



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE FÍSICA

Alexsandro Baia Corrêa

O POTENCIAL EFETIVO VIA FORMALISMO DE INTEGRAIS DE TRAJETÓRIA

Belém

2021



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE FÍSICA

ALEXSANDRO BAIA CORRÊA

O POTENCIAL EFETIVO VIA FORMALISMO DE INTEGRAIS DE TRAJETÓRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção do grau de Licenciado em Física da Faculdade de Física da Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Oliveira do Nascimento.

Co-orientador: Prof. Dr. Van Sérgio da Silva Alves.

Belém

2021

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

ALEXSANDRO BAIA CORRÊA

O POTENCIAL EFETIVO VIA FORMALISMO DE INTEGRAIS DE TRAJETÓRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
para a obtenção do grau de Licenciado em
Física pela Faculdade de Física da Universi-
dade Federal do Pará e avaliado pela seguinte
banca examinadora:

Prof. Dr. Leandro Oliveira do Nascimento (orientador)
Faculdade de Ciências Naturais, UFPA/Campus Breves

Prof. Dr. Van Sérgio da Silva Alves (Co-orientador)
Faculdade de Física, UFPA/Campus Belém

Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves (Membro)
Faculdade de Física, UFPA/Campus Belém

Prof. Dr. Marcelo Costa de Lima (Membro)
Faculdade de Física, UFPA/Campus Belém

DATA DA DEFESA: ____/____/____

CONCEITO: _____

RESUMO

No presente trabalho, nós estudamos o formalismo de integrais de trajetória, tanto no formalismo de Feynman quanto no de Schwinger. Começamos aplicando esse formalismo a sistemas mais simples de mecânica quântica como por exemplo o oscilador harmônico quântico, obtendo as funções de Green. Após isso, aplicamos o método funcional em teoria quântica de campos para o cálculo do potencial efetivo da teoria $\lambda\phi^4$ e construímos a equação do grupo de renormalização para esse potencial, determinando a massa e a constante de acoplamento renormalizadas. Posteriormente, usamos as frequências de Matsubara para inserir efeitos térmicos no potencial efetivo e fazemos a conexão desse objeto com a termodinâmica. Com base nisso, calculamos a pressão de partículas reais bosônicas, fazendo uma analogia com a Lei de Stefan-Boltzmann.

Palavras-Chave: integrais de trajetória; potencial efetivo; grupo de renormalização; frequências de Matsubara.

ABSTRACT

In the present work, we study the formalism of path integrals, both in Feynman's and Schwinger's formalism. We started by applying this formalism to simpler systems of quantum mechanics such as the quantum harmonic oscillator, obtaining Green's functions. After that, we apply the functional method in quantum field theory to calculate the effective potential of the $\lambda\phi^4$ theory and build the renormalization group equation for this potential, determining the renormalized mass and coupling constant. Subsequently, we use the Matsubara frequencies to insert thermal effects in the effective potential and make the connection between this object and thermodynamics. Based on this, we calculate the pressure of real bosonic particles, making an analogy with Stefan-Boltzmann's Law.

Key-Words: path integrals; effective potential; renormalization group; Matsubara frequencies.

DEDICATÓRIA

A minha mãe, Josilene.

AGRADECIMENTOS

Registro meus agradecimentos

- A minha mãe Josilene, ao meu pai Alessandro e ao meu padrasto Marco pelos investimentos e apoio aos meus estudos. As minhas irmãs Carol, Samanta, Samira e a pequenina Samya pelas brincadeiras e reuniões em família. A minha namorada Tainah pelos nossos momentos juntos, companheirismo, paciência e apoio emocional.
- Aos meus orientadores Prof. Dr. Leandro Oliveira e Prof. Dr. Van Sérgio Alves pela paciência que tiveram em todas as orientações, pelo apoio a minha formação e pelo incentivo à pesquisa.
- Aos membros da banca examinadora Prof. Dr. Danilo Teixeira e Prof. Dr. Marcelo Lima pelas críticas e sugestões ao trabalho.
- Aos colegas do grupo GRAFI (Group Applied Theory of Field) pelas discussões e reuniões de iniciação científica que muito enriqueceram a minha formação.
- Aos meus amigos de graduação, em especial, Amanda Evangelista, Alan Correa e Bruno Tavares.
- À UFPA pela estrutura e pelo suporte a minha formação.
- Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

“O matemático joga um jogo no qual ele mesmo inventa as regras, enquanto o físico joga um jogo no qual as regras são inventadas pela Natureza”.

P.A.M Dirac

Sumário

Introdução	11
1 Introdução aos métodos funcionais	13
1.1 Introdução ao formalismo funcional	13
1.2 Funções de Green do oscilador harmônico quântico (OHQ)	16
1.3 Correção quântica a energia de vácuo do OHQ devido a uma interação quártica	19
1.4 Correção quântica a energia de vácuo de um modelo não local com interação quártica	21
1.5 Formalismo CTP na notação matricial	25
1.6 Formalismo CTP usando a função Heaviside modificada	28
1.7 Os geradores funcionais $Z[J]$, $W[J]$ e $\Gamma[\phi]$	32
2 O método funcional em teorias de campos	35
2.1 Teoria de Klein-Gordon	35
2.1.1 Propagador da teoria livre	36
2.2 Potencial efetivo via método do campo de fundo (expansão semi-clássica) . .	38
2.3 Grupo de renormalização para $iV[\rho]$	43
2.3.1 Grupo de renormalização para a teoria $\lambda\phi^4$	44
2.4 β_m e β_λ via condições de renormalização	48
2.5 Grupo de renormalização para $\Gamma^{(2)}(p^2)$	50

3	Efeitos de temperatura e a energia de vácuo	54
3.1	Energia do vácuo	54
3.2	Frequências de Matsubara	55
3.3	Potencial efetivo a temperatura finita	56
3.4	Conexão com a termodinâmica	59
3.4.1	Lei de Stefan-Bolztmann para a pressão de partículas reais	62
	Considerações finais	63
	Referências Bibliográficas	64

Introdução

A Teoria Quântica de Campos (TQC) emergiu naturalmente como o resultado da aplicação das leis da mecânica quântica a sistemas envolvendo os campos clássicos relativísticos. Em 1905, Albert Einstein utilizou essa ideia quando aplicou a concepção de Planck dos quanta de energia à radiação eletromagnética a fim de explicar o efeito fotoelétrico. Atualmente, a TQC reúne num arcabouço teórico dois pilares da física, a saber, a mecânica quântica e a relatividade restrita. A TQC não apenas descreve o comportamento das partículas elementares e suas interações, como também pode ser aplicada na descrição de algumas propriedades físicas de sistemas de matéria condensada. As previsões teóricas da TQC estão em grande concordância com os dados experimentais e demonstram a importância dessa área do conhecimento para a compreensão da natureza e para o desenvolvimento de novas tecnologias [1].

Os elementos mais básicos de uma dada teoria quântica de campos são as chamadas funções de Green. Essas funções caracterizam completamente a teoria, uma vez que contêm toda a informação sobre o sistema como por exemplo seções de espalhamento, espectro de energia e transições de fase. Existem várias técnicas matemáticas para o cálculo dessas funções, contudo o formalismo de integrais (ou formalismo funcional) de trajetória tem enorme destaque por oferecer um algoritmo eficaz na obtenção das funções de Green [1]. Dentro do formalismo funcional, há a versão de Feynman proposta em 1948 no artigo intitulado “Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics” [2] e a de Schwinger apresentada em 1961 no seu clássico trabalho “Brownian Motion of a Quantum Oscillator” [3], conforme brevemente revisaremos no capítulo 1.

Outra característica da TQC é a presença de divergências no cálculo das funções de Green com correções quânticas. Tais divergências também aparecem no cálculo do potencial efetivo de uma TQC. Esse potencial efetivo, por sua vez, pode ser determinado via formalismo

funcional, usando o chamado método do campo de fundo [4]. Nesse caso, o potencial efetivo é dado por uma expansão em série de potências em $\hbar$. O termo proporcional a $\hbar^0$ é o chamado potencial clássico e o termo proporcional a $\hbar$ é a correção quântica de ordem mais baixa. Essa correção representa, na teoria de perturbação, a expansão em 1-loop [4]. O problema das divergências é contornado com a aplicação do grupo de renormalização a esse potencial efetivo ou as funções de Green. No capítulo 2, nós mostraremos como esse processo ocorre para uma teoria escalar.

Sistemas de TQC ou de física da matéria condensada podem apresentar transições de fase, entre uma fase com quebra de simetria (estado quântico) e outra que respeita a simetria (fase trivial ou clássica). O tipo específico de simetria quebrada depende do estado que está sendo investigado. No caso do ferromagnetismo, é quebrada a simetria de rotação do spin enquanto que na supercondutividade é quebrada a simetria de gauge [1]. Essas transições de fase podem ocorrer tanto a temperatura zero quanto a temperatura finita. No primeiro caso, é suficiente estudar o potencial efetivo a temperatura zero que representa a energia de vácuo do sistema. No segundo caso, precisamos incluir o efeito do banho térmico no cálculo do potencial efetivo. Essa quantidade é igual ao grande potencial termodinâmico por unidade de volume, conforme discutiremos no capítulo 3. Em geral, os efeitos térmicos tendem a levar o sistema para a fase trivial, na qual a simetria é respeitada [5].

Capítulo 1

Introdução aos métodos funcionais

Neste capítulo, o formalismo funcional de Feynman é apresentado com o propósito de mostrar a utilidade dessa ferramenta matemática para o cálculo de funções de Green. Posteriormente, aplica-se essa formulação na obtenção das funções de Green do oscilador harmônico quântico (OHQ). Além disso, é determinada a correção quântica para a energia do estado de vácuo no caso do OHQ com interação quártica. Esse procedimento é feito para um modelo não local com operador pseudo diferencial. No contexto da teoria quântica de campos, os modelos não locais são de grande interesse na descrição de materiais bidimensionais, nos quais o operador pseudo diferencial emerge do processo de redução dimensional.

1.1 Introdução ao formalismo funcional

Um dos objetos de grande interesse em mecânica quântica é a amplitude de transição entre um estado inicial $|\text{in}\rangle$ e um estado final $|\text{out}\rangle$. O módulo quadrático desse objeto permite calcular a probabilidade de ocorrer uma transição entre os estados físicos considerados. Há diferentes formas para o cálculo dessa quantidade como a regra de ouro de Fermi, métodos variacionais e matriz-S. As técnicas matemáticas utilizadas dependem das características gerais do sistema: magnitude da interação, a dimensão e até mesmo as simetrias apresentadas pelo modelo [6].

Em teoria quântica de campos (TQC), a formulação de integrais de trajetória de Feynman tem um papel central não só para o cálculo da amplitude de transição como também

para a obtenção das funções de Green do sistema. Essas funções caracterizam completamente uma teoria de campo, uma vez que fornecem a matriz-S e, a priori, os elementos de matriz de qualquer observável físico como massa das partículas, correções quânticas e potenciais efetivos [4]. A seguir, discuti-se esse formalismo tanto para o caso de campos bosônicos quanto para o caso de campos de fermiônicos.

Seja um campo bosônico $\varphi(x)$, então as funções de Green de N pontos $G^N(x_1, \dots, x_N)$ do sistema são dadas pelo funcional gerador $Z[J]$, definido por

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{(n!)} \int dx_1 \dots dx_n \langle 0 | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) | 0 \rangle J(x_1) \dots J(x_n), \quad (1.1)$$

sendo que $|0\rangle$ é o estado de vácuo, T é o operador de ordenação temporal e $J(x)$ é uma fonte externa. A partir da Eq. (1.1), calculando-se as derivadas funcionais com relação as fontes $J(x_1), \dots, J(x_N)$, obtemos as função de Green de N pontos

$$G^N(x_1, \dots, x_N) = \langle 0 | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) | 0 \rangle = (-i)^N \frac{\delta^N}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_N)} Z[J] \Big|_{J=0}. \quad (1.2)$$

Note que a partir de $Z[J]$ obtém-se $G^N(x_1, \dots, x_N)$ e vice-versa. Na formulação de Feynman, primeiro calculamos o funcional gerador e depois obtemos as respectivas funções de Green [4].

No sistema de unidades naturais ($\hbar = c = 1$), o funcional gerador das funções de Green em dimensão arbitrária tanto para o caso bosônico quanto para o caso fermiônico, dentro do formalismo de integrais de trajetória, é dado por

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = {}_J \langle \text{in} | \text{out} \rangle_J = \mathcal{N} \int D\varphi D\psi D\bar{\psi} \exp \left\{ iS[\varphi, \psi, \bar{\psi}] + \int d^D x [J(x)\varphi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)] \right\} \quad (1.3)$$

tal que $|\text{in}\rangle$ e $|\text{out}\rangle$ são os estados inicial e final do sistema, $\mathcal{N}$ é um fator de normalização escolhido para assegurar a condição $Z[J = \bar{\eta} = \eta = 0] = 1$, $S[\varphi, \psi, \bar{\psi}]$ é a ação clássica do modelo, φ o campo de bósons, ψ e $\bar{\psi}$ representam os campos de férmions. Além disso, os termos $J(x)$, $\bar{\eta}(x)$ e $\eta(x)$ são os acoplamentos externos aos campos. As funções de Green são calculadas a partir das derivadas funcionais com relação as fontes, sendo que para férmions essa operação deve obedecer a anticomutatividade das variáveis de Grassmann [4].

As integrais funcionais na Eq. (1.3) são definidas formalmente sobre todas as configurações possíveis dos campos. As convergências dessas integrais são processos delicados. Para avaliá-las, é usual sair do espaço de Minkowski e ir para o espaço euclidiano por meio de uma

rotação de Wick. Essa transformação consiste em fazer a seguinte mudança na coordenada temporal $t \rightarrow -i\tau$ de modo que $\int \mathcal{L} d^4x \rightarrow i \int \mathcal{L}_E d^4x_E$, sendo $\mathcal{L}$ a lagrangiana da teoria [4].

Há dois resultados particulares da Eq. (1.3) importantes para a obtenção das funções de Green. Para qualquer campo bosônico $\varphi(x)$, é válida a seguinte integral gaussiana

$$\begin{aligned} Z_B[J] &= \mathcal{N} \int D\varphi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^D x \varphi(x) A(x) \varphi(x) + \int d^D x \varphi(x) J(x) \right\} \\ &= \mathcal{N} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^D x d^D y J(x) A^{-1}(x-y) J(y) \right\} [\det A]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

sendo $A^{-1}(x-y)$ a função de Green da matriz A [1].

Para quaisquer campos fermiônicos $\bar{\psi}$ e ψ , a integral gaussiana relevante é dada por

$$\begin{aligned} Z_F[\eta, \bar{\eta}] &= \mathcal{N} \int D\psi D\bar{\psi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^D x \bar{\psi} K \psi + \int d^D x (\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta) \right\} \\ &= \mathcal{N} \exp \left\{ \int d^D x d^D y [\bar{\eta}(x) K^{-1}(x-y) \eta(y)] \right\} [\det K]^{1/2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

no qual $K^{-1}(x-y)$ é a função de Green do operador K [1].

Se por um lado o formalismo de Feynman determina todas as funções de Green do modelo em estudo, por outro quando ele é aplicado ao cálculo de um observável físico dependente do tempo, é necessário impor a condição de que os estados do sistema convergem para o estado de vácuo na medida que o tempo transcorre para o passado remoto e o futuro distante. Essa consideração permite obter resultados reais com significado físico. Mais adiante, será mostrado que a condição imposta ao formalismo de Feynman é desnecessária no formalismo Closed Time Path (CTP) desenvolvido por Schwinger em 1961. Nessa última formulação, basta conhecer apenas o estado inicial do sistema para calcular o valor esperado de qualquer observável físico [6].

O valor médio de um observável físico, dentro do formalismo de Feynman, $O(t)$ é definido por

$$\langle in; t_i | O(t) | out; t_f \rangle = \mathcal{N} \int D\varphi e^{iS[\varphi]} O(t). \quad (1.6)$$

Vamos reescrever essa Eq. (1.6) em termos de uma derivada funcional semelhante ao que foi feito para as funções de Green. Para isso, introduzimos uma fonte $J(t)$ na Eq. (1.6) e definimos um funcional gerador $Z[J]$ para o observável $O(t)$. Assim,

$$Z[J] = \mathcal{N} \int D\varphi e^{iS[\varphi] + J(t)O(t)}. \quad (1.7)$$

O cálculo da derivada funcional com relação a $J(t)$ da Eq. (1.7) resulta que

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J} = \mathcal{N} \int D\varphi e^{iS[\varphi] + J(t)O(t)} O(t). \quad (1.8)$$

Fazendo $J(t) = 0$ na Eq. (1.8), obtemos

$$\left. \frac{\delta Z[J]}{\delta J} \right|_{J=0} = \mathcal{N} \int D\varphi e^{iS[\varphi]} O(t) = \langle \text{in}; t_i | O(t) | \text{out}; t_f \rangle. \quad (1.9)$$

Por hipótese, o operador $O(t)$ é hermitiano, isto é, $O(t) = O^\dagger(t)$. Assim, os autovalores desse operador serão reais, desde que: $(t_i, t_f) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ com $|\text{in}; t_i = -\infty\rangle = |\text{out}; t_f = +\infty\rangle = |0\rangle$, sendo $|0\rangle$ o estado de vácuo do sistema [6]. Com isso, concluímos que o valor esperado de $O(t)$ no vácuo é fornecido por

$$\langle 0 | O(t) | 0 \rangle = \left. \frac{\delta Z[J]}{\delta J(t)} \right|_{J=0}. \quad (1.10)$$

Observe que há uma relação não trivial de transição entre os estados inicial e final, mostrando que a formulação de Feynman é útil quando o estado de vácuo não é modificado pelo tempo ou em outra coordenada [6].

1.2 Funções de Green do oscilador harmônico quântico (OHQ)

Nesta seção, ilustramos o cálculo das funções de Green do oscilador harmônico quântico (OHQ) como primeira aplicação da formulação de Feynman discutida na seção precedente. Embora o OHQ não seja um sistema de teoria quântica de campos, ele possui muitas semelhanças com o modelo de Klein-Gordon, no que diz respeito ao procedimento operacional para obtenção do propagador da teoria livre, conforme mostraremos no capítulo 2, sendo assim um bom exemplo para começamos a explorar o formalismo funcional.

A lagrangiana do OHQ é dada por

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2 q^2}{2}, \quad (1.11)$$

sendo $q(t)$ a coordenada generalizada do problema, m a massa da partícula e ω_0 a frequência angular de oscilação. Em primeiro lugar, vamos definir o funcional gerador das funções de

Green $Z[J]$ para o modelo da Eq. (1.11). Desse modo,

$$Z[J] = \mathcal{N} \int Dq e^{iS[q] + \int dt J(t)q(t)}. \quad (1.12)$$

A ação clássica do OHQ pode ser reescrita em termos quadráticos da coordenada generalizada $q(t)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} S[q] &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt L \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left\{ \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2 q^2}{2} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left\{ -\frac{1}{2} q \left(m \frac{d^2}{dt^2} + m\omega_0^2 \right) q \right\}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

sendo que integramos por partes e usamos a condição de contorno sobre $q(t)$, a qual se anular nos extremos de integração. Substituindo a Eq. (1.13) na Eq. (1.12) e usando o resultado da integral funcional bosônica da Eq. (1.4), encontramos o funcional gerador das funções de Green do OHQ, dado por

$$Z[J] = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' J(t) A(t-t') J(t') \right\}, \quad (1.14)$$

na qual o operador diferencial é dado por $A = im \frac{d^2}{dt^2} + im\omega_0^2$ e a constante de normalização foi determinada $\mathcal{N} = [\det A]^{1/2}$ aplicando a condição $Z[J=0] = 1$.

A função de Green de dois pontos $G(t, t')$ para o OHQ é fornecida pela segunda derivada funcional de $Z[J]$ com relação a fonte externa $J(t)$. Assim,

$$G(t, t') = \frac{\delta^2}{\delta J(t) \delta J(t')} Z[J] \Big|_{J=0}. \quad (1.15)$$

Usando a Eq. (1.14) na Eq. (1.15), calculando as derivadas e posteriormente fazendo $J = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} G(t, t') &= A^{-1}(t-t') \\ &= \left[im \frac{d^2}{dt^2} + im\omega_0^2 \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

cuja transformada de Fourier é

$$G(t, t') = -\frac{i}{2\pi m} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega^2 - \omega_0^2)}. \quad (1.17)$$

A integral na Eq. (1.17) pode ser avaliada analiticamente pelo teorema do resíduo. Por uma rápida inspeção no denominador, notamos que ela possui dois pólos $\omega = \pm\omega_0$ sobre o

eixo real. Para aplicar o teorema, vamos deslocar esses polos, acrescentando $+i\epsilon$ e $-i\epsilon$ no denominador e no final das contas fazemos $\epsilon \rightarrow 0$. Assim, a integral é reescrita no plano complexo por

$$I = \oint_C dz \frac{e^{-iz(t-t')}}{(z + \omega_0 - i\epsilon)(z - \omega_0 + i\epsilon)}. \quad (1.18)$$

Para o caminho C escolhemos uma semi-circunferência de raio R percorrida no sentido horário para englobar apenas o polo $-\omega_0 + i\epsilon$. Deste modo, a integração sobre a curva C pode ser dividida em duas integrações

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega + \omega_0 - i\epsilon)(\omega - \omega_0 + i\epsilon)} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int dz \frac{e^{-iz(t-t')}}{(z + \omega_0 - i\epsilon)(z - \omega_0 + i\epsilon)}. \quad (1.19)$$

A análise assintótica do segundo termo da Eq. (1.19) mostra que ele vai a zero no limite de $R \rightarrow \infty$ se $t - t' < 0$. Logo, pelo teorema do resíduo, temos

$$\begin{aligned} I^{(-)} &= -2\pi i \text{Res} \{f(\omega = -\omega_0 + i\epsilon)\} \\ &= 2\pi i \frac{e^{+i\omega_0(t-t')}}{2\omega_0}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

De forma análoga ao procedimento anterior, vamos avaliar a integral da Eq. (1.18) escolhendo como caminho fechado uma semi-circunferência de raio R percorrida no sentido anti-horário. Dessa vez, engloba-se apenas o polo $\omega_0 - i\epsilon$. Novamente, a integral avaliada no plano complexo pode ser dividida em duas partes assim como na Eq. (1.19), sendo que neste caso a segunda integral vai a zero no limite $R \rightarrow \infty$ se $t - t' > 0$. Assim, resulta que

$$\begin{aligned} I^{(+)} &= 2\pi i \text{Res} \{f(\omega = \omega_0 - i\epsilon)\} \\ &= 2\pi i \frac{e^{-i\omega_0(t-t')}}{2\omega_0}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Ao substituir as Eqs. (1.20) e (1.21) na Eq. (1.17), obtemos as funções de Green retardada $G^{(-)}(t, t')$ e avançada $G^{(+)}(t, t')$, dadas respectivamente por

$$G^{(-)}(t, t') = \frac{1}{2m\omega_0} e^{+i\omega_0(t-t')}; \quad t - t' < 0, \quad (1.22)$$

$$G^{(+)}(t, t') = \frac{1}{2m\omega_0} e^{-i\omega_0(t-t')}; \quad t - t' > 0. \quad (1.23)$$

Uma das função de Green de grande interesse em teoria quântica de campos para cálculos perturbativos é a função de Green de Feynman $G_F(t, t')$. Essa função é obtida quando

escolhemos uma curva fechada englobando os dois polos $-\omega_0 + i\epsilon$ e $\omega_0 - i\epsilon$ simultaneamente. Dessa forma, após aplicar o teorema do resíduo, encontramos

$$\begin{aligned} G_F(t, t') &= \theta(t - t')G^{(+)}(t, t') + \theta(t' - t)G^{(-)}(t, t') \\ &= \frac{1}{2m\omega_0}e^{-i\omega_0|t-t'|}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

sendo que $\theta(t - t')$ é a função de Heaviside. Além da função de Green de Feynman, podemos obter a função de Green de Dyson fornecida pela seguinte identidade [6]

$$G_D(t, t') = G^{(+)}(t, t') + G^{(-)}(t, t') - G_F(t, t'). \quad (1.25)$$

Substituição as Eqs. (1.22), (1.23) e (1.24) na Eq. (1.25), temos que

$$\begin{aligned} G_D(t, t') &= G^{(-)}(t, t')\theta(t - t') + G^{(+)}(t, t')\theta(t' - t) \\ &= \frac{1}{2m\omega_0}e^{+i\omega_0|t-t'|}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

1.3 Correção quântica a energia de vácuo do OHQ devido a uma interação quártica

As soluções exatas de problemas em mecânica quântica normalmente tratam de sistemas sem interação. Em geral, os sistemas em interação são complexos de serem resolvidos analiticamente. Contudo, apesar da complexidade há uma forma sistemática de obter soluções aproximadas para esses sistemas. Esse método é denominado de teoria de perturbação [7]. A seguir, aplicamos a teoria de perturbação usual em mecânica quântica para o OHQ com interação quártica e, em seguida, mostramos como tratar o problema dentro do formalismo de Feynman por meio das funções de Green do OHQ livre calculadas na seção anterior.

Considere a lagrangiana do OHQ acoplada a um interação quártica λq^4 dada por

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2 q^2}{2} - \lambda q^4, \quad (1.27)$$

sendo λ a constante de acoplamento suposta $\lambda \ll 1$ para o desenvolvimento do cálculo perturbativo.

De acordo com a teoria de perturbação em mecânica quântica, a correção quântica para a energia em primeira ordem ΔE é fornecida pelo valor esperado da interação V no estado

não perturbado $|\text{in}\rangle$ [7]. Desse modo, podemos escrever

$$\Delta E = E - E_0 = \langle \text{in} | V | \text{in} \rangle, \quad (1.28)$$

os quais E e E_0 representam a energia do estado perturbado e não perturbado respectivamente.

Para a lagrangiana da Eq. (1.27), o termo de interação é $V = \lambda q^4$, sendo que o operador posição $q(t)$ pode ser reescrito em função dos operadores de criação $a^\dagger$ e aniquilação a , conforme Ref. [7], da seguinte forma

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega_0}}(a + a^\dagger). \quad (1.29)$$

Sabe-se ainda que esses operadores atuam sobre os auto-estados não perturbados $|\text{in}\rangle$ de modo

$$a|\text{in}\rangle = \sqrt{n}|\text{in} - 1\rangle, \quad a^\dagger|\text{in}\rangle = \sqrt{n+1}|\text{in} + 1\rangle, \quad (1.30)$$

sendo n um número inteiro proveniente da quantização da energia do sistema.

Substituindo a Eq. (1.29) na Eq. (1.28) e usando as relações da Eq. (1.30), temos

$$\begin{aligned} \Delta E &= \langle \text{in} | \lambda q^4 | \text{in} \rangle \\ &= \frac{\lambda}{4m^2\omega_0^2} \langle \text{in} | (a + a^\dagger)^4 | \text{in} \rangle \\ &= \frac{3\lambda}{4m^2\omega_0^2} (2n^2 + 2n + 1), \end{aligned} \quad (1.31)$$

na qual aplicamos sucessivamente os operadores de criação $a^\dagger$ e de aniquilação a nos auto-estados $|\text{in}\rangle$, computando apenas as contribuições não triviais, além de usarmos o fato de que esses auto-estados são ortonormais, isto é, $\langle \text{in} | \text{in} \rangle = 1$. Em particular, a correção quântica da energia ΔE para o estado de vácuo $n = 0$ é dada por

$$\Delta E = \frac{3\lambda}{4m^2\omega_0^2}. \quad (1.32)$$

No formalismo de Feynman, a Eq. (1.32) é facilmente obtida com o auxílio das funções de Green para o OHQ no caso livre. A priori, podemos utilizar qualquer uma das funções calculadas na seção precedente. No entanto, vamos trabalhar com a função de Green $G^{(+)}(t, t')$. Assim,

$$\Delta E = \langle \text{in} | \lambda q^4 | \text{in} \rangle, \quad (1.33)$$

cujas contrações não triviais da coordenada $q(t)$ para a correção quântica da energia fornecem

$$\Delta E = 3\lambda \langle \text{in} | qq | \text{in} \rangle^2. \quad (1.34)$$

Usando a definição da função da Green da Eq. (1.2) para $t = t'$, obtemos

$$\Delta E = 3\lambda (G^{(+)}(t, t'))^2 \Big|_{t=t'} \quad (1.35)$$

$$= \frac{3\lambda}{4m^2\omega_0^2}. \quad (1.36)$$

Portanto, reproduzimos o mesmo resultado da Eq. (1.32) via formalismo de Feynman.

1.4 Correção quântica a energia de vácuo de um modelo não local com interação quártica

Vamos mostrar mais uma aplicação do formalismo de Feynman no cálculo da correção quântica a energia de vácuo de um modelo não local acoplado a uma interação quártica. Esses modelos que apresentam não localidade no espaço-tempo têm demonstrado importantes resultados em física de materiais, como exemplo, podemos citar a Pseudo-Eletrodinâmica Quântica proposta pelo físico brasileiro E. C. Marino [8], a qual tem sido aplicada na descrição de materiais bidimensionais como o grafeno [9].

Primeiramente, Considere a lagrangiana livre de um modelo não local dada por

$$L = \frac{1}{2} \partial^0 q K[\partial_0] \partial_0 q, \quad (1.37)$$

sendo o kernel $K[\partial_0] = \frac{2\sqrt{(-\partial_0^2 - m^2)}}{-\partial_0^2}$, deduzido da redução dimensional da Eletrodinâmica de Proca descrita pela Ref. [10]. Além disso, a constante m da Eq. (1.37) é um parâmetro massivo. Vale ressaltar que esse modelo é uma versão de mecânica quântica de uma teoria completa $(2+1)D$ descrita na Ref. [10].

Para calcular as funções de Green do modelo não local da lagrangiana da Eq. (1.37), precisamos do funcional gerador $Z[J]$ fornecido por

$$Z[J] = \mathcal{N} \int Dq \exp \left\{ iS[q] + \int dt J(t)q(t) \right\}. \quad (1.38)$$

A ação clássica do modelo da Eq. (1.37) pode ser reescrita em termos quadráticos da coordenada generalizada $q(t)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} S[q] &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left\{ \frac{1}{2} \partial^0 q K[\partial_0] \partial_0 q \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left\{ -\frac{1}{2} q \partial^0 K[\partial_0] \partial_0 q \right\}, \end{aligned} \quad (1.39)$$

sendo que realizamos uma integração por partes e usamos a condição de contorno de que a coordenada $q(t)$ é nula nos limites de integração. Desse modo, a substituição da Eq. (1.39) na Eq. (1.38) e usando a integral bosônica da Eq. (1.4), chegamos em

$$Z[J] = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' J(t) A^{-1}(t-t') J(t') \right\}, \quad (1.40)$$

na qual o operador $A^{-1}(t-t') = (\partial^0 K[\partial_0] \partial_0)^{-1}$ e a constante de normalização é $\mathcal{N} = [\det A]^{1/2}$, é fixada pela condição $Z[J=0] = 1$.

A função de Green de dois pontos $G(t, t')$ para o modelo não local é dada por

$$\begin{aligned} G(t, t') &= \left. \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(t) \delta J(t')} \right|_{J=0} \\ &= (\partial^0 K[\partial_0] \partial_0)^{-1}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

aplicando a transformada de Fourier na Eq. (1.41), temos

$$G(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{2i\sqrt{\omega^2 - m^2}}. \quad (1.42)$$

O denominador da integral da Eq. (1.42) pode ser parametrizado pela expressão dada na Ref. [11]

$$\frac{1}{2i\sqrt{\omega^2 - m^2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(2\pi)} \frac{1}{\omega^2 - (m^2 + \xi^2)}. \quad (1.43)$$

Logo, substituindo a Eq. (1.43) na Eq. (1.42), obtemos

$$G(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(2\pi)} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 - (m^2 + \xi^2)} \right\}. \quad (1.44)$$

Essa equação mostra que as funções de Green do modelo não local da Eq. (1.37) são obtidas por meio de integrações sobre as funções de Green do OHQ com frequências $\omega_0 = \pm\sqrt{m^2 + \xi^2}$, obtidas pelo cálculo do pólo do termo entre chaves na Eq. (1.44). Note que as prescrições das diversas funções de Green que estudamos na seção 1.3 podem ser igualmente aplicadas na Eq. (1.44). De posse dessa equação, estamos em condição de calcular a correção

quântica a energia de vácuo para o caso de uma interação quártica acoplada ao modelo não local.

A seguir, vamos acoplar uma interação quártica ao modelo não local da Eq. (1.37). Dessa forma, a lagrangiana é dada por

$$L = \frac{1}{2} \partial^0 q K[\partial_0] \partial_0 q - \lambda q^4, \quad (1.45)$$

sendo que a constante de acoplamento é tomada como muito pequena, tal que $\lambda \ll 1$ para realizarmos o cálculo perturbativo.

Em primeiro lugar, devemos obter a função de Green de Feynman em tempos iguais. Para isso, fazemos $t = t'$ na integral da Eq. (1.42). Assim temos,

$$G(t, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{1}{2i\sqrt{\omega^2 - m^2}}. \quad (1.46)$$

Note que a integral da Eq. (1.46) é logaritmicamente divergente quando $\omega \rightarrow \infty$. Essa divergência pode ser facilmente observada ao realizar a integração por uma substituição trigonométrica do tipo $\omega = \mu \sec \varphi$, com φ sendo a nova variável de integração. Desse modo, devemos usar métodos de regularização para separar a parcela finita da parcela divergente da integral. Vamos adotar o método de regularização dimensional. Começamos por avaliar a integral em dimensão arbitrária D , de modo que ao fazer $D \rightarrow 1$ retornamos a integral desejada. Dessa forma, a Eq. (1.46) é reescrita como

$$G(t, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^D \omega}{(2\pi)^D} \frac{\mu^{1-D}}{2i\sqrt{\omega^2 - m^2}}, \quad (1.47)$$

sendo que o parâmetro μ foi introduzido com o propósito de manter a dimensionalidade correta da integral na Eq. (1.47).

A tabela de integrais regularizadas dimensionalmente é fornecida pela Ref.[12]

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m^2)^\alpha} = \frac{i(-1)^\alpha}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(m^2)^{\alpha - \frac{D}{2}}}. \quad (1.48)$$

Usando a Eq. (1.48) na Eq. (1.47), obtemos

$$G(t, t) = \frac{(-1)^{1/2}}{4\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{1-D}{2})}{\Gamma(1/2)} \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right)^{\frac{(1-D)}{2}}. \quad (1.49)$$

Se definirmos $\epsilon = (1 - D)/2$ de tal forma que se $D \rightarrow 1$, logo $\epsilon \rightarrow 0$. Então, podemos aplicar a seguinte propriedade de expansão da função gama dada pela Ref. [4]

$$\Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right) = \Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} + \Gamma'(1) + O(\epsilon^2), \quad (1.50)$$

sendo $\gamma = -0.57$ a constante de Euler-Mascheroni e $O(\epsilon^2)$ termos de ordem superior em ϵ .

Podemos ainda expandir em série de Taylor o termo massivo da Eq. (1.49) do seguinte modo

$$\begin{aligned} \left(\frac{M^2}{\mu^2}\right)^\epsilon &= \exp \left\{ \ln \left[\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right]^\epsilon \right\} \\ &= 1 + \epsilon \ln \frac{\mu^2}{m^2} + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Desse modo, usando os resultados das Eqs. (1.51) e (1.50) na Eq. (1.49), obtemos a função de Green regularizada, ou seja, com as parcelas finita e divergente devidamente separadas. Logo,

$$G(t, t) = \frac{i}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) - \gamma \right] + \frac{i}{4\pi\epsilon}. \quad (1.52)$$

Depois de utilizada a regularização dimensional, vamos usar o esquema de subtração minimal na Eq. (1.52) para renormalizar a função de Green. Esse método consiste em adicionar contra-termos de modo que possamos desprezar o termo que vem do pólo da função gama. Sendo assim, obtemos a função de Green renormalizada $G_{ren.}(t, t)$

$$G_{ren.}(t, t) = \frac{i}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) - \gamma \right]. \quad (1.53)$$

Portanto, assim como no caso do OHQ, dentro do formalismo de Feynman, a correção quântica a energia de vácuo devido a uma interação quártica do modelo não local da Eq. (1.37) é dada por

$$\begin{aligned} \Delta E &= 3\lambda G_{ren.}^2(t, t) \\ &= \frac{3\lambda i^2}{16\pi^2} \left\{ \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) - 2\gamma \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) + \gamma^2 \right\}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Note que o parâmetro de escala μ^2 é proporcional a m^2 . Assim, por simplicidade, podemos fazer $\mu^2 = m^2$ e reescrever o resultado da Eq. (1.54) por

$$\Delta E = -\frac{3\lambda\gamma^2}{16\pi^2}. \quad (1.55)$$

Percebemos que, ao contrário do OHQ, a constante de acoplamento λ tem dimensão de energia e a correção ΔE diminui a energia do sistema.

1.5 Formalismo CTP na notação matricial

Nas seções anteriores discutimos sobre o formalismo de Feynman, bem como algumas aplicações desse formalismo funcional. Vimos que podemos determinar as funções de Green do sistema, introduzindo prescrições no espaço de momento para calcular as diversas funções de Green no espaço de posição. Além disso, mostramos que esse formalismo requer a imposição de condições sobre os estados inicial $|\text{in}\rangle$ e final $|\text{out}\rangle$ quando aplicado ao cálculo de um observável físico. Essas imposições provocam uma limitação ao formalismo, uma vez que permitem calcular a evolução temporal desses observáveis apenas no estado de vácuo. Para superar essa limitação, em 1961, Schwinger apresentou uma generalização do formalismo de Feynman que permite abandonar aquelas imposições sobre os estados assintóticos [6].

A ideia de Schwinger para calcular a evolução temporal de qualquer observável físico $O(t)$ dado o estado inicial $|\text{in}\rangle$, isto é,

$$\langle \text{in}, t_i | O(t) | \text{in}, t_i \rangle, \quad (1.56)$$

sendo não é feita nenhuma consideração sobre o estado $|\text{in}\rangle$. Assim, o funcional gerador é definido por

$$Z[J_+, J_-] = \sum_{t_f} \langle \text{in}, t_i | \text{out}, t_f \rangle_{J_-} \langle \text{out}, t_f | \text{in}, t_i \rangle_{J_+}. \quad (1.57)$$

Note que a definição de Schwinger é uma combinação de fatores, sendo o primeiro a amplitude de transição de Feynman e o segundo o complexo conjugado dela. Além disso, a Eq. (1.57) demonstra que a arbitrariedade do estado final $|\text{out}, t_f\rangle$ tem como consequência uma polarização no sistema. As diferentes polarizações, positiva e negativa, estão associadas as evoluções progressivas e regressivas no tempo, respectivamente [6].

Se o estado final $|\text{out}, t_f\rangle$ é um conjunto completo de autoestados do operador campo ϕ , então a Eq. (1.57) pode ser escrita da seguinte forma

$$Z[J_+, J_-] = \mathcal{N} \int D\phi_+ D\phi_- e^{i(S[\phi_+] - S[\phi_-] + J_+ O_+(t) - J_- O_-(t))}. \quad (1.58)$$

A Eq. (1.58) pode ser pensada como uma soma sobre todas as trajetórias possíveis de modo que avançam no tempo para o futuro distante e depois regridem para o passo remoto. Por essa interpretação, o formalismo de Schwinger também é conhecido como formalismo CTP

(Closed Time Path). Ademais, podemos obter a partir da equação do funcional gerador da Eq. (1.58), a expressão para a evolução temporal do valor esperado do observável $O(t)$. Para isso, tomamos a primeira derivada funcional dele com relação ou a fonte J_+ ou a fonte J_- e após o cálculo da derivada fazemos $J_+ = J_- = J = 0$ [13]. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z[J_+, J_-]}{\delta J_+} \Big|_{J_+=J_-=J=0} &= \mathcal{N} \int D\phi_+ D\phi_- O(t) e^{i(S[\phi_+] - S[\phi_-])} \\ &= \langle \text{in}, t_i | O(t) | \text{in}, t_i \rangle, \end{aligned} \quad (1.59)$$

ou seja, temos que

$$\langle \text{in}, t_i | O(t) | \text{in}, t_i \rangle = \frac{\delta Z[J_+, J_-]}{\delta J_+} \Big|_{J_+=J_-=J=0}. \quad (1.60)$$

A Eq. (1.60) é a solução de Schwinger para obter o valor esperado do observável $O(t)$ para qualquer tempo t . Por comparação direta com a Eq. (1.9) do formalismo de Feynman, percebemos que a vantagem da equação de Schwinger é o fato de ela fornecer um valor real para o auto valor do observável em qualquer tempo.

Outro aspecto importante a ser discutido sobre o formalismo CTP é o cálculo das funções de Green, em especial, a de dois pontos os quais são os propagadores do modelo. O ponto de partida é definir o funcional gerador das funções Green semelhante ao da Eq. (1.58). Sendo assim, temos

$$Z[J_+, J_-] = \mathcal{N} \int D\phi_+ D\phi_- e^{i(S[\phi_+] - S[\phi_-] + J_+ \phi_+ - J_- \phi_-)}. \quad (1.61)$$

A constante de normalização $\mathcal{N}$ é determinada pela condição de contorno $Z[J_+ = 0, J_- = 0] = 1$. A integral funcional da Eq. (1.61) é sobre os campos ϕ_+ e ϕ_- . Dessa forma, é mais conveniente reescrevê-la em notação matricial conforme a Ref. [13]. Com esse propósito, definimos as matrizes para os campos de ϕ_a , para as fontes de J_a e denotamos a ação do sistema por $\mathcal{S}$. Desse modo,

$$\phi_a = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{bmatrix}, \quad (1.62)$$

$$J_a = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_+ & -J_- \end{bmatrix}, \quad (1.63)$$

$$\mathcal{S} = S[\phi_+] - S[\phi_-]. \quad (1.64)$$

A substituição das Eqs. (1.62), (1.63) e (1.64) na Eq. (1.61) resulta na seguinte forma compacta da equação

$$Z[J_+, J_-] = \mathcal{N} \int D\phi_+ D\phi_- e^{i(\mathcal{S} + J_c(x)\phi_c(x))}. \quad (1.65)$$

Então, as funções de Green de dois pontos $G_{ab}(x, x')$ são dadas pela derivada de segunda ordem com relação as fontes J_a e J_b do funcional gerador da Eq. (1.65)

$$G_{ab}(x, x') = (-i)^2 \frac{\delta^2}{\delta J_a(x) \delta J_b(x')} Z[J_+, J_-] \Big|_{J_a=J_b=J=0}. \quad (1.66)$$

Para determinar as funções de Green específicas como as de Feynman, avançada, retardada e de Dyson devemos atribuir as polarizações adequadas aos termos da Eq. (1.66). A visualização disso, na prática, requer primeiro o cálculo da derivada funcional. Sendo assim, da Eq. (1.65) na Eq. (1.66), obtemos

$$G_{ab}(x, x') = \mathcal{N} \int D\phi_+ D\phi_- e^{iS} \phi_a(x) \phi_b(x'). \quad (1.67)$$

A partir da Eq. (1.67), podemos obter a função de Green de Feynman $G_F(x, x')$ escolhendo a polarização dos índices a e b . Para essa função, temos que fazer $a = 1$ e $b = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} G_{++}(x, x') &= \mathcal{N} \int D\phi_+ D\phi_- e^{i(S[\phi_+] - S[\phi_-])} \phi_+(x) \phi_+(x') \\ &= \sum_{t_f} \langle \text{in}, t_i | \text{out}, t_f \rangle \langle \text{out}, t_f | T\phi(x)\phi(x') | \text{in}, t_i \rangle \\ &= \langle \text{in}, t_i | T\phi(x)\phi(x') | \text{in}, t_i \rangle, \end{aligned} \quad (1.68)$$

sendo T o operador de ordenação temporal de modo que este atua sobre os operadores campos da seguinte forma

$$T\phi(x)\phi(x') = \theta(x, x')\phi(x)\phi(x') + \theta(x', x)\phi(x')\phi(x). \quad (1.69)$$

Esse procedimento de atribuir diferentes polarizações para a Eq. (1.67) pode ser repetido para encontrar as demais funções de Green. Dessa forma, após fazer as outras polarizações possíveis, obtemos

$$G_{+-}(x, x') = \langle \text{in}, t_i | \phi(x')\phi(x) | \text{in}, t_f \rangle, \quad (1.70)$$

$$G_{-+}(x, x') = \langle \text{in}, t_i | \phi(x)\phi(x') | \text{in}, t_i \rangle, \quad (1.71)$$

$$G_{--}(x, x') = \langle \text{in}, t_i | T^{-1}\phi(x)\phi(x') | \text{in}, t_i \rangle, \quad (1.72)$$

sendo que as Eqs. (1.70), (1.71) e (1.72) são as definições das funções de Green retardada $G^{(-)}(x, x')$, avançada $G^{(+)}(x, x')$ e de Dyson $G_D(x, x')$ respectivamente. Esses resultados podem ser esquematizado na forma matricial

$$G_{ab} = \begin{bmatrix} G_F(x, x') & G^{(-)}(x, x') \\ G^{(+)}(x, x') & G_D(x, x') \end{bmatrix}. \quad (1.73)$$

Vale ressaltar que as funções de Green satisfazem a relação dada por [13]

$$G_F + G_D - G^{(-)} - G^{(+)} = 0, \quad (1.74)$$

a qual já utilizamos ao obter a função de Green de Dyson no formalismo de Feynman conforme a Eq. (1.25).

Para exemplificar a utilização na prática desse formalismo, vamos calcular as funções de Green de dois pontos do OHQ e mostrar que os resultados são idênticos aos obtidos na seção 1.2 via Feynman. Os procedimentos sistemáticos entre as duas formulações são bem similares. De início, devemos definir o funcional gerador das funções de Green via CTP do modelo. Assim, para o caso do OHQ cuja lagrangiana é dada na Eq. (1.11), temos

$$Z[J_+, J_-] = \mathcal{N} \left\{ -\frac{1}{2} \int_c dt \, q_a(t) A_{ab} q_b(t) + \int_c J_a(t) q_a(t) \right\} \quad (1.75)$$

em que $A_{ab} = i \left(m \frac{d^2}{dt^2} + m\omega_0^2 \right)$ e c é uma curva fechada no tempo de $t_i = 0$ a $t_f = +\infty$. A Eq. (1.75) é a integral gaussiana para a variável $q_a(t)$ cujo resultado é dada na Eq. (1.4). Assim,

$$Z[J_+, J_-] = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_c dt dt' J(t)_a A_{ab}^{-1}(t - t') J(t')_b \right\}, \quad (1.76)$$

a qual a constante de normalização foi fixada pela condição $Z[J_+ = J_- = J = 0] = 1$. Pelos cálculos das aplicações do formalismo de Feynman desenvolvidos nas seções anteriores, já sabemos que o kernel $A_{ab}^{-1}(t - t')$ é o inverso da função de Green. Dessa forma,

$$G_{ab}(t, t') = A_{ab}^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{ie^{-i\omega(t-t')}}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \Big|_{ab}, \quad (1.77)$$

sendo que $|_{ab}$ significa que devemos utilizar alguma prescrição para calcular a função de Green desejada. Essas prescrições já foram detalhadas na seção 1.2, e portanto, chegamos nas mesmas conclusões no cálculo das funções de Green do OHQ via formalismo CTP.

1.6 Formalismo CTP usando a função Heaviside modificada

Originalmente, o formalismo CTP foi proposto com a notação de índices a qual associamos as polarizações do sistema. Contudo, essa não é a única forma de trabalhar com esse

formalismo. Em 1994, Fred Cooper e colaboradores propuseram uma nova notação para o formalismo CTP o qual dispensa a notação indicial. Os pesquisadores mostraram que é possível desenvolver os cálculos de forma totalmente análoga ao formalismo de Feynman, bastando apenas introduzir a causalidade das funções de Green por meio de uma função de Heaveside modificada [14]. As adaptações necessárias no formalismo para a utilização dessa notação, passamos a descrever a seguir.

Em primeiro lugar, vamos redefinir o funcional gerador da notação matricial $Z[J_+, J_-]$ para o funcional da nova notação $Z_c[J, \rho]$. De acordo com a Ref. [14], a mudança de uma para a outra acontece por meio da seguinte associação

$$Z[J_+, J_-] = \mathcal{N} \int D\varphi_a e^{i(\mathcal{S} + J_a(x)\phi_a(x))} \rightarrow Z_c[J, \rho] = \int D\varphi D\varphi' \langle \varphi | \rho | \varphi' \rangle \int D\phi e^{i(S_c + J(x)\phi(x))} \quad (1.78)$$

Note que o funcional $Z_c[J, \rho]$ contém dois fatores. O primeiro deles é o valor esperado da matriz densidade ρ , que são as condições iniciais impostas ao sistema, e o outro é o funcional gerador do formalismo in-out (formalismo de Feynman). Assim, a Eq.(1.78) mostra que podemos aplicar o formalismo de Feynman para qualquer ordem perturbativa ou não perturbativa, sendo a única diferença a integração fechada no tempo, cujo contorno dessa integral envolve a função de heaveside modificada definida na Ref. [14] por

$$\theta_c(t, t') = \begin{cases} \theta(t, t'), & \text{se } (t, t') \in C_+ \\ \theta(t', t), & \text{se } (t, t') \in C_- \\ 1, & \text{se } t \in C_-, t' \in C_+ \\ 0, & \text{se } t \in C_+, t' \in C_- \end{cases} \quad (1.79)$$

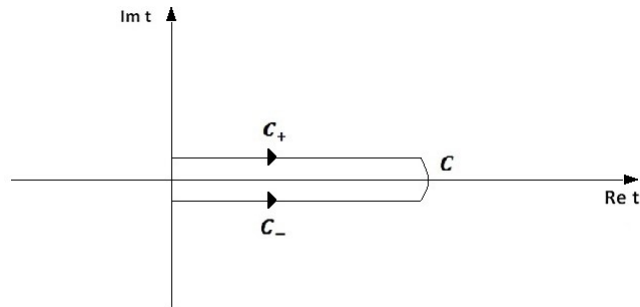


Figura 1.1: Caminho Fechado no Tempo.

A função $\theta_c(t, t')$ introduzida por Cooper e colaboradores tem quatro componentes, dependendo da região onde estamos realizando a integração, essa função pode assumir resultados distintos. Particularmente, se integrarmos sobre o caminho C_+ ou C_- , sendo que tanto

t quanto t' estão sobre esses caminhos, recaímos na função de Heaveside usual. Com essa definição, o propagador (e a autoenergia) deve obedecer que

$$G(x, y) = \theta_c(t_x, t_y)G^{(+)}(x, y) + \theta_c(t_y, t_x)G^{(-)}, \quad (1.80)$$

sendo que $G^{(+)}$ e $G^{(-)}$ são as funções de Green de frequência positiva e negativa, respectivamente. É importante frisar que a integração do propagador sobre o caminho fechado no tempo não altera as regras de Feynman. Temos apenas que atentar para a integração sobre o caminho C_- , o qual recebe um sinal negativo para inverter a integração de acordo com a regra (vide figura 1.1) [14]

$$\int_C dt = \int_{0, C_+}^{+\infty} dt - \int_{0, C_-}^{+\infty}. \quad (1.81)$$

Em síntese, para trabalhar o formalismo CTP na notação de Cooper, devemos seguir três passos. Primeiro, substituímos as funções de Green da notação indicial pelas funções de Green do formalismo in-out. Em segundo lugar, integramos sobre todo o caminho fechado no tempo seguindo a regra da Eq. (1.81) e por fim aplicamos as condições de contorno em $t = 0$ na matriz densidade. Para mostrar que essas três modificações no formalismo de Feynman, permitem estudar problemas de valores iniciais em teoria quântica de campos, vamos considerar a seguinte situação. Sabe-se do formalismo in-out que a equação de movimento para a teoria escalar com as correções quânticas na ordem $1/N$ é dada na Ref. [14] por

$$[-\square + \chi(x)]\phi(x) + \frac{1}{N} \int d^4y \Sigma(x, y)\phi(y) = 0, \quad (1.82)$$

sendo $\square$ o operador d'Alembertiano, $\chi(x)$ o campo auxiliar, $\phi(x)$ o campo escalar, N o número de campos básicos e $\Sigma(x, y)$ a autoenergia do campo ϕ . Dado esse resultado, podemos demonstrar que o formalismo CTP na notação de Cooper permite escrever de forma simples a autoenergia $\Sigma(x, y)$ em termos dos propagadores dos campos básicos, seguindo a regra da integração fechada no tempo da Eq. (1.81). Assim, dentro do formalismo in-in, temos

$$\int_C dt_y \Sigma(x, y)\phi(y) = \int_{0, C_+}^{+\infty} dt_y \Sigma(x, y)\phi(y) - \int_{0, C_-}^{+\infty} dt_y \Sigma(x, y)\phi(y). \quad (1.83)$$

Vamos avaliar as duas integrais da Eq. (1.83) separadamente, começando pela integral sobre o caminho C_+ . Observe que a autoenergia é uma função de Green de Feynman, cuja

estrutura analítica é semelhante ao propagador da Eq. (1.80), fornecida por

$$\Sigma(x, y) = i\theta_c(t_x, t_y)\Sigma_>(x, y) + i\theta_c(t_y, t_x)\Sigma_<(x, y). \quad (1.84)$$

Desse modo, substituindo a Eq. (1.84) na primeira integral da Eq. (1.83), temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{0, C_+}^{+\infty} dt_y \Sigma(x, y) \phi(y) \\ &= \int_{0, C_+}^{+\infty} dt_y (i\theta_c(t_x, t_y)\Sigma_>(x, y) + i\theta_c(t_y, t_x)\Sigma_<(x, y)) \phi(y). \end{aligned} \quad (1.85)$$

Antes de aplicarmos a definição da função de Heaveside introduzida por Cooper na Eq. (1.85), é válido fazer dois comentários sobre a utilização dessa função na integração fechada no tempo. Primeiro, vamos sempre supor que t_x está sobre o caminho C_+ , uma vez que estamos estudando a evolução progressiva do sistema no tempo. Segundo, existe diferença entre $\theta_c(t_x, t_y)$ e $\theta_c(t_y, t_x)$, ou seja, não há simetria na mudança do argumento da função de t_x por t_y ou vice-versa. Com essas duas observações, podemos prosseguir o cálculo da Eq. (1.85),

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} dt_y (i\theta(t_x, t_y)\Sigma_>(x, y) + i\theta(t_y, t_x)\Sigma_<(x, y)) \phi(y) \\ &= \int_0^{t_x} dt_y i\Sigma_>(x, y) \phi(y) + \int_{t_x}^{+\infty} dt_y i\Sigma_<(x, y) \phi(y), \end{aligned} \quad (1.86)$$

em que usamos o fato de $(t_x, t_y) \in C_+$ cujo resultado é a função de Heaveside usual e depois disso aplicamos a sua definição para reescrever os limites de integração.

Para a integral sobre o caminho C_- , temos

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{0, C_-}^{+\infty} dt_y \Sigma(x, y) \phi(x, y) \\ &= \int_{0, C_-}^{+\infty} dt_y (i\theta(t_x, t_y)\Sigma_>(x, y) + i\theta(t_y, t_x)\Sigma_<(x, y)) \phi(y) \\ &= i \int_0^{+\infty} dt_y \Sigma_<(x, y) \phi(y), \end{aligned} \quad (1.87)$$

sendo que usamos o fato de $t_x \in C_+$ e $t_y \in C_-$, cujos resultados são, por definição, $\theta_c(t_x, t_y) = 0$ e $\theta_c(t_y, t_x) = 1$. Logo, substituindo as Eqs. (1.86) e (1.87) na Eq. (1.83), obtemos

$$\begin{aligned} \int_C dt_y \Sigma(x, y) \phi(y) &= \int_0^{t_x} dt_y i\Sigma_>(x, y) \phi(y) + \int_{t_x}^{+\infty} dt_y i\Sigma_<(x, y) \phi(y) - \int_0^{+\infty} dt_y i\Sigma_<(x, y) \phi(y) \\ &= i \int_0^{t_x} dt_y [\Sigma_>(x, y) - \Sigma_>^*(x, y)] \phi(y) \\ &= -2 \int_0^{t_x} dt_y \text{Im}[G_>(x, y) D_>(x, y)] \phi(y), \end{aligned} \quad (1.88)$$

sendo que usamos a propriedade $\Sigma_{<}(x, y) = \Sigma_{>}^*(x, y)$ e decompos a autoenergia $\Sigma_{>}(x, y) = G_{>}(x, y)D_{>}(x, y)$ em termos dos propagadores dos campos básicos $\phi(x)$ e $\chi(x)$. Portanto, a equação de movimento para o campo principal é fornecida por

$$[-\square + \chi(x)]\phi(x) - \frac{2}{N} \int_0^{t_x} d^3y dt_y \text{Im}[G_{>}(x, y)D_{>}(x, y)]\phi(y) = 0. \quad (1.89)$$

O mérito do formalismo CTP é fornecer a equação de movimento para o campo que satisfaz uma relação de causalidade [14], conforme indicado pelo limite de integração da Eq. (1.89).

Aqui encerramos nossa discussão do formalismo CTP e focaremos nossa atenção nas correções quânticas obtidas via formalismo de Feynman nos próximos capítulos.

1.7 Os geradores funcionais $Z[J]$, $W[J]$ e $\Gamma[\phi]$

Nesta seção, ilustraremos os três diferentes tipos de funcionais geradores mais comuns em TQC.

Uma teoria de campos admite diversos tipos de funções de Green:

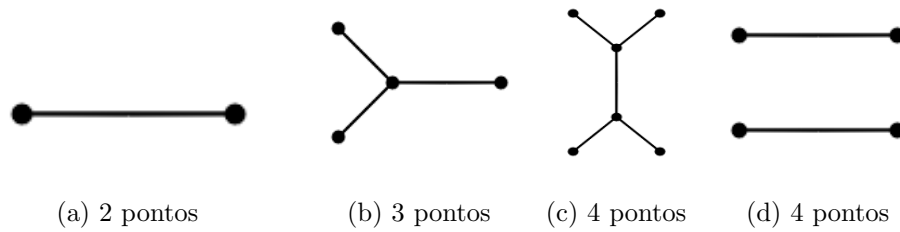


Figura 1.2: Exemplos de funções de Green

Além disso, podem estar convoluídas de várias formas como exemplos:

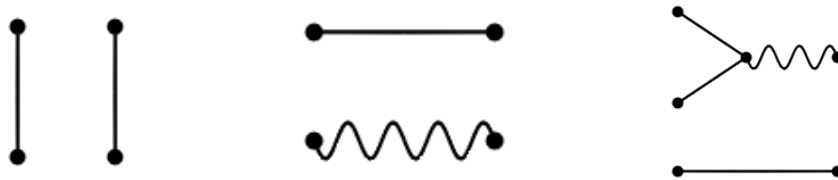


Figura 1.3: Funções de Green não conexas

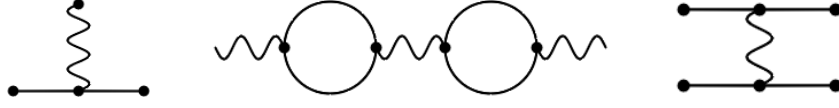


Figura 1.4: Funções de Green conexas

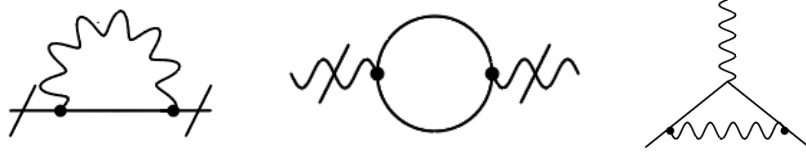


Figura 1.5: Funções de Green 1PI

Uma grande aplicação do formalismo funcional é fornecer um tipo de gerador funcional para cada tipo de função de Green. De maneira esquemática, podemos dizer que: $Z[J]$ fornece todas as funções de Green (ver figura 1.2), $W[J]$ apenas as conexas (ver figura 1.4) e $\Gamma[\phi]$ somente as 1PI (ver figura 1.5), que são as funções de Green relevantes para o processo de renormalização. Este último funcional recebe o nome de ação efetiva. Dado $Z[J]$, como podemos obter os funcionais $W[J]$ e $\Gamma[\phi]$?

Por definição, temos que

$$Z[J] = e^{W[J]}, \quad (1.90)$$

además, $\Gamma[\phi]$ é definida pela seguinte transformada de Legendre

$$\Gamma[\phi] = W[J] - i \int d^D x J(x) \phi(x). \quad (1.91)$$

A partir da ação efetiva, podemos calcular as funções de vértice Γ_ϕ por meio das n derivadas funcionais com relação ao campo ϕ , fazendo $\phi = 0$ após essas derivações. Então,

$$\Gamma_\phi^{(n)} = \left. \frac{\delta^n \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x_1) \dots \delta \phi(x_n)} \right|_{\phi=0}. \quad (1.92)$$

Particularmente, a função de vértice de dois pontos $\Gamma_\phi^{(2)}$ é o inverso do propagador da teoria.

A ação efetiva $\Gamma[\phi]$ pode ser expandida em termos da derivada do campo ϕ da seguinte maneira [12]

$$\Gamma[\phi] = \int d^D x \left[V[\phi] + \frac{Y[\phi]}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \dots \right], \quad (1.93)$$

na qual $V[\phi]$ é denominado de potencial efetivo (potencial clássico+correções quânticas) e $Y[\phi]$ é a correção para função de onda. Observe que para uma configuração de campo constante $\phi = \rho$, $\Gamma[\phi]$ pode ser escrita simplesmente como

$$\Gamma[\rho] = V[\rho] \Omega, \quad (1.94)$$

sendo que $\Omega = L^D$ é o volume do espaço tempo e $\Gamma[\rho]$ é a ação efetiva para uma configuração constante do campo ϕ . Em síntese, nosso trabalho está em calcular o potencial efetivo e relacioná-lo com as quantidades física de uma teoria de campos. Veremos no próximo capítulo, na prática, como fazer isso para a teoria $\lambda\phi^4$.

Capítulo 2

O método funcional em teorias de campos

Neste capítulo, aplicaremos o método funcional em modelos de teoria quântica de campos. Começaremos analisando a teoria de Klein-Gordon e depois trataremos de uma teoria com interação quártica. Construiremos a equação do grupo de renormalização para o potencial efetivo e calcularemos as funções beta β_λ da constante de acoplamento e β_m da massa para a teoria $\lambda\phi^4$. Além disso, mostraremos mais duas técnicas para o cálculo dessas funções via condições de renormalização sobre potencial efetivo e via equação do grupo de renormalização para a função de vértice de dois pontos.

2.1 Teoria de Klein-Gordon

A lagrangiana da teoria de Klein-Gordon em $(3+1)D$ é dada por [4]

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2, \quad (2.1)$$

sendo ϕ o campo escalar neutro e m a massa do campo bosônico ϕ . Essa lagrangiana é composta de um termo cinético, o qual contém as quadri-derivadas, e um termo de potencial, que é um termo massivo. Além disso, observe que o campo escalar ϕ tem dimensão de massa quando estamos trabalhando em $(3+1)D$.

Esse modelo da Eq. (2.1) foi proposta em 1926 e representou a primeira tentativa de descrever o comportamento de partículas quânticas relativísticas, sendo inicialmente consi-

derada uma extensão da equação de Schrödinger. Contudo, devido a dificuldades de interpretação de alguns resultados, como por exemplo as soluções de energias negativas para as partículas livres e o fato de não possuir uma densidade de probabilidade positivo definida, essa teoria foi abandonada por pelo menos seis anos até os físicos Pauli e Weisskopf reinterpretarem o modelo de Klein-Gordon como uma teoria de campos e fazendo posteriormente a quantização do campo escalar ϕ [4].

2.1.1 Propagador da teoria livre

O primeiro objeto de interesse numa dada teoria de campos é o propagar livre. O procedimento de obtenção desse propagador para a lagrangiana da Eq. (2.1), dentro do formalismo funcional, é semelhante ao caso do oscilador harmônico quântico tratado no capítulo 1. Inicialmente, começamos calculando o funcional gerador das funções de Green $Z[J]$ definido pela Eq. (1.3), que no caso particular de uma teoria com apenas campo bosônico, é fornecido por

$$Z[J] = \mathcal{N} \int D\phi e^{iS[\phi] + iJ\phi}. \quad (2.2)$$

A ação clássica $S[\phi]$ da Eq. (2.1) pode ser reescrita em termos quadráticos do campo ϕ por

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \mathcal{L}_0 \\ &= - \int d^4x \frac{1}{2} \phi A \phi, \end{aligned} \quad (2.3)$$

o qual na manipulação acima aplicamos o teorema de Gauss na quadri-divergência $\partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi)$, transformando-a num termo de superfície desprezível no infinito, assumindo que o campo $\phi(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$. Além disso, o operador $A = \square + m^2$, em que $\square$ é o operador d'Alembertiano. Então, substituindo a Eq. (2.3) na Eq. (2.2) e usando a integral gaussiana bosônica da Eq. (1.4) do capítulo anterior, obtemos

$$Z[J] = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) (iA(x-y))^{-1} J(y) \right\}, \quad (2.4)$$

sendo que a constante de normalização $\mathcal{N} = [\det A]^{1/2}$ da Eq. (2.4) foi determinada quando consideramos $Z[J=0] = 1$. Assim, a partir da Eq. (2.4), podemos calcular qualquer função de Green da teoria de Klein-Gordon. Em particular, o propagador dessa teoria é a função

de Green de dois pontos $G(x, y)$ computada pela segunda derivada do funcional gerador $Z[J]$ com relação a fonte externa J ,

$$G(x, y) = (-i)^2 \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{J=0}. \quad (2.5)$$

Usando a Eq. (2.4) na Eq. (2.5) e após fazer a derivada com relação a J , temos que

$$G(x, y) = \left[i\Box + im^2 \right]^{-1}, \quad (2.6)$$

cuja transformada de Fourier da Eq. (2.6) fornece

$$G(p) = \frac{i}{(p^2 - m^2)}. \quad (2.7)$$

O resultado da Eq. (2.7) é o propagador de Feynman da lagrangiana da Eq. (2.1). Note que o pólo do propagador ocorre para $p^2 = m^2$. Assim,

$$p^2 - m^2 = 0, \quad (2.8)$$

sabendo que $p^2 = p_0^2 - |\vec{p}|^2$ com $p_0 = E_0(\vec{p})$. Desse modo, a Eq. (2.8) implica que

$$E_0 = \pm \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}. \quad (2.9)$$

Portanto, o Gap de energia ΔE é dado por

$$\Delta E = |E_{0+}(\vec{p}=0) - E_{0-}(\vec{p}=0)| = 2|m|. \quad (2.10)$$

Esse resultado representa a quantidade de energia necessária para promover partículas da “banda de valência” (E_{0-}) para a “banda de condução” (E_{0+}). Abaixo ilustramos o gráfico da energia $E(\vec{p})$ em função do momento $\vec{p}$.

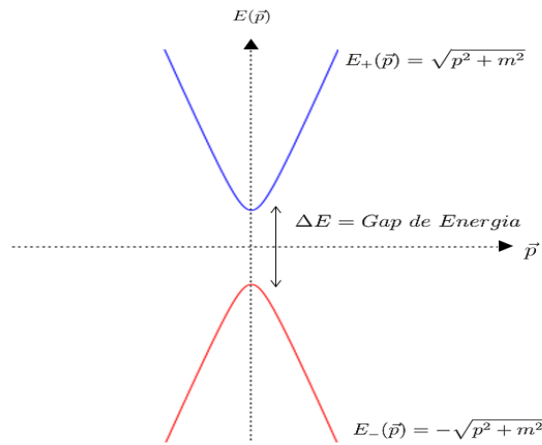


Figura 2.1: Gap de Energia ΔE para a teoria de Klein-Gordon

2.2 Potencial efetivo via método do campo de fundo (expansão semi-clássica)

Nesta seção, trataremos de uma teoria com interação, acoplando na lagrangiana da Eq.(2.1) um termo de potencial $U[\phi]$. Desse modo, a lagrangiana é reescrita em $(3+1)D$ por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + U[\phi], \quad (2.11)$$

sendo que a primeira parcela é o termo cinético e a segunda representa um termo arbitrário de potencial $U[\phi]$. Perceba que se fizermos $U[\phi] = -\frac{m^2}{2} \phi^2$ retornamos a teoria de Klein-Gordon.

O cálculo das funções de Green do modelo dado pela lagrangiana da Eq. (2.11) não é tão simples, uma vez que para uma interação não trivial, o potencial clássico $U[\phi]$ não é quadrático no campo ϕ . Sendo assim, não sabemos, a priori, o resultado analítico da integração. Alternativamente, trataremos o problema, via método funcional, que consiste em expandir a ação $S[\phi]$ em torno de um ponto $\phi(x) = \phi_{cl}(x)$ (campo clássico) de modo a manter apenas termos de segunda ordem em ϕ . Então,

$$S[\phi] = S[\phi_{cl}] + \left. \frac{\delta S}{\delta \phi} \right|_{\phi=\phi_{cl}} (\phi - \phi_{cl}) + \frac{1}{2!} \left. \frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta \phi} \right|_{\phi=\phi_{cl}} (\phi - \phi_{cl})^2 + \dots, \quad (2.12)$$

no qual o campo clássico $\phi_{cl}(x)$ é determinado pela solução da equação de movimento da lagrangiana da Eq. (2.11) fornecida por

$$(-\square + U')\phi_{cl}(x) = 0, \quad (2.13)$$

sendo que U' significa primeira derivada do potencial clássico com relação ao campo ϕ , ou seja, $\left. \frac{dU}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_{cl}}$.

O funcional gerador $Z[J]$ para $J = 0$ é também chamado de função de partição sendo dado por

$$Z = \mathcal{N} \int D\phi e^{iS[\phi]}. \quad (2.14)$$

Usando a expansão em série de Taylor da ação $S[\phi]$ da Eq. (2.12) na Eq. (2.14), chegamos em

$$Z = \int D\phi \exp \left\{ i \left[S[\phi_{cl}] + \frac{1}{2!} \left. \frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta \phi} \right|_{\phi=\phi_{cl}} (\phi - \phi_{cl})^2 + \dots \right] \right\}. \quad (2.15)$$

Pelas relações entre os funcionais geradores das Eqs. (1.90) e (1.91), concluimos que a função de partição Z pode ser reescrita em termos da ação efetiva $\Gamma[\phi]$ pela expressão,

$$Z = \exp \{ \Gamma[\phi] \}. \quad (2.16)$$

Substituindo a Eq. (2.16) na Eq. (2.15) e após fazermos a mudança de variável $\phi - \phi_{cl} \rightarrow \phi \Rightarrow D\phi = D\phi$, temos

$$\begin{aligned} \exp \{ \Gamma[\phi] \} &= \int D\phi \exp \left\{ i \left[S[\phi_{cl}] + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta\phi\delta\phi} \Big|_{\phi=\phi_{cl}} \phi^2 + \dots \right] \right\} \\ &= \int D\phi \exp \left\{ iS[\phi_{cl}] - \frac{1}{2} \phi \left[-i \frac{\delta^2 S}{\delta\phi\delta\phi} \Big|_{\phi=\phi_{cl}} \right] \phi + \dots \right\} \\ &= \exp \{ iS[\phi_{cl}] \} \int D\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \phi A \phi \right\}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

em que estamos usando $A = -i \frac{\delta^2 S}{\delta\phi\delta\phi} \Big|_{\phi=\phi_{cl}}$ na Eq. (2.17) e eliminamos o termo linear da expansão em série de Taylor da ação $S[\phi]$, visto que esse termo é a equação de movimento, isto é, $\frac{\delta S}{\delta\phi} \Big|_{\phi=\phi_{cl}} = 0$. Além disso, desprezamos os termos de ordem superior na Eq. (2.17) e mantemos apenas o termo de segunda ordem em ϕ , tornando a integral funcional passível de ser resolvida analiticamente. Observe que essa integral da Eq. (2.17) é apenas um caso particular da integral bosônica mostrada na Eq. (1.4) do capítulo anterior. Desse modo,

$$\exp \{ \Gamma[\phi] \} = \exp \{ iS[\phi_{cl}] \} [\det A]^{-1/2}. \quad (2.18)$$

Utilizando a seguinte propriedade de traço, fornecida por

$$Tr \ln A = \ln \det A, \quad (2.19)$$

e usando a Eq. (2.19) na Eq. (2.18), nós obtemos

$$\exp \{ \Gamma[\phi] \} = \exp \{ iS[\phi_{cl}] \} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} Tr (\ln A) \right\} \right]. \quad (2.20)$$

Nessa última equação, sabemos que o logaritmando A é determinado pela segunda derivada da ação clássica $S[\phi_{cl}]$ da lagrangiana da Eq. (2.11),

$$A = -i \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\frac{\delta S}{\delta\phi} \right) \Big|_{\phi=\phi_{cl}}. \quad (2.21)$$

Após os cálculo dessas derivadas na configuração $\phi(x) = \phi_{cl}(x)$, o operador A pode ser reescrito como

$$A = -i \left(\square + U'' \right), \quad (2.22)$$

em que U'' é a segunda derivada do potencial clássico com relação ao campo ϕ . Antes de substituir o logaritmo natural do operador da Eq. (2.22) na Eq. (2.20), devemos notar que o argumento do logaritmo tem que ser adimensional. Nesse sentido, vamos fazemos a mudança

$$\ln A \rightarrow \ln A - \ln A(0) = \ln \left(\frac{-i(\square + U'')}{-i\square} \right) = \ln \left(1 + \frac{U''}{\square} \right). \quad (2.23)$$

Dessa forma, a inserção da Eq. (2.23) na Eq. (2.20) produz

$$\exp \{ \Gamma [\phi] \} = \exp \{ iS [\phi_{cl}] \} \exp \left\{ -\frac{1}{2} Tr \ln \left(1 + \frac{U''}{\square} \right) \right\}. \quad (2.24)$$

Para uma configuração constante do campo $\phi_{cl}(x) = \rho$, a ação clássica $S[\phi_{cl}]$ da lagrangiana da Eq.(2.11) é dada por

$$S[\rho] = U(\rho)\Omega, \quad (2.25)$$

pois $\partial_\mu \rho = 0$ para ρ constante. Note que $U(\rho)$ é o potencial clássico para a configuração constante do campo escalar e Ω é o volume do espaço tempo. Antes de inserir esse resultado da Eq. (2.25) na Eq.(2.24), vamos manipular o traço do operador dessa última equação. Perceba que ele pode ser representado como uma integral na base coordenada $|x\rangle$. Logo, temos

$$Tr \ln \left(1 + \frac{U''}{\square} \right) \rightarrow \int d^4x \langle x | \ln \left(1 + \frac{U''}{\square} \right) | x \rangle. \quad (2.26)$$

Sabendo que a propriedade de completeza na base de momento $|k\rangle$ é dada por

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} |k\rangle \langle k| = 1. \quad (2.27)$$

Usando essa propriedade de completeza na Eq. (2.26), temos

$$\int d^4x \langle x | \ln \left(1 + \frac{U''}{\square} \right) | x \rangle = \int d^4x \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \langle x | k \rangle \langle k | \ln \left(1 + \frac{U''}{\square} \right) | q \rangle \langle q | x \rangle. \quad (2.28)$$

Além dessa propriedade, podemos utilizar a relação de produto interno na Eq. (2.28) fornecida por

$$\langle x | k \rangle = e^{ikx}. \quad (2.29)$$

Sendo assim, nós obtemos

$$\int d^4x \langle x | \ln \left(1 + \frac{U''}{\square} \right) | x \rangle = \Omega \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln \left(1 + \frac{U''}{k^2} \right). \quad (2.30)$$

Portanto, usando as Eq. (2.25) e Eq. (2.30) na Eq. (2.24), obtemos a ação efetiva $\Gamma[\rho]$ na configuração de campo constante

$$i\Gamma[\rho] = -U[\rho]\Omega + iV_1\Omega + i\Delta\Omega, \quad (2.31)$$

com V_1 fornecido por

$$V_1 = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln \left(1 + \frac{U''}{k^2} \right). \quad (2.32)$$

Note que acrescentamos o termo $i\Delta$ para renormalizar a ação efetiva na Eq. (2.31). Vale frisar que o resultado da Eq. (2.31) foi multiplicado por um fator imaginário i , por conveniência, para seguir a notação da Ref. [4]. Ademais, podemos dividir a Eq. (2.31) pelo volume do espaço tempo Ω e determinar o potencial efetivo $iV[\rho]$

$$iV[\rho] = -U[\rho] + iV_1 + i\Delta. \quad (2.33)$$

Conforme afirmamos no final do capítulo 1, o potencial efetivo será importante para estudarmos o grupo de renormalização e calcularmos as quantidades físicas do modelo que estamos interessados. Observe que $iV[\rho]$ possui essencialmente dois termos, sendo que um deles é o potencial clássico $U[\rho]$ (proporcional a $\hbar^0$), obtido diretamente da lagrangiana da teoria, e o outro iV_1 é a correção quântica de 1-loop ao potencial efetivo (proporcional a $\hbar$). Assim, precisamos avaliar a integral dessa parcela para chegar ao resultado final.

Vamos focar nossa atenção no cálculo da parte quântica $V_1[\rho]$ dada pela Eq. (2.32), a qual em D dimensão é reescrita como

$$V_1[\rho] = -\frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \ln \left(1 + \frac{U''}{k^2} \right). \quad (2.34)$$

Perceba que a integral da Eq. (2.32) é divergente, por isso a reescrevemos em D dimensão, pois utilizaremos o método de regularização dimensional. Logo, a dimensionalidade da integral da Eq. (2.34) corresponde a k^D , enquanto que o correto seria k^4 , visto que estamos supondo um modelo em $(3+1)D$ na lagrangiana da Eq. (2.11). Para contornar esse erro na dimensão da integral, introduzimos um parâmetro massivo ou ponto de renormalização μ^{4-D} na Eq. (2.34). Desse modo,

$$V_1[\rho] = -\frac{\mu^{4-D}}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \ln \left(1 + \frac{U''}{k^2} \right). \quad (2.35)$$

A fim de calcular a integral da Eq. (2.35), fazemos uma rotação de Wick $d^D k \rightarrow id^D k, k^2 \rightarrow -k_E^2$, então

$$V_1[\rho] = -\frac{i}{2}\mu^{4-D} \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \ln \left(1 - \frac{U''}{k_E^2} \right). \quad (2.36)$$

Derivando a equação acima com relação a U'' , temos que

$$\begin{aligned} \frac{dV_1[\rho]}{dU''} &= -\frac{i}{2}\mu^{4-D} \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{\left(1 - \frac{U''}{k_E^2}\right)} \left(-\frac{1}{k_E^2}\right) \\ &= \frac{i}{2}\mu^{4-D} \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k_E^2 - U'')}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Esse “truque” da derivada encontra-se na Ref. [5] e permitiu reescrever a integral inicial da Eq. (2.36) em termos de integrais dimensionalmente regularizadas, as quais são tabeladas e fornecidas pela Ref. [4],

$$\int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)} = \frac{(m^2)^{\frac{D}{2}-1}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma \left[1 - \frac{D}{2} \right]. \quad (2.38)$$

Substituindo a Eq. (2.38) na Eq. (2.37) e posteriormente integrando com relação a U'' , obtemos

$$\begin{aligned} V_1[\rho] &= -i\mu^{4-D} \frac{\Gamma \left[1 - \frac{D}{2} \right]}{(4\pi)^{D/2}} \frac{(-U'')^{\frac{D}{2}}}{D} \\ &= -\frac{i}{D} \frac{(U'')^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-U''} \right)^{\frac{4-D}{2}} \Gamma \left[1 - \frac{D}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Lembrando da propriedade

$$A^\epsilon = e^{\ln A^\epsilon} = e^{\epsilon \ln A} \approx 1 + \epsilon \ln A, \quad (2.40)$$

e da expansão da função gama

$$\Gamma \left[1 - \frac{D}{2} \right] \approx \frac{2}{(D-4)} + (\gamma - 1), \quad (2.41)$$

em que γ é a constante de Euler-Mascheroni, podemos expressar a parcela quântica do potencial efetivo $V_1[\rho]$ da Eq. (2.39) como

$$V_1[\rho] = \frac{i}{D} \frac{(U'')^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{4-D} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-U''} \right) + \textit{finita} \right]. \quad (2.42)$$

É pertinente tecer alguns comentários sobre esse resultado. Primeiro, observe que ele é composto de um termo divergente para $D \rightarrow 4$ e duas parcelas finitas, sendo que uma depende do ponto de renormalização μ e a outra é independente. No estudo do grupo de renormalização, esta última parcela é irrelevante e por isso não foi explicitada na Eq. (2.42). Quanto a parcela divergente, vamos tratá-la pelo esquema de subtração minimal, o qual consiste em desprezar o termo divergente que vem do pólo da função gama. Esse procedimento de desprezar a parcela divergente é possível graças aos contra-termos $i\Delta$ adicionados na Eq. (2.33). Assim, a contribuição quântica $V_1[\rho]$ renormalizada é fornecida por

$$V_1[\rho] = \frac{i}{64\pi^2} \left(U'' \right)^2 \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-U''} \right). \quad (2.43)$$

Salientamos que embora os resultados das Eqs. (2.42) e (2.43) estão com a mesma notação, eles são distintos pois a primeira equação ainda apresenta divergência, enquanto que o resultado renormalizado é finito. De posse desses resultados, estamos em condições de calcular as funções beta via grupo de renormalização na próxima seção.

2.3 Grupo de renormalização para $iV[\rho]$

Uma dada teoria de campos depende, em geral, de vários parâmetros como por exemplo massas, pontos de renormalização e constantes de acoplamento. Nesse sentido, é interessante analisar como a teoria reage a mudanças em tais parâmetros [4]. O cálculo do potencial efetivo envolve o parâmetro de escala μ , o qual não é físico, então a teoria deve ser independente da escolha desse parâmetro. Logo, uma variação nesse parâmetro de escala μ deve ser acompanhada de uma variação nos parâmetros renormalizados (massas e constantes de acoplamento) de modo que a teoria não seja alterada. Essa afirmação para o potencial efetivo iV pode ser expressa matematicamente pela equação [5]

$$\mu^2 \frac{dV[\rho, m^2, \lambda, \mu^2]}{d\mu^2} = 0. \quad (2.44)$$

Transformando a derivada total em derivadas parciais, essa equação implica em

$$\left[\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \beta_m \frac{\partial}{\partial m^2} - \gamma_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] iV = 0, \quad (2.45)$$

sendo que a derivada em μ foi reescrita numa regra da cadeia de modo que os coeficientes β_λ , β_m e γ são dados respectivamente por

$$\beta_\lambda = \mu^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \mu^2}, \quad (2.46)$$

$$\beta_m = \mu^2 \frac{\partial m^2}{\partial \mu^2}, \quad (2.47)$$

$$-\gamma \rho = \mu^2 \frac{\partial \rho}{\partial \mu^2}. \quad (2.48)$$

A Eq. (2.45) representa o grupo de renormalização para o potencial efetivo iV . Nessa equação, μ é o ponto de renormalização, β_λ é chamada de função beta da constante de acoplamento, γ é denominada de dimensão anômala do campo ρ e ρ é o campo escalar na configuração constante. A partir da Eq. (2.45), podemos calcular as funções β_λ , β_m e γ , as quais fornecem o comportamento dos parâmetros renormalizados da teoria em função da escala de energia μ .

2.3.1 Grupo de renormalização para a teoria $\lambda\phi^4$

Nesta seção, vamos considerar a lagrangiana da teoria $\lambda\phi^4$ em $(3+1)D$ dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (2.49)$$

na qual λ é a constante de acoplamento adimensional do modelo. Observe que nessa teoria o potencial clássico é fornecido por

$$U[\phi] = -\frac{m^2 \phi^2}{2} - \frac{\lambda \phi^4}{4!}. \quad (2.50)$$

Assim, vamos particularizar o resultado do potencial efetivo $iV[\rho]$ da Eq. (2.33) correspondente a lagrangiana da Eq. (2.11) para a teoria $\lambda\phi^4$ em $(3+1)D$ na configuração de campo constante. Analisaremos duas situações para essa teoria, a primeira para $m = 0$ e a segunda para $m \neq 0$. Desse modo, antes de procedermos ao cálculo das funções β_λ , β_m e γ , precisamos do potencial efetivo iV da teoria $\lambda\phi^4$. No caso não massivo, usamos a Eq. (2.50) para $m = 0$, substituímos na parcela quântica da Eq. (2.43) e depois na Eq. (2.33), obtendo

$$iV[\rho] = \frac{\lambda \rho^4}{4!} + \frac{\lambda^2 \rho^4}{2^8 \pi^2} \ln \left(\frac{\lambda \rho^2}{8\pi \mu^2} \right). \quad (2.51)$$

Desse forma, inserindo a Eq. (2.51) no grupo de renormalização da Eq. (2.45) e calculando as derivadas, temos

$$-\frac{\lambda^2 \rho^4}{2^8 \pi^2} + \beta_\lambda \frac{\rho^4}{4!} = 0. \quad (2.52)$$

Observe que após as derivadas, concluímos que $\gamma = 0$. Além do mais, $\beta_m = 0$, pois estamos no modelo não massivo. Resolvendo a Eq. (2.52) para a função beta da constante de acoplamento β_λ , resulta que

$$\beta_\lambda = \frac{3\lambda^2}{32\pi^2}. \quad (2.53)$$

Igualando a Eq. (2.43) com a definição da função beta da constante de acoplamento β_λ dada na Eq. (2.46), temos uma equação diferencial de primeira ordem para $\lambda(\mu)$ cuja solução para a condição de contorno $\lambda(\mu_0) = \lambda_0$ é fornecida por

$$\lambda(\mu) = \frac{\lambda_0}{\left[1 - \frac{3\lambda_0}{32\pi^2} \ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right)\right]}. \quad (2.54)$$

Essa equação acima é a renormalização da constante de acoplamento para a teoria $\lambda\phi^4$ não massiva, o qual demonstra a resposta da constante de acoplamento λ com a escala de energia μ . Para entender melhor a dependência entre essas duas quantidades, plotamos o gráfico abaixo, escolhendo λ_0 e μ_0 unitários.

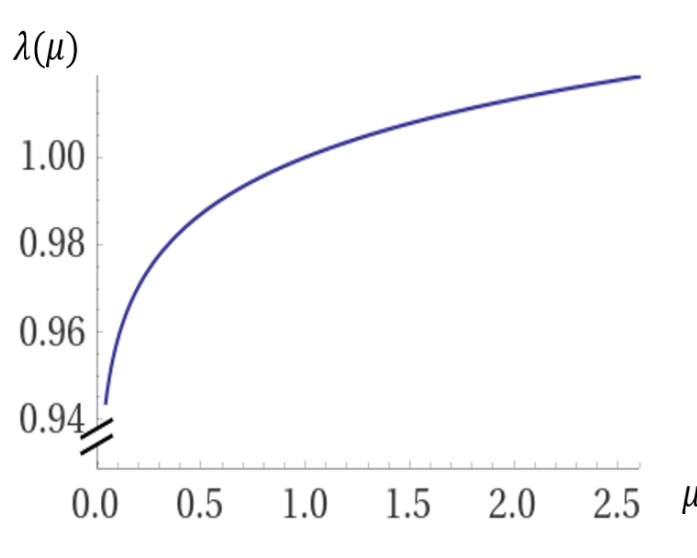


Figura 2.2: Gráfico da Eq. (2.54) para $\lambda_0 = 1$ e $\mu_0 = 1$.

Percebemos pelo gráfico que para altas energias, a constante de acoplamento cresce e não é possível aplicar a teoria de perturbação. Por outro lado, se estamos num regime

de baixas energias, o método perturbativo pode ser utilizado, uma vez que a constante de acoplamento é pequena. A Eq. (2.54) admite um pólo de Landau dado pelo pólo do seu denominador. Nessa escala de energia, a constante de acoplamento diverge [15].

Agora, vamos abordar o grupo de renormalização da teoria $\lambda\phi^4$ para $m \neq 0$. Primeiro, calculamos o potencial efetivo iV . Para isso, substituímos a Eq. (2.50) na parcela quântica da Eq.(2.43) e, em seguida, inserimos essa parcela na Eq. (2.33), resultando em

$$iV = \frac{m^2 \rho^2}{2} + \frac{\lambda \rho^4}{4!} + \frac{1}{64\pi^2} \left(m^2 + \frac{\lambda \rho^2}{2} \right)^2 \ln \left(\frac{m^2 + \frac{\lambda \rho^2}{2}}{4\pi\mu^2} \right). \quad (2.55)$$

Expandindo em série de Taylor a Eq. (2.55) para $\lambda \ll 1$ e mantendo termos até segunda ordem na constante de acoplamento λ com o intuito de calcular as funções do grupo de renormalização, temos que

$$iV = \frac{m^2 \rho^2}{2} + \frac{\lambda \rho^4}{4!} + \frac{m^4}{64\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) + \frac{\lambda}{128\pi^2} \left(m^2 \rho^2 + 2m^2 \rho^2 \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right) + \frac{\lambda^2}{512\pi^2} \left(3\rho^4 + 2\rho^4 \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right). \quad (2.56)$$

Substituindo a Eq. (2.56) no grupo de renormalização da Eq. (2.45) e fazendo as derivadas, obtemos

$$\left(-\frac{m^4}{64\pi^2} - \gamma m^2 \rho^2 \right) + \left(-\frac{\lambda m^2 \rho^2}{64\pi^2} + \frac{\beta_m \rho^2}{2} \right) + \left(-\frac{\mu \lambda^2 \rho^4}{256\pi^2} + \frac{\beta_\lambda \rho^4}{4!} \right) = 0. \quad (2.57)$$

A igualdade acima só é verdadeira se γ , β_m e β_λ forem dadas, respectivamente, por

$$-\frac{\mu m^4}{64\pi^2} - \gamma m^2 \rho^2 = 0 \rightarrow \gamma = -\frac{m^2}{64\pi^2 \rho^2}, \quad (2.58)$$

$$-\frac{\lambda m^2 \rho^2}{64\pi^2} + \frac{\beta_m \rho^2}{2} = 0 \rightarrow \beta_m = \frac{\lambda m^2}{32\pi^2}, \quad (2.59)$$

$$-\frac{\lambda^2 \rho^4}{256\pi^2} + \frac{\beta_\lambda \rho^4}{4!} = 0 \rightarrow \beta_\lambda = \frac{3\lambda^2}{32\pi^2}. \quad (2.60)$$

Note que a função beta da constante da acoplamento β_λ é exatamente igual ao caso anterior. Então, vamos focar nossa atenção na função beta da massa β_m e na dimensão anômala γ , porém esta última não é relevante, visto que ela apenas renormaliza o valor da constante arbitrária ρ . Assim, vamos fazer o cálculo de β_m . Primeiro, igualamos a Eq. (2.59) com

definição de β_m da Eq. (2.47), obtendo uma equação diferencial de primeira ordem para $m(\mu)$ cuja solução para a condição de contorno $m(\mu_0) = m_0$ é fornecida por

$$m(\mu) = m_0 \left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2} \right)^{\lambda/32\pi^2}. \quad (2.61)$$

Esse resultado é a renormalização da massa para partículas bosônicas relativísticas e mostra qual a mudança esperada na massa da teoria quando variamos a escala de energia μ . Percebemos pela plotagem gráfica da figura 2.3 que a massa possui dois comportamentos assintóticos distintos, dependendo do sinal da constante de acoplamento, sendo $m(\mu)$ crescente para λ positivo e decrescente para λ negativo.

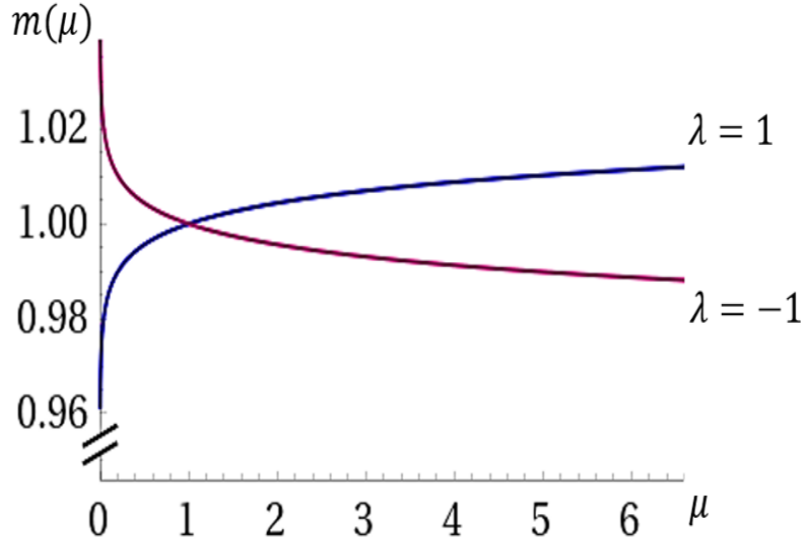


Figura 2.3: Gráficos da massa renormalizada da Eq. (2.61) para $\lambda = 1$ (curva azul), $\lambda = -1$ (curva vermelha), $m_0 = 1$ e $\mu_0 = 1$.

Apesar de termos calculado essa quantidade para a teoria $\lambda\phi^4$, a técnica desenvolvida nas seções anteriores pode (a priori) ser aplicada em teorias de campos mais sofisticadas, podendo ser usada para descrever as propriedades de materiais bidimensionais em física da matéria condensada. Como exemplo, podemos citar a Ref. [16], a qual estudou o grupo de renormalização para a função de Green do elétron para calcular a função beta da massa β_m na Pseudo-eletrodinâmica Quântica (PQED) e usou a massa renormalizada na descrição do gap de energia de materiais como o disseleneto de Tungstênio (WSe_2) e dissulfeto de Molibdênio (MoS_2).

2.4 β_m e β_λ via condições de renormalização

Uma maneira alternativa de obter as funções beta da teoria $\lambda\phi^4$ é impor as condições de renormalização sobre o potencial efetivo $iV[\rho]$. Antes de aplicar tais condições, devemos definir a massa física m_{phys} e a constante de acoplamento física λ_{phys} da teoria [5]. Define-se a massa física m_{phys} do campo escalar ρ como sendo o inverso negativo do propagador para momento externo nulo, isto é,

$$m_{phys}^2 = -\Gamma_\rho^{(2)}(p^2 = 0) = -\left.\frac{d^2 V}{d\rho^2}\right|_{\rho=0}, \quad (2.62)$$

sendo V o potencial efetivo da teoria. Essa equação é a condição de renormalização da massa e diz essencialmente que a massa é o pólo do propagador corrigido.

Substituindo o potencial efetivo da teoria $\lambda\phi^4$ da Eq. (2.55) na Eq. (2.62), calculando as derivadas e posteriormente fazendo $\rho = 0$, obtemos

$$m_{phys}^2 = -m^2 \left\{ 1 + \frac{\lambda}{64\pi^2} + \frac{\lambda}{32\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\}. \quad (2.63)$$

Se m_{phys} é a massa física, então ela não pode depender do ponto de renormalização μ , pois este parâmetro é arbitrário e foi introduzido por meio do método de regularização dimensional. Logo,

$$\mu^2 \frac{dm_{phys}^2}{d\mu^2} = 0. \quad (2.64)$$

Usando a Eq. (2.63) na Eq. (2.64) e a definição de β_m dada na Eq. (2.47), temos

$$\beta_m \left\{ 1 + \frac{\lambda}{64\pi^2} + \frac{\lambda}{32\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\} = \frac{m^2 \lambda}{32\pi^2}. \quad (2.65)$$

Observe que β_m é de primeira ordem na constante de acoplamento, então podemos desprezar o segundo e o terceiro termo do lado esquerda da Eq. (2.65), uma vez que o produto $\lambda\beta_\lambda$ é de segunda ordem na constante de acoplamento e estamos trabalhando com a aproximação de 1-loop (que no caso da massa significa uma correção quântica de ordem λ). Assim, chegamos na função beta da massa β_m via condições de renormalização,

$$\beta_m = \frac{m^2 \lambda}{32\pi^2}. \quad (2.66)$$

É exatamente o mesmo resultado obtido na Eq.(2.59) via grupo de renormalização para o potencial efetivo $iV[\rho]$.

Todo esse procedimento para obtenção da função beta da massa β_m pode ser repetido de forma semelhante para calcular a função beta da constante de acoplamento β_λ . Primeiro, definimos a constante de acoplamento física λ_{phys} dada por

$$\lambda_{phys} = -\Gamma_\rho^{(4)}(p^2 = 0) = \frac{d^4 V}{d\rho^4} \Big|_{\rho=0}, \quad (2.67)$$

que é a condição de renormalização para a constante de acoplamento. Desse modo, inserindo a Eq. (2.55) na Eq. (2.67), calculando as derivadas e depois fazendo $\rho = 0$, chegamos na expressão

$$\lambda_{phys} = \lambda \left[1 + \frac{9\lambda}{64\pi^2} + \frac{3\lambda}{32\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right]. \quad (2.68)$$

Assim como no caso da massa física m_{phys} , a constante de acoplamento física λ_{phys} deve ser independente do ponto de renormalização μ^2 , então

$$\mu^2 \frac{d\lambda_{phys}}{d\mu^2} = 0. \quad (2.69)$$

Substituindo a Eq. (2.68) na Eq. (2.69), obtemos

$$\beta_\lambda \left[1 + \frac{9\lambda}{64\pi^2} + \frac{3\lambda}{32\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] + \lambda \left[\frac{9\beta_\lambda}{64\pi^2} + \frac{3\beta_\lambda}{32\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{3\lambda}{32\pi^2} \right] = 0. \quad (2.70)$$

Note que há vários termos na expressão da Eq.(2.70), contudo apenas os termos proporcionais a λ^2 são relevantes para a nossa aproximação. Como β_λ é de segunda ordem na constante de acoplamento, então apenas o primeiro e o último termo da Eq.(2.70) não serão desprezados, os demais são de terceira ordem na constante de acoplamento, visto que eles contêm o produto $\beta_\lambda\lambda$, o qual é proporcional a λ^3 . Portanto,

$$\beta_\lambda = \frac{3\lambda^2}{32\pi^2}, \quad (2.71)$$

que é o mesmo resultado obtido na Eq. (2.54) por meio do grupo de renormalização para o potencial efetivo $iV[\rho]$.

Dessa forma, podemos calcular as funções beta de duas maneiras diferentes, quer seja pela construção da equação do grupo de renormalização para o potencial efetivo da teoria, quer seja pela imposição das condições de renormalização sobre ele, mostrando a versatilidade dessa ferramenta matemática.

2.5 Grupo de renormalização para $\Gamma^{(2)}(p^2)$

Nesta seção, apresentamos mais uma técnica para o cálculo das funções beta, em particular, a função beta da massa β_m para a teoria $\lambda\phi^4$ via grupo de renormalização para a função de Green. Diferentemente do método funcional desenvolvido em seções anteriores, vamos utilizar o método perturbativo para calcular a correção ao propagador do campo escalar ϕ em primeira ordem na constante de acoplamento λ . A expansão em loop requer a utilização das regras de Feynman para a construção das estruturas matemáticas dos diagramas. Assim, listamos essas regras para o modelo $\lambda\phi^4$ cujas representações gráficas são mostradas na figura 2.4 e suas correspondentes expressões matemáticas [17].

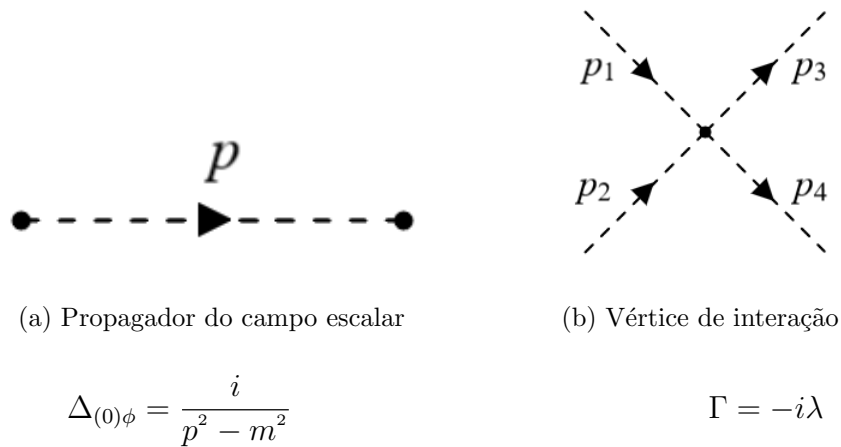


Figura 2.4: Regras de Feynman do modelo $\lambda\phi^4$

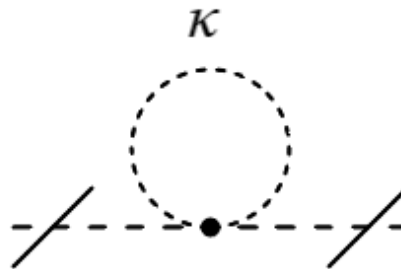


Figura 2.5: Diagrama de 1-loop da autoenergia do campo escalar

O diagrama de Feynman relacionado à correção do propagador do campo ϕ é mostrado

na figura 2.5. Essa estrutura diagramática corresponde a seguinte expressão matemática,

$$i\Sigma_\phi = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)}, \quad (2.72)$$

na qual computamos a contribuição de um vértice de interação e um propagador para construir a Eq.(2.72). Além de utilizarmos o fator combinatorial do diagrama dado na Ref. [17]. Para avaliar essa integral, vamos utilizar o método de regularização dimensional. Para tal, precisamos do seguinte resultado de integrais dimensionalmente regularizadas fornecido pela Ref. [4],

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^\alpha} = \frac{i^{2\alpha+1}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\alpha - D/2)}{\Gamma(\alpha)} \Delta^{\frac{D}{2}-\alpha}. \quad (2.73)$$

Assim, a substituição da Eq. (2.73) na Eq. (2.72), obtemos

$$i\Sigma_\phi = \frac{\lambda i^3 m^2}{2} (4\pi)^{-D/2} \Gamma(1 - D/2) \left(\frac{\mu}{m}\right)^{4-D}. \quad (2.74)$$

Expandindo os termos que dependem da dimensão espaço-temporal D , temos

$$\left(\frac{\mu}{m}\right)^{4-D} = \left(\frac{\mu}{m}\right)^\epsilon \approx 1 + \epsilon \ln\left(\frac{\mu}{m}\right), \quad (2.75)$$

$$(4\pi)^{-D/2} = (4\pi)^{-2} (4\pi)^{\epsilon/2} \approx \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi)\right\}, \quad (2.76)$$

$$\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) \approx -\frac{2}{\epsilon} + \gamma + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (2.77)$$

Desse modo, inserindo as expansões acima na auto-energia do campo ϕ da Eq. (2.74), chegamos em

$$\begin{aligned} i\Sigma_\phi &= \frac{i^3 \lambda m^2}{2} \left\{ \frac{1}{(4\pi)^2} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi)\right) \left(1 + \epsilon \ln\left(\frac{\mu}{m}\right)\right) \left(-\frac{2}{\epsilon} + \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)\right) \right\} \\ &= -\frac{i\lambda m^2}{32\pi^2} \left\{ -\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + Finita \right\}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Portanto, usando o método de subtração minimal e desprezando a parcela finita, já que esta não depende do ponto de renormalização μ , não sendo relevante para o estudo do grupo de renormalização, resulta em

$$i\Sigma_\phi = \frac{i\lambda m^2}{32\pi^2} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right). \quad (2.79)$$

O resultado da Eq. (2.79) é a correção em primeira ordem para o propagador do campo escalar ϕ e está em consonância com a Ref. [18].

A função de vértice de dois pontos $\Gamma^{(2)}(p^2)$ é dada pela seguinte equação de Schwinger-Dyson,

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(p^2) &= \Delta_{(0)\phi}^{-1} + i\Sigma_\phi, \\ &= p^2 - m^2 + \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right),\end{aligned}\tag{2.80}$$

sendo que $\Delta_{(0)\phi}^{-1}$ é o inverso do propagador livre do campo ϕ e $i\Sigma_\phi$ é a auto-energia da Eq. (2.79). A construção da equação do grupo de renormalização da função de vértice de dois pontos $\Gamma^{(2)}(p^2)$ é semelhante a do potencial efetivo $iV[\rho]$ feita em seções anteriores. Primeiro, utilizamos a relação entre as funções de vértice não renormalizadas $\Gamma^{(2)}(p^2)$ e as renormalizadas $\Gamma_R^{(2)}(p^2)$ fornecida pela Ref. [4], dada por

$$\Gamma^{(2)}(p^2, \lambda, m^2) = Z_\phi^{-N_B/2} \Gamma_R^{(2)}(p^2, \lambda_R, m_R^2),\tag{2.81}$$

na qual Z_ϕ é a constante de renormalização da função de onda do campo escalar ϕ e N_B é o número de linhas externas bosônicas do diagrama, além disso todos os termos com o subscrito R denotam os parâmetros renormalizados da teoria. Posteriormente, notamos que a função de vértice $\Gamma^{(2)}(p^2)$ não pode depender do ponto renormalização μ^2 , então

$$\mu^2 \frac{d\Gamma^{(2)}(p^2)}{d\mu^2} = 0.\tag{2.82}$$

Usando a regra da cadeia na Eq. (2.82), chegamos na equação do grupo de renormalização para a função de vértice de dois pontos, dada por

$$\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \beta_m \frac{\partial}{\partial m^2} - N_B \gamma\right) \Gamma^{(2)}(p^2) = 0,\tag{2.83}$$

sendo a função beta da constante de acoplamento β_λ , a função beta da massa β_m e dimensão anômala γ dadas, respectivamente, por

$$\beta_\lambda = \mu^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \mu^2},\tag{2.84}$$

$$\beta_m = \mu^2 \frac{\partial m}{\partial \mu^2},\tag{2.85}$$

$$\gamma = \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} (\ln Z_\phi).\tag{2.86}$$

Obviamente, a função de vértice que aparece na Eq.(2.83) $\Gamma^{(2)}(p^2)$ é a função de vértice renormalizada, porém não estamos usando o subscrito R para não sobrecarregar a notação. Dessa forma, inserindo a Eq. (2.80) na Eq. (2.83) e fazendo as derivadas, temos que

$$\frac{\lambda m^2}{32\pi^2} - \beta_m - N_B \gamma (p^2 - m^2) - \frac{N_B \gamma \lambda m^2}{32\pi^2} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) = 0. \quad (2.87)$$

Usando o fato de que p^2 e m^2 são invariantes de Lorentz e $N_B = 2$ (vide figura 2.5), então $\gamma = 0$. Assim, obtemos

$$\beta_m = \frac{\lambda m^2}{32\pi^2}. \quad (2.88)$$

Esse resultado é o mesmo obtido quando estudamos o grupo de renormalização para o potencial efetivo, bem como pelas condições de renormalização impostas sobre ele. A Eq. (2.88) já era esperada porque embora as técnicas desenvolvidas sejam distintas, as aproximações são as mesmas, isto é, tanto para o potencial efetivo quanto para a expansão diagramática usamos a aproximação de 1-loop e, portanto, não havia outro resultado possível a não ser o já obtido nas seções precedentes. É oportuno comentar que só obtemos a função beta da massa, mas se estivermos interessados na função beta da constante de acoplamento via expansão em loop, precisaríamos calcular a correção para o vértice de interação e depois construir a equação do grupo de renormalização para a função de vértice de quatro pontos, o que não foi feito neste trabalho.

Capítulo 3

Efeitos de temperatura e a energia de vácuo

Neste capítulo, começaremos dando uma interpretação física da correção quântica ao potencial efetivo. Mostraremos ainda o procedimento sistemático de como introduzir efeitos térmicos no potencial efetivo com o intuito de fazer a conexão desse objeto, obtido via formalismo funcional, com a termodinâmica. Além disso, faremos uma aplicação para o cálculo da pressão de partículas reais bosônicas.

3.1 Energia do vácuo

O potencial efetivo corrigido a 1-loop, conforme a Eq. (2.33) é dado por

$$iV = -U[\rho] - \frac{i}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \ln \left(1 + \frac{U''}{k^2} \right). \quad (3.1)$$

Vamos manipular a parcela quântica da Eq. (3.1) para compreender qual o significado físico desse termo. Assim, reescrevemos a integral da seguinte forma

$$\begin{aligned} iV &= -U[\rho] - \frac{i}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \ln \left(\frac{\omega^2 - |\vec{k}|^2 + U''}{\omega^2 - |\vec{k}|^2} \right) \\ &= -U[\rho] - \frac{i}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \ln \left(\frac{\omega^2 - \omega_k^2}{\omega^2 - \bar{\omega}_k^2} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

sendo que $k^2 = \omega^2 - |\vec{k}|^2$, $\omega_k^2 = |\vec{k}|^2 - U''$ e $\bar{\omega}_k^2 = |\vec{k}|^2$. Além disso, sabemos que $d^D k = d\omega d^{D-1} |\vec{k}|$. Dessa forma,

$$iV = -U[\rho] - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{d^{D-1} |\vec{k}|}{(2\pi)^{D-1}} \ln \left(\frac{\omega^2 - \omega_k^2}{\omega^2 - \bar{\omega}_k^2} \right). \quad (3.3)$$

Fazendo uma integração por partes na variável ω da Eq. (3.3), temos

$$iV = -U[\rho] + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{D-1} |\vec{k}|}{(2\pi)^{D-1}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_k^2)} d\omega - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \bar{\omega}_k^2)} d\omega \right\}. \quad (3.4)$$

Note que as integrações na variável ω são divergentes, por isso podemos incluir o termo $i\epsilon$ para deslocar o pólo da integral e aplicar o teorema do resíduo. Após isso, resulta que

$$\begin{aligned} iV &= -U[\rho] + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{D-1} |\vec{k}|}{(2\pi)^{D-1}} \left\{ \frac{2i\pi\omega_k^2}{(-2\omega_k)} - \frac{2i\pi\bar{\omega}_k^2}{(-2\bar{\omega}_k)} \right\} \\ &= -U[\rho] + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{D-1} |\vec{k}|}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{2} (\omega_k - \bar{\omega}_k). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Vamos associar a integral em $|\vec{k}|$ a uma soma discreta, o que acontece quando a função de onda obedece condições periódicas de contorno. Desse modo,

$$iV = -U[\rho] + \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \omega_{\vec{k}}, \quad (3.6)$$

sendo que desprezamos $\bar{\omega}_k$, pois é independente de ρ . Esse resultado mostra que a energia do vácuo é a soma sobre todos os modos de vibração $\omega_{\vec{k}}$. Observe que no sistema internacional de unidades $V_1 = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar}{2} \omega_{\vec{k}}$, que lembra a energia do oscilador harmônico quântico, contudo percebemos que a frequência de oscilação da Eq. (3.6) não é constante, pois $\omega_{\vec{k}}$ depende de $|\vec{k}|$.

3.2 Frequências de Matsubara

Nesta seção, descrevemos o procedimento sistemático para inserir efeitos de temperatura no potencial efetivo iV no formalismo de tempo imaginário. A ideia essencial é transformar o componente temporal da integral de loop numa soma sobre todas as frequências de Matsubara ω_n Ref. [19]. Assim, devemos fazer a seguinte substituição

$$\int \frac{dk_0}{(2\pi)} f(k_0, \vec{k}, \beta) \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\omega_n, \vec{k}, \beta), \quad (3.7)$$

ou seja, substituímos o componente temporal do quadri vetor $k_\mu = (k_0, \vec{k})$ por $k_\mu = (\omega_n, \vec{k})$. As frequências de Matsubara para o caso fermiônico e bosônico são dadas, respectivamente, por

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}, \quad (3.8)$$

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}, \quad (3.9)$$

sendo que o inverso de β é a temperatura T do banho térmico e n são os modos de vibrações associados a cada componente do momento. Vale ressaltar que a constante β está no sistema de unidades naturais. No sistema internacional de unidades, teríamos $\beta = 1/k_B T$, na qual k_B corresponde a constante de Boltzmann. Assim, a partir das Eqs. (3.8) e (3.9), vamos obter o potencial efetivo a temperatura finita.

3.3 Potencial efetivo a temperatura finita

A parcela quântica do potencial efetivo no espaço euclidiano é dada por

$$\begin{aligned} V_1[\rho] &= -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \ln \left(\frac{k_E^2 - U''}{k_E^2} \right) \\ &= -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \ln \left(\frac{k_0^2 + \omega_k^2}{k_0^2 + \bar{\omega}_k^2} \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

sendo que $\omega^2 = |\vec{k}|^2 - U''$ e $\bar{\omega}_k^2 = |\vec{k}|^2$. Pela Eq. (3.7), para inserir os efeitos térmicos na parcela quântica do potencial efetivo da Eq. (3.10), devemos fazer a seguinte substituição

$$\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \ln \left(\frac{k_0^2 + \omega_k^2}{k_0^2 + \bar{\omega}_k^2} \right) \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 k_E}{(2\pi)^3} \ln \left(\frac{\omega_n^2 + \omega_k^2}{\omega_n^2 + \bar{\omega}_k^2} \right). \quad (3.11)$$

Usando a Eq. (3.11) na Eq.(3.10), temos que

$$V_1[\rho] = -\frac{i}{2\beta} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 k_E}{(2\pi)^3} \ln \left(\frac{\omega_n^2 + \omega_k^2}{\omega_n^2 + \bar{\omega}_k^2} \right). \quad (3.12)$$

Note que o termo $\ln \left(\omega_n^2 + \bar{\omega}_k^2 \right)$ da equação acima não depende de ρ , então vamos desprezar esse termo por conveniência, visto que ele é apenas uma constante e não influenciará no resultado final. Assim,

$$V_1[\rho] = -\frac{i}{2\beta} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 k_E}{(2\pi)^3} \ln \left(\omega_n^2 + \omega_k^2 \right). \quad (3.13)$$

Vamos calcular a soma sobre todas as frequências de Matsubara. Para isso, definimos

$$v(\omega_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln(\omega_n^2 + \omega_k^2), \quad (3.14)$$

derivando com relação a ω_k , encontramos

$$\frac{\partial v}{\partial \omega_k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\omega_k}{(\omega_n^2 + \omega_k^2)}. \quad (3.15)$$

A substituição da frequência bosônica de Matsubara da Eq. (3.9) na Eq.(3.15), resulta que

$$\frac{\partial v}{\partial \omega_k} = \frac{\omega_k \beta^2}{2\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[n^2 + \alpha^2]}, \quad (3.16)$$

com a constante $\alpha^2 = \beta^2 \omega_k^2 / 4\pi^2$. Essa soma da Eq. (3.16) é calculada na Ref. [5] cujo resultado é fornecido por

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[n^2 + \alpha^2]} = \frac{\pi \coth(\pi \alpha)}{\alpha}. \quad (3.17)$$

Assim, usando o resultado da soma da Eq. (3.17) na Eq. (3.16) e depois integrando com relação a ω_k , obtemos

$$v(\omega_k) = 2 \ln(1 - e^{-\beta \omega_k}) + \beta \omega_k + C, \quad (3.18)$$

em que C é uma constante arbitrária de integração.

Portanto, substituindo a Eq. (3.18) na Eq. (3.13), chegamos em

$$\begin{aligned} V_1[\rho, T] &= -\frac{i}{2\beta} \int \frac{d^3 k_E}{(2\pi)^3} \left\{ 2 \ln(1 - e^{-\beta \omega_k}) + \beta \omega_k \right\} \\ &= -i \int \frac{d^3 k_E}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\omega_k}{2} + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta \omega_k}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

A primeira parcela da Eq. (3.19) reproduz a correção quântica a temperatura zero e já avaliamos essa integral anteriormente. Assim, vamos focar nossa atenção na contribuição quântica a temperatura finita. Contudo, é importante observar que o potencial efetivo a temperatura finita pode ser escrito da seguinte forma:

$$iV[\rho, T] = -U[\rho] + iV_1[\rho] + i\Delta V_1[\rho, T] + i\Delta, \quad (3.20)$$

sendo $U[\rho]$ o potencial clássico, $iV_1[\rho,]$ a contribuição quântica a temperatura zero, $i\Delta V_1[\rho, T]$ a contribuição quântica a temperatura finita e $i\Delta$ são os contra-termos para eliminar as eventuais divergências no regime ultravioleta em $T = 0$.

Vamos simplificar a integral da contribuição quântica a temperatura finita T ,

$$i\Delta V_1[\rho, T] = \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3 k_E}{(2\pi)^3} \ln \left(1 - e^{-\beta \omega_k} \right), \quad (3.21)$$

lembrando que $\omega_k^2 = |\vec{k}|^2 - U''$. Para isso, vamos fazer uma mudança de variável $x = \beta|\vec{k}| \rightarrow dx = \beta d|\vec{k}|$. Então,

$$\begin{aligned} i\Delta V_1[\rho, T] &= \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^3} \ln \left(1 - e^{-\beta(|\vec{k}|^2 - U'')^{1/2}} \right) 4\pi |\vec{k}|^2 d|\vec{k}| \\ &= \frac{1}{2\pi^2 \beta^4} \int_0^\infty x^2 \ln \left(1 - e^{-\left(x^2 - \beta^2 U''\right)^{1/2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi^2 \beta^4} J_B[\beta U''], \end{aligned} \quad (3.22)$$

na qual $J_\beta[\beta U'']$ é denominada de “função térmica bosônica” de acordo com a Ref. [5]. Como exemplo, podemos computar o potencial efetivo a temperatura finita para a teoria $\lambda\phi^4$ no caso não massivo. Nesse sentido, adicionamos a Eq. (2.51) o resultado da parcela quântica a temperatura finita da Eq. (3.22). Após isso, obtemos

$$iV[\rho, T] = \frac{\lambda\rho^4}{4!} + \frac{\lambda^2\rho^4}{2^8\pi^2} \ln \left(\frac{\lambda\rho^2}{8\pi\mu^2} \right) + \frac{1}{2\pi^2\beta^4} J_B[\beta U'']. \quad (3.23)$$

Segundo a Ref. [5], a função térmica bosônica admite a seguinte expansão para $\beta U'' \ll 1$ (altas temperaturas):

$$\begin{aligned} J_B[\beta U''] &\approx -\frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^2}{12} \left(-\beta^2 U'' \right)^2 - \frac{\pi}{6} \left(-\beta^2 U'' \right)^{3/2} + \\ &\quad -\frac{1}{32} \left(-\beta^2 U'' \right)^4 \ln \left(\frac{\left(-\beta^2 U'' \right)^2}{16\pi^2 \exp\left(\frac{3}{2} - 2\gamma_E\right)} \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.24)$$

Logo, podemos particularizar o resultado dessa expansão da função térmica bosônica na Eq. (3.24) para o exemplo da teoria $\lambda\phi^4$ da Eq. (3.23), usando $U'' = -\frac{\lambda\rho^2}{2}$. Desse modo, mantendo termos até segunda ordem na constante de acoplamento, temos

$$V[\rho] = \frac{\lambda\rho^4}{4!} + \frac{\lambda^2\rho^4}{2^8\pi^2} \ln \left(\frac{\lambda\rho^2}{8\pi\mu^2} \right) - \frac{\pi^2}{2.45\beta^4} + \frac{\lambda^2\rho^4}{2.12.4} - \frac{\lambda^{3/2}\rho^3}{6.2^{5/2}\pi\beta}. \quad (3.25)$$

Note que o termo ρ^3 quebra a simetria discreta Z_2 do campo $\rho \rightarrow -\rho$. Isso indica que os efeitos térmicos eliminam a dupla degenerescência do vácuo.

3.4 Conexão com a termodinâmica

Para compreender como a teoria de campos se relaciona com a termodinâmica, vamos antes relembrar alguns elementos de física estatística sobre o gás ideal quântico, seguindo para esta revisão a Ref. [20]. Um estado quântico do gás ideal é caracterizado pelo conjunto de números quânticos

$$\{n_1, n_2, \dots, n_j, \dots\} = \{n_j\}, \quad (3.26)$$

sendo que j designa um orbital e n_j é o número de partículas nesse orbital. No caso de partículas fermiônicas, $n_j = 0$ ou $n_j = 1$ para qualquer j , por causa do princípio da exclusão de Pauli. Para os bósons, n_j pode variar de 0 a N , na qual N é o número total de partícula. A energia do sistema correspondente ao estado quântico n_j é dada por

$$E \{n_j\} = \sum_j \epsilon_j n_j, \quad (3.27)$$

em que ϵ_j representa a energia do orbital j . Percebemos que o número total de partícula é fornecido por

$$N = \sum_j n_j. \quad (3.28)$$

A função canônica de partição $Z(T, V, N)$ do gás ideal quântico é dada pela equação

$$Z(T, V, N) = \sum_{\{n_j\}} \exp \left[-\beta \sum_j \epsilon_j n_j \right]. \quad (3.29)$$

Note que não podemos calcular a soma (não se fatoriza) sobre os números de ocupação com a restrição imposta pelo número fixo de partículas. Uma forma de contornar esse problema é tratar o gás quântico no ensemble grande canônico. Assim, introduzimos a grande função canônica de partição $\Xi(T, V, \mu)$ fornecida por

$$\Xi(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \exp(\beta N \mu) Z(T, V, N). \quad (3.30)$$

Substituindo a Eq. (3.30) na Eq. (3.29), temos

$$\begin{aligned} \Xi(T, V, \mu) &= \sum_{N=0}^{\infty} \exp(\beta N \mu) \sum_{\{n_j\}} \exp \left[-\beta \sum_j \epsilon_j n_j \right] \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_j\}} \exp \left[-\beta (\epsilon_1 - \mu) n_1 - \beta (\epsilon_2 - \mu) n_2 \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Para resolver as duas somas na Eq. (3.31), vamos utilizar um “truque” para simplificar o problema, visto que inicialmente fazemos uma soma sobre todos os números de ocupação $n_1, n_2, \dots$ com a restrição de que $N = n_1 + n_2 + \dots$ seja fixo, depois somamos sobre todos os valores possíveis de N . Então, podemos fazer apenas uma soma sobre todos os números de ocupação sem qualquer restrição. Isso corresponde a um rearranjo dos termos da soma. Desse modo,

$$\Xi(T, V, \mu) = \sum_{n_1, n_2, \dots} \exp[-\beta(\epsilon_1 - \mu)n_1 - \beta(\epsilon_2 - \mu)n_2 \dots]. \quad (3.32)$$

Essa soma da Eq. (3.32) pode ser fatorada da seguinte forma:

$$\Xi(T, V, \mu) = \left\{ \sum_{n_1} \exp[-\beta(\epsilon_1 - \mu)n_1] \right\} \left\{ \sum_{n_2} \exp[-\beta(\epsilon_2 - \mu)n_2] \right\} \dots, \quad (3.33)$$

ou seja,

$$\Xi(T, V, \mu) = \prod_j \sum_n \exp[-\beta(\epsilon_j - \mu)n]. \quad (3.34)$$

A grande função canônica de partição obtida na Eq. (3.34) para um gás ideal quântico é válida tanto para o caso bosônico quanto para o caso fermiônico. Como estamos interessados no primeiro caso, então vamos particularizar aquele resultado e fazer a conexão da física estatística com a termodinâmica.

No caso bosônico, a soma em n da Eq.(3.34) varia de 0 a ∞ . Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp[-\beta(\epsilon_j - \mu)n] = 1 + \exp[-\beta(\epsilon_j - \mu)] + \exp[-2\beta(\epsilon_j - \mu)] + \dots \quad (3.35)$$

que é uma progressão geométrica de razão $\exp[-\beta(\epsilon_j - \mu)]$. Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp[-\beta(\epsilon_j - \mu)n] = \frac{1}{1 - \exp[-\beta(\epsilon_j - \mu)]}. \quad (3.36)$$

Portanto, a grande função canônica de partição é dada por

$$\Xi(T, V, \mu) = \prod_j \left\{ \frac{1}{1 - \exp[-\beta(\epsilon_j - \mu)]} \right\} = \prod_j \{1 - \exp[-\beta(\epsilon_j - \mu)]\}^{-1}. \quad (3.37)$$

Para fazermos a conexão com a termodinâmica, no limite termodinâmico, utilizamos a expressão

$$\Phi(T, V, \mu) = -k_B T \ln \Xi, \quad (3.38)$$

sendo que Φ é o grande potencial termodinâmico. Substituindo a Eq. (3.37) na Eq. (3.38), temos

$$\Phi(T, V, \mu) = k_B T \sum_j \ln \{1 - \exp [-\beta (\epsilon_j - \mu)]\}. \quad (3.39)$$

A energia do orbital j é quantizada por meio das condições de contorno impostas na solução da equação de Schorödinger. Isso permite reescrever a soma em j em uma integral da seguinte maneira:

$$\sum_k f(k) \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k f(k). \quad (3.40)$$

Assim, usando a Eq. (3.40) na Eq. (3.39), resulta que

$$\Phi(T, V, \mu) = k_B T V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln \{1 - \exp [-\beta (\epsilon_k - \mu)]\}, \quad (3.41)$$

ou ainda, podemos definir o grande potencial termodinâmico por unidade de volume. Então, a Eq. (3.41) é reescrita como

$$\phi(T, \mu) = k_B T \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln \{1 - \exp [-\beta (\epsilon_k - \mu)]\}. \quad (3.42)$$

Feita essa breve revisão de alguns tópicos de física estatística, estamos em condição de relacionar os resultados obtidos na teoria de campos para o potencial efetivo com a termodinâmica. Observe que a ação efetiva da parcela com os efeitos de temperatura é dada por

$$\Gamma [\rho, T, V] = \Omega i \Delta V_1, \quad (3.43)$$

sendo Ω o volume do espaço tempo e $i \Delta V_1$ a contribuição a temperatura finita do potencial efetivo fornecida por

$$i \Delta V_1 = T \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln \{1 - e^{-\beta \omega_k}\}. \quad (3.44)$$

Portanto, comparando a Eq. (3.44) com a Eq. (3.42) notamos que a conexão com a termodinâmica se faz da seguinte maneira:

$$\Omega \rightarrow V = L^D, \quad (3.45)$$

$$i \Delta V_1 \rightarrow \phi(T, \mu = 0). \quad (3.46)$$

Vale ressaltar algumas observações entre essas analogias feitas. Primeiro, na física estatística estávamos considerando um gás de bósons livres (sem interação). Em teoria de campos, temos um “gás” de bósons com interação do tipo $\lambda\rho^4$, por isso o termo ρ não tem análogo com o gás bosônico sem interação. Além disso, para introduzir o potencial químico μ no potencial efetivo, basta fazer um deslocamento na frequência $\omega_k \rightarrow \omega_k + \mu$. Notamos ainda que o método funcional desenvolvido também permite compreender como se obter as funções termodinâmicas para um sistema qualquer, desde que sua lagrangiana possa ser escrita de forma quadrática nos campos básicos.

3.4.1 Lei de Stefan-Boltzmann para a pressão de partículas reais

Na seção anterior, demos uma interpretação física ao potencial efetivo $i\Delta V_1$, podendo entendê-lo como o grande potencial termodinâmico por unidade volume $\phi(T)$. Pela relação de euler da termodinâmica dada na Ref. [20], podemos escrever que

$$\phi(T) = -p, \quad (3.47)$$

sendo p a pressão por unidade de volume. Assim, podemos obter a lei de Stefan-Boltzmann para a pressão de partículas reais dada pela Ref. [21].

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{p}{T^4} = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i\Delta V_1}{T^4} = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^4} \left(-\frac{\pi^2 T^4}{2.45} + \frac{\lambda^2 \rho^4}{2.12.4} - \frac{\lambda^{3/2} \rho^3 T}{6.2^{5/2} \pi} \right) = \frac{\pi^2}{90}, \quad (3.48)$$

na qual utilizamos a Eq. (3.24) para teoria $\lambda\phi^4$ não massiva na aproximação de altas temperaturas. O resultado da Eq. (3.48) é um caso particular da conhecida Lei de Stefan-Boltzmann $W = \sigma T^4$, sendo W a potência da radiação por unidade de área e T a temperatura da superfície de irradiação, aplicada ao caso de partículas bosônicas que se movem a velocidade da luz c . Desse modo, p pode ser interpretado como uma “pressão de radiação”, análoga ao eletromagnetismo de Maxwell [21].

Considerações finais

Neste trabalho, estudamos a formulação de integrais de trajetória tanto na perspectiva de Feynman quanto na de Schwinger. No capítulo 1, após apresentar os formalismos, começamos as aplicações com o caso do oscilador harmônico quântico (OHQ), obtendo as funções de Green avançada, retardada, de Feynman e de Dyson. Observamos que a obtenção de cada uma dessas funções requer o uso de uma prescrição para contornar o pólo do propagador quando utilizamos o teorema do resíduo. Além disso, acoplamos um termo de interação quártica a lagrangiana do OHQ e calculamos via teoria de perturbação, em mecânica quântica, a correção quântica da energia em primeira ordem na constante de acoplamento, e por fim, mostramos como chegar a correção quântica da energia no estado de vácuo por meio do formalismo funcional. Além disso, tratamos de uma versão, a nível de mecânica quântica, de um modelo não local inspirado na redução dimensional da Eletrodinâmica Quântica de Proca descrita na Ref. [10]. Mostramos, via formalismo de Feynman, que as funções de Green desse modelo são dadas por integrações sobre as funções de Green do OHQ. Com base nisso, calculamos a correção quântica a energia de vácuo quando esse modelo está acoplado a uma interação quártica. A parte referente ao formalismo CTP desse capítulo foi publicada na Ref. [6].

No capítulo 2, focamos na aplicação do método funcional em teoria quântica de campos. Discutimos o modelo de Klein-Gordon, fazendo o cálculo do propagador desta teoria. Posteriormente, tratamos do caso com interação dentro do formalismo de Feynman. Além disso, calculamos o potencial efetivo para uma teoria escalar com um termo de interação arbitrário em $(3+1)D$. Esse potencial efetivo depende de uma escala de energia arbitrária. Por isso, construímos uma equação do grupo de renormalização para esse objeto. Visando um caso específico, aplicamos esses resultados a teoria $\lambda\phi^4$ e obtivemos a renormalização da massa e da constante de acoplamento. Encerramos o segundo capítulo mostrando mais

duas formas independentes de obter as funções beta, uma via condições de renormalização sobre o potencial efetivo e a outra via equação do grupo de renormalização para a função de vértice de dois pontos.

No capítulo 3, nós investigamos os efeitos de um banho térmico no potencial efetivo via formalismo das frequências de Matsubara. Mostramos que o potencial efetivo a temperatura zero (a energia de vácuo) pode ser interpretada como uma soma sobre todos os modos normais de vibrações de um OHQ com frequência ω_k . Mostramos que o potencial efetivo a temperatura finita para a teoria $\lambda\phi^4$, na aproximação de altas temperaturas, apresenta um termo cúbico que quebra a simetria discreta Z_2 do campo escalar, indicando que o banho térmico elimina a dupla degenerescência do vácuo. Por fim, realizamos a conexão do potencial efetivo com a termodinâmica, provando que este é o grande potencial termodinâmico dividido pelo volume do sistema. Esse resultado nos permitiu calcular a pressão de partículas reais bosônicas que possui analogia com a Lei de Stefan-Boltzmann do eletromagnetismo.

Com base nos principais resultados desses capítulos, concluímos que graças ao formalismo funcional conseguimos calcular, de maneira razoavelmente simples, o potencial efetivo tanto a temperatura zero quanto a temperatura finita. Esse método pode ser facilmente generalizado para obter o potencial efetivo em teorias com campos fermiônicos ou campos de gauge que sejam quadráticas nesses campos. Esse objeto é relevante para descrição de transições de fase e para obtenção de quantidades renormalizadas.

Ressaltamos que ainda há muitos estudos a serem feitos acerca dos métodos funcionais apresentados neste trabalho de conclusão de curso, em particular, a obtenção das correções de ordem maior ao potencial efetivo. Como perspectivas de investigações futuras, podemos estudar o formalismo CTP em modelos de teoria quântica de campos, sobretudo os modelos não locais, haja vista a sua importância na descrição das propriedades dos sistemas bidimensionais de matéria condensada. Esperamos aplicar os métodos desenvolvidos nesse TCC para estudar o potencial efetivo em modelos com operadores pseudo-diferenciais e publicar em revistas científicas.

Referências Bibliográficas

- [1] Eduardo C Marino. *Quantum field theory approach to condensed matter physics*. Cambridge University Press, 2017.
- [2] R. P. Feynman. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 20:367–387, Apr 1948.
- [3] Julian Schwinger. Brownian motion of a quantum oscillator. *Journal of Mathematical Physics*, 2(3):407–432, 1961.
- [4] Marcelo Otávio Caminha Gomes. *Teoria Quântica dos Campos Vol. 39*. Edusp, 2002.
- [5] Mariano Quiros. Finite temperature field theory and phase transitions. *Proceedings, Summer school in high-energy physics and cosmology: Trieste, Italy*, 1999:187–259, 1998.
- [6] Leandro Oliveira Nascimento and Alexsandro B Corrêa. Aplicação do formalismo ctp em uma ação com operador pseudo-diferencial. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 42, 2020.
- [7] Lev Davidovich Landau and Evgenii Mikhailovich Lifshitz. *Quantum mechanics: non-relativistic theory*, volume 3. Elsevier, 2013.
- [8] EC Marino. Quantum electrodynamics of particles on a plane and the chern-simons theory. *Nuclear Physics B*, 408(3):551–564, 1993.
- [9] Natália Menezes, Van Sergio Alves, EC Marino, Leonardo Nascimento, Leandro O Nascimento, and C Morais Smith. Spin g-factor due to electronic interactions in graphene. *Physical Review B*, 95(24):245138, 2017.

- [10] Van Sérgio Alves, Tommaso Macrì, Gabriel C. Magalhães, E. C. Marino, and Leandro O. Nascimento. Two-dimensional yukawa interactions from nonlocal proca quantum electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 97:096003, May 2018.
- [11] Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger. *Table of integrals, series, and products*. Elsevier, 2007.
- [12] Adriaan MJ Schakel. *Boulevard of broken symmetries: effective field theories of condensed matter*. World Scientific Publishing Company, 2008.
- [13] Richard David Jordan. Effective field equations for expectation values. *Physical Review D*, 33(2):444, 1986.
- [14] Fred Cooper, Salman Habib, Yuval Kluger, Emil Mottola, Juan Pablo Paz, and Paul R Anderson. Nonequilibrium quantum fields in the large- n expansion. *Physical Review D*, 50(4):2848, 1994.
- [15] Michael S Chanowitz. New physics and the landau pole. *Physical Review D*, 63(7):076002, 2001.
- [16] Luis Fernández, Van Sérgio Alves, Leandro O. Nascimento, Francisco Peña, M. Gomes, and E. C. Marino. Renormalization of the band gap in 2d materials through the competition between electromagnetic and four-fermion interactions in large n expansion. *Phys. Rev. D*, 102:016020, Jul 2020.
- [17] Ashok Das. *Lectures on quantum field theory*. World Scientific, 2020.
- [18] Matthew D Schwartz. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge University Press, 2014.
- [19] Luis Fernández, Reginaldo O. Corrêa, Van Sérgio Alves, Leandro O. Nascimento, and Francisco Peña. Dynamical mass generation in pseudoquantum electrodynamics with gross-neveu interaction at finite temperature. *Phys. Rev. D*, 103:025018, Jan 2021.
- [20] Sílvia RA Salinas. *Introdução a física estatística vol. 09*. Edusp, 1997.
- [21] Masud Mansuripur and Pin Han. Thermodynamics of radiation pressure and photon momentum. In *Optical Trapping and Optical Micromanipulation XIV*, volume 10347, page 103471Y. International Society for Optics and Photonics, 2017.