo do conjunto dos números inteiros Z no ensino fundamental

II. Os números naturais precedem os números inteiros, nós sabemos. Quando analisados no conjunto dos números inteiros, os números naturais podem ser representados com o sinal positivo (+) por mera conveniência didática. Mas e se essa abordagem do sinal positivo (+) já começasse nos anos iniciais? Isso pode ajudar as crianças de alguma forma quando elas começarem a trabalhar com números negativos?

Nossa hipótese é que esta convenção atual do ensino de matemática torna difícil para os alunos, pelo menos inicialmente, discriminar entre o que é o sinal positivo (+) e o que é o operador aritmético (+). Este é um caso de obstáculo epistemológico ou didático? São reflexões para futuras investigações.

¹² Cf. CROLLEN, Virginie; SERON, Xavier; NOËL, Marie-Pascale. Is finger-counting necessary for the development of arithmetic abilities?. **Frontiers in Psychology**, v. 2, p. 242, 2011.

Ao percebermos as dificuldades que os alunos encontraram no primeiro contato com números inteiros, sentimos a inquietação do professor quanto ao ensino desse conteúdo matemático. Como ensinar as crianças a contar números menores que zero? Como ensinar um conceito essencialmente abstrato como esse para crianças que resolvem problemas contando com os dedos e com círculos ou riscos representando números no papel?

A gênese da matemática foi baseada em metáforas com o mundo real. Analogias entre ideias e coisas concretas no mundo que vemos, ouvimos, cheiramos e sentimos são a pedra angular da matemática como a conhecemos. As evidências históricas mostram que a matemática, afinal, não teria se desenvolvido (pelo menos não como a conhecemos) se isso não significasse progresso para as civilizações do passado e de hoje. Portanto, as metáforas entre as ideias matemáticas e o mundo real são, obviamente, um recurso muito utilizado no ensino. Sendo assim, não é aconselhável que o professor interrompa repentinamente esse caminho de aprendizagem, principalmente quando se trabalha com alunos muito jovens, saindo das séries iniciais.

Segundo Piaget, no início da adolescência, as crianças entram na fase mais abstrata do pensamento. Ignorar os estágios de maturação do pensamento é uma armadilha em que nós, professores, acabamos caindo. De acordo com o que estudamos sobre a TSD, ao fazê-lo, além de obstáculos epistemológicos, colocaríamos obstáculos de origem didática e também relacionados ao desenvolvimento biológico entre as crianças e a aprendizagem.

Ao identificar os obstáculos epistemológicos, organizamos as situações didáticas para tentar amenizar as dificuldades por eles geradas. Introduzimos as fichas de duas cores com o objetivo de dar às crianças um instrumento para contar números negativos, enquanto a representação da reta numérica permitiu-lhes olhar para a organização geométrica dos objetos, para que pudessem visualizar a simetria entre as fichas de cores diferentes à mesma distância em unidades da origem zero. Fundamentados em conceitos informais sobre simetria na adição, simplificados no raciocínio de que 'uma ficha azul menos uma ficha vermelha, ambas na mesma distância da origem zero, é igual a zero', as crianças resolveram os problemas propostos em grande parte.

Mas agora observemos que o conceito informal de simetria com qual os alunos trabalharam apresenta uma dualidade entre os sentidos do zero, que é um obstáculo com raízes socioculturais, como discutimos no subcapítulo 1.6 deste trabalho. Analisar a lógica na adição de números inteiros através da simetria dos números não é possível sem que os alunos entendam, primeiro, a posição de origem, ou seja, zero para realizar a contagem, fundamental para operar com grandezas negativas, justamente por ser referência à ideia de simetria (BRASIL, 1998, p. 97). Mas essa ideia de zero como a origem de uma reta numérica choca-se com a ideia de zero absoluto que aprendemos muitas vezes desde antes de começarmos a escola.

Com a representação do número (-1) pelo objeto (ficha vermelha), os alunos fizeram a metáfora entre números negativos e coisas palpáveis e visíveis para eles, o que lhes permitiu contar os números negativos sem cometer equívocos. Por que isso ocorreu? Temos uma hipótese: As crianças estão acostumadas a contar 10 coisas, mas como você conta -10 coisas? No recurso utilizado nas sequências didáticas que propomos esta resposta é possível: -10 coisas = 10 fichas vermelhas. A sequência didática apresenta aos alunos a possibilidade de analisar os números negativos em suas parcelas unitárias, por exemplo, $-3 = (-1) + (-1) + (-1)$, procedimento análogo ao que fazem com os números naturais: $3 = 1 + 1 + 1$.

Ao final das situações didáticas de nossa intervenção, dois grupos apresentaram formulações sobre como chegaram ao resultado em adições envolvendo números de sinais opostos e o mesmo módulo. A turma em que realizamos a intervenção já havia visto definições formais de simetria de números inteiros, mas esse conteúdo é abstrato e demanda tempo para ser compreendido pelas crianças.

Como as evidências mostram que as crianças do 7º ano ainda se sustentam nos cálculos com a contagem de objetos concretos, o recurso que organizamos se propôs a trabalhar com simetria e valor absoluto com base nessa característica dos alunos dessa faixa etária. As respostas que recebemos dos grupos A e B (este último citando diretamente a regra IV do recurso das fichas e do esboço da reta numérica) evidenciam que eles identificaram que os módulos iguais e sinais opostos compunham a estrutura comum que determinou que todos os problemas propostos naquela atividade resultassem em zero.

Na última atividade desta intervenção, ao resolver os problemas envolvendo pares de números de módulos iguais e sinais opostos, os alunos manipularam na prática a simetria dos números inteiros e seus desdobramentos na adição envolvendo este conjunto. Segundo Brousseau, nossa intervenção de ensino não ultrapassou o estágio das *situações de ação*, quando os alunos estavam atuando sobre o objeto de conhecimento, compreendendo-o, analisando estratégias para chegar a uma situação favorável (a resposta correta). No entanto, se não formos muito rigorosos, as justificativas dos alunos dos grupos A e B podem ser interpretadas como *situações de formulação*.

Devido ao tempo limitado que tivemos para realizar esta intervenção, não é possível dizer quanto progresso os alunos poderiam fazer na compreensão dos conceitos de adição de números inteiros se tivéssemos mais tempo para ensiná-los por meio das situações didáticas. As atividades foram realizadas em grupo, de modo que a análise individual da aprendizagem dos alunos ficou limitada. Eles seriam capazes de formular definições próximas às definições formais? Quais são os procedimentos para alcançar esse resultado?

5 CONCLUSÃO

Quando iniciamos este trabalho, nos propusemos a investigar os obstáculos de origem epistemológica relacionados à adição com números inteiros. Verificamos na teoria e na prática que a apropriação de novos conhecimentos envolve a superação de barreiras relacionadas à própria natureza do conhecimento que se pretende aprender. Pudemos perceber que os números inteiros apresentam obstáculos dessa natureza e que, ao longo da trajetória de construção dos seus principais conceitos, houve rejeição e confusão envolvendo grandes civilizações do passado e alguns dos grandes matemáticos da história. Uma das principais razões para tais dificuldades estava centrada nas limitações quanto às possíveis metáforas a serem realizadas com esses números. E podemos conceber que essas dificuldades persistem até hoje, sendo um terreno de desafios para os alunos e consequentemente para os professores.

Também nos propusemos, a partir da compreensão dos obstáculos de origem epistemológica, a refletir sobre as perspectivas da Teoria das Situações Didáticas no ensino da adição com números inteiros.

De uma forma mais geral, este trabalho nos fez pensar sobre os processos envolvidos na aprendizagem e ver como são complexos e como exigem que o professor seja muito mais do que um profissional que se preocupa unicamente em transmitir conhecimentos. A aprendizagem inclui muitos fatores, internos e externos ao indivíduo que aprende. Os conhecimentos matemáticos podem ser aprendidos por diferentes caminhos. Tais caminhos se configuram nas especificidades do ensino, pavimentados pela natureza epistemológica de determinado conhecimento matemático, por um contexto socioeconômico e também pelas particularidades daquele que aprende.

Alguns desses fatores supracitados não estão ao alcance do professor, mas tantos outros estão. Mesmo quanto aos obstáculos epistemológicos, que são inerentes ao próprio conhecimento, concebemos que em algum nível o professor pode intervir. O primeiro passo é entender o problema em profundidade, a fim de ter subsídios para desenhar estratégias para atuar sobre ele. O mais importante é aprender profundamente sobre o obstáculo epistemológico, o que pode ser feito identificando e analisando os erros que são vivenciados pelos alunos. Ter esse conhecimento profundo dos obstáculos de bases epistemológicas inerentes aos números inteiros permite ao professor planejar suas aulas de acordo com as necessidades de seus alunos.

Concluimos que os professores podem ajudar seus alunos a superar obstáculos ao seu aprendizado por meio da diversificação das metodologias de ensino, o que, aliás, é uma exigência da atual fase da educação brasileira, que demanda uma formação voltada para o desenvolvimento de competências, ou seja, saber manifestar conhecimentos, aptidões, valores, para resolver os problemas inerentes à vida em sociedade. Para atingir este objetivo, a escola deve (é um termo que devemos usar com cuidado, mas, neste caso, não vemos outro mais adequado) oferecer um ensino que seja cada vez mais baseado em metodologias que coloquem o aluno em ação.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, Gerson Silva. **Teoria das situações didáticas e suas influências na sala de aula**. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, v. 6, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7303_4383_ID.pdf. Acesso em: 15 de out. 2019.
- BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Editora Blucher, 1974.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- BRASIL, Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 26 jan. 2022.
- BROUSSEAU, Guy. **Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: Didactico/Didactic to Algebra Study**. Libros del Zorzal, 2007. Disponível em: http://www.udesantiagovirtual.cl/moodle2/pluginfile.php?file=%2F204043%2Fmod_resource%2Fcontent%2F2%2F287885313-Guy-Brousseau-Iniciacion-al-estudio-de-la-teoria-de-las-situaciones-didacticas-pdf.pdf. Acesso em: 26 jan. 2022.
- BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e metodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.
- CHAGAS, Juliana. **Ensino-aprendizagem de números inteiros negativos: uma perspectiva histórico-cultural**. Orientador: Vera Lucia Fazoli da Cunha Freitas Viana. 2007. 89 p. Monografia (Mestrado) - Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos, [S. l.], 2007. Disponível em: http://licenciaturas.centro.iff.edu.br/cursoslicenciatura/licenciatura-em-matematica/trabalho-de-conclusao-de-curso/2007/ensino-aprendizagem-de-numeros-inteiros-negativos-uma-perspectiva-historico-cultural/at_download/file. Acesso em: 9 dez. 2019.
- FELIPE, Jane. O desenvolvimento infantil na perspectiva sociointeracionista: Piaget, Vygotsky, Wallon. In: CRAIDY, Carmem. M.; KAERCHER, Gladis. E. P. S. (orgs.). **Educação Infantil: pra que te quero**, p. 27-37, 2001.
- GOMES, Marcelo dos Santos. **Gamificação e Educação Matemática: uma reflexão pela óptica da Teoria das Situações Didáticas**. 2017. 96 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.
- GONÇALVES;CHIARATTI; RICIERI. **Psicologia da Educação**. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2014.

HILLESHEIM, Selma Felisbino; MORETTI, Mércles Thadeu. A regra dos sinais: alguns elementos importantes do seu contexto histórico. In: BRANDT, Celia Finck; MORETTI, Mércles Thadeu (org.). **Ensinar e aprender matemática**: possibilidades para a prática educativa. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016. p. 233-254. Disponível em:

<https://books.scielo.org/id/dj9m9/pdf/brandt-9788577982158-12.pdf>. Acesso em: 26 jan. 2022.

JACON, Miriam de Souza. **Um estudo sobre as dificuldades de alunos do ensino fundamental em adição e subtração de números inteiros**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/7349>. Acesso em: 20 mar. 2020.

MEDEIROS, Alexandre; MEDEIROS, Cleide. Números negativos: uma história de incertezas. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. 7, n. 8, p. 49-59, 1992. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10694/70>. Acesso em: 05 de nov. 19.

NETO, Elias Galdino; VICTER, Eline das Flores. Os números negativos no universo escolar. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 6. 2013. Canoas, RS. **Anais do VI CIEM**, 2013. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/view/805>. Acesso em: 15 nov. 2019.

NILO, Priscila Farias. **A História da Matemática e os Números Negativos**. 2013. Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/123456789/956>. Acesso em: 05 de nov. 19.

OLIVEIRA, Joselba Liliane; ARRUDA, Aline Mendes de; SILVA, Fernando Carneiro da; CAMARGO, Joseli Almeida. Os Conceitos de erro, obstáculo e contrato didático segundo Guy Brousseau, **III EIEMAT**: Escola de Inverno de Educação Matemática. 2012. Disponível em: http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/PO/PO_Oliveira_Joselba.pdf. Acesso em: 19 de abr. 2019.

PIAGET, Jean. **Genetic Epistemology**. New York; The Norton Library, 1971.

POMMER, Wagner Marcelo. **Brousseau e a ideia de Situação Didática**. SEMINÁRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA, São Paulo: FEUSP, 2008. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/296483624_Brousseau_e_a_ideia_de_Situacao_Didatica. Acesso em 26 jan. 2022.

RICARDO, Elio; SLONGO, Ione; PIETROCOLA, Maurício. A perturbação do contrato didático e o gerenciamento dos paradoxos. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 8, n. 2, p. 153-163, 2016. Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/545>. Acesso em 26 jan. 2022.

SÁ, P. F.; ANJOS, L. J. S. Números negativos: uma trajetória histórica. SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 9. 2011. **Anais...** Aracaju, 2011. Disponível em: http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1_S%C3%A1_P_F_N%C3%BAmeros_Negativos_Uma_Trajet%C3%B3ria_Hist%C3%B3rica.pdf. Acesso em 26 jan. 2022.

SILVA, Fabrícia Lúcia Costa Ferreira da. **Analisando contribuições da teoria das situações didáticas no ensino e na aprendizagem da estatística e das probabilidades no ensino fundamental**. 2015. 162 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2015. Disponível em: <http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/5723>. Acesso em: 26 jan. 2022.

SILVA, Nilson Alves; FERREIRA, Marcos Vinícius Vieira; TOZETTI, Karla Dubberstein. Um estudo sobre a situação didática de Guy Brousseau. In: CONGRESSO NACIONAL DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES. 2015. **Anais...** p. 19951-19961. Disponível em: https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/18159_8051.pdf. Acesso em: 26 jan. 2022.

STEWART, Ian. **Em busca do infinito**: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.