



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

CAROLINA RODRIGUE DE SOUZA

**O FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA EM UMA ATIVIDADE SOBRE
SIMETRIA NA NATUREZA**

CAROLINA RODRIGUE DE SOUZA

**O FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA EM UMA ATIVIDADE SOBRE
SIMETRIA NA NATUREZA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, campus de Castanhal, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Licenciada em Matemática, sob orientação da Profa. Dra. Roberta Modesto Braga.

CAROLINA RODRIGUE DE SOUZA

**O FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA EM UMA ATIVIDADE SOBRE
SIMETRIA NA NATUREZA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática do Campus de Castanhal da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção de título de Licenciada em Matemática.

Castanhal/PA, 09 de dezembro de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Roberta Modesto Braga
Presidente – Orientadora - UFPA

Profa. Dra. Kátia Liége Nunes Gonçalves
Avaliadora interna

Prof. MsC. André Alves Sobreira
Avaliador Externo - SEDUC

DEDICATÓRIA

À Minha Família. Especialmente minha mãe Maria Rodrigues e aos meus tios Rosa Maria e Adonias Pereira, maiores incentivadores e exemplos de vida.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela força e crescimento pessoal desenvolvidos durante esses quatro anos, pois sem a fé, proteção e esperança de dias e resultados melhores, jamais chegaria onde cheguei.

Agradeço também a todos meus familiares que foram e são meus maiores inspiradores e incentivadores, aos meus pais Maria Rodrigues e William Souza, meus tios Rosa Maria e Adonias que embarcaram no nosso sonho e saíram do conforto de nossas residências para dar suporte e acompanhar de perto a nova rotina.

Aos meus irmãos, William Jr, Amanda e Paulo que permaneceram no nosso lar de origem, mas que em momento algum deixaram de incentivar e demonstrar orgulho das pequenas conquistas e evolução.

Aos meus primos/ irmãos Izabella Karen, Júlio Douglas e Quêlvia que além de serem inspirações, acompanharam de perto todos os dias de lutas e glórias, embarcamos com os mesmos objetivos e retornaremos as origens com o dever de papel cumprido, cada um com seu diploma em mãos e experiências adquiridas que nos fazem pessoas melhores e agradecidas pelas oportunidades e esforço dos familiares para a conquista.

À minha amiga de turma Paula Lourena, que durante esses quatro anos, me ensinou muito o valor de uma amizade, o apoio e parceria nos estudos e na vida pessoal, fizeram uma grande diferença.

À minha Orientadora Prof.^a Dra. Roberta Modesto, por todo incentivo, oportunidades e exemplo de profissional e mulher.

A todos que contribuíram e participaram das atividades desenvolvidas no Laboratório Experimental de Modelagem Matemática (LEMM), espaço norteador do trabalho desenvolvido.

Aos colegas de classe, que contribuíram com meu desenvolvimento durante atividades e principalmente comportamentais em meio a tantas ideias e diferenças pessoais.

A todos que de forma direta e indiretamente ajudaram e torceram pela realização de um dos meus sonhos.

Obrigada.

Seja forte e corajoso!

(Josué 1:9)

RESUMO

O presente trabalho surgiu da necessidade de se pensar a Modelagem Matemática enquanto estratégia metodológica no ensino da Matemática, desenvolvida dentro de um contexto estudantil que descreve e lida com problemas reais. O trabalho objetivou discutir o fazer Modelagem Matemática do curso de Licenciatura em Matemática. Esta pesquisa é de cunho qualitativo, realizada com um grupo de 13 estudantes, todos discentes do curso de Licenciatura em Matemática, no contexto de um curso de Modelagem Matemática desenvolvidos no âmbito do Laboratório Experimental de Modelagem Matemática (LEMM). Usando tecnologias manuais e digitais, buscamos expor a matemática presente na resolução do problema simetria na natureza, trabalhando com um elemento natural: flores. Dentro das condições e ferramentas disponíveis o software Geogebra foi uma ferramenta potencialmente significativa para o processo de Modelagem Matemática, pois facilitou a obtenção dos resultados e demonstração de simetria ou não simetria das flores sorteadas.

Palavras-chaves: Modelagem Matemática, Geogebra, Simetria na natureza.

ABSTRACT

This paper arose from the need to think about Mathematical Modeling as a methodological strategy in the teaching of Mathematics, developed within a student context that describes and deals with real problems. The work aimed to discuss the mathematical modeling of students, in initial education. This research is qualitative, conducted with a group of 13 students, all students of the Mathematics Degree course, in the context of a Mathematical Modeling course developed within the Experimental Laboratory of Mathematical Modeling (LEMM). Using manual and digital Technologies, we seek to expose the mathematics present in solving the symmetry problem in nature, working with a natural element: flowers. Within the available conditions and tools the Geogebra software was a potentially significant tool for the Mathematical Modeling process, as it facilitated the obtaining of results and demonstration of symmetry or non-symmetry of the selected flowers.

Keywords: Mathematical Modeling, Geogebra, Symmetry in nature

LISTA COMPARTILHADA (FIGURAS, IMAGEM, TABELAS, EQUAÇÕES E GRÁFICOS)

IMAGEM 1: Flores sorteadas para as equipes	27
IMAGEM 2: Comprimento das medidas de cada pétala da flor.....	30
IMAGEM 3: Medidas da área das pétalas	32
IMAGEM 4: Divisão das pétalas por meio da associação com um pentágono.....	34
IMAGEM 5: Representação dos pontos médios dos segmentos de cada pétala.....	34
IMAGEM 6: Resultado final da simetria na flor	36
IMAGEM 7: Representação de medidas encontradas versus medidas perfeitamente simétricas.....	36
IMAGEM 8: Resultado da simetria da flor Petúnia mexicana.....	38
TABELA 1: Medidas dos comprimentos das pétalas	31
TABELA 2: Razão de semelhanças das pétalas.....	31
TABELA 3: Área dos triângulos inseridos em cada pétala.....	32
TABELA 4: Valores aproximados da razão de semelhanças entre a áreas dos triângulos tracejados nas pétalas da flor.....	32
TABELA 5: Representação dos pontos de reflexão.....	35

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
SEÇÃO I – MODELAGEM MATEMÁTICA	13
1.1 Modelagem no cenário da Educação Matemática.....	13
1.2 Modelagem e Modelos na matemática	Error! Bookmark not defined.16
SEÇÃO II – MODELAGEM MATEMÁTICA E O USO DE TECNOLOGIAS	Error! Bookmark not defined.19
2.1. Modelagem Matemática e tecnologias manuais	19
2.2. Modelagem Matemática e tecnologias digitais.....	21
2.3. Modelagem Matemática e o Software Geogebra.....	22
SEÇÃO III – METODOLOGIA DA PESQUISA	24
3.1. Caracterização da Pesquisa	24
3.2. Caracterização do lócus e sujeitos da pesquisa.....	25
3.3. Instrumentos de Coleta e de análise dos dados.....	26
SEÇÃO IV – DESCRIÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .	27
4.1. Descrição dos encontros	27
4.2. Discussão dos resultados das atividades por equipes	30
CONSIDERAÇÕES	40
REFERÊNCIAS	42
APÊNDICES	45

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de atividades diferenciadas de Matemática nos diferentes níveis de ensino tem ganhado destaque em eventos e periódicos nacionais e internacionais, bem como em livros, sempre com a justificativa de contraposição ao ensino apresentado sem diferencial. Nesse contexto, a Modelagem Matemática está presente a mais de três décadas. Por esse motivo, entra a reflexão sobre pensar que cursos de Licenciatura em Matemática abranjam o fazer Modelagem Matemática a partir de problemas diversos de sala de aula, ou em ambientes que possibilitem tal prática, como o caso do Laboratório Experimental de Modelagem Matemática (LEMM).

No entanto, abordar conceitos matemáticos e estruturá-los em condições de uso para a obtenção de resultados dentro da Modelagem Matemática ainda é um desafio. Desafio este que propulsiona a atividade desenvolvida neste estudo, sendo da competência do modelador com orientação da professora e pesquisadora, estabelecer métodos, pesquisar e relacionar o conteúdo estudado com práticas do próprio cotidiano, afim de aproximar o que ele já compreende com o que ele precisa compreender. Essa possibilidade pode ser interpretada sob várias perspectivas, como o caso em que Braga (2009) coloca que:

Modelagem Matemática, enquanto estratégia de ensino e aprendizagem, para alcançar suas metas deve introduzir tanto um momento de plenitude imaginária, na qual as situações são percebidas como atraentes, quanto um momento de reflexão sustentada, na qual os problemas são percebidos como enfrentáveis (p.58)

Nessa linha de entendimento é que organizamos para esta pesquisa uma atividade de Modelagem Matemática com o tema Simetria na natureza, especificamente simetria encontrada nas flores. A mesma foi desenvolvida no LEMM, do Campus Universitário de Castanhal- PA, com um grupo de treze (13) participantes, todos discentes de Licenciatura em Matemática que voluntariamente se inscreveram num curso de Modelagem Matemática no contra turno de suas aulas regulares. A pesquisa realizou-se em 4 semanas, divididas por etapas, desde o sorteio do material a se usar até a socialização dos resultados finais por equipe.

Nesse contexto, nos interessou saber: *Que elementos são constituintes do fazer Modelagem Matemática por estudantes do curso de Licenciatura em Matemática?* Nessa assertiva, objetivamos com este trabalho de modo geral *discutir*

o fazer Modelagem Matemática dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática.

A atividade analisada foi produzida por três equipes composta com os alunos participantes, e foi construída com base em Almeida, Silva e Vertuan (2012), que ao se referirem a uma atividade de Modelagem Matemática, destacam as fases de abordagem, a saber: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação. O objetivo da atividade foi identificar a simetria presente nas flores sorteadas e durante a elaboração, destacamos as habilidades de pesquisa, senso crítico para solução do problema e as ferramentas matemática utilizadas, onde cada equipe desenvolveu seus métodos e obteve seus resultados.

Diante da matematização, a geometria foi um dos primeiros passos ao quais as equipes recorreram, uma vez que as mesmas associaram e dividiram suas flores em figuras geométricas, para então recorrer a outros passos, como por exemplo, ponto médio e área das partes representadas pelas figuras. Então a atividade possibilitou a observação de formas presentes na natureza, com identificação de características das figuras geométricas, percebendo semelhanças e diferenças entre elas, por meio da decomposição, composição e simetria.

Dividido em quatro seções, o trabalho apresenta na primeira seção: a introdução e vantagens da Modelagem Matemática inserida da educação da própria matemática.

Na segunda seção: a utilização dos conceitos e aplicações que geram modelos capazes de suprir e representar a solução para diversos problemas, a utilização de recursos, sejam tecnológicos ou manuais como ferramentas de construção dos processos da modelagem, o software Geogebra.

Na terceira seção: Explana-se a metodologia utilizada, com destaque aos resultados oriundos de uma pesquisa qualitativa.

Na quarta e última seção: Descrição e discussão do passo a passo do desenvolvimento da atividade e os resultados finais de cada equipe, afim de identificar a simetria encontrada, seguida das considerações do trabalho.

I. MODELAGEM MATEMÁTICA

A primeira seção do trabalho, vem apresentar dentro das teorias de alguns autores, a Modelagem no cenário dos conhecimentos matemáticos, bem como a compreensão de modelos na Matemática, relevância da Modelagem Matemática no cenário da educação, a relação teórico-prática dos conhecimentos diversos adquiridos e aplicados e a importância do modelo matemático para a fundamentação e desenvolvimento da atividade em questão.

1.1 Modelagem no cenário da Educação Matemática

O cenário de ensino, técnicas e metodologias para a compreensão e desenvolvimento da matemática têm sido objeto de grandes transformações, de modo que a quebra da complexidade e abstração se dão de forma coerente com o comprometimento do ensino e aprendizagem da disciplina.

Os conhecimentos matemáticos, se fazem presente no nosso cotidiano nas diversas formas e aspectos, com efeito, desenvolver e aprimorar novas formas de ensinar, aprender e lidar com a disciplina são fatores crescentes e positivos para o indivíduo que transita entre a dicotomia teoria e prática. Muito se discute sobre a associação teoria e prática, no entanto, favorecer essa associação de modo a conquistar uma aprendizagem com significado não constitui tarefa trivial. Dessa premissa, apontamos a Modelagem Matemática como estratégia de ensino capaz de favorecer essa associação.

No entanto, ao falarmos de modelagem, faz-se necessário pontuar a pluralidade do conceito e do entendimento desta atividade dentro da academia. Destacamos a de Bassanezi (2002), que enfatiza a construção de modelos matemáticos; a de Borba, Meneghetti e Hermeni (1997) que coloca em destaque a escolha do problema pelos alunos; a de Barbosa (2001) que evidencia o envolvimento dos alunos em situações problemáticas com referência na realidade; e a de Braga (2009) que compreendida como estratégia de ensino aguça a imaginação ao mesmo tempo que convida o estudante para o enfrentamento dos problemas percebidos.

Ainda segundo Bassanezi (2002), “a modelagem aplicada ao ensino pode ser um caminho para despertar maior interesse, ampliar o conhecimento do aluno e auxiliar na estruturação de sua maneira de pensar e agir” (p.18), esta visão que une o

interesse da matéria ao interesse do aluno norteará as proposições apresentadas neste trabalho.

Sendo assim, a Modelagem Matemática entra no cenário estudantil como uma estratégia e recorrência para o resgate de elaboração e organização de pensamentos e metodologias, possibilitando tomadas de decisões para resolução de problemas, uma vez que é competência do modelador estabelecer caminhos estratégicos e matemáticos para a validação do objeto de estudo, por esses motivos é que a modelagem vem ganhando espaço e visibilidade, pois permite e provoca a obtenção de uma relação com os diversos conhecimentos de um indivíduo em desenvolvimento e associação com a matemática.

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem real. (BASSANEZI, 2011, p. 24).

A matemática como disciplina, se mantém em evidência seja na busca de atualizações quanto a sua utilização como na compreensão de seus conceitos, uma vez que trabalhar com matemática é um processo contínuo e enriquecedor, pelo seu caráter de disciplina base, a mesma se integra as demais ciências e se faz presente em nosso cotidiano.

No caso específico da matemática, é necessário buscar estratégias alternativas de ensino-aprendizagem que facilitem sua compreensão e utilização. A modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transforma-la. (BASSANEZI, 2002, p.37)

De tal maneira, mencionar a Modelagem Matemática, com técnicas alternativas e resgate de investigação, ação e tomada de decisão sobre determinado assunto, de certa forma é um desafio para o estudante/ pesquisador que normalmente não é instigado a pesquisar, elaborar estratégias e solucionar problemas distintos com liberdade e diversidade que a matemática atrelada a modelagem oferece. É uma estratégia de ação com reflexo na criatividade de produção, pensamento e soluções para o desenvolvimento de atitudes relacionadas aos conhecimentos matemáticos.

Temos aqui uma forte relação da Modelagem Matemática com a criatividade. Entendida aqui como a capacidade de produzir novas ideias, abordagens ou ações, que pode iniciar com uma curiosidade e partir para atividades de inteiração e experimentação.

A concepção de Modelagem Matemática de Borba, Meneghetti e Hermini (1997), destaca diretamente o aluno/pesquisador, salientando seu lugar de destaque no processo de modelagem. Segundo os autores, “a Modelagem pode ser vista como o esforço de descrever matematicamente um fenômeno que é escolhido pelos alunos com o auxílio do professor”. Podemos perceber aqui a ideia que perpassa todas as perspectivas – descrever um fenômeno matematicamente – a participação do estudante na escolha desse fenômeno é tida como primordial. Na matemática aplicada, por exemplo, não importa muito quem propõe o problema: a preocupação maior está em resolvê-lo, o que mostra, mais uma vez, as transformações vivenciadas pela modelagem em um ambiente de ensino e aprendizagem.

Considerando-se que a aprendizagem, por meio da modelagem, facilita a elaboração e compreensão de diferentes facetas da Matemática com foco em sua aplicabilidade nas mais variadas situações da realidade novas alternativas se fazem necessárias e eficientes, no sentido de mostrar as aptidões pessoais desenvolvidas pelo aluno, no âmbito integral de sua formação escolar e contexto social.

A Modelagem Matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente. Isso porque é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações - problema por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico. (BIEMBENGUT; HEIN, 2007, p.18).

Com efeito, podemos compreender a Modelagem Matemática como um ambiente de conhecimentos no qual os investigadores/alunos são instigados a produzir criativamente diante de diversas situações decorrentes da realidade, e integrada as demais áreas, se associando à conteúdos de diferentes disciplinas, podendo ampliar e resgatar conhecimentos absorvidos ao longo do seu processo de formação.

1.2 Modelagem e Modelos na matemática

A representação de conceitos, ideias e aplicações são dados por algum modelo, que expressa a ideia de contribuição, agregando a interpretação de algum problema ou situação, onde a sua utilização ocorre não apenas como ferramenta de comparação, mas como justificativa para tal objetivo a se demonstrar. D'Ambrósio (1996) considera modelo numa ampla acepção, denotando as representações simplificadas, mentais ou não, que os seres humanos fazem sobre realidade (ou suposta realidade).

Alguns autores têm se ocupado em representar os diversos tipos de modelos na educação científica, Gilbert, Boulter e Elmer (2000), por exemplo, classificam os modelos em termos de sua representação: concreto, o qual envolve materiais manipuláveis; verbal, que consiste de descrições de um sistema; visual, o que envolve gráficos, diagramas.. etc; gestual e finalmente, símbolo que consiste, de representações pictóricas, fórmulas, expressões matemáticas.

De acordo com Bassanezi (2012), “A modelagem é o processo de criação de modelos em que estão definidas as estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade, mais especificamente, sobre a sua realidade, carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador” (p. 28), ou seja, modelar é um desafio que pode gerar diferentes resultados dentro de realidades também diferentes, para um mesmo tema ou situação investigada, em que o modelo se forma a partir de um único assunto gerador, e resulta em diferentes novos modelos, onde cada autor se aventura para dar uma definição de modelo matemático.

Ainda para Bassanezi (2012) “cada assunto abordado, é desenvolvido e associado com o cenário e ferramentas que cada indivíduo convive e possui” (p.32), a modelagem trabalha ainda as habilidades e competências, ao colocar o aluno como protagonista do processo ensino-aprendizagem e construtor do seu conhecimento aplicado a realidade.

Por exemplo para McLone (1992) “um modelo matemático é um construto matemático abstrato, simplificado que representa uma parte da realidade com algum objeto particular” (p.20). Já o autor Ferreira Jr. (1993), diz que a modelagem “apresenta uma definição generalizada de modelo matemático a partir de uma abordagem abstrata dos conceitos básicos de dimensão, unidade e medida. (p.30)”.

Desse modo podemos associar esses conceitos de modelos supracitados, como visual e/ou simbólico.

Destacando então o modelo matemático dentro dos processos da modelagem, Bassanezi (2011) diz que:

A importância do modelo matemático consiste em se ter uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades, além de proporcionar um arsenal enorme de resultados (teoremas) que proporcionam o uso de métodos computacionais para calcular suas soluções numéricas (p.20).

Apesar de cada autor ter sua definição particular de modelo ou sobre modelos matemáticos, uma proposição é recorrente, a que compreende o modelo matemático como sendo uma representação da realidade ou parte dela fazendo uso da linguagem matemática.

Para Araujo (2002), “modelo é uma representação simplificada de uma situação concreta feita com o objetivo de compreender a situação e prever suas configurações futuras ou de situações semelhantes” (p.12-13). Decorrente do passo a passo seguido durante a modelagem, a escolha do modelo matemático pode ocorrer de forma que o seu objetivo seja alcançado com alterações para a própria adaptação do estudo, sendo possível a utilização de vários modelos, para justificar o feito e aproximação dos métodos utilizados ou que se pretende-se utilizar, a matemática une conceitos que formulam modelos abrangente para as demais áreas e estudos, dando a cada modelo características e funções para solucionar o problema de diversos estudos.

Nas pesquisas científicas, a matemática passou a funcionar como agente unificador de um mundo racionalizado, sendo o instrumento indispensável para a formulação das teorias fenomenológicas fundamentais, devido, principalmente, ao seu poder de síntese e de generalização. (BASSANEZI, 2011p. 19).

A utilização da modelagem na Educação Matemática valoriza o “saber fazer” do usuário, desenvolvendo sua capacidade de avaliar o processo de construção de modelos matemáticos nos diferentes contextos de aplicações dos mesmos, a partir da realidade, nos mais variados cenários, assim, Bassanezi (2011), nos diz que:

A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações

de um sistema ou parte dele. Na modelagem, o início é apenas o tema de estudo escolhido quando ainda não se tem ideia do conteúdo matemático que será utilizada. Nesse estágio colocamos para os iniciantes que quando não se tem nenhuma ideia do que fazer, comece “contando” ou “medindo” – com este procedimento, é natural aparecer uma tabela de dados e isto pode ser o começo da modelagem. [...] A formulação de modelos matemáticos é simplesmente uma consequência deste processo. (p.43)

Assim, a modelagem é representada pela elaboração a partir de conceitos, que formam e deduzem problemas quaisquer que podem ser representados matematicamente, de forma que o modelador não precisa seguir necessariamente passos de comandados para obtenção de resultados, sendo um processo livre e dependente da tomada de decisões procedimentais, partindo do pressuposto de que haverá uma proximidade com a realidade.

II. MODELAGEM MATEMÁTICA E O USO DE TECNOLOGIAS

A seção apresenta, os recursos utilizados durante a realização da atividade, destacando as tecnologias manuais e digitais, sendo processos distintos e complementares dentro da atividade em questão, enquanto desenvolvidos, já que os participantes utilizaram em determinados momentos técnicas manuais e substituíram por técnicas computacionais, destacando a utilização do software Geogebra como ferramenta de construção. Desse modo,

pode-se dizer então que as tecnologias funcionam como uma bomba propulsora da transformação que está ocorrendo no mundo e obviamente na educação, mas não devemos deixar que estas sejam o motivo para transformar o ensino e a aprendizagem, pois elas propiciam apenas meios para o novo cenário (BRAGA, 2009, p.56)

As tecnologias defendidas aqui como meio e não como fim, são entendidas como ferramentas capazes de proporcionar uso de técnicas e conhecimento. Significa dizer que desde os primórdios das civilizações o homem já inventava tecnologias, como exemplo a roda. Desse modo, podemos separar no âmbito da educação as tecnologias manuais, como o caso da régua, compasso, etc; das tecnologias digitais como o caso de computadores, softwares e etc.

2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS MANUAIS

A utilização da Modelagem Matemática dentro de qualquer cenário científico-estudantil, apresenta e gera muitas possibilidades de desenvolvimento e resolução, cabendo ao modelador estabelecer o método, os objetivos e técnicas a serem utilizados, uma vez que a liberdade e diversidade de recursos são representantes na questão de quantidade.

Dependendo da realidade e disposição de ferramentas, podemos desenvolver e associar resultados válidos por diversos caminhos através de diferentes métodos, seja com recursos tecnológicos ou simplesmente manuais, diferidos da precisão e facilidade de recorrência de ferramentas prontas para o uso - software- com a utilização da tecnologia e manualmente com processos mais demorados, e ativos no sentido de elaboração para cada passo a ser seguido, ressaltando o cuidado com os dados gerados já que os erros manuais tendem a ser maiores, e os computacionais, tendem a ser mais precisos e próximos das constantes encontradas.

A Modelagem Matemática no seu processo de construção, conta com o envolvimento do participante na tomada de decisão para recorrência de ferramentas

afim de solucionar o problema em questão, diante disso, o modelador tem em sua disposição o universo tecnológico e diversas ferramentas manuais capazes e aptas para essa construção, dependendo principalmente do modelador ao manusear a seu favor com conhecimentos matemáticos para a construção do seu modelo. BASSANEZI (2006) afirma que:

o modelo matemático é obtido quando ocorre a substituição da linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente, pois como em um dicionário, a linguagem matemática admite “sinônimos” que traduzem os diferentes graus de sofisticação da linguagem natural. (p.29).

E nesse constructo o estudante pode recorrer a tecnologias manuais, como o caso de régua, compasso, lápis, para esboçar o entendimento matemático daquela realidade, ao mesmo tempo em que traça estratégias para sua resolução. A recorrência a tecnologias manuais pode estar associada de forma mais imediata tal como o aluno entendeu na sua imaginação. Entende-se aqui tecnologias manuais como sendo aquelas relacionadas ao fazer manual. Associada até mesmo com as relações iniciais, ferramentas manuais que remetem um passado da história da Matemática em que originalizam várias dessas ferramentas que hoje aprimoramos e utilizamos de forma menos complexas e modificadas para a atualidade.

O “uso de fontes primarias geradoras de uma reflexão na dialética entre o presente e o passado cuja contribuição se configura na compreensão da própria produção humana” (SAITO; DIAS, 2011, p. 9) pode resgatar mesmo que de forma não intencionada, as ferramentas manuais, ainda sim desempenham grande importância no cenário modificado em prol da evolução tecnológica e como consequência, tais ferramentas podem ser articuladas em ambiente de ensino e aprendizagem com a mesma intenção. Ou seja,

o professor não só pode, como deve apoderar-se de toda e qualquer contribuição coadjuvante (outras estratégias, recursos, etc.) para somar ao processo de Modelagem Matemática, e que neste ambiente o aluno pode acertar errando, construir desconstruindo, conhecer desconhecendo, constatando, diagnosticando, interpretando, validando, e, por meio destas ações, construir o conhecimento (BRAGA, 2009, p.58)

Nesse ambiente de muitas possibilidades, entendemos que “reconhecer o velho que continua novo e adotar o novo associando-o ao velho, diz respeito a estratégias (ou recursos, aparatos) de ensino que proporcionem adequadamente uma

aprendizagem de qualidade” (Ibdem). Parafraseando a autora, podemos fazer uma associação do “velho” com o que chamamos de tecnologia manuais e o “novo” como tecnologias digitais. E ambas podem atuar complementarmente num processo de Modelagem Matemática.

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS

Uma vez compreendida que qualquer tecnologia pode ser útil no processo de Modelagem Matemática, pontuamos nessa seção que as tecnologias digitais são entendidas “como componentes físicos, representados pelo computador e pela informática, que promovem o contato entre o homem e o meio em que ele vive, mediados por ambientes digitais, estabelecendo assim, um sistema virtual de ação e reação imediata” (MENEZES, ESPÍRITO SANTO e BRAGA, 2017, p. 13). Isso inclui massivamente o uso de softwares.

Seja na vida estudantil ou para além dela, vivemos um universo modificado, onde a tecnologia digital está presente em todo ambiente, o acesso a computadores e celulares conectados com a internet, constituem o que chamamos hoje de era digital, onde diversos aplicativos e informações estão disponíveis e em fácil alcance aos seus usuários, tanto para o entretenimento quanto para solucionar e facilitar diversos trabalhos e ações cotidianas. Em se tratando da introdução das tecnologias na educação e no desenvolvimento da Modelagem Matemática, Borba (1999, p. 298) destaca que “no contexto da Educação Matemática, o uso dos aplicativos da informática dinamizam os conteúdos e potencializam o processo pedagógico”.

Machado e Santos (2004) expõem que:

As tecnologias da informação, que se vêm consolidando com o aperfeiçoamento dos meios de comunicação em conjunto com a informática, fornecem amplas perspectivas para a melhoria das práticas educacionais, disponibilizando novos recursos para a atuação do professor e para que o educando possa reelaborar a informação de forma ativa e criativa, expressando um trabalho de reflexão pessoal. (MACHADO; SANTOS, 2004, p.75)

O uso de software se destaca com bastante relevância uma vez que proporciona amostra de dados com uma aproximação maior da realidade, facilitando processos interativos, diferentemente dos processos manuais, que além de imprecisos e estáticos, apresentam possíveis aberturas para as falhas humanas,

sejam nas coletas e medidas que muitas vezes não apresentam exatidão, e criam uma maior margem de erro para o caso estudado.

Calil (2011), cita o software como um artefato, “um instrumento que possui vários esquemas de uso e que, portanto, deve ser analisado pelo professor”. (pg. 23). No entanto, é preciso que a escolha pelo docente seja resultado de um planejamento didático-pedagógico, analisado com cuidado para que se possa atingir os objetivos de aprendizagem de determinado conteúdo matemático.

A utilização de softwares relacionados ao ensino e aprendizagem deve-se à capacidade de a maioria executar os mais diversos conteúdos matemáticos de forma dinâmica, fazendo com que o aluno enxergue o conteúdo sob diversos ângulos, aguçando seu espírito de observação e de pesquisa: “visam oportunizar a motivação e apropriação do conteúdo estudado em sala de aula” (SANTOS, LORETO GONÇALVES, 2010, p.48)

A construção de um olhar sobre a Matemática, que mesmo que abordada isoladamente gere resultados, se sobressai quando associada com ferramentas que desperte o interesse e gere um envolvimento positivo, já que sua utilização corresponde e gera habilidades matemáticas diferentes das apresentadas em sala de aula de forma tradicional.

2.3 Modelagem Matemática e o Software Geogebra

O software Geogebra¹ oferece ao pesquisador/estudante inúmeras possibilidades de soluções e amostras com ferramentas prontas para ajustar, demonstrar e resolver diversos problemas, sendo um aplicativo dinâmico, onde seus usuários encontram nas suas diversas possibilidades, métodos diferentes para a resolução de problemas. Por ser um Software livre, o seu uso ganhou espaço no ambiente escolar, dado a sua facilidade de uso em computadores ou celulares, bem como uma interface didática e acessível.

Hohenwarter (2009) destaca que no Geogebra as representações de um mesmo objeto estão ligadas de modo dinâmico e adaptam-se de modo automático às

¹ É um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. <https://www.geogebra.org/about>

mudanças realizadas em qualquer uma delas, não importando como esses objetos foram criados.

Ao fazer uso do software Geogebra o professor poderá possibilitar à solução de problemas ligados a vivência do estudante, por meio de Tendências Metodológicas, como o caso da Modelagem Matemática, podendo o estudante dessa forma realizar análises, debates, conclusões, questionamentos, etc., tão importantes para a construção dos conceitos matemáticos em um menor tempo. Assim destacamos o pensamento de Vaz (2012):

No Geogebra podemos contemplar geometria e álgebra dinamicamente, interagindo entre si na mesma tela, possibilitando ao usuário relacionar as várias faces de um mesmo objeto matemático. Permite trabalhar conceitos do ensino fundamental, médio e superior e realizar construções matemáticas diversificadas a alterá-las após a construção ser finalizada. Esse dinamismo possibilita que o aluno perceba diversas relações entre os objetos matemáticos, faça conjecturas e até mesmo formalize os resultados, de forma visual, no próprio software. (p. 40)

Assim, dentro do contexto tecnológico, abordando o Geogebra como uma ferramenta para o desenvolvimento da Modelagem Matemática, ganha espaço no sentido de contribuição que o mesmo oferece ao realizar de forma prática as soluções para procedimentos longo e a praticidade encontrada ao utilizá-lo, sendo acessível e conveniente no aspecto de desenvolver recursos capazes de expressar visualmente o que a matemática pode representar dentro do contexto.

III. METODOLOGIA DA PESQUISA

Esta seção apresenta a caracterização da pesquisa, bem como do lócus e sujeitos da pesquisa, além da organização das fases que constituíram o processo de modelagem matemática desenvolvido com os sujeitos a partir do tema Simetria na Natureza. Os instrumentos de coleta e análise de dados foram pensados no intuito de responder à questão de pesquisa: *Que elementos são constituintes do fazer Modelagem Matemática por estudantes do curso de Licenciatura em Matemática?* De tal modo que o objetivo de *discutir o fazer Modelagem Matemática dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática* fosse alcançado.

3.1 Caracterização da Pesquisa

Essa seção dedica-se à apresentação da metodologia na qual se sequenciou o trabalho, considerando que os processos de fundamentação desta pesquisa foram divididos em quatro etapas. A investigação que aqui se propõe, realiza-se a partir de uma pesquisa qualitativa, segundo Goldenberg (1999), “pelos métodos qualitativos podemos observar, diretamente, como cada indivíduo, grupo ou instituição experimental, concretamente, a realidade pesquisada” (p. 21).

Segundo Fraser e Gondim (2004):

Na abordagem qualitativa, o que se pretende, além de conhecer as opiniões das pessoas sobre determinado tema, é entender as motivações, os significados e os valores que sustentam as opiniões e as visões de mundo. Em outras palavras é dar voz ao outro e compreender de que perspectiva ele fala. (p. 8).

Para tanto, antes da análise pretendida, convém estabelecermos as linhas básicas adotadas, de modo que definimos como principal objetivo ao desenvolver a atividade, registrar, observar e analisar os recursos utilizados, considerando os conceitos e aplicabilidades dentro da Modelagem Matemática e como os estudantes relacionam o tema Simetria na natureza com conhecimentos e estratégias Matemática a partir da modelagem.

A atividade denominada Simetria na Natureza com a utilização do Geogebra, teve por objetivo identificar a simetria presente nas características das flores sorteadas. De tal modo que as fases do processo de Modelagem Matemática utilizado

foram referentes as descritas por Almeida, Silva e Vertuan (2012), a Saber: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.

A primeira fase atendeu a inteiração, em que o estudante deve se familiarizar com o tema escolhido para o início do processo de Modelagem. Importante destacar que o tema foi proposto aos estudantes, onde cada grupo recebeu a imagem de uma flor distinta.

Ainda nessa fase, os participantes formularam suas estratégias de recorrência e sob observação, seguiram e criaram roteiro estabelecidos por eles mesmo. Nessa fase a modelagem começou a se caracterizar, pois os mesmos pesquisaram e fizeram leituras sobre o tema comum: “simetria na natureza”. Observamos a forma que organizavam suas informações e como as utilizavam.

Na segunda fase, observamos que as equipes, já haviam coletado as informações de medidas para seus estudos, tabelas, e esboçado imagens tracejadas. Com as ferramentas manuais e posteriormente no Geogebra, ou seja, coletaram os dados que consideraram relevantes e descreveram de forma matematizada. Na sequência, a terceira fase devido a resolução que envolveu a constatação ou não da simetria, com as devidas argumentações matemáticas.

Na quarta e última fase, aglutinou a interpretação dos resultados e validação do modelo obtido pelos grupos, correspondendo aos resultados finais, precedidos da socialização, onde então cada equipe chegou em um modelo para seus casos de estudo, seguindo métodos diferentes, porém com objetivo comum, demonstrar matematicamente através da modelagem a simetria ou não das flores trabalhadas.

3.2 Caracterização do lócus e sujeitos da pesquisa

O lócus da pesquisa foi o Laboratório Experimental de Modelagem Matemática - LEMM², do Campus Universitário de Castanhal, da Universidade Federal do Pará. O LEMM enquanto espaço de aprendizagem tem como principal objetivo fomentar a iniciação científica a partir de temas de investigação em Modelagem Matemática. Oriundo de um projeto de pesquisa da professora Roberta Modesto Braga, docente da Faculdade de Matemática, inaugurado em 25 de outubro de 2013 e a partir de 17

² Inaugurado em 25 de outubro de 2013 e a partir de 17 de abril de 2018 passou a compor o projeto pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática do Campus.

Participaram da pesquisa 13 estudantes regularmente matriculados no curso de Licenciatura em Matemática, e que no contra turno se inscreveram no curso de Modelagem Matemática ofertado semestralmente no LEMM pela professora coordenadora do mesmo. A atividade observada teve duração de quatro encontros, as quartas-feiras, ou seja, um encontro por semana.

É importante destacar que a escolha de estudantes em formação inicial se deu pelo fato de que estudantes “universitários costumam ser bastante “tatuais”, ou seja, eles têm uma ânsia pela concretude das coisas, assim como a compreensão dos fenômenos” (BRAGA, 2009, p.53). E nesse sentido entendemos que “incentivar uma postura “experimentadora” em nossos alunos, e futuros professores, leva-nos a práticas crítico-reflexivas” (Ibidem).

3.3 Instrumentos de Coleta e de análise dos dados

Os dados produzidos no âmbito de quatro encontros do curso desenvolvido no LEMM, são devidos a registros escritos e digitais dos alunos, relatório dos grupos, registros em áudio-visual da socialização da atividade, bem como imagens e observações em diário de campo que ilustram o desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática desenvolvida.

A coleta de dados se deu de forma sequencial, na medida que as produções por equipe se tornaram descritivas, sendo registradas por observação direta sem interferência nos resultados apresentados a cada encontro.

Para contribuir com esta investigação a análise dos dados produzidos se deu a partir da organização sequência temporal de acontecimentos (descrição) para seleção de episódios significativos do desenvolvimento da atividade e interpretação conjuntamente com os autores discutidos neste trabalho para alcance do objetivo da pesquisa.

IV – DESCRIÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os resultados encontrados no presente estudo, são decorrentes do desenvolvimento da atividade com o tema Simetria na Natureza, desenvolvido através da análise de três modelos de flores distintas, a partir da descrição e objetivo discutidos em grupos de estudo.

A atividade de Modelagem Matemática norteadora do trabalho, teve início com a fundamentação dos processos da Modelagem, em artigos distintos, com referência em Burak (1998 e 2004) que descreve a Modelagem em cinco etapas orientadas pelo interesse do aluno ou do grupo e pelas necessidades do nível de ensino trabalhado, sendo elas: 1) escolha do tema; 2) pesquisa exploratória; 3) levantamento dos problemas; 4) resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema; 5) análise crítica das soluções.

E com referência em Almeida, Silva e Vertuan (2012), que organizam o processo de Modelagem Matemática por fases: 1) inteiração, 2) matematização, 3) resolução, 4) interpretação de resultados e validação. Esta última foi a organização utilizada por considerar que o tema Simetria na Natureza foi propositivo.

Cabe aqui salientar que modelar não se restringe a seguir passos de comando, seguindo um processo livre com práticas de dominâncias do indivíduo, ou seja, os resultados encontrados, revelam características que envolvem o meio, condições e ferramentas que o modelador está inserido e utilizou.

4.1. Descrição dos encontros

O **primeiro encontro (início do curso)** aconteceu no dia 09/10/2019, no qual os alunos tiveram primeiro contato com a modelagem, e puderam compreender de forma concisa o conceito e a realização do trabalho com a modelagem, após esse primeiro momento de mapeamento, passamos a apresentar a visão de alguns autores e esclarecer a autonomia de realização que a futura atividade teria ao ser desenvolvida, já que os processos tomam andamento de acordo com a tomada de decisão e métodos matemáticos utilizados, por conseguinte, discutimos alguns modelos prontos e observamos de qual forma ocorria a matematização e validação de tais modelos. Com a turma dividida em grupos socializamos em uma roda de conversa as ideias e o modelo que cada equipe escolheu para socializar.

No **segundo encontro (Escolha do tema e material)**, dia 16/10/2019, dividimos novamente a turma em três equipes de três alunos (equipe 1; equipe 2 e equipe 3), sendo correspondente ao número de participantes presentes no dia (9 alunos), e combinamos de acrescentar os membros ausentes, de forma igual para as equipes formadas, ficando assim cada equipe com quatro pessoas. Após a composição das equipes, fizemos sorteio de imagens de flores distintas (Imagem 1) e apresentamos o tema da atividade “ Simetria na natureza”, que foi comum a todos, diferenciando apenas a espécie de flor por equipe, de modo que o objetivo da atividade de Modelagem Matemática foi identificar a simetria presente nas características das flores sorteadas.

Imagem 1: Flores sorteadas



Fonte: Pesquisa de campo, 2019.

Após o sorteio, as equipes foram orientadas em relação ao objetivo da atividade e tiveram a liberdade de pesquisar e decidir sobre as ferramentas utilizadas. Inicialmente pesquisaram as características das suas respectivas flores: nome, espécie, formato e dimensão. Aos poucos e manualmente as equipes iniciaram o processo de identificação das medidas das flores, todos transferiram a imagem para o papel, em forma de desenho e passaram a olhar as medidas, e por coincidência as três equipes passaram a relacionar a simetria das pétalas com o formato geométrico das mesmas.

Percebemos que o primeiro passo da matematização que as equipes recorreram foi a geometria, para tal feito, utilizaram régua e compasso e permaneceram o restante do tempo pesquisando e trocando ideias com os membros da própria equipe.

No **terceiro encontro (Matematização do processo)**, dia 23/10/2019 as equipes retornaram com ideias mais concretas, os membros que estavam ausentes no encontro anterior, mostraram-se participativos e contribuíram com ideias positivas para o desenvolvimento da atividade, e o trabalho manual desenvolvido no encontro anterior, foi substituído pelo processo computacional.

As equipes 1 e 3 chegaram com seus trabalhos em processo de desenvolvimento no Software Geogebra, sendo que a equipe 1 que ainda estava com o trabalho em desenvolvimento manual, todavia, mudaram de estratégia, pois os integrantes da equipe haviam esquecido o material em casa e iniciaram novamente todo processo, porém dessa vez, com o auxílio do Geogebra.

Apesar de todos optarem pelo uso do software Geogebra, as equipes desenvolveram estratégias diferentes, assim que cada equipe montou suas estratégias para comprovar ou não a simetria da flor, pedimos que os processos utilizados fossem escritos pelos mesmos, neste caso, o processo de matematização.

Por conseguinte, em forma de relatório, eles passaram a descrever e verificar a presença dos conhecimentos matemáticos como ferramenta principal no processo. Notou-se que os alunos tiveram dificuldade de matematizar os dados, pois os mesmos apesar de haverem descrito todo o processo, ocultavam a matemática utilizada, daí reforçamos a ideia da matematização, eles entenderam e utilizaram o restante do tempo para essa organização.

No **Quarto encontro (Finalização da atividade com socialização dos resultados)**, dia 30/10/2019 as equipes chegaram com seus trabalhos finalizados, contando ainda com um tempo para os ajustes necessários e em então por ordem as equipes foram socializando os resultados. A equipe 1 concluiu que não havia simetria para sua flor, comprovando o processo por meio da porcentagem identificaram os índices de diferença de comprimento e largura entre as pétalas.

A equipe 2 mostrou um modelo, adequado aos padrões da classificação de simétrico ou não simétrico, e demonstrando a simetria de sua flor, explicaram os procedimentos e projetaram como seria se a flor tivesse medidas perfeitas, o que não foi distante da realidade encontrada. Já a equipe 3 trabalhou a simetria por pétalas individuais identificando algumas semelhanças, porém não identificaram as partes não semelhantes.

Durante a socialização cada equipe tirou as dúvidas que surgiram sobre os processos utilizados, como todos utilizaram o Geogebra e tomaram decisões

diferentes, levantaram pontos que enriqueceram a discussão, observando as demais funções e ferramentas matemáticas do software.

4.2. Discussão dos resultados das atividades por equipes:

Os resultados aqui apresentados, são devido as observações em diário de campo, bem registros feitos a partir da socialização da atividade e relatório final entregues, com duração de quatro encontros, correspondente ao mês.

Giovanni (2002) coloca que o conceito de simetria se refere à relação de dimensão ou disposição que um objeto tem com um eixo, ponto ou plano, e que pode estar também relacionada a equações matemáticas ou formas geométricas. Todavia, é comum associar uma figura simétrica a uma imagem espelhada dessa mesma figura. “Ao colocarmos um objeto qualquer diante de um espelho plano, reflete-se nele uma imagem simétrica do objeto, isto é, a imagem parece ser o próprio objeto.” (p. 69).

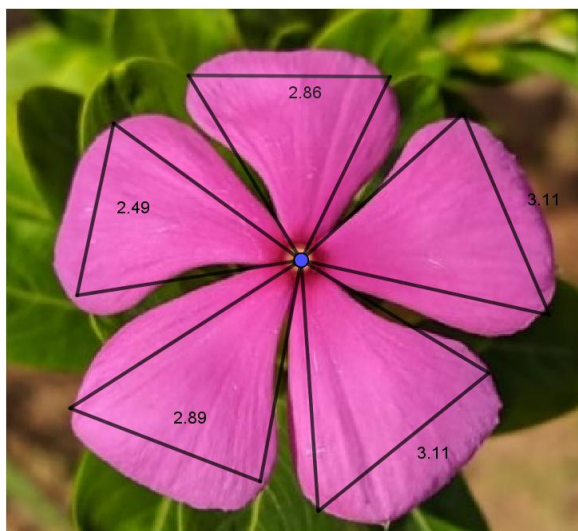
Dessa compreensão cada equipe desenvolveu suas estratégias, uso de ferramentas e destacamos então os resultados. A **Equipe 1**, composta por quatros estudantes, ficou com a flor: Boa noite.

Popularmente é conhecida como boa noite, vinca-de-Madagascar e maria sem vergonha. No entanto seu nome científico Catharanthus roseus. As folhas são opostas, brilhantes e ovalóides, medindo cerca de 2,5 a 9 cm de comprimento. E 1 a 3,5 cm de largura. (Relatório Equipe 1)

A equipe 1 que inicialmente já traçou processos computacionais desenvolvidos no Geogebra, realizou todo o processo de matemátização, e ao longo dos encontros, trabalhou a sua descrição, tentando provar a simetria da flor, com formação percentual a identificação das semelhanças entre as pétalas, tendo o cuidado de descrever matematicamente e não apenas visualmente de qual forma a não simetria acontecia, com efeito, percebendo que visualmente as pétalas apresentavam alguma semelhanças que não foram suficientes dentro do conceito de simetria. Antes, porém, a partir da flor Boa noite, esboçaram os seguintes passos:

Inserimos um polígono em cada pétala, de forma, que cada triângulo tocasse as bordas da pétala. Após isso medimos o comprimento do maior lado desses triângulos, utilizando a seguinte formula: $a^2 + b^2 = c^2$. Para chegar ao resultado da imagem abaixo realizamos o devido cálculo no programa Geogebra. (Relatório equipe 1)

Imagem 2: Comprimento das medidas de cada pétala da flor



Fonte: (Relatório Equipe 1) Pesquisa de campo,2019

Atente-se para o grifo ($a^2 + b^2 = c^2$) destacado no trecho do relatório da Equipe 1, apesar da argumentação para esta relação matemática, ficou demonstrado na socialização da equipe 1 a não utilização da mesma, quando na verdade optaram pelo recurso do Geogebra para tomar medidas de segmentos. Esse fato justifica-se pela necessidade da equipe 1 em atender a orientação para matematização entendida por eles como algebrização. No entanto, o processo de matematização já vinha ocorrendo pelo reconhecimento de conceitos da Geometria Euclidiana, que os mesmos ao identificarem triângulos usaram o primeiro modelo recorrente da memória, sem, no entanto, perceber que se tratava de triângulos não retângulos.

Essa situação envolvendo a algebrização como sendo o teorema de pitágoras foi discutida no momento da socialização como forma de reorganizar as ideias equivocadas que se tem de modelos, como se todo modelo fosse algébrico. O erro, nesse caso, assumiu uma conotação positiva no processo de modelagem, pois a partir dele é que foi possível ter a percepção das coisas, de que não caberia a relação pitagórica, pois a premissa é de que o triângulo seja retângulo, o que não era o caso. Isso foi possível devido a “Modelagem Matemática favorecer um ambiente de aprendizagem que também possibilite construir saberes a partir dos erros” (BRAGA, 2009, p.45)

De todo modo o recurso do Geogebra permitiu que determinassem a maior medida do lado de cada triângulo sem prejuízo para o restante do processo. Ainda a partir da associação da flor com a geometria, de forma que, inserindo triângulos não retângulos nas pétalas, mais identificando os lados de maior medida, teriam a possibilidade de trabalhar com as possíveis medidas de comprimento de cada uma. Tomada a decisão e as medições, via Geogebra, encontraram os seguintes comprimentos do maior lado do triângulo (tabela 1).

Tabela 1: Medidas dos comprimentos das pétalas

PÉTALA 1	PÉTALA 2	PÉTALA 3	PÉTALA 4	PÉTALA 5
2,86	2,49	2,89	3,11	3,11

Fonte: Pesquisa de campo, 2019

Após isso, realizamos o cálculo para encontrar a constante da razão de semelhança, que se faz da seguinte forma: $k = \frac{\text{comprimento da pétala}}{\text{comprimento da pétala 4}}$, isso nos permite comparar os comprimentos dos lados maiores, no caso, tomamos como base a pétala 4, de 3,11 cm, que é a que possui o maior comprimento. A seguir a tabela com os valores aproximados da razão de semelhança dos lados maiores das demais pétalas em relação a pétala 4. (Relatório equipe 1)

Tabela 2: Razão de semelhanças das pétalas

PÉTALA 1	PÉTALA 2	PÉTALA 3	PÉTALA 5
0,91	0,80	0,92	1
91%	80%	92%	100%

Fonte: Pesquisa de campo, 2019

Ao inserir um triângulo em cada pétala para que cada um tocasse a borda da pétala, usaram o modelo $A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$ para o cálculo da área de cada triângulo, “Onde a , b e c correspondem aos valores dos lados do triângulo, e o valor de p , é o valor do semiperímetro ($\frac{\text{soma de todos os lados do triângulo}}{2}$). Realizamos esse devido calculo no programa Geogebra (Equipe 1). Resultando na tabela 3.

Tabela 3: Área dos triângulos inseridos em cada pétala

PÉTALA 1	PÉTALA 2	PÉTALA 3	PÉTALA 4	PÉTALA 5
----------	----------	----------	----------	----------

3,73	3,75	4,54	4,54	4,56
------	------	------	------	------

Fonte: Pesquisa de campo, 2019

Após isso, realizamos o cálculo da razão de semelhança entre as áreas dos triângulos, usando a seguinte fórmula : $k = \frac{\text{área da pétala}}{\text{área da pétala 5}}$, isso nos permite comparar as áreas dos triângulos, no caso, tomamos como base a pétala 5 que tem cerca 4,56cm, que é a que possui a maior área. A seguir a tabela com os valores aproximados que obtivemos ao realizar o devido cálculo. (Equipe 1)

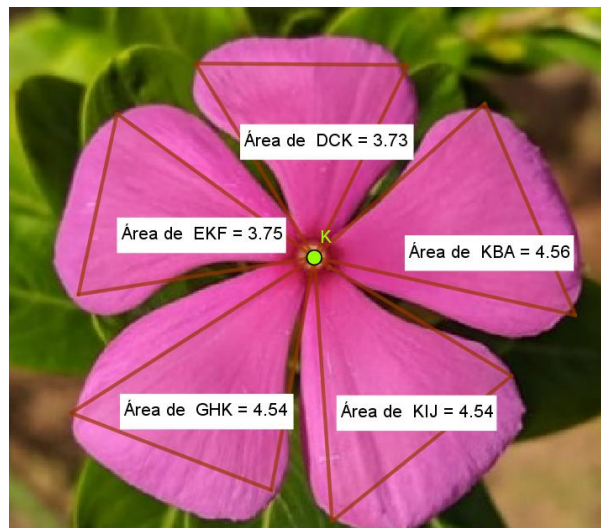
Tabela 4: Valores aproximados da razão de semelhanças entre a áreas dos triângulos tracejados nas pétalas da flor

PÉTALA 1	PÉTALA 2	PÉTALA 3	PÉTALA 4
0,78	0,82	0,99	1
78%	82%	99%	100%

Fonte: Pesquisa de campo, 2019

Com os devidos dados e processos da matematização a equipe descreveu e comprovou matematicamente todo passo a passo da modelagem do caso da não simetria da flor.

Imagem 3: Medidas da área das pétalas



Fonte: Pesquisa de Campo, 2019

Durante a socialização a equipe explicou os passos tomados e relatou a preocupação em mostrar de forma clara os motivos que os levaram a concluir que a flor não é simétrica, fechando assim a socialização com a ideia:

A partir dos dados encontrados podemos afirmar que a flor em questão não possui simetria, e sim, uma certa semelhança ao rotacionar uma pétala no sentido anti-horário. Em relação aos maiores lados no triângulo temos que o percentual médio de semelhança é 90,75%. E em relação a área dos triângulos, temos que o percentual médio de semelhança entre as pétalas é de 89,75%. (Relatório equipe 1)

Dado a conclusão da equipe, destacamos dentro dos processos da Modelagem Matemática, a apropriação de modelos para obtenção das medidas de área, a capacidade de pesquisa e elaboração de estratégias com associação do teórico e prático, evidenciando a matematização elaborada em cada etapa, pela equipe.

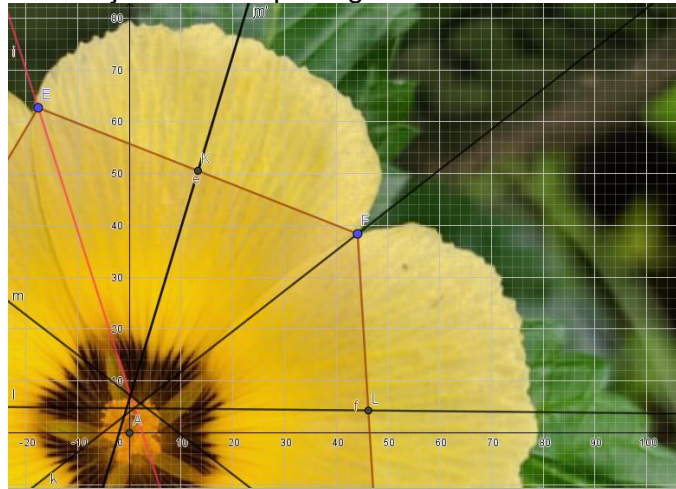
De acordo com a perspectiva de Burak (1992):

A Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é estabelecer um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões (p. 62).

Então dentro do objetivo e das características da Modelagem Matemática, a justificativa se torna válida a partir dos resultados coerentes e matematizados que foram apresentados e demonstrados visualmente, com compreensão da socialização por parte da própria equipe e dos demais participantes do curso.

A **Equipe 2**, composta por quatro estudantes, ficou com a flor Damiana. Essa equipe que no primeiro encontro não passou dos processos manuais, no segundo encontro, trouxe ideias estruturadas, utilizando o Geogebra, Excel para registros dos tracejados e tabelas com dados provenientes das medidas dos segmentos dos pontos de medidas da flor. O processo de matematização da equipe foi descrito da seguinte forma: *“Observando que a flor tem cinco pétalas, associamos a um polígono de cinco lados. Essa figura geométrica foi desenhada no interior da flor, ligando os pontos na primeira interseção de fora para dentro”*. (Relatório Equipe 2). Essa organização está representada na imagem 4.

Imagem 4: Divisão das pétalas por meio da associação com um pentágono.



Seguindo os procedimentos, a equipe classificou o pentágono formado nas pétalas e a partir desses pontos encontraram novos pontos representando o ponto médio dos segmentos, de tal forma que “ligando tais pontos (D, E, F, G, H) formou-se um pentágono irregular. Em cada lado é obtido o ponto médio, o qual é ligado ao vértice oposto por meio de uma reta”. (Relatório equipe 2).

Imagem 5: Representação dos pontos médio dos segmentos de cada pétala.



Fonte: Pesquisa de campo, 2019.

Após, utilizarmos a ferramenta de ponto de reflexão em relação as retas, comparando as coordenadas dos pontos de reflexão obtidos com as coordenadas dos pontos médios e vértices do pentágono. Concluímos que, os pontos de reflexão alcançados possuem diferenças em relação ao ponto de simetria da flor. (Relatório Equipe 2)

Após a identificação de que os pontos de reflexão encontrados não correspondiam aos pontos de simetria da flor, a equipe notou a necessidade da representação numérica, já que até o momento era apenas visual, e então organizaram cada par de pontos de reflexão, Tabela 5.

Tabela 5: Representação dos pontos de reflexão

Ponto de reflexão Reta i, Ponto J			
J'	12,93	49,25	
K	13,24	50,55	
	-0,31	-1,3	

Ponto de reflexão Reta i, Ponto E			
E'	12,93	49,25	
F	13,24	50,55	
	-0,31	-1,3	

Ponto de reflexão Reta l, Ponto F			
F'	43,45	-29,73	
G	48,26	-29,78	
	-4,81	0,05	

Ponto de reflexão Reta i, Ponto G			
G'	-17,34	-50,85	
H	-17,31	-50,91	
	-0,03	0,06	

Ponto de reflexão Reta m, Ponto L			
L'	14,78	-36,52	
M	15,47	-40,35	
	-0,69	3,83	

Ponto de reflexão Reta k, Ponto H			
H'	-57,51	0,68	
D	-51,63	5,26	
	-5,88	-4,58	

Ponto de reflexão Reta j, Ponto M			
M'	-38,81	-24	
I	-34,47	-22,83	
	-4,34	-1,17	

Ponto de reflexão Reta i, Ponto I			
I'	-33,93	33	
J	-34,63	33,98	
	0,7	-0,98	

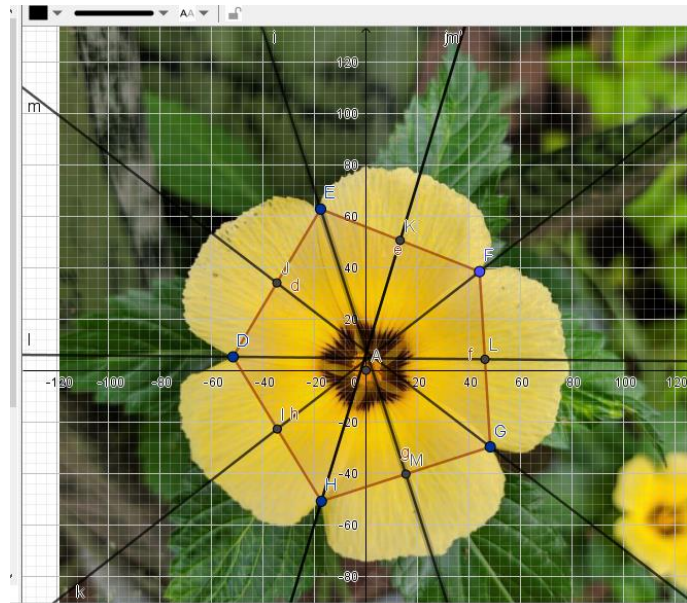
Ponto de reflexão Reta m, Ponto D			
D'	-11,22	57,78	
E	-17,62	62,71	
	6,4	-4,93	

Ponto de reflexão Reta k, Ponto K			
K'	48,35	5,49	
L	46,19	4,31	
	2,16	1,18	

Fonte: Pesquisa de campo. 2019

E então, através dos valores obtidos (Tabela 5), representaram a simetria da flor, de acordo com a imagem 6:

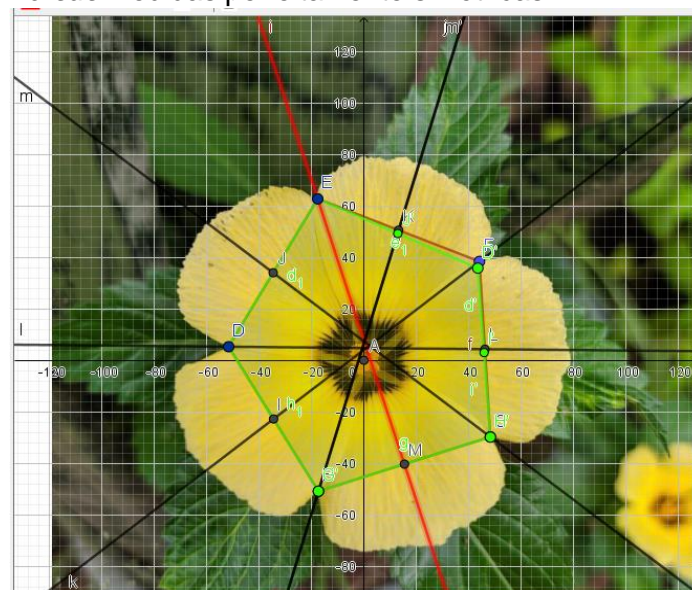
Imagem 6: Resultado final da simetria na flor



Fonte: Pesquisa de campo, 2019.

De fato, as condições de simetria da flor, foram representadas e com medidas das pétalas bem próximas umas das outras, com diferença mínima e aceitável, porém a equipe 2 levantou a hipótese de observar o desvio presente e tracejaram novamente, com condições “perfeitas” para essas medidas. “*Em seguida houve a construção do pentágono com simetria bilateral “perfeita”, tomando como referência a reta i e pontos E, D e H conforme a imagem*”. (Equipe 2)

Imagem 7: Representação de medidas encontradas versus medidas perfeitamente simétricas



Fonte: Pesquisa de Campo, 2019.

Dessa decisão chegaram à conclusão de que: *“A flor trabalhada possui uma simetria bilateral. Evidenciando que os números encontrados na natureza são aproximados, e foi possível provar através do processo de construção de um pentágono e auxílio de retas e pontos de reflexão”.* (Relatório Equipe 2)

A equipe 2, também consciente dos procedimentos que validam uma atividade de Modelagem Matemática, tratou de justificar matematicamente os passos tomados e com destaque nas estratégias de desenvolvimento, tracejaram por mais de uma vez quais métodos iriam utilizar para chegar em um modelo capaz de expressar a simetria de sua flor de forma compreensível e objetiva.

Apesar de inicialmente demonstrarem uma indecisão, então pesquisaram e experimentalmente chegaram ao respectivo resultado, e a partir da comparação entre o modelo encontrado e o a construção do modelo idealizado, dentro de medida coerentes para definir a simetria da flor, apesar da aproximação do Ponto F ao ponto D (imagem 7).

Tornando o processo de modelagem, uma aproximação do universo que o indivíduo está inserido e as necessidades que o mesmo desenvolve ao estudar/pesquisar, os estudantes criam modelos matemáticos capazes de representar o que se está investigando.

Dentro de suas competências, a equipe tomou a decisão de usar ferramentas computacionais a partir da afinidade que um dos membros demonstrou ao utilizar o software Geogebra, adquiridos fora do contexto do Laboratório Experimental de Modelagem Matemática, eles agregaram conhecimentos advindo de outros momentos de aprendizagem e agregaram para a construção do modelo matemático obtido.

A **Equipe 3**, composta por quatro estudantes, ficou com a flor: Petúnia Mexicana.

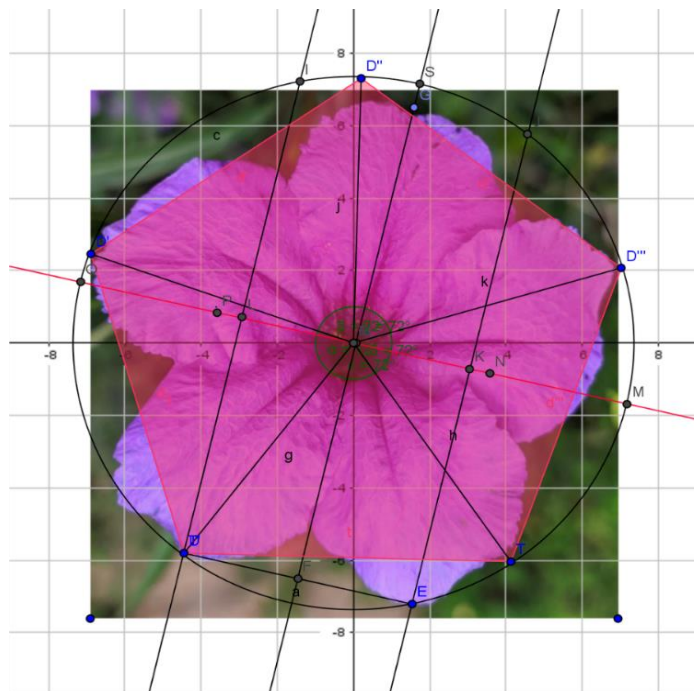
O objeto de estudo foi a flor Petúnia Mexicana, uma das flores mais lindas e utilizadas em canteiros, jardins e vasos, possuem grande variedade de tamanhos e cores, a mesma apresenta folhagem macia, bem delicada, com formato ovalado. A flor estudada foi na cor roxa, com cinco pétalas. (Equipe 3)

A equipe que inicialmente traçou estratégias manuais para identificar a simetria, em um segundo momento e em decorrência do esquecimento do material de trabalho em casa, mudaram os processos manuais por processos computacionais e perceberam que os rumos foram diferentes, na medida que iam avançando os estudos, para tal reação, temos a justificativa do material e ferramentas que cada

método oferece, manualmente eles contaram apenas com auxílio de: papel, régua e compasso, e computacionalmente o software GeoGebra ofereceu inúmeras ferramentas com funções precisas e matemáticas, e apresentaram o modelo com os seguintes passos de matematização:

Utilizamos o Software Geogebra para verificar a simetria da flor, como ela contém cinco pétalas percebemos que poderíamos usar o pentágono. Em seguida, marcamos dois pontos aleatórios nas extremidades inferiores de duas pétalas e traçou-se o segmento de reta. Posteriormente encontramos o ponto médio desse segmento, logo após traçamos uma reta perpendicular do ponto médio a um ponto aleatório marcado na extremidade superior da flor, encontrando-se o centro de uma circunferência, em seguida construímos o círculo dado um centro e um de seus pontos. Como a soma dos ângulos do pentágono é igual a 540° , ou seja, cada ângulo interno é 108° e o ângulo central mede 72° , marcando pontos nas extremidades da circunferência com o ângulo central formando com a ferramenta do Geogebra polígono regular, o pentágono. (Relatório Equipe 3)

Imagem 8: Resultado da simetria da flor Petúnia Mexicana.



Fonte: Pesquisa de campo, 2019

A equipe apresentou a descrição acima para seu processo de matematização, não justificaram de forma numérica a representação das partes de sobra da flor nessa inscrição do pentágono, e concluíram que “algumas pétalas são mais simétricas que

as outras, a pétala do meio da parte superior e a sua consecutiva são as que apresentam maior semelhança” (Equipe 3).

Abordando os elementos correspondente a Modelagem Matemática, a equipe, pesquisou sobre o tema levando em consideração a problematização do mesmo, iniciaram com suas estratégias de desenvolvimento, utilizaram conceitos geométricos e trabalharam com ângulos justificando matematicamente os passos tomados. A matematização do processo constituiu-se de elementos de Geometria Euclidiana, com referência na disciplina de Desenho Geométrica que os estudantes já haviam cursado. Observaram visualmente as relações simétricas entre as pétalas da flor e concluíram, através da proximidade as semelhanças e diferenças entre elas.

A postura da equipe 3 demonstra que “o aluno é o dono do problema que o envolve, perturba, deixa-o perplexo e o instiga a percorrer o caminho da busca” (PIMENTEL, 1994, p.40). Assim, os métodos utilizados pelos mesmos são resultantes dos objetivos que a equipe planejou ao solucionar o problema, revelando quais conceitos matemáticos seriam usados e de qual forma.

CONSIDERAÇÕES

Este trabalho surgiu da necessidade de pensar a Modelagem Matemática nas suas mais diversas funções no ensino da Matemática, ressaltando que a modelagem serve não apenas para resolução de problemas próprios da disciplina, uma vez que ela está inserida e pode ser aplicada em várias áreas de conhecimento.

No presente estudo, o desenvolvimento da atividade em questão, é um exemplo de que as tecnologias manuais podem ser utilizadas e solucionar o problema, já que inicialmente os alunos recorreram a utilização de régua e compasso para identificar a simetria, os rabiscos manuais foram construídos e só depois de estruturado os estudantes substituíram pelo processo computacional, logo percebemos que eles pensaram em como construir, esboçaram a ideia manualmente e depois executaram, justificamos também essa mudança do manual pro computacional com a intenção de ajustar medidas com mais precisão e em um menor tempo. Logo a utilização dos instrumentos manuais se torna valida, já que ao serem utilizadas, as equipes tiveram consciência de como utiliza-las e o porquê da utilização.

Então a partir dos resultados e análises da fundamentação de cada processo de desenvolvimento, considerando os trabalhos desenvolvidos a partir das provocações desta pesquisa, abordando os dados que os participantes elaboraram

enquanto divididos por equipes, atingiram o objetivo da atividade na identificação da simetria ou não das flores sorteadas e identificaram e utilizaram conceitos matemáticos para justificar suas ações em relação aos dados matematizados e desenvolvidos com auxílio do software Geogebra.

Além disso, desenvolveram habilidades matemáticas dentro da atividade relacionada a Modelagem Matemática, pois os mesmos evidenciaram características de trabalho colaborativo, onde cada membro junto de suas respectivas equipes, agregaram conhecimentos e recorreram à conteúdos trabalhados nas disciplinas curriculares do curso. Antes, porém, demonstraram ansiedade por um roteiro linear, que não é característico do processo de Modelagem Matemática, talvez imbuídos pela forma de ensino do qual já estão acostumados; ansiedade também por um *feedback* que lhes mostrasse se seus encaminhamentos estavam certos ou errados, bem como utilização de todos os recursos que fosse possível de estabelecer alguma relação matemática pertinente a flor sorteada.

Destacando assim que os participantes discentes do curso de Licenciatura em Matemática, além de desenvolverem conhecimentos matemáticos, precisam elaborar técnicas de resolução para aplicar dentro de um problema que muitas vezes não está inserido apenas no âmbito estudantil e sim dentro de um contexto maior, abrangendo as diversas áreas e conhecimentos, então a importância de conhecer e associar a matemática as demais aplicações, revelam um perfil do matemático, que se dispõe a trabalhar com a Modelagem Matemática como ferramenta de ensino- aprendizagem.

REFERÊNCIAS

Almeida; Silva, k. P.; Vertuan, R. E. (2012). **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto.

ARAÚJO, J. L. Cálculo, **Tecnologias e Modelagem Matemática: as discussões dos alunos**. (Tese de Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2006

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Ed. Contexto, 2011.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 3ª ed. São Paulo: Contexto, 2007.

BORBA, M. C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A. Modelagem, Calculadora Gráfica e Interdisciplinaridade na Sala de Aula de um Curso de Ciências Biológicas. **Revista de Educação Matemática**. São José do Rio Preto: SBEM-SP, v. 5, n. 3, p. 63-70, 1997.

BORBA, M. C. Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, M. A. V. (org). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999. p. 285-295.

BURAK, D. **Modelagem matemática: uma alternativa para o ensino de matemática na 5ª série**. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: Unesp, 1987.

_____ **Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino aprendizagem**. Tese de Doutorado. Campinas, Unicamp, 1992.

_____ **Formação dos pensamentos algébricos e geométricos: uma experiência com modelagem matemática.** Pró-Mat, v. 1, n. 1, pp. 32-41, 1998.

_____ A modelagem matemática e a sala de aula. In: I ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – I EPMEM. **Anais ...** Londrina, 2004.

BRAGA, R. M. **Modelagem matemática e tratamento do erro no processo de ensino-aprendizagem das equações diferenciais ordinárias.** 2009. 180f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Científica e Matemática, Universidade Federal do Pará, 2009.

CALIL, A. M. **Caracterização da utilização das TIC pelos professores de Matemática e diretrizes para ampliação do uso.** Pós-Graduação em Educação Matemática. Mestrado Profissional em Educação Matemática – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal, Juiz de Fora (MG), 2011.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática.** Campinas: Papyrus, 1996, 121p.

FRASER, M.T.D.; GONDIM, S.G. Da fala do outro ao texto negociado: discussões sobre a entrevista na pesquisa qualitativa. **Revista Paideia**, v. 14, n. 28, p. 139-152, 2004.

GIOVANNI, J.R.; et al. **Desenho Geométrico**, v.3. São Paulo: FTD, 2002.

GILBERT, J. K.; BOULTER, C. J.; ELMER, R. **Positioning models in science education and in design and technology education.** Dordrech: Kluwer, 2000. p. 3-17.

GOLDENBERG, Mirian. **A arte de pesquisar.** Rio de Janeiro: Record, 1999.

HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. **Ajuda Geogebra**: manual Oficial da Versão 3.2. 2009. Disponível em: http://www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf.

MACHADO, D. I.; SANTOS, P. L.A.C. **Avaliação de hipermídia no processo de ensino e aprendizagem da Física: o caso da gravitação**. Revista Ciência & Educação, v. 10, n.1, p. 75 -100, 2004. Disponível em:. Acesso em: 01 dez 2015.

MENEZES, R. M; ESPÍRITO SANTO, A. O.; BRAGA, R. M. **Tecnologias digitais no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática**. Coleção Educação Matemática na Amazônia. V. 5. Belém: SBEM-PA, 2017.

PIMENTEL, M. G. **O professor em construção**. Campinas, Papirus, 1994.

SAITO, F.; DIAS, M.S. **Articulações de entes matemáticos na construção e utilização de instrumentos de medida do século XVI**. Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2011.

SANTOS, R., LORETO, A. B., GONÇALVES, J. L. **Avaliação de softwares matemáticos quanto a sua funcionalidade e tipo de licença para uso em sala de aula**. Revista Ensino de Ciências e Matemática, v. 1, n. 1, p. 47-65, 2010.

SILVA, L. A; Oliveira, A. M. P. **As discussões entre formador e professores no planejamento do ambiente de modelagem matemática**. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*. Rio Claro (SP), 2012.

APÊNDICES

Registros dos processos manuais e computacionais da atividade desenvolvida.

