UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL

FACULDADE DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSIEL MONTEIRO TEIXEIRA


# USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NA MODELAGEM MATEMÁTICA


CURUÇÁ-PARÁ

2024

JOSIEL MONTEIRO TEIXEIRA

# USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NA MODELAGEM MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará (UFPA), Campus niversitário de Castanhal como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de **Licenciado em Matemática.**

**Orientador:** Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida

CURUÇÁ-PARÁ

2024

JOSIEL MONTEIRO TEIXEIRA

**USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NA MODELAGEM MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática como parte dos requisitos necessários para a obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em:

____________________________________________

Prof.Dr. Arthur da Costa Almeida / (Orientador)

FACMAT/UFPA

____________________________________________

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Rozal / (Avaliador)

FACMAT/UFPA

____________________________________________

Prof. Dr. Marcos Vinicius Orguen Gouvea / ( Avaliador)

FACMAT/UFPA

CURUÇÁ-PARÁ
2024

*Aos que permaneceram ao meu lado durante essa longa jornada.*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela vida e por me dar forças para permanecer até o fim conseguindo superar os obstáculos que surgiram.

A minha amiga, companheira e esposa, Bianca Pacheco, pelo companheirismo, incentivo, atenção amor e carinho que me ofereceu nos últimos anos dessa caminhada.

Aos colegas pelas trocas de experiências, pelo convívio, pelas alegrias e incertezas, por todos esses momentos vividos juntos e partilhados e aos professores que contribuíram direta ou indiretamente para alcançar esse objetivo.

Ao meu orientador Prof.° Dr. Arthur Almeida, pelas sugestões e colaborações.

*“Porque a palavra de Deus é viva e eficaz, e mais cortante do que qualquer espada de dois gumes, e penetra até a divisão de alma e espírito, e de juntas e medulas, e é apta para discernir os pensamentos e intenções do coração” (Hebreus 4:12).*

**RESUMO**

A palavra modelo pode apresentar diferentes significados dependendo da área de conhecimento ao qual está sendo aplicada. Podendo ser algo relacionado com forma, método, disposição ou ainda maneira. Nessa perspectiva, o intuito é que os modelos possam simplificar a realidade, para que os indivíduos entendam o seu funcionamento em uma visão geral, sendo uma parte dessa realidade. Para isso, se faz necessário utilizar estruturas experimentais e até mesmo conceitos mentais. Se a realidade que se quer representar é muito complexa, ela pode ser subdividida em diversas outras, e para cada uma se gera um modelo. Assim, o objetivo de um modelo é que seja construído de tal forma que possa entender a realidade de um modo mais simples e, ao mesmo tempo, o mais completo e preciso possível. Dentre os vários tipos de modelos, há os que utilizam a matemática e, por causa disso, recebem o nome de modelos matemáticos. Os modelos matemáticos procuram representar a realidade por meio de equações, no entanto, a resolução de equações nem sempre é de fácil entendimento, mesmo quando são usadas para representar um único fenômeno. Ainda assim, a matemática é uma das grandes aliadas nesse processo de representação. O intuito da presente pesquisa é compreender o funcionamento de um modelo matemático em junção com as equações diferenciais de primeira e segunda ordem tendo uma aplicação prática em situações da vivência em sociedade. A metodologia utilizada na pesquisa foi de cunho qualitativo, visando compreender os aspectos sociais consonantes com o conceito de modelos matemáticos no estudo das equações diferenciais. A coleta de dados foi realizada por intermédio de pesquisa bibliográfica em materiais didáticos, coletando informações concretas sobre o tema estudado.

**Palavras-chave**: Equações Diferenciais. Modelos Matemáticos. Resolução de Problemas.

## ABSTRACT

The word model can have different meanings depending on the area of knowledge to which it is applied. It can be something related to form, method, arrangement or even manner. From this perspective, the aim is for models to be able to simplify reality, so that individuals can understand how it works in a general sense, being a part of that reality. This requires the use of experimental structures and even mental concepts. If the reality you want to represent is very complex, it can be subdivided into several others, and a model is generated for each one. Thus, the aim of a model is to build it in such a way that it can understand reality in the simplest way and, at the same time, be as complete and accurate as possible. Among the various types of models, there are those that use mathematics and are therefore called mathematical models. Mathematical models seek to represent reality by means of equations. However, solving equations is not always easy to understand, even when they are used to represent a single phenomenon. Even so, mathematics is a great ally in this process of representation. The aim of this research is to understand how a mathematical model works in conjunction with first- and second-order differential equations, with a practical application to situations in society. The methodology used in the research was qualitative, aiming to understand the social aspects in line with the concept of mathematical models in the study of differential equations. Data was collected by means of bibliographical research in teaching materials, gathering concrete information on the subject studied.



**Keywords**: Differential equations. Mathematical Models. Problemsolving..

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Fases da modelagem matemática e as ações cognitivas dos alunos........27
Figura 2: Ações cognitivas e suas relações com as diferentes fases do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática................................29
Figura 3: Esboço do Teorema Fundamental do Cálculo ...........................................33
Figura 4: A droga decai exponencialmente em cada intervalo entre as aplicações..36

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Tendência da sequência xn ........................................................................ 17
Gráfico 2: Variações simples ........................................................................................ 18

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: dados fictícios........................................................................................16
Tabela 2: Dados experimentais e variação simples...................................................17

SUMÁRIO

**1. INTRODUÇÃO** ........................................ **13**

**2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA** ........................................ **15**

**2.1 Modelagem matemática** ........................................ **15**

**2.1.1** Modelagem matemática no ensino ........................................ **21**

**2.2 Introdução ao estudo das equações diferenciais** ........................................ **28**

**3. MODELO MATEMÁTICO UTILIZANDO AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS** ........................................ **35**

**4. CONSIDERAÇÕES FINAIS** ........................................ **40**

**REFERÊNCIAS** ........................................ **42**

# 1. INTRODUÇÃO

A profundidade e amplitude do estudo das equações diferenciais, situando-se tanto no espectro da matemática pura quanto na aplicada, destacam-se pela sua significativa contribuição e aplicabilidade em múltiplos campos do conhecimento, como medicina, engenharia e biologia. Essas áreas beneficiam-se imensamente da modelagem de fenômenos específicos através das equações diferenciais, elevando esse conceito ao patamar de essencialidade no âmbito acadêmico e profissional. A matemática pura, nesse contexto, dedica-se primordialmente à formulação de modelos que representem fenômenos via equações diferenciais, movendo-se em seguida para a análise e estabelecimento de condições que asseguram a existência e unicidade de soluções para tais equações. Este processo de verificação da existência e unicidade é fundamental para conceituar o problema em questão como bem-posto, um termo técnico que denota a correta formulação de um problema matemático (STEWART, 2006).

Na esfera da matemática aplicada, a premissa de um problema bem-posto abre caminho para a realização de simulações que predizem o comportamento das soluções das equações diferenciais em cenários práticos, como é o caso na análise de vibrações em estruturas e sistemas. A capacidade de modelar tais fenômenos e extrair previsões precisas sobre modos de vibração e frequências, frequentemente requer o auxílio de recursos computacionais, sublinhando a interseção crítica entre teoria matemática e aplicação prática (BOYCE & DIPRIMA, 2010).

A transição do conhecimento teórico para a aplicação prática, contudo, não é trivial. Profissionais e estudiosos da matemática pura podem encontrar desafios significativos ao tentar aplicar seus conhecimentos teóricos em problemas concretos de áreas como biologia, química e ciências sociais. A demanda crescente por soluções matemáticas em diversos campos do conhecimento amplia essa lacuna, incentivando um diálogo entre a teoria matemática e suas aplicações (LARSON & EDWARDS, 2009).

Nesse sentido, a presente pesquisa dedica-se à exploração de como a modelagem matemática, especialmente através de equações diferenciais, pode ser empregada na solução de problemas práticos, com enfoque em casos específicos como a absorção de drogas e a dinâmica populacional sob o prisma do Modelo

Malthusiano. Este estudo visa não apenas aprofundar o entendimento das aplicações práticas das equações diferenciais mais também demonstrar a relevância dessas ferramentas matemáticas na resolução de problemas complexos em diversas áreas do conhecimento (ZILL & CULLEN, 2009).

# 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

## 2.1 Modelagem Matemática

Biembengut e Hein (2013) afirmam que “a modelagem no ensino podem ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar matematicamente”. E ainda, contemplam dizendo que “isso porque é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso critico” (BIEMBENGUT e HEIN, p. 18).

A modelagem é o processo de criação de modelos em que estão definidas estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade, mais especificamente sobre a sua realidade, carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador (BASSANEZI, p.15, 2015). A modelagem matemática é simplesmente uma estratégia utilizada para a obtenção de alguma explicação ou entendimento de determinadas situações reais. No processo de reflexão sobre a porção da realidade, é selecionado os argumentos considerados essenciais e procura-se uma formalização artificial (modelo matemático) que contemple as relações que envolvem tais argumentos. O passo inicial é encontrar dados experimentais e/ou inferências de especialistas relativos ao tema. Em outras palavras, geralmente, uma modelagem tem início com uma tabela de valores, que pode ser obtida das mais diferentes formas.

Na era digital contemporânea, a internet se estabeleceu como a fonte primária de informações, atuando como um pilar fundamental no desenvolvimento e aprimoramento de modelos matemáticos. A essência da modelagem matemática reside no refinamento contínuo dos modelos, adaptando-os conforme novos dados e conhecimentos são incorporados. Esse processo de refinamento não só exige um entendimento aprofundado do fenômeno em questão mas também da matemática aplicada na modelagem (LEWIS, 2003).

A criação de modelos matemáticos, mesmo na ausência de uma base numérica sólida, ilustra a flexibilidade e adaptabilidade dessa ciência em representar realidades complexas, onde a validação dos modelos pode não ser imediatamente possível. Esse aspecto é particularmente relevante em situações abstratas, onde a modelagem se propõe a oferecer uma estrutura conceitual que pode ser aplicada a uma ampla gama de cenários.

A escolha do tema é o ponto de partida para qualquer modelagem, sugerindo um levantamento amplo de potenciais áreas de estudo. A diversidade de temas possíveis, como vinho ou abelhas, reflete a vasta aplicabilidade da matemática na compreensão e solução de problemas em diversos campos. Essa etapa inicial não apenas estabelece o escopo da investigação mas também motiva a exploração de questões variadas, desde a vinicultura até a dinâmica populacional de abelhas, evidenciando a interdisciplinaridade inerente à matemática aplicada (MEYER, 1973).

A participação ativa do modelador no processo de escolha do tema é crucial, pois essa escolha pessoal garante um envolvimento mais profundo com o projeto. A motivação por trás da seleção de um tema específico pode variar amplamente, refletindo interesses pessoais ou áreas de pesquisa inexploradas. A abordagem para a coleta de dados é igualmente diversificada, incluindo métodos como entrevistas, pesquisa bibliográfica e experimentação direta, cada um contribuindo com uma perspectiva única e enriquecedora para o modelo em desenvolvimento.

Este processo de coleta de dados, embora centrado inicialmente em um tema específico, frequentemente revela conexões inesperadas com outras áreas, demonstrando a natureza interconectada do conhecimento. A investigação de doenças em maçãs armazenadas, por exemplo, pode levar a descobertas relacionadas a teorias de empilhamento ou a estudos históricos significativos, sublinhando a importância de uma abordagem holística na modelagem matemática (BALL, 1999).

Os dados coletados devem ser organizados em tabelas, que, além de fornecer uma análise mais eficiente, podem ser utilizadas para a construção de gráficos das curvas de tendências. A seguir será apresentado um exemplo com dados fictícios de uma suposta modelagem matemática.

Dados iniciais: considera-se, que de alguma situação analisado foi obtido a sequência de valores apresentada na tabela 1:

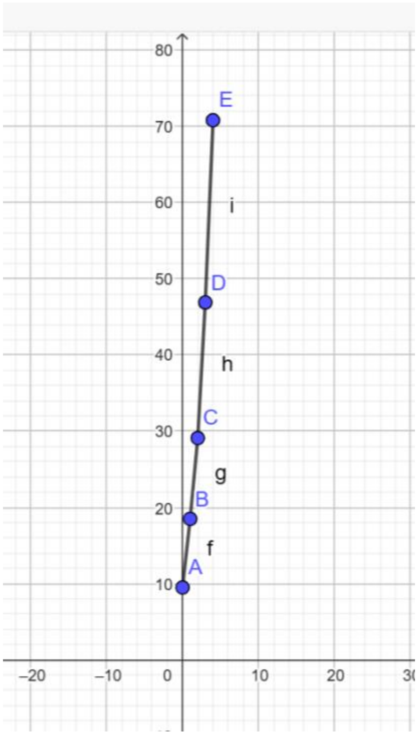
Tabela 1: dados fictícios

| Tempo | $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | . . . | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variável | $x_n$ | 9,5 | 18,5 | 29,1 | 46,9 | 70,8 | 121,1 | . . . | 651,2 |

Fonte: Próprio autor, 2024

Por meio dos dados apresentados na tabela indicam a existência de uma relação entre a variável $x_n$ e o estágio ou tempo n. A curva de tendência dos valores, representada pelo gráfico 1, oferece uma ideia de como deve se comportar o modelo matemático, neste caso, traduzido por uma função discreta $x_n = f(n)$.

Gráfico 1: Tendência da sequência x




Fonte: Próprio autor, 2024

Uma primeira abordagem do problema é encontrar os valores dos pontos da sequência $(x_n)$, o que pode ser obtido calculando-se a diferença (ou variação simples), $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$

Tabela 2: Dados experimentais e variação simples

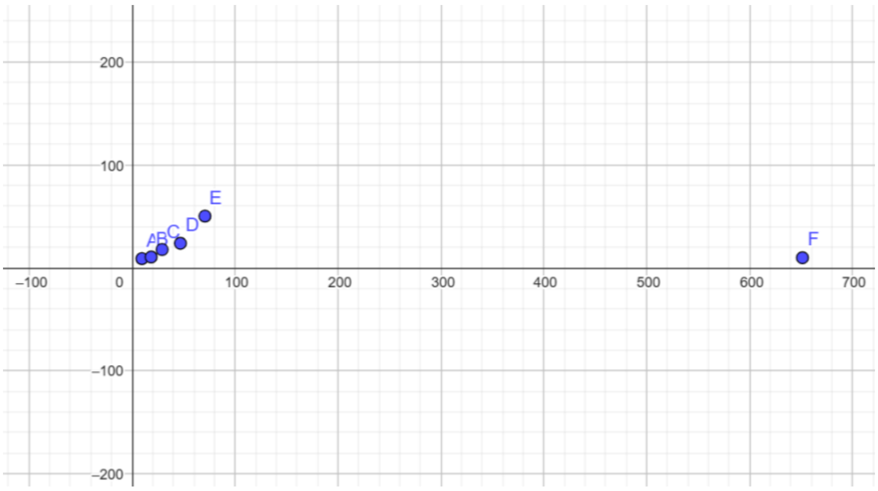
| Tempo | Variável | Variação | Modelo |
|---|---|---|---|
| $n$ | $x_n$ | $x_{n+1} - x_n$ | $x_n$ |
| 0 | 9,5 | 9 | 9,5 |
| 1 | 18,5 | 10,6 | 14,6 |
| 2 | 29,1 | 17,8 | 22,2 |
| 3 | 46,9 | 23,9 | 33,9 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 70,8 | 50,3 | 51,2 |
| 5 | 121,1 | 54,2 | 76,8 |
| . . . | | | |
| 15 | 651,2 | 9,9 | 660,0 |

Fonte: Próprio autor, 2024

O gráfico 2, apresenta a tendência das variações $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ em relação aos valores$x_n$. Uma curva contínua que se ajusta a estes pontos deve ter a concavidade voltada para baixo e passar por um ponto de máximo.

Gráfico 2: Variações simples




Fonte: Próprio autor, 2024

Buscar um modelo matemático que expresse a relação entre variáveis é, efetivamente, o que se convenciona chamar de modelagem matemática. Muitas vezes, esses modelos são dados pela solução de sistemas variacionais. Dessa forma, é sempre conveniente entender como é a variação das variáveis envolvidas no fenômeno analisado.

Em relação ao exemplo anterior, pode-se observar que a variação $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ tem o aspecto de uma função quadrática, é positiva e crescente até aproximadamente 93,7 e depois decresce, tendo sempre uma concavidade voltada para baixo. Então podemos considerar uma curva que ajuste esses pontos na forma de uma parábola, tal ajuste pode ser realizado por meio de programas de ajustes de curvas do Excel.

Após a análise de dados e formulação de modelos, inicia-se a etapa de validação. A equação abaixo apresenta uma fórmula de recorrência onde cada termo depende do anterior, ou seja:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \quad dado \end{cases}$$

Equações desse tipo são denominadas equações diferenciais finitas. A proposta em casos como estes é encontrar a solução da equação, ou seja, determinar as relações existentes entre a variável de estado $x_n$ e o estágio $n$.

O processo de validação de um modelo matemático constitui uma etapa crucial na modelagem, atuando como um mecanismo de avaliação que determina a aceitabilidade do modelo em questão. A validação envolve uma análise meticulosa, que é influenciada por diversos fatores, sendo o mais significativo a comparação entre os dados reais e as previsões fornecidas pelo modelo. Um modelo é considerado adequado se consegue explicar fenômenos observados e, além disso, possui a capacidade de prever novos resultados ou relações anteriormente não reconhecidas (BANKS et al., 2013).

A construção de um modelo começa frequentemente com uma versão simplificada, o que permite uma compreensão inicial do problema e a identificação dos aspectos essenciais do fenômeno que devem ser incorporados no modelo. Contudo, essa abordagem inicial pode não ser suficiente para capturar a complexidade do fenômeno, exigindo revisões e ajustes no modelo. Essas modificações podem incluir alterações nas variáveis consideradas ou nas leis que regem suas interações, refletindo a natureza iterativa do processo de modelagem (GIORDANO et al., 2007).

A seleção das ferramentas matemáticas apropriadas é outro aspecto fundamental da modelagem, uma vez que a escolha do formalismo matemático pode impactar significativamente a representação e a análise do fenômeno estudado. A eficácia de um modelo matemático, portanto, não reside apenas em sua capacidade de satisfazer objetivos específicos, mas também na percepção de sua validade pelos usuários (HUGHES-HALLETT et al., 2010).

Para facilitar a validação de um modelo, o uso de representações gráficas das soluções e a elaboração de tabelas comparativas entre os dados modelados e experimentais são estratégias eficazes. Essas técnicas não apenas auxiliam na avaliação da adequação do modelo mais também podem indicar necessidades de ajustes ou refinamentos (ZILL & WRIGHT, 2012).

A formulação matemática de um modelo também depende de decisões fundamentais sobre a natureza das variáveis envolvidas, como a determinação de sua continuidade. As variáveis em um modelo representam quantidades que variam ao longo do processo em estudo, e a maneira como essas variações são tratadas matematicamente é essencial para a precisão e aplicabilidade do modelo.

Quando se tem um conjunto finito de dados observados, diz-se que este conjunto discreto corresponde a uma sequência finita de valores $\{x_n\}_{1\leq n<k} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Se a variável $x$ pode assumir todos os valores reais intermediários entre os valores discretos da sequência, diz-se que $x$ é uma variável contínua.

Uma sequência real é um conjunto discreto dado por uma função real definida num subconjunto $A \subset N$:

$$\begin{cases} f: \mathrm{A} \subset \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{R} \\ n \rightarrow f(n) = x_n \end{cases}$$

Se a função f puder ser estendida ao intervalo $[a, b]$ onde $a = \min\{x \in A\}$ e $b = \max\{x \in A\}$ então a variável de estado $x_n$ é dita contínua.

No processo de modelagem, quando se tem uma tabela de dados (experimentais ou não) $x_n$, isto é, valores da variável $x_n$, o que se procura essencialmente é determinar uma função f de modo que $x_n = f(n)$. A busca desta função que relaciona o estágio $n$ com o valor experimental de $x_n$ nem sempre é simples quando se deseja realizar uma previsão dos fenômenos (simular valores que não são dados experimentais) e, nesse caso, deve-se via de regra, fazer uso de certos artifícios matemáticos como análise de convergência da sequência $\{x_n\}_{n\in N}$ e variações de $x_n$. A convergência da sequência $\{x_n\}_{n\in N}$ garante a estabilidade da variável no futuro:

$$Uma\ sequência\ é\ convergente\ para\ x^*\ e\ escreve - se$$
$$x_n \rightarrow x^*, se\ x_n\ se\ aproxima\ de\ x^*\ quando\ n\ for\ muito\ grande$$

A afirmação acima, do ponto de vista de um matemático, está longe da exatidão que ele busca quase sempre, pois palavras como 'se aproximam' ou 'muito grande' podem ser consideradas mais subjetivas que determinísticas. A definição formal do que se convencionou chamar limite de uma sequência é obtida fazendo-se a tradução de tais palavras:

Definição: Uma sequência $\{x_n\}_{n\in N}$ é convergente para $x^*$ e escreve-se $x_n \to x^*$, para cada número positivo existir um número natural $n_0$tal que se $n > n_0$ então $[x_n - x^*] <\in$.

Diz-se que $x^*$ é o limite de $\{x_n\}_{n\in N}$ e escreve-se

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \quad ou \;\; x_n \to x^*$$

Quando se tem uma variável $y$, dependendo quantitativamente de outra variável independente $x$, pode-se, muitas vezes, construir o modelo matemático ou analisar a dependência através das características variacionais dessas variáveis, ou seja, o modelo é formulado através das variações dessas grandezas. Entretanto, o termo variação pode ter diferentes formulações em matemático e para cada situação pode-se escolher o tipo mais apropriado para o modelo.

As variações podem ser formuladas em termos gerais, considerando-se as variáveis $x$ e $y$ (discretas ou contínuas). Considere a função real $f$ definida em $A\complement R$,

$$y = f(x), \qquad x \in A$$

Sejam $x_1, x_2$elementos de $A$, então se define:

- Variações Simples de $y$:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

é a diferença da variável dependente $y$ em dois estágios da variável independente $x$.

- Variação Média:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é a proporção entre as variações de $y$ e de $x$. A variação média mostra quanto variou $y$ por unidade de $x$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ geometricamente, mede o coeficiente angula ou inclinação da reta que liga os pontos $\left(x_1,\ f(x_1)\right)$e $\left(x_2,\ f(x_2)\right)$.

- Variação Relativa:

$$\frac{1}{y}\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)\frac{1}{y_i}$$

Mostra a variação de $y$ por unidade de $x$, relativa ao estágio inicial $y = y_i$.

As variações simples, média e relativa nem sempre são satisfatórias quando o processo envolve variáveis contínuas. Em muitas situações, o conhecimento de variação em um ponto é necessário.

- Variação Instantânea: a variação instantânea ou derivada de uma função $y = f(x)$, num ponto $x^*$, é dada pelo valor do limite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x^* + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x^*)$$

Quando tal limite existir.

Em outras palavras, se a sequência $\{x_n\}$ converge para $x^*$, então a sequência das variações médias $\left\{\frac{y_n - y}{x_n - x^*}\right\}$ converge para $f'^{(x^*)}$.

Observa-se que se $y = f(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$e sua variação média também é contínua, existe uma $f'^{(x)}$ para todo $x \in [a, b]$.

### 2.1.1 Modelagem Matemática no Ensino

A modelagem matemática é uma abordagem educacional que envolve a aplicação de conceitos do mundo real. Levar a modelagem para a sala de aula pode ser uma ótima maneira de engajar os alunos, tornando o aprendizado da matemática mais significativo e relevante. Aqui estão algumas sugestões sobre como fazer isso e o papel de cada um dos envolvidos:

- Professor: O papel do professor é fundamental na implementação da modelagem matemática em sala de aula. O professor deve fornecer aos alunos uma estrutura e orientação adequada para a modelagem, apresentando problemas autênticos que exijam a aplicação de conceitos matemáticos. Além disso, o professor deve facilitar discussões em grupo, fornecer suporte e feedback aos alunos durante o processo de modelagem.
- Alunos: Os alunos desempenham um papel ativo na modelagem matemática. Eles devem ser incentivados a explorar o problema, coletar dados relevantes, formular hipóteses, criar modelos Matemáticos e testar suas soluções. Os alunos também devem colaborar em grupos, discutindo ideias, compartilhando resultados e refinando seus modelos à medida que avançam no processo. A modelagem matemática promove o pensamento crítico, a criatividade e a resolução de problemas.
- Conexão com o mundo real: A modelagem matemática requer a conexão com problemas reais e situação da vida cotidiana. O papel de todos os envolvidos é garantir que os problemas propostos sejam autênticos e relevantes para os alunos. Isso pode ser feito por meio de parceria com a comunidade local, fazendo exemplos da vida real

para a sala de aula ou usando tecnologias que permitam a simulação de situações reais.

- Reflexão e avaliação: A modelagem matemática envolve a reflexão contínua sobre o processo e os resultados alcançados. Os alunos devem ser incentivados s refletir sobre suas estratégias, erros cometidos e melhorias possíveis. A avaliação deve se concentrar no processo de modelagem, bem como nas soluções finais, levando em consideração a criatividade, a lógica matemática e a aplicação dos conceitos aprendidos.

Ao levar a modelagem matemática para a sala de aula, é importante lembrar que erros são oportunidades de aprendizado e o processo é tão valioso quanto o resultado final. A modelagem matemática estimula a curiosidade, o pensamento crítico e a resolução de problemas, preparando o aluno para enfrentar desafios do mundo real.

Nas últimas décadas do século XX, emergiu na educação matemática uma perspectiva inovadora que transcende a mera incorporação de aplicações matemáticas no contexto escolar. Essa abordagem se concentra no ensino e na aprendizagem por meio de problemas originados fora do domínio estritamente matemático. A natureza desses problemas, as metodologias investigativas aplicáveis e a relação entre essas investigações e a aprendizagem dos estudantes têm sido o cerne de uma vasta gama de projetos de ensino, pesquisa e extensão. A divulgação desses trabalhos tem ganhado ímpeto no século XXI, especialmente através de publicações em periódicos especializados e anais de conferências científicas ou acadêmicas.

A modelagem matemática, nesse contexto, é vista como um processo dinâmico de ensino e aprendizagem que não apenas reforça mais também expande o conhecimento matemático dos alunos através de uma abordagem prática e investigativa. Esta metodologia requer uma série de competências, incluindo organização, preparação, investigação e execução, promovendo assim a aplicação de conceitos matemáticos em situações reais (BLUM & LEIß, 2007). Através da modelagem matemática, os estudantes têm a oportunidade de revisitar e refinar conceitos matemáticos, fomentando um envolvimento ativo na construção e reconstrução do conhecimento.

Este processo é composto por diversas fases, que demandam dos alunos a interpretação e reflexão sobre os conteúdos matemáticos. Dessa forma, a modelagem matemática estimula o resgate de conceitos matemáticos por meio do desenvolvimento criativo e participativo do aluno, contribuindo significativamente para o seu desenvolvimento cognitivo.

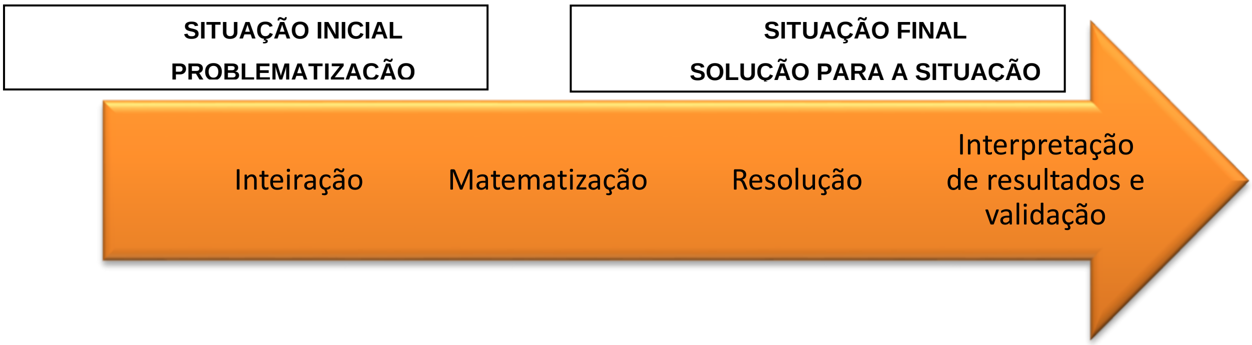
A implementação de novas metodologias pedagógicas é crucial para incentivar e aprimorar a aprendizagem dos alunos em um ambiente educacional dinâmico e alinhado às realidades contemporâneas. A utilização de recursos e técnicas inovadoras é essencial para motivar os estudantes e revitalizar conceitos matemáticos que podem ter sido negligenciados ou esquecidos ao longo de sua trajetória acadêmica (SKOVSMOSE, 2001).

Atividades de modelagem matemática representam uma estratégia eficaz para proporcionar aos alunos uma maneira de aprender matemática de forma mais engajada e interativa, utilizando a investigação e a prática como pilares do processo de aprendizagem. Essa abordagem promove uma participação mais ativa dos estudantes no tratamento matemático dos problemas, favorecendo uma compreensão mais aprofundada e aplicada da matéria (BIEMBENGUT & HEIN, 2000).

Além disso, promove-se a sua inclusão no contexto social e é possível, com esse método, resgatar o aluno, promovendo a sua participação e oportunizando lhe observar a conexão entre a matemática e a realidade e dar sentido a cada aplicação, promovendo a sua integralidade na sociedade por meio da sua participação e comprometimento.

> Uma atividade de modelagem matemática tem em uma situação problemática a sua origem e tem como característica essencial a possibilidade de abarcar a cotidianidade ou a relação com os aspectos externos à matemática, caracterizando-se com um conjunto de ação do sujeito em relação a um problema. (ALMEIDA, et.al, 2012, p.15 apud SOUSA, 2020, p.35).

Uma atividade que envolve a modelagem matemática apresenta fases para compreender e registrar todos os procedimentos que serão desenvolvidos na elaboração dessa modelagem matemática. Para isso, apresenta-se abaixo um diagrama contendo todas as fases desse processo:




Sousa 2020, p.39

O processo de modelagem matemática é estruturado em várias fases distintas, cada uma cumprindo um papel fundamental no desenvolvimento de um modelo que seja tanto representativo quanto solucionável. Este processo inicia-se com a fase de Inteiração, segue para a Matematização, depois para a Resolução, e finaliza com a Interpretação de Resultados e Validação. A compreensão e a aplicação efetiva dessas etapas são cruciais para a modelagem matemática eficiente e para a solução de problemas complexos através da matemática.

- **Inteiração**: Esta fase inicial envolve um processo de imersão no problema a ser estudado. É o momento de adquirir uma compreensão profunda da situação, coletando o máximo de informações relevantes possíveis. A busca por dados se dá através de uma variedade de fontes, incluindo literatura especializada, que fornece o contexto necessário para formular adequadamente o problema. O objetivo nesta etapa é definir claramente o problema a ser resolvido, identificando todas as variáveis relevantes e coletando dados qualitativos e quantitativos que servirão de base para a modelagem.
- **Matematização**: Considerada a etapa mais desafiadora, a Matematização envolve a tradução dos dados coletados e do entendimento do problema para a linguagem da matemática. Esta fase exige não apenas um conhecimento profundo do problema em questão mas também a habilidade de aplicar conceitos matemáticos adequados para sua representação. A escolha de variáveis, a formulação de hipóteses e a definição de parâmetros são cruciais aqui, visando estruturar o problema de maneira que possa ser analisado matematicamente (D'AMBROSIO, 1987).
- **Resolução**: Após a formulação matemática do problema, segue-se a fase de Resolução, na qual se busca solucionar o modelo proposto. Esta etapa implica na

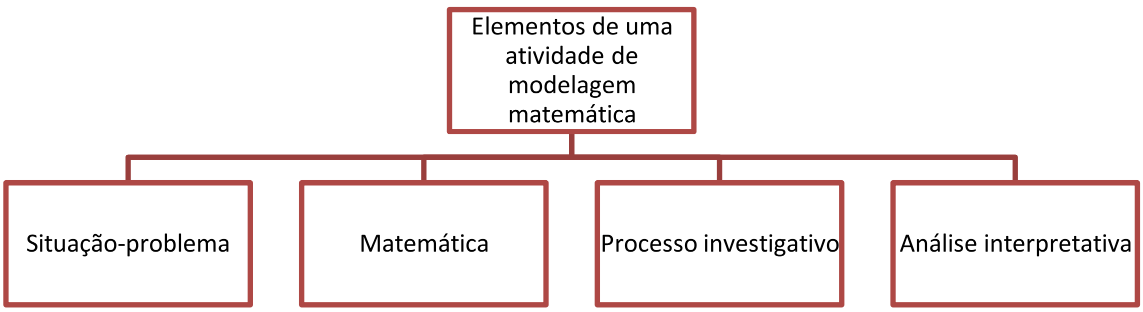
aplicação de métodos matemáticos apropriados para investigar o modelo e extrair soluções ou previsões sobre o comportamento do sistema modelado. A eficácia desta fase é medida pela capacidade do modelo de fornecer insights ou previsões confiáveis acerca do problema original.

- **Interpretação de Resultados e Validação**: Finalmente, a última fase do processo envolve a interpretação dos resultados obtidos e a validação do modelo. Esta etapa é essencial para assegurar que o modelo matemático fornece uma representação fiel do problema real. A validade do modelo é verificada comparando suas previsões com dados reais ou conhecimentos estabelecidos sobre o sistema, permitindo ajustes ou refinamentos no modelo, se necessário (BORROMEO FERI & BLUM, 2010).

Ao seguir essas etapas na prática da modelagem matemática, os educadores e estudantes podem abordar e resolver problemas complexos de maneira estruturada e eficaz, aplicando conceitos matemáticos para analisar e entender melhor o mundo ao seu redor.

Estes autores explicam que:

> Esse encaminhamento para introdução de atividades de Modelagem Matemática em salas de aula com alunos não familiarizados com esse tipo de atividade, embora não seja uma prescrição rigorosa, tem se mostrado adequado em inúmeras experiências realizadas. A principal argumentação subjacente a essa introdução “gradativa” de atividades de modelagem reside na possibilidade que o aluno tem de desenvolver a “ habilidade de fazer modelagem” (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p.27)




Fonte: Almeida, Silva e Vertuan 2012, p.18

Levando em consideração que atividades assim caracterizadas podem ser incluídas em aulas regulares de matemática, debruça-se sobre a condução de atividades de modelagem em ambientes educativos escolares, especialmente na educação básica. Nesse contexto, a tônica da discussão está no cenário pedagógico e as questões relativas ao ensino e a aprendizagem ocupam lugar de destaque.

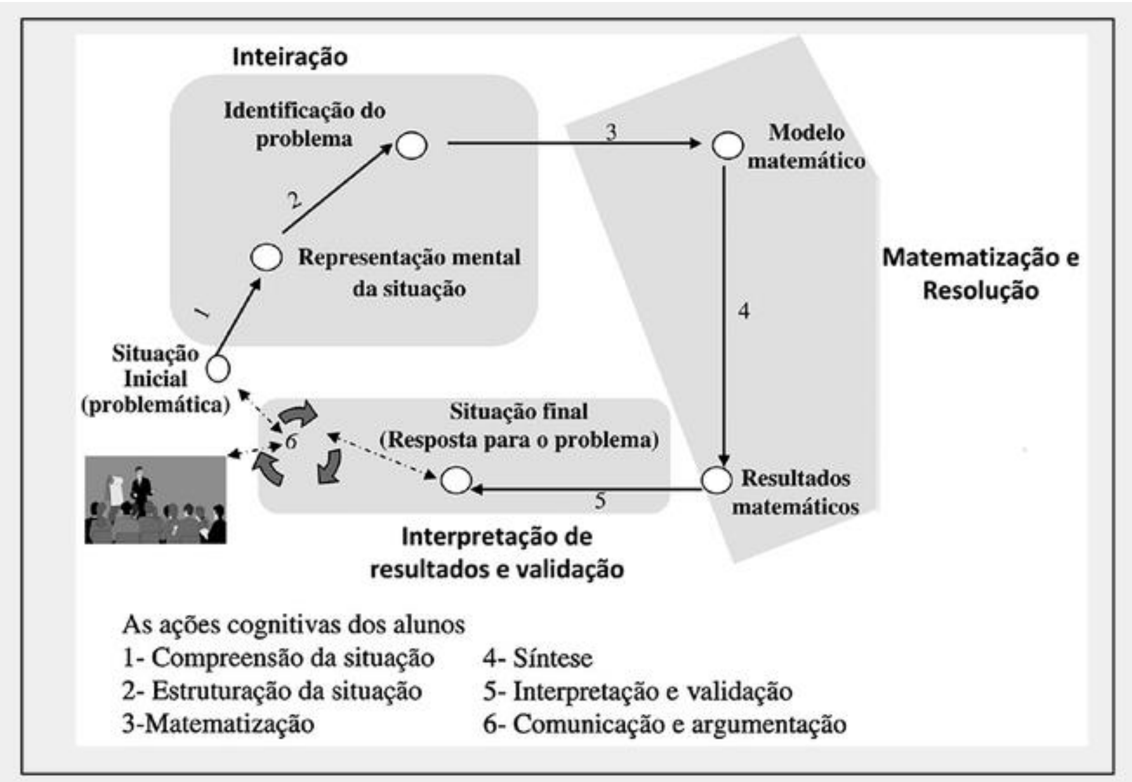
Nesse contexto, a modelagem matemática constituiu uma alternativa pedagógica na qual se faz uma abordagem, por meio da matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática. Assim, trata-se de uma maneira de trabalhar com atividades na aula da matemática. Argumenta-se que em atividades conduzidas segundo essa alternativa identificam-se características fundamentais:

a) envolve o conjunto de ações cognitivas do aluno;

b) envolve a representação e manipulação de objetos matemáticos;

c) é direcionada para objetivos e metas estabelecidas e/ou reconhecida pelo aluno.

Figura 1: Fases da modelagem matemática e as ações cognitivas dos alunos




Fonte: Almeida, Silva e Vertuan 2012, p.20

Nas atividades de modelagem matemática em comparação a outras práticas investigativas é marcada pelo engajamento ativo dos estudantes em um leque específico de ações. Este envolvimento, que pode variar em intensidade, está intrinsecamente ligado à experiência prévia do aluno com tais atividades de modelagem. Problemas, dentro deste escopo, são definidos como situações que carecem de estratégias preestabelecidas para sua resolução, destacando-se pela ausência de procedimentos ou soluções imediatas.

Ao analisar o cenário das lâmpadas fluorescentes armazenadas em um depósito, evidencia-se a complexidade do descarte adequado destes itens e a subsequente necessidade de quantificar o mercúrio liberado no ambiente como resultado deste descarte. Tal contexto demanda a coleta de informações e a aplicação de conceitos matemáticos e extra matemáticos para construir um modelo que estime a quantidade de mercúrio residual no ambiente em um momento específico (MOLYNEUX-HODGSON & PÉREZ, 2009).

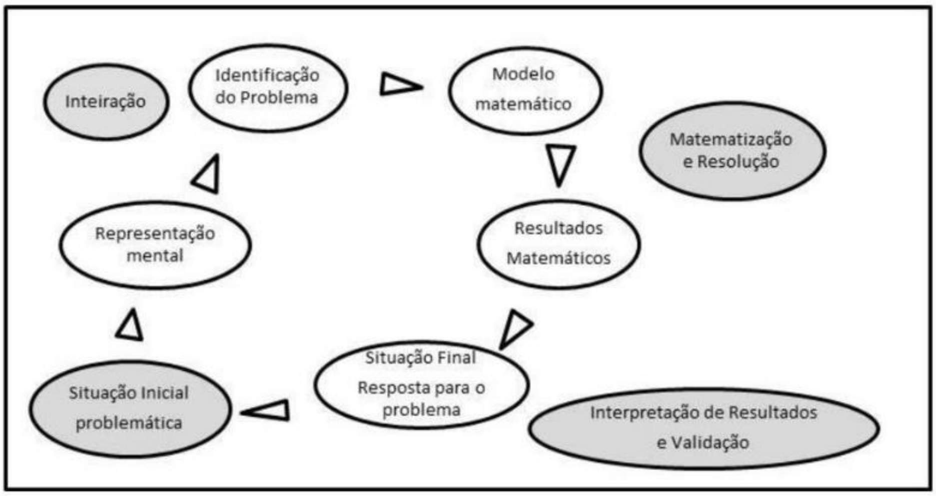
O processo pedagógico da modelagem matemática é fundamentado na realização de atividades que promovem o desenvolvimento do aprendizado por meio de:

- Engajamento dos alunos em ações cognitivas específicas;
- Representação e manipulação de objetos matemáticos;
- Orientação para alcançar objetivos e metas estabelecidas ou reconhecidas pelos próprios alunos.

No estágio inicial de uma atividade de modelagem, o aluno enfrenta uma fase de adaptação, onde é necessário identificar as ações a serem tomadas diante do problema apresentado. Este período inicial é crucial para a tomada de decisão, apoiada no conhecimento já adquirido sobre o tema, além de estimular uma investigação mais profunda dos conceitos matemáticos pertinentes ao tema em discussão. Essa dinâmica entre o conhecimento estabelecido e o conhecimento a ser desenvolvido tem como objetivo fomentar o desenvolvimento cognitivo do aluno. Através de experimentações e aproximações dos resultados, pretende-se atingir uma compreensão aprofundada do processo cognitivo, promovendo a transição entre várias conexões cognitivas e a compreensão aplicada do aprendizado (BIEMBENGUT & HEIN, 2000).

A figura 2, apresenta as ações cognitivas e suas relações com as diferentes fases do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.  Por meio dessas ações, o educando se envolve no processo de ensino-aprendizagem. Quanto à intensidade desse envolvimento, isso irá depender do seu conhecimento adquirido com os conteúdos matemáticos a serem desenvolvidos.

Figura 2: Ações cognitivas e suas relações com as diferentes fases do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática




Fonte: Sousa 2020, p.42

## 2.2 Introdução ao Estudo das Equações Diferenciais

As equações de diferenças, caracterizadas pela sua capacidade de lidar com variações discretas, revelam-se instrumentos poderosos na modelagem matemática, permitindo soluções através de métodos indutivos ou o auxílio de softwares computacionais simples. Este aspecto facilita o tratamento de problemas complexos de maneira eficaz e acessível. Por outro lado, as equações diferenciais ocupam um lugar de destaque dentro da matemática, abrangendo um leque extenso de aplicações e abordagens, variando conforme os objetivos específicos de cada estudo. No contexto deste trabalho, focaremos em apresentar apenas alguns conceitos preliminares das equações de diferenças e diferenciais, com o propósito de explorar situações modeláveis por ambas as abordagens.

É importante reconhecer que a representação exata de um problema real, em toda a sua complexidade, através de equações matemáticas ou sistemas de equações, é uma tarefa inviável. Um modelo matemático deve ser entendido como uma aproximação ou simulação de um fenômeno real, e sua validação está intrinsecamente ligada à escolha adequada das variáveis e à formulação de hipóteses pertinentes. Frequentemente, ao modelar um fenômeno ou experimento, surgem equações que descrevem as variações das quantidades envolvidas (variáveis de estado), consideradas cruciais para a compreensão do fenômeno em questão. Assim, as leis que governam o fenômeno são expressas por meio de equações que capturam essas variações. No caso de variações que ocorrem de forma instantânea, a dinâmica do fenômeno é contínua e as equações matemáticas empregadas são conhecidas como equações diferenciais.

Esta distinção entre equações de diferenças e equações diferenciais não só reflete a diversidade de ferramentas disponíveis para a modelagem matemática mas também sublinha a importância de selecionar o tipo de equação mais adequado ao fenômeno estudado, considerando as características específicas do problema, sejam elas variações discretas ou contínuas.

Dois teoremas básicos do cálculo estão ligados à solução da equação diferencial mais simples:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

A solução ou função incógnita $y(x)$ da equação acima, uma vez conhecida a sua derivada $f(x)$, é obtida via Teorema Fundamental do Cálculo:

$$y(x) = \int_0^x f(z)dz$$

O Teorema do Valor Médio assegura que todas as soluções podem ser escritas na forma:

$$y(x) = C + \int_0^x f(z)dz$$

De uma maneira geral, pode-se dizer que se têm uma equação diferencial (ou um sistema de equações diferenciais) se na equação (ou em cada equação do sistema) estão envolvidas funções incógnitas e suas derivadas.

Uma equação diferencial é uma expressão matemática que envolve uma igualdade, uma função incógnita (variável dependente) e suas derivadas, sendo essa função dependente de uma, duas ou mais variáveis independentes. Exemplos:

$$I)\ xu_x(x,y) + yu_y\,(x,y) = 0$$

$$II)\ y'(t) = ty^2$$

$$III)\ y''(t) = 0$$

Veja que, na equação I, tem-se a igualdade e uma função incógnita $u$ dependendo de duas variáveis independentes $(x, y)$ e uma relação dependente de suas derivadas $\left(u_x, u_y\right)$.

Na equação II e III, temos as igualdades, funções incógnitas $y$, ambas dependendo de uma variável independente $t$ e uma relação, sendo que a equação II tem derivada $y'$ e a III tem derivadas $y''$ e $y'$ envolvidas.

No contexto das equações diferenciais, elas se dividem, basicamente, em duas classes: equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais. Além das características apresentadas na definição de ED, a diferença entre elas está relacionada a quantas são as variáveis independentes de que a função incógnita depende. Assim:

Equações diferenciais ordinárias (EDO): dependem apenas de uma variável independente.

Equações diferenciais parciais (EDP): depende de duas ou mais variáveis dependentes.

Desse modo, com suporte dessas definições, pudesse classificar as equações dos exemplos acima: I equação diferencial parcial e a II e III como equação diferencial ordinária.

Atente para o fato de que, vamos utilizar somente no contexto das equações diferenciais ordinárias EDO. Agora, supõe-se que se tenha uma equação diferencial ordinária com incógnita $u$, inicialmente, dependendo de uma variável independente, digamos $t$. De modo geral, ela pode ser representada por:

$$A_n(t,u)u^n(t) + A_{n-1}(t,u)u^{n-1}(t)+\ldots+A_0\,(t,u)u^0(t) = F(t,u)$$

em que $A_k\,(t,u), k = 0,1,\ldots,n$ são funções que dependem de $t$ e $u$.

Além disso, o ‘expoente’ que acompanha a função incógnita $u$ significa a ordem da derivada. Sendo assim, a partir da definição geral de uma EDO, dada na equação acima, serão denominadas as demais características que elas representam.

Ordem: da equação acima, o número $n$ (expoente de maior ordem da derivada) é a ordem da EDO. Note que na equação apresentada em II é de segunda ordem e a equação apresentada em III é de segunda ordem.

Assim, observa-se que a ordem de uma equação diferencial é indicada pela maior ordem de derivação que aparece na equação. Uma EDO de ordem $n$ tem como expressão geral:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dx}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

A solução de uma EDO, no intervalo $I = (a, b)$, é uma função $y = \varphi(x)$, definida e derivável até a ordem $n$ no intervalo $I$, que satisfaz a expressão geral. Assim, a solução geral de uma EDO é o conjunto de todas as suas soluções. Nas aplicações, geralmente se está interessado em soluções particulares que satisfaçam uma dada condição inicial, ou condições complementares.

Homogeneidade: Se $F(t, u) = 0$, a equação diferencial é dita homogênea e não homogênea em caso contrário. Note que a equação II é homogênea e a equação III é não homogênea.

Linearidade: considerando os coeficientes $A_n(t, u)$ e a função $F(t, u) = f(t)$ e, além disso, a variável dependente e suas derivadas são de primeiro grau, sem composição com as outras funções, estão são ditas EDOs lineares. Caso contrário, ou seja, se deixam de cumprir alguma dessas condições, são ditas não lineares. Note que a equação II é não linear, pois apresenta uma variável dependente de $y$ (função incógnita) elevada ao quadrado. Já a equação III é linear, pois apresenta, pois cumpre todos os requisitos citados na definição anterior.

Soluções: na equação, se existe uma função que satisfaça a igualdade, ela é dita solução da equação.

Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem na forma formal é:

$$\frac{dx}{dy} = f(x, y)$$

onde $f$ é uma função definida num aberto $A$ de $R^2$com valores em $R$. A solução é uma função $y = \varphi(x)$ com $x \in \ (a, b)$, derivável e satisfazendo:

$$(x, \varphi(x)) \in \ A$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = f(x, \varphi(x))$$

A equação $dx/dy = f(x, y)$ estabelece uma relação entre as coordenadas de um ponto e o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da solução, em cada ponto. Portanto, uma equação deste tipo define um campo de direções, ou de inclinações. As soluções são chamadas de curvas de integrais e têm a propriedade que a direção das retas tangentes, em cada ponto, coincide com a direção pré-estabelecida do campo naquele ponto. O lugar geométrico dos pontos onde cada tangente à curva integral preserva uma direção constante são linhas chamadas isóclinas.

Obtemos a equação de uma isóclina considerando:

$$\frac{dx}{dy} = f(x.y) = k$$

onde, $k$ é uma constante (inclinação da tangente).

Os campos de direções, além de contribuírem para um melhor entendimento das equações diferenciais, também constituem um método gráfico para conhecer suas soluções aproximadas. Além desse método gráfico-geométrico, dispõem-se de Teoremas de Existência e Unicidade de solução para problemas de valor inicial (T.E.U), também conhecidos por problema de Cauchy:

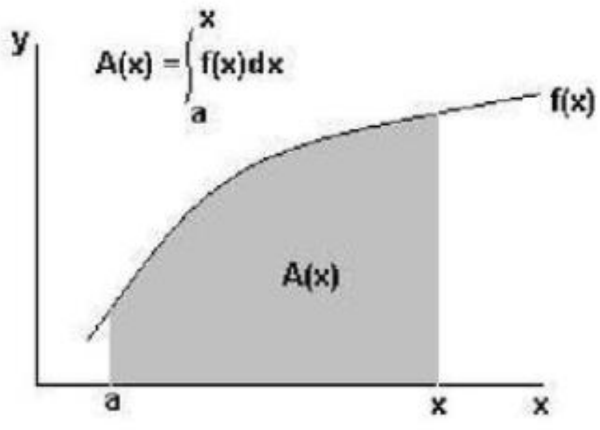
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Em geral, esses teoremas se referem à existência e à unicidade de soluções locais para o problema de Cauchy, isto é, soluções definidas em alguma vizinhança do ponto $x_0$ , isto é, num intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset R$.

Dada uma função $y = f(x)$, pode-se definir uma nova função $z = A(x)$, que representa a área sob o gráfico de $f(x)$ num intervalo $[x_0, x]$, onde o extremo inferior $x_0$ é fixo. A que Newton (1642-1727) percebeu resume-se: a variação da função área $A(x)$ com relação ao ponto $x$ é igual, em cada ponto $x = x^*$, ao valor da função original nesse ponto. Mas isso significa que $A(x)$ é a antidereivada de $f(x)$. Isso constitui o que se convencionou chamar de Teorema Fundamental do Cálculo.

$$\left[\frac{dA}{dx}\right]_{x=x^*} = f(x^*) \leftrightarrow A(x) = \int_a^x f(x)dx$$

Figura 3: Esboço do Teorema Fundamental do Cálculo




Fonte:Bassanezi 2015, p.74

A equação diferencial simples é exatamente o problema Fundamental do Cálculo Diferencial e Integral e consiste no seguinte: dada uma função contínua $f(x)$ definida no intervalo $(a.b)$, determinar todas as funções deriváveis $y(x)$, definidas em $(a,b)$, tais que:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Este problema pode ser facilmente resolvido considerando que:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \leftrightarrow y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C$$

Assim, a solução geral consiste de infinitas soluções paralelas. Observe, entretanto, que se quiser uma solução $y = \varphi(x)$ que satisfaça a condição inicial $\varphi(x_0) = y_0,$ basta considerar $C = \varphi(x_0)$.

Observe que se a função $f(x)$ é definida e contínua no intervalo $(a,b)$, então satisfaz às condições do T.E.U, pois neste caso:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

# 3. MODELO MATEMÁTICO UTILIZANDO AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Para essas etapas de modelagem, seguimos os passos práticos com base no capitulo 3 do livro de Equações Diferenciais Ordinárias Um curso introdutório de Rodney Carlos Bassanezi.

MODELO 1: Absorção de Drogas

Um problema fundamental na farmacologia é saber como uma droga se concentra no sangue de um paciente. O conhecimento desse fato permite estabelecer a dosagem a ser ministrada e o intervalo de tempo de cada aplicação. O modelo mais simples é obtido quando se supõem que a taxa de variação da concentração é proporcional à concentração existente na corrente sanguínea em cada instante. Em termos matemáticos, se $C = C(t)$ é a concentração de droga no sangue, então seu decaimento é dado por:

$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

onde $k > 0$ é uma constante determinada experimentalmente e depende do medicamento utilizado.

Supõem-se que seja ministrada uma dose igual a $C_0$, absorvida pelo sangue instantaneamente. Salienta-se que o tempo de absorção da droga é geralmente muito pequeno se comparado com o tempo entre as aplicações das doses. A solução é dada:

$$C(t) = C_0 e^{-kt}$$

Supõe-se que depois de um tempo $T$ uma segunda dose, da mesma quantidade $C_0$, seja administrada. Teremos então,

$$C(t) = C_0 e^{-kt} \; se \; 0 \leq t < T$$

$$C(T_-) = C_0 e^{-kT} \; quantidade \; de \; drogas \; no \; sangue \; imediatamente \; antes \; da \; 2ª \; dose$$

$$C(T_+) = C_0 e^{-kT} \;\; quantidade \; de \; droga \; no \; sangue \; imediatamente \; depois \; da \; 2ª \; dose$$

Assim, $C(T_+)$ passa a ser a concentração (inicial) de droga que começa a decair após o tempo $T$. Portanto, $T \leq t$, tem-se:

$$C(t) = [C(t) = C_0 e^{-kT} + C_0]e^{-k(t-T)} = C_0(1 + e^{-kT})e^{-k(t-T)}\ para\ T \leq t < 2T$$

Ao continuar o tratamento, administrando outra dose de concentração $C_0$ no instante $2T$, tem-se:

$$C(2T_-) = C_0(1 + e^{-kT})e^{-kT}$$

$$C(2T_+) = C_0(1 + e^{-kT})e^{-kT} + C_0 = C_0(1 + e^{-kT} + e^{-2kT})$$

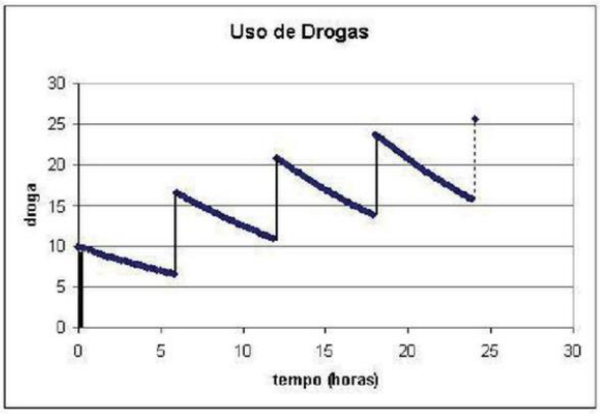
$$C(t) = C_0(1 + e^{-kT} + e^{-2kT})e^{-k(t-2T)}\ se\ 2T \leq t$$

Depois da enésima aplicação, a quantidade de droga no sangue será:

$$C(nT_+) = C_0(1 + e^{-kT})e^{-kT} + C_0 = C_0(1 + e^{-kT} + e^{-2kT} + \ldots + e^{-nkT})$$

$$C(t) = C_0(1 + e^{-kT} + e^{-2kT} + \ldots + e^{-nkT})e^{-k(t-nT)}\ se\ T \leq t$$

Figura 4: A droga decai exponencialmente em cada intervalo entre as aplicações




Fonte: Bassanezi 2015, p.82

As expressões acima estabelecem as concentrações de droga administradas periodicamente. Observa-se que a expressão:

$$(1 + e^{kT} + e^{-2kT} + \ldots + e^{-nkT})$$

é a soma de uma progressão geométrica de $(n+1)$ termos, com o primeiro termo igual a 1 e a razão igual a $e^{-kT}$. Logo, pode-se escrever:

$$C = (nT_{+}) = C_0 \frac{1 - e^{-(n+1)kT}}{1 - e^{-kT}}$$

Dessa forma, se o tratamento for por tempo ilimitado, ou seja, com $n$ muito grande, pode-se estabelecer o nível de saturação da droga:

$$C_s = \lim_{n\to\infty} C_0 \frac{1 - e^{-(n+1)kT}}{1 - e^{-kT}} = \frac{C_0}{1 - e^{-kT}}$$

MODELO 2: Dinâmica Populacional –Modelo Malthusiano

Seja $p$ o número de indivíduos em uma população animal ou vegetal. Esse número é depende do tempo, e assim pode-se escrever:

$$\frac{dP}{dt} = F(t)$$

Na realidade, $P(t)$ assume somente valores inteiros sendo, pois, uma função discreta de $t$. Entretanto, quando o número de indivíduos é suficientemente grande, $P(t)$pode ser aproximado por uma função contínua, variando continuamente no tempo.

Admite-se que a proporção de indivíduos reprodutores permanece constante durante o crescimento da população. Ainda, as taxas de fertilidade $n$ e de mortalidade $m$ sejam constantes. Essas hipóteses são realísticas em uma população grande que varia em condições ideais, isto é, quando todos os fatores inibidores de crescimento estão ausentes (a espécie tem recursos ilimitados e não interage com competidores ou predadores).

Tem-se que $\alpha = n - m$(coeficiente de natalidade menos o de mortalidade) é a taxa de crescimento específico da população $P(t)$, aqui considerada constante. Assim,

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = n - m = \alpha$$

Essa formulação matemática indica que a variação relativa da população é constante, ou, em outras palavras, que a variação da população é proporcional a própria população em cada período de tempo.

O modelo discreto de Matlhus é dado por:

$$P(t+1) - P(t) = \alpha P(t)$$

Considerando a população inicial $P(0) = P_0$, a solução $P(t+1) - P(t) = \alpha P(t)$ é obtida por recorrência da expressão:

$$\begin{cases} P_{t+1} = (1+\alpha)P_t \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

Ou seja,

$$P_t = (\alpha + 1)^t P_0$$

Assim, dados dois censos $P_0$ e $P_t$, a taxa de crescimento demográfico em $t$ anos é obtida, fazendo:

$$(\alpha+1)^t = \frac{P_t}{P_0} \quad \rightarrow \quad \alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1$$

Por exemplo, se a população do Brasil de 1940 era $P_0 = 41.236.351$ e, dez anos depois, $P_{10} = 51.944.397$, então a taxa de crescimento populacional média $(relativa)$, entre 1940 e 1950, foi de:

$$\alpha = \sqrt[10]{\frac{51.944.397}{41.236.351}} - 1 = 1{,}0233539 - 1 = 0{,}0233539$$

Ou, aproximadamente, $2{,}3\%$ ao ano.

Se for considerada as populações entre os Censos de 1940 e 1991, quando a população era de 146.825.475 habitantes, $\alpha$ é dada por:

$$\alpha = \sqrt[51]{\frac{146.825.475}{41.236.351}} - 1 = 0{,}0252131$$

O que permite afirmar que a população brasileira cresceu uma taxa média de, aproximadamente, $2{,}5\%$ ao ano nesses 51 anos.

Lembrando que $P_t = (\alpha+1)^t P_0$ pode ser escrito na forma exponencial:

$$P_t = P_0 e^{ln(1+\alpha)t}$$

Comparando a solução do modelo de Mathus discreto $\begin{cases} P_{t+1} = (1+\alpha)P_t \\ P(0) = P_0 \end{cases}$ com a solução do modelo contínuo correspondente, considerando que:

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

E que $P(t + \Delta t) - P(t) = \beta P(t)\Delta t$(modelo discreto).

Assim, pode-se escrever o modelo contínuo por:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \beta P(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

Cuja solução é dada por:

$$P_t = P_0 e^{\beta t}$$

Portanto, os modelos discretos $(com\ taxa\ \alpha)$e contínua $(com\ taxa\ \beta)$ fornecem a mesma solução quando:

$$\beta = ln(1 + \alpha)$$

Se considerar o modelo malthusiano para projetar a população brasileira, tem-se $\alpha = 0{,}0252131$ para o modelo discreto $\beta = 0{,}0249$ para contínuo.

A equação,

$$P_t = 41{,}236e^{0{,}0249t}$$

fornece a população (em milhões de habitantes) em cada ano $t$.

## 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio dos pressupostos discutidos percebeu-se que o ensino da matemática é de suma importância, sendo que o conhecimento matemático é essencial para a formação do indivíduo que acaba por lhe conferir uma melhor interpretação do mundo, proporcionando a descoberta e a compreensão da realidade e ainda permitindo o desenvolvimento de suas capacidades intelectuais em relação à percepção espacial, criatividade, raciocínio através de elementos presentes em diversos espaços.

A adoção de modelos matemáticos no ensino, seja na forma de apresentação, seja no processo de criação, dimensionada de forma adequada à realidade das comunidades escolares, incorporando novas tecnologias, sem deixar de preservar identidades culturais, é um meio de propiciar ao aluno atingir melhor desempenho, tornando-o um dos principais agentes de mudança.

Ao participar de um trabalho com modelagem ou modelação, no qual o conteúdo não é dissociado da realidade, pois há conexão entre o que se aprendeu e o que se executou, acreditamos que os alunos e professores tornar-se-ão mais entusiastas com a possibilidade de transformar a escola, ainda que de forma lenta e gradual, para que ela venha a exercer o papel que lhe cabe na preparação do indivíduo para atuar no meio circundante.

O ensino-aprendizagem de matemática será mais gratificante, uma vez que o aluno passe a aprender o que lhe desperta interesse, tornando-o então corresponsável pelo seu aprendizado. E o professor orientador também sai ganhando no sentido de que cada tema escolhido por seus alunos possibilita aquilatar seu conhecimento.

O que é proposto por meio do trabalho não é um manual de regras, mas sim o resultado de uma possível vivência prática, de uma análise de diversos fatores sobre a instituição de ensino, das necessidades do meio em que vivemos e que está em crescente desenvolvimento tecnológico. A despeito das dificuldades encontradas, os resultados positivos têm levado aos estudiosos da área a acreditar e apostar, cada vez mais, no emprego na modelagem matemática nas unidades escolares, que tem como ponto central estimular a criatividade do indivíduo em desenvolver-se e enfrentar com sucesso o próximo milênio.

Ainda, deve-se notar que por meio dos expostos contidos na legislação educacional o conhecimento geométrico, deve ser desenvolvido dentro do contexto social e cultural ao qual o aluno está inserido, não podendo ser algo isolado, distante da sua realidade.

Ressalta-se ainda que, se é nosso desejo modificar o atual panorama do ensino/aprendizagem da matemática, devemos optar por enfrentar as dificuldades e fazer modificações na maneira de lecionar, para satisfazer o desejo de motivação dos alunos e despertar neles o interesse por esse ramo tão interessante da matemática.

Com o desenvolvimento deste trabalho, que teve por objetivo a aplicação de práticas educacionais e suas metodologias no ensino de matemática, especificamente voltado para a área da investigação matemática, foi possível compreender que para cada assunto abordado, além de seguir as matrizes curriculares, é necessário desenvolver metodologias de ensino que contextualizem o tema da aula com o cotidiano dos alunos, para que o entendimento do conteúdo ocorra de forma satisfatória.

Conclui-se que as práticas educacionais necessitam de aperfeiçoamento para que sejam transmitidas e utilizadas no desenvolvimento de uma sociedade crítica, interessada nas questões humanas e comprometida com as questões sociais. Através da educação é que poderemos trazer mudanças significativas para a cultura do país, que atualmente é voltada apenas para práticas capitalistas e crescimento econômico, sem destinar projetos relevantes ao aprimoramento da educação, saúde e segurança.

**REFERÊNCIAS**


ALMEIDA, Lourdes Werle de; SILVA, Karina Pessôa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. 1.ed. São Paulo: Contexto, 2012.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 1990.

BALL, P. **A Forma das Coisas: Da Geometria da Criação à Geometria da Natureza**. São Paulo: Editora Globo, 1999.

BANKS, J. et al. **Princípios de Modelagem e Simulação**. São Francisco: Jossey-Bass, 2013.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem Matemática**: teoria e prática.São Paulo: Contexto, 2015.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Contexto, 2000.

BIEMBENGUT, Maria Sallet. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5.ed. São Paulo: Contexto, 2009.

BLUM, W.; LEIß, D. **Como Fazer Modelagem Matemática na Sala de Aula: Um Guia Prático**. São Paulo: FTD, 2007.

BLUM, W.; NISS, M. **Aplicando Matemática na Sala de Aula**. In: Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, H.W., &Niss, M. (eds.). **Modelagem Matemática e Aplicações: uma Perspectiva Internacional**. Chichester: Ellis Horwood, 1991.

BLUM, Werner; LEIß, Dominik. "Como Implementar a Modelagem Matemática nas Salas de Aula: Um Guia Prático". In: **Modelagem Matemática e Aplicações**. Tradução de Preprint, 2007.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento**. São Paulo: Autêntica, 2005.

BORROMEO FERI, R.; BLUM, W. **Modelagem Matemática na Educação Matemática**. In: Pesquisas em Educação Matemática, Conceitos, Resultados e Perspectivas. NCTM, 2010.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Princípios de Equações Diferenciais**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da Teoria à Prática**. Campinas: Papirus, 1987.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: Da Teoria à Prática**. Campinas: Papirus, 1996.

GIORDANO, F. R. et al. **Um Primeiro Curso em Modelagem Matemática**. Belmont: Brooks/Cole, 2007.

HUGHES-HALLETT, D. et al. **Cálculo: Aplicações e Técnicas**. Nova York: Wiley, 2010.

LARSON, R.; EDWARDS, B. H. **Cálculo com Geometria Analítica**. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

LEWIS, T. G. **Modelos de Rede em Ciência da Computação**. São Paulo: Editora Universitária, 2003.

MEYER, P. A. **Probabilidades e Potenciais**. Bruxelas: Hermann, 1973.

MOLYNEUX-HODGSON, S.; PÉREZ, J. **Modelos Matemáticos e Contextos Sociais: Para Além da Simplicidade**. In: Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 11, n. 2, pp. 331-356, 2009.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica**. Campinas: Papirus, 2001.

SOUSA, Kennedy Medeiros Tavares de. **Jogos e Modelagem na Educação Matemática**. Curitiba: Contentus, 2020.

STEWART, J. **Cálculo**. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2006.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais com Aplicações e Notas Históricas**. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

ZILL, D. G.; WRIGHT, W. S. **Cálculo Diferencial e Integral**. Jones & Bartlett Learning, 2012.