



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JONAS BARROS LIMA

MÉTODOS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR E APLICAÇÕES

CASTANHAL/PA
2025

JONAS BARROS LIMA

MÉTODOS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal do Pará (UFPA) Campus Universitário de Castanhal como requisito para a obtenção do título de Graduação em Licenciatura em Matemática sob orientação do Prof. Dr. Frayzer Lima de Almeida.

CASTANHAL/PA
2025

JONAS BARROS LIMA

MÉTODOS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Universidade Federal do Pará (UFPA) Campus
Universitário de Castanhal como requisito para
a obtenção do título de Graduação em Licenci-
atura em Matemática sob orientação do
Prof^o.Dr. Frayzer Lima de Almeida

Data de aprovação: ____/____/____
Conceito: _____

Banca Examinadora

Prof. Dr. Frayzer Lima de Almeida
Orientador – FACMAT/CUNCAST/UFPA

Prof. M. Eng. José Geraldo Gonçalves da Silva.
Membro - FACMAT/CUNCAST/UFPA

Profa. Dra. Gerlândia de Castro Silva Thijm
Membro - FACMAT/CUNCAST/UFPA

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que contribuíram de alguma forma para a conclusão desta pesquisa, talvez não saibam de suas contribuições, mas eu sei o quanto foi reconfortante ouvir uma palavra de apoio para a conclusão desta pesquisa.

Agradeço ao Profº. e Orientador Frayzer Lima de Almeida pela contribuição, dedicação e paciência do início ao fim desta pesquisa.

Agradeço também a todo corpo acadêmico FACMAT/CUNCAST/UFPB pelas contribuições na minha formação acadêmica, sempre com dedicação, respeito e paciência.

RESUMO

A Programação Linear é um dos modelos da Programação Matemática que mais evoluiu nas últimas décadas, devido sua grande aplicabilidade na solução de problemas lineares que auxiliam na tomada de decisão. Com interesse de entender os motivos pelos quais essa área se desenvolveu tanto, fizemos uma pesquisa bibliográfica sobre; contexto histórico em que ganhou visibilidade e atenção; suas aplicações na tomada de decisão; conceitos matemáticos do Método gráfico, Método simplex utilizados na solução e otimização de modelos de Programação Linear; o desenvolvimento da Programação Linear dentro da Programação Matemática com seu provento em microcomputadores. Por meio desta conseguimos descobrir o exato período em que a Programação Linear ganhou visibilidade, o motivo que proporcionou seu desenvolvimento e sua relação com Pesquisa Operacional, suas aplicações, os fundamentos matemáticos que são as bases dos algoritmos desenvolvidos para a solução de modelos de Programação Linear; os algoritmos desenvolvidos são de fácil implementação em microcomputadores o que facilita seu avanço e aplicações. Esses motivos têm despertado o interesse de vários pesquisadores pela Programação Linear.

Palavras-chave: Programação Linear. Programação Matemática. Solução de Problemas Lineares. Tomada de decisão. Método gráfico. Algoritmo simplex. Otimização. Programação Linear em Microcomputadores. Pesquisa Operacional.

ABSTRACT

Linear Programming is one of the models of Mathematical Programming that has evolved the most in recent decades, due to its great applicability in solving linear problems that help in decision making. In order to understand the reasons why this area has developed so much, we did bibliographic research on; historical context in which it gained visibility and attention; its applications in decision-making; mathematical concepts of the Graphing Method, Simplex Method used in the solution and optimization of Linear Programming models; the development of Linear Programming within Mathematical Programming with its proceeds in microcomputers. Through this we were able to discover the exact period in which Linear Programming gained visibility, the reason that provided its development and its relationship with Operations Research, its applications, the mathematical foundations that are the bases of the algorithms developed for the solution of Linear Programming models; The algorithms developed are easy to implement on microcomputers, which facilitates their advancement and applications. These reasons have aroused the interest of several researchers in Linear Programming.

Keywords: Linear Programming. Mathematical Programming. Linear Problem Solving. Decision making. Graphic method. Simplex algorithm. Optimization. Linear Programming in Microcomputers. Operations research.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	8
1 NOÇÕES BÁSICAS DE CONJUNTOS CONVEXOS E GRANDEZAS VETORIAIS PARA APLICAÇÕES NA SOLUÇÃO GRÁFICA DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR (PPL)	11
1.1 Conjuntos convexos e grandezas vetoriais	11
1.2 Maximizando um problema de programação linear.....	21
1.3 Minimizando um problema de programação linear de uma região convexa fechada e não limitada.....	25
1.4 Problema de programação linear de uma produção de frascos de vidro para obtenção do lucro máximo, numa região convexa limitada	30
1.5 Problema da velocidade de uma reação química numa região convexa fechada e limitada.....	33
1.6 Problema da produção de parafusos, porcas e parafusos.....	37
2 PROBLEMA LINEAR COM MÉTODO SIMPLEX	41
2.1 Problema de programação linear pelo método simplex analítico	41
2.2 Solução do problema 1.2 pelo método simplex analítico.....	43
2.3 Maximizando lucros de uma área de cultivo	45
2.4 Solução de um problema de programação linear utilizando o quadro do algoritmo simplex no método das duas fases	48
2.5 Uma visão algébrica do algoritmo simplex com aplicação em um problema de programação linear pelo método simplex das 2 fases	61
3 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR UTILIZANDO A FERRAMENTA DO SOLVER DO EXCEL	79
3.1 Ativando o suplemento solver do excel.....	79
3.2 Solução do problema 1.3 com a ferramenta solver do excel.....	81
3.3 Um problema de produção de motos	88
3.4 Encontrando o nível de produção ótima com solver do excel.....	91
3.5 Problema de um custo de transporte em relação a capacidade dos caminhões utilizando a ferramenta solver do excel.....	93
3.6 Problema de pl da produção x lucro de vendas de televisores	96
3.7 Diversificar investimento para rendimento máximo com o solver	98
CONCLUSÃO.....	102
REFERÊNCIAS	104
APÊNDICE A: Teoria sobre a programação linear.....	106
APÊNDICE B: Teoria sobre matrizes e sistemas lineares.....	123

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa se propõe a estudar métodos de aplicações da Programação Linear (PL) e sua relevância para gerenciamento de atividades e de alocação de recursos, isto é, o auxílio proporcionado ao tomador de decisão o protegendo de erros evitáveis no gerenciamento de recursos e atividades. Mas afinal o que é Programação Linear? Para responder a esta pergunta precisamos primeiro saber o que é Pesquisa Operacional (OP) e Programação Matemática (PM).

Pesquisa Operacional é um conjunto de técnicas, estruturados matematicamente e destinados a resolver modelos quantitativos (recursos, atividades) que podem ser estruturados matematicamente. Segundo Goldbarg (2005, p.10) os principais modelos de PO são denominados de Programação Matemática e constituem uma das mais importantes áreas dos modelos quantitativos e é fortemente direcionada ao apoio na tomada de decisão.

Dentre os modelos da Programação Matemática está a Programação Linear que ganhou visibilidade na década de 1940, no período da Segunda Guerra Mundial, com o cientista matemático norte americano George B. Dantzig, sobre isso Munhoz afirma que:

A necessidade de um planejamento científico para a alocação dos recursos fez com que os comandos norte-americano e britânico escalassem diversos cientistas da época para prover uma solução adequada para esse problema. A questão central aqui seria: como alocar eficientemente os recursos escassos?

Da situação descrita anteriormente surgiu o nome pesquisa operacional, ou seja, foram executadas pesquisas relacionadas às operações militares, e os resultados relacionam-se com o desenvolvimento de diversos métodos eficientes de alocação, o que aliás contribuiu de modo significativo na vitória da Batalha do Atlântico Norte com o uso do radar, combinado às estratégias de administração de operações antissubmarinos.

Nesse contexto, surgiu também o método simplex, que é um algoritmo de otimização que abordaremos futuramente. O simplex foi desenvolvido por George B. Dantzig na década de 1940, enquanto ele trabalhava no Pentágono planejando e programando atividades militares, e foi um dos marcos da PO, sendo Dantzig considerado o pai da programação linear (Munhoz, et al., 2018, p. 11).

Segundo Boldrini, et al. (1980, p. 374) A pouca utilização da Programação Linear antes de 1947 era devida à grande dificuldade computacional de se resolver problemas lineares, pelo fato de existirem um grande número de sistemas lineares a serem formados e resolvidos.

O método simplex implementado por George B. Dantzig teve um papel fundamental para o desenvolvimento da Programação Linear, depois da sua concepção houve um crescimento espantoso no desenvolvimento dela, com centenas de livros e artigos sendo publicado. Boldrini, et al. (1980, p. 374)

Mesmo com as dificuldades encontradas na solução de problemas lineares, estes modelos são considerados os mais simples e servem de alicerces para compreender os modelos mais complexos como afirma Goldbarg.

Dentre os diversos modelos já citados, concentraremos nossa atenção inicialmente no modelo de Programação Linear (PL). Esse modelo é básico para a compreensão de todos os outros modelos da Programação Matemática. Os conceitos nele firmados serão estendidos aos demais, concedendo suporte a estudos mais avançados. Uma outra vantagem desse modelo está na extraordinária eficiência dos algoritmos de solução hoje existentes, disponibilizando alta capacidade de cálculo e podendo ser facilmente implementado até mesmo através de planilhas e com o auxílio de microcomputadores pessoais. (Goldbarg, 2005, p. 24, 25).

Em vários momentos de nossas vidas temos que tomar decisões, sejam elas decisões para gerenciamentos individuais ou coletivas, e provavelmente algumas dessas decisões estão relacionadas com a alocação de recursos gerando dúvida em relação à quais decisões seriam as melhores a serem tomadas. A Pesquisa Operacional nos auxilia nessas escolhas, isto é, podemos elaborar, matematicamente, uma modelagem de PL que satisfaça todas as restrições do nosso problema e na PO faremos a busca por um método que resolva a estrutura matemática do problema e assim otimizando-o. Sobre isso observemos o que afirma Munhoz.

A importância das decisões tomadas é evidente em diversas aplicações, desde a sua vida pessoal, com escolhas rotineiras em diferentes níveis de complexidade, até a gestão de empresas e nações, envolvendo sempre um decisor e diversas opções de caminhos a serem seguidos

Se observarmos ao nosso redor, é sabido sobre a alta competitividade e reinante dinamismo no mercado, não somente no âmbito local, mas também globalmente, requerendo, a todo o instante, esforços das diversas organizações para se destacarem em relação à concorrência, seja na melhoria do seu produto/serviço, redução de preço, minimização de processos, entre outros. Nesse sentido, um dos meios de se obter vantagem competitiva se faz por um processo de tomada de decisão rápido, isto é, é a rapidez nas decisões empresariais com baixíssimas margens de erros, de maneira plenamente eficaz e efetiva, torna-se um mecanismo de diferenciação no mercado. Neste cenário, a PO proporciona ao decisor melhor conhecimento do real problema em análise. (Munhoz; Akkari, 2018, p. 13, 15).

Nesta pesquisa iremos apresentar fundamentos matemáticos que são base para os métodos de aplicações na solução de modelos de problemas lineares, e que possam servir para compreender e desenvolver novos algoritmos para solução de modelos matemáticos mais complexos.

1 NOÇÕES BÁSICAS DE CONJUNTOS CONVEXOS E GRANDEZAS VETORIAIS PARA APLICAÇÕES NA SOLUÇÃO GRÁFICA DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR (PPL)

O método de solução gráfica consiste em encontrar graficamente a solução ótima de um problema de programação linear (PPL¹), com este método é possível resolver inúmeros problemas de programação linear, mas que envolva no máximo três variáveis. Neste capítulo abordaremos este método, da seguinte forma: Seção 1, serão apresentados os conceitos para soluções pelo método gráfico (geométrico); as Seções de 2 – 6, resolveremos 5 problemas de programação linear com solução, dos problemas de programação linear proposto, pelo método gráfico.

1.1 Conjuntos convexos e grandezas vetoriais

É possível otimizar (maximizar ou minimizar) um PPL no plano (espaço bidimensional $\mathbb{R}^2$) e (tridimensional $\mathbb{R}^3$), utilizando o método gráfico, no entanto, isso não significa que não teremos necessidade do auxílio algébrico, pelo contrário, a álgebra faz-se necessário. Veremos conceitos básicos que sustentam a solução pelo método gráfico.

Definição 1.1.1²: Hiperplano $H = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ é uma variedade afim de dimensão $n - 1$ que divide o $\mathbb{R}^n$ em dois semiespaços fechados: Boldrini, et al. (1980, p. 353 – 355).

$$H^+ = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \dots + a_nx_n \geq b \text{ e}$$

$$H^- = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \dots + a_nx_n \leq b$$

Exemplo 1.1.1: Se considerarmos o hiperplano em $\mathbb{R}^3$ descrito por

$$2x + 3y + 3z - 2 = 0$$

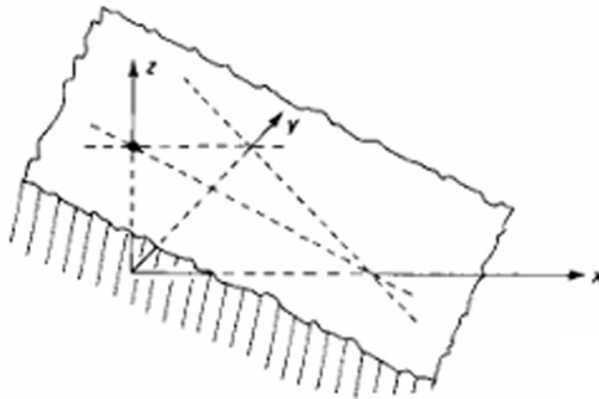
Teremos o espaço dividido em dois semiespaços que são os pontos (x, y, z) que satisfazem $2x + 3y + 3z - 2 \geq 0$ ou $2x + 3y + 3z - 2 \leq 0$, respectivamente. Na Figura 1.1.1

¹ A sigla PPL é abreviação de “Problema de Programação Linear”, muitas vezes encontramos simplesmente em alguns textos a sigla (LP) refere-se também a um problema de programação linear.

² Atente-se que, a intersecção dos conjuntos H^+ e H^- é o hiperplano H . Para o espaço em duas dimensões teremos uma reta, já para o espaço em três

dimensões teremos um plano.

Figura 1.1.1 – Espaço dividido em dois semiespaços.

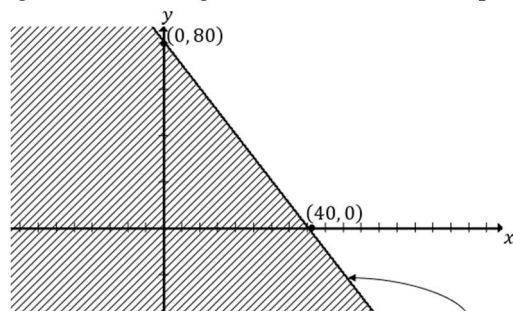


(BOLDRINI, et al., 1980).

a região hachurada representa o semiespaço $2x + 3y + 3z - 2 \leq 0$.

Exemplo 1.1.2: Se considerarmos agora, o hiperplano $0,4x + 0,2y = 16$ no $\mathbb{R}^2$ (que é uma reta no plano), qual é o semiespaço descrito por $0,4x + 0,2y \leq 16$? (Note que como aqui o espaço vetorial é o $\mathbb{R}^2$, o semiespaço será dado geometricamente por um semiplano). Para resolvermos este problema, uma vez traçado o hiperplano (no caso a reta) $0,4x + 0,2y = 16$, escolhemos um ponto do $\mathbb{R}^2$, por exemplo a origem $(0, 0)$, e verificaremos se ele satisfaz ou não a desigualdade. Neste caso, para $x = 0$ e $y = 0 \Rightarrow 0,4x + 0,2y = 0,4 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0 = 0 \leq 16$, o ponto $(0, 0)$ está no semiespaço procurado, isto é, o ponto $(0, 0)$ está contido no semiespaço $0,4x + 0,2y \leq 16$. Veja na Figura 1.1.2.

Figura 1.1.2 – A região hachurada é o semiespaço descrito por $0,4x + 0,2y \leq 16$.



O Hiperplano é a reta $0,4x_1 + 0,2x_2 = 16$

Fonte: Autoria própria (2025)

Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word

Usa-se, ainda, para distinguir entre semiespaço fechado (o que contém o hiperplano) e semiespaço aberto (o que não contém o hiperplano). Boldrini, et al. (1980, p.354). No Exemplo

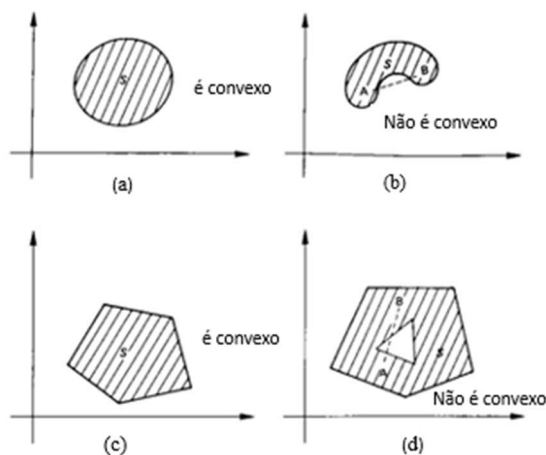
1.1.2, o semiespaço aberto, descrito por $0,4x + 0,2y > 16$, será o semiplano não hachurado, excluindo-se a reta dada por $0,4x + 0,2y = 16$.

Quando precisamos resolver um PPL, graficamente, um dos passos consiste em determinar a região que se encontra o nosso conjunto de soluções e, ela é a intersecção de vários semiespaços estes, por sua vez, são as restrições nas quais o PPL está sujeito. Vale ressaltar que a intersecção dos conjuntos de semiespaços precisa ser um conjunto convexo.

Definição 1.1.2: Um subconjunto S do $\mathbb{R}^n$ é chamado de convexo se para quaisquer dois pontos A e B de S o segmento $\overline{AB}$ está inteiramente contido em S . Boldrini, et al. (1980, p. 356, 357).

Exemplo 1.2.3: Conjuntos convexos e não convexos. Veja na Figura 1.1.3 quatro conjuntos, dos quais, dois são conjuntos convexos e dois são conjuntos não convexos.

Figura 1.1.3 – Conjuntos convexos e conjuntos não convexos.



Fonte: (Boldrini, et al., 1980).

Teorema 1.1.1: Um semiespaço fechado é convexo. Boldrini, et al. (1980, p. 358).

Teorema 1.1.2: A intersecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo. Boldrini, et al. (1980, p. 358).

Definição 1.1.3: Uma região poliedral convexa fechada (região factível) do $\mathbb{R}^n$ é uma intersecção de uma quantidade finita de semiespaços fechados do $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.4: Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado se existem constantes $k_i, i = 1, \dots, n$ tais que, se $x_1, \dots, x_n \in A$ então $x_i \leq k_i, i = 1, \dots, n$.

Definição 1.1.5: Dada uma região poliedral convexa fechada do $\mathbb{R}^n$ (determinada por um sistema de inequações lineares), os vértices dessa região são os pontos da região que

satisfazem um dos possíveis sistemas de n equações lineares independentes³, obtidas substituindo-se as desigualdades por igualdades.

Observação: Depois de resolver um sistema, a fim de verificar se o ponto está na região, testamos para ver se satisfaz todas as desigualdades.

Caracterização dos vértices 1.1.6: Os vértices que aqui foram definidos “algebricamente” são pontos extremos da região poliedral convexa $\mathbf{R}$. Com isto queremos dizer que eles são os pontos da região que não estão contidos no “interior” de nenhum segmento contido na região $\mathbf{R}$.

Teorema 1.1.3 Um ponto P é vértice de $\mathbf{R}$ se, e somente se, P está num segmento AB contido em $\mathbf{R}$ então $P = A$ ou $P = B$. (Boldrini, et al., 1980).

Da definição 1.1.1 podemos ver que esses semiespaços são fechados, o Teorema 1.1.1 garante que esses tipos de semiespaços são convexos e o Teorema 1.1.2 garante que intersecção desses conjuntos convexos é um conjunto convexo. Note que da maneira como foi dito na Definição 1.1.3, uma região poliedral convexa fechada é sempre obtida por um sistema de desigualdades lineares (uma desigualdade para cada semiespaço). Veja o Exemplo 1.2.4.

Exemplo 1.2.4: Considere o conjunto de semiespaços (1.1.1) no plano $x \times y$.

$$\begin{cases} y \leq 2 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Queremos determinar a intersecção desse conjunto de semiespaços, região $\mathbf{R}$, e faremos isso nos dois passos abaixo:

1º Passo) formar todos os possíveis sistemas de n equações lineares independentes (da Definição 1.1.5), resolvê-los e verificar se satisfaz todas as igualdades. Os possíveis sistemas são:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0, 0), \quad (1.1.2)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(0, 2), \quad (1.1.3)$$

³ Veja mais sobre sistemas lineares independentes no Apêndice B e observe a primeira parte da demonstração do Teorema B.2.2.5, ele é importante para o sistema (1.1.4) Exemplo 1.1.4.

o sistema (1.1.4) não é independente,

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{não possui solução,} \quad (1.1.4)$$

agora vamos testar se os pontos A e B satisfazem todas as desigualdades,

$$\begin{cases} A(0,0) \text{ e } y \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2 \\ A(0,0) \text{ e } x \geq 0 \Rightarrow 0 \geq 0 \Rightarrow \text{Satisfaz todas as desigualdades} \\ A(0,0) \text{ e } y \geq 0 \Rightarrow 0 \geq 0 \end{cases} \quad (1.1.5)$$

$$\begin{cases} B(0,2) \text{ e } y \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2 \\ B(0,2) \text{ e } x \geq 0 \Rightarrow 0 \geq 0 \Rightarrow \text{Satisfaz todas as desigualdades} \\ B(0,2) \text{ e } y \geq 0 \Rightarrow 2 \geq 0 \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Assim concluímos que os pontos A e B são vértices da região $\mathbf{R}$. Note que $x \geq 0$ pode ser escrito como $x + 0y \geq 0$ e o hiperplano é dado por $x + 0y = 0$ $((0, y), y \in \mathbb{R})$ que é o eixo y .; da mesma forma para $y \geq 0$ pode ser escrito como $0x + y \geq 0$ e o hiperplano é dado por $0x + y = 0$ $((x, 0), x \in \mathbb{R})$ que é x ; e finalmente para $y \leq 2$ pode ser escrito como $0x + y \leq 2$ e o hiperplano é dado por $0x + y = 2$ $((x, 2), x \in \mathbb{R})$ que é a reta horizontal paralela ao eixo x .

2º Passo) verificar se a região convexa $\mathbf{R}$ é limitada ou não limitada (Definição 1.1.4).

Se dado um ponto $P(x_1, x_2)$, no interior da região $\mathbf{R}$, $0 \leq x_2 \leq 2 = k_2$ e $0 \leq x_1 \forall x_1 \in \mathbb{R}^+$ (reais não negativos), ou seja, $\forall k_1$, com $k_1 \in \mathbb{R}$, sempre podemos encontrar $x_1 \geq k_1$, portanto, região $\mathbf{R}$ é não limitada.

(Passo 3) Testar um ponto para saber de qual região $\mathbf{R}$ se trata.

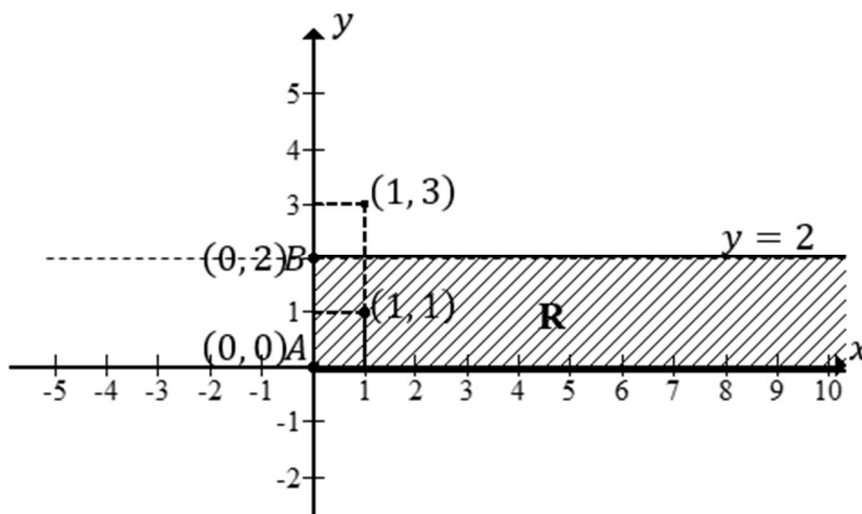
Arbitrariamente, podemos testar os pontos $(1, 1)$ e $(1, 3)$

$$\begin{cases} (1,1) \text{ e } y \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 2 \\ (1,1) \text{ e } x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 0 \Rightarrow \text{Satisfaz todas as desigualdades} \\ (1,1) \text{ e } y \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 0 \end{cases} \quad (1.1.7)$$

$$\begin{cases} (1, 3) \text{ e } y \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 2 \\ (1, 3) \text{ e } x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 0 \Rightarrow \text{Não satisfaz todas as desigualdades} \\ (1, 3) \text{ e } y \geq 0 \Rightarrow 3 \geq 0 \end{cases} \quad (1.1.8)$$

Com os resultados de (1.1.7) podemos dizer que o ponto $(1, 1)$ está contido no semiespaço fechado, já com os resultados encontrados em (1.1.8) conclui-se que, o ponto está contido no semiespaço aberto. Vejamos na figura 1.1.4 a representação gráfica da região **R**.

Figura 1.1.4 – Região convexa poliedral convexa fechada não limitada do $\mathbb{R}^2$.



Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word

Em um PPL é dada uma função (função objetivo (f.o)) sujeito a uma série de restrições, como o conjunto da Definição 1.1.3, que precisamos otimizar-la (maximizar ou minimizar), ou seja, precisamos encontrar o valor máximo ou mínimo da função, caso ela possua. Uma vez encontrado a intersecção do conjunto de semiespaços, os conceitos que se seguirão serão fundamentais para encontrar o valor ótimo da função objetivo na solução pelo método gráfico. Mas não só isso, com o que veremos seremos capazes, por construção algébrica e geométrica, encontrar o ponto que otimiza a função objetivo de um determinado PPL.

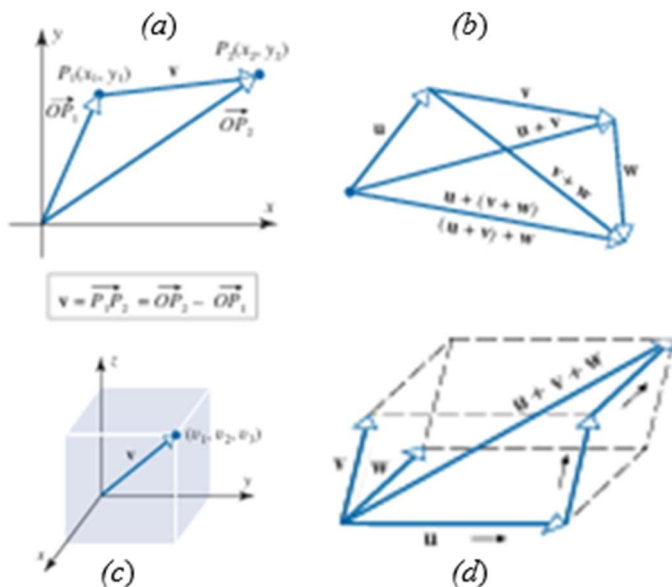
Grandezas vetoriais 1.1.7: Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, chamamos de vetor o segmento orientado com ponto inicial A e ponto final B e representado algebricamente por $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$, em que $A = (x_1, \dots, x_n)$, $B = (y_1, \dots, y_n)$ com $n = 2, 3$ e as sequências $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n)$ são números reais. Um vetor possui direção, sentido e norma (comprimento), além disso, um conjunto de vetores que

possuem as mesmas características de direção, sentido e norma são chamados de vetores equivalentes.

Se n for um inteiro positivo, então podemos representar os vetores da mesma forma, no entanto, uma n -upla (uma sequência de números inteiros que é denotado por $\mathbb{R}^n (x_1, \dots, x_n)$) pode ser visto como ponto ou como vetor no espaço $\mathbb{R}^n$. (Howard, et al., 2012).

A soma e subtração de vários vetores pode ser feito de forma analítica somando ou subtraindo componente a componente. Veja na Figura 1.1.5 algumas representações geométricas dessas operações

Figura 1.1.5 – Representações de operações com vetores envolvendo soma ou subtração.



Fonte: (Howard, et al., 2012,).

Muitas grandezas físicas, como velocidade, força, deslocamento e impulso, precisam de mais do que uma informação para serem totalmente identificados tais grandezas, com essas características, são chamadas de grandezas vetoriais ou simplesmente vetores (Santos, 2012).

Produto de um vetor por um escalar 2.1.8: Dados dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ o vetor $\vec{u}$ é oposto de $\vec{v}$ se tiver a mesma direção, mesma norma, mas sentido contrário de $\vec{v}$ de maneira algébrica $\vec{u} = -\vec{v}$.

a) No $\mathbb{R}^2$ (plano) se $\vec{v} = (a_1, a_2)$, então, $\vec{u} = (-a_1, -a_2)$;

b) No $\mathbb{R}^3$ (espaço tridimensional) se $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$, então, $\vec{u} = (-a_1, -a_2, -a_3)$.

Multiplicar um vetor por escalar: Se $\vec{v}$ for um vetor não nulo do espaço bi ou tridimensional e k um escalar não nulo, então o **múltiplo escalar** de $\vec{v}$ por k , denotado

por $k\vec{v}$, é o vetor de mesma direção do que $\vec{v}$, mas cujo o comprimento é $|k|$ vezes o comprimento de $\vec{v}$ e cujo sentido é o mesmo que o de $\vec{v}$ se k for positivo e o oposto do de $\vec{v}$ se k for negativo. Se $k = 0$ ou $\vec{v} = 0$, então definimos $k\vec{v}$ como sendo 0. (Howard, et al., 2012, p. 121).

Definição 1.1.9: a) Definimos a norma de um vetor $\vec{a}$ por

$$0 \leq \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

se $\vec{a} = (a_1, a_2)$ é vetor no $\mathbb{R}^2$ (plano) e por

$$0 \leq \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

se $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ é vetor no $\mathbb{R}^3$ (espaço tridimensional).

b) O produto escalar ou interno, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, de dois vetores é dado por:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{a} \text{ ou } \vec{b} \text{ é o vetor nulo,} \\ \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que θ é o menor ângulo entre eles. O produto escalar pode ser dado também por:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2,$$

se $\vec{a} = (a_1, a_2)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2)$ são vetores no $\mathbb{R}^2$ (plano) e por

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3,$$

se $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ são vetores no $\mathbb{R}^3$ (espaço tridimensional).

Definição 1.1.10: Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diz-se que dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de V são ortogonais (em relação a este produto interno) se $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$. No caso em que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são ortogonais, escrevemos $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Teorema 1.1.3: Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores não nulos e θ é o menor ângulo entre eles, θ é reto ($\theta = 90^\circ$) se, e somente se, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. (Howard, et al., 2012)

Definição 2.1.11: As curvas de nível de uma função linear f de duas variáveis são aquelas com equações de retas $f(x, y) = k$, onde k é uma constante (na imagem de f).

Definição 1.1.12: Superfícies de nível de uma função linear f de três variáveis são aquelas com equações do plano $f(x, y, z) = k$, onde k é uma constante (na imagem de f).

Definição 1.1.13: a) Dada uma função linear $f(x, y) = a_1x + a_2y + c$, com $c \in \mathbb{R}$, no $\mathbb{R}^2$ (plano) o vetor $\vec{v} = (a_1, a_2)$ é denominado vetor gradiente de $f(x, y)$ com notação ($\text{grad } f$ ou ∇f , que lemos “del f ”). O vetor $\vec{v} = (a_1, a_2)$ é chamado de derivada parcial de f .

$$\nabla f(x, y) = (a_1, a_2)$$

b) Dada uma função linear $f(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z + c$, com $c \in \mathbb{R}$, no $\mathbb{R}^3$ (espaço trí-dimensional) o vetor $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$ é denominado vetor gradiente de $f(x, y, z)$ com notação ($\text{grad } f$ ou ∇f , que lemos “del f ”).

$$\nabla f(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3)$$

Dado um ponto $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, um vetor $\nabla f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ uma reta r no espaço $\mathbb{R}^n$ pode ser calculado pelo produto escalar, sempre que considerarmos um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{PX}$, perpendicular ao gradiente, em que $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ são as coordenadas genéricas do plano. Pelo Teorema 1.1.3 teremos:

$$\begin{aligned} r &= \langle (a_1, a_2, \dots, a_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) - (p_1, p_2, \dots, p_n) \rangle = 0 \\ r &= \langle (a_1, a_2, \dots, a_n), (x_1 - p_1, x_2 - p_2, \dots, x_n - p_n) \rangle = 0 \\ r &= a_1(x_1 - p_1) + a_2(x_2 - p_2) + \dots + a_n(x_n - p_n) = 0 \\ r &= (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) - (a_1p_1 + a_2p_2 + \dots + a_np_n) = 0 \\ r &= a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = (a_1p_1 + a_2p_2 + \dots + a_np_n) \end{aligned}$$

Como o ponto P é conhecido e o ∇f também, a sequência $(a_1p_1 + a_2p_2 + \dots + a_np_n)$ é uma constante k onde $k \in \mathbb{R}$, logo a reta r poderá ser reescrita como:

$$r = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = k \quad (1.1.9)$$

A função objetivo de um problema de programação linear tem um Hiperplano com características da equação (1.1.8), compare com a Definição 1.1.1.

O vetor gradiente possui um papel fundamental para otimização de uma função objetivo f do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, ele é quem dar a direção e o sentido que devemos percorrer na região determinada pela intersecção dos semiespaços do conjunto de inequações (conjunto de restrições). Vejamos o que diz Stewart sobre este assunto.

Vamos resumir agora as maneiras pelas quais o vetor gradiente é importante. Primeiro, consideramos uma função f de três variáveis e um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ em seu domínio. Por um lado, sabemos do Teorema 15 que o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ dá a direção de um aumento mais rápido de f . Por outro, sabemos que

$\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é ortogonal à superfície de nível S de f em P . (Consulte a Figura 9.) Essas duas propriedades são compatíveis intuitivamente porque, quando nos afastamos de P em uma superfície de nível S , o valor da função f não se altera. Parece razoável que, se nos movermos em uma direção perpendicular, obteremos o maior aumento.

De maneira semelhante, consideramos uma função f de duas variáveis e um ponto $P(x_0, y_0)$ em seu domínio. Novamente, o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ dá a direção de um aumento mais rápido de f . Da mesma forma, pelas considerações semelhantes à nossa discussão dos planos tangente, pode ser mostrado que $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicular à curva de nível $f(x, y) = k$ que passa por P . Mais uma vez, isso é intuitivamente plausível porque os valores de f continuam constantes à medida que movemos ao longo da curva. (Stewart, 2013).

Teorema 1.1.4: O conjunto de todas as soluções de um modelo de Programação Linear é um conjunto convexo. (Lachtermacher, 2002, p. 53)

Teorema 1.1.5: Seja $H = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b$ definida numa região poliedral convexa limitada A . Então f assume seus valores máximo e mínimo nos vértices de A . (Boldrini, et al., 1980, p. 370)

Com o que construímos sobre vetores, curva de nível e superfícies de nível seremos capazes de fazer uma varredura na região factível em busca de otimizar a função objetivo, já que, temos as ferramentas necessárias para calcular o vetor gradiente de uma função linear f (de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$), e fazer operações para encontrar retas perpendiculares (curva de nível) ao vetor gradiente ou superfícies de nível ortogonais ao vetor gradiente.

“No caso de problema envolvendo três variáveis ainda é possível visualizar geometricamente. Os pontos de máximo ou de mínimo da f.o. serão procurados varrendo-se a região factível por planos perpendiculares ao vetor gradiente [...]. Fica difícil, trabalhar na prática com este procedimento geométrico para quatro ou mais variáveis. Mas esta noção de procurar máximos e mínimos da função objetivo por uma varredura de hiperplanos perpendiculares ao gradiente dois fatos cruciais na programação linear.

- i) A função objetivo assume necessariamente um valor máximo e um valor mínimo quando a região poliedral convexa (factível) for limitada.
- ii) Os vértices desempenham um papel fundamental na procura de máximos e mínimo para a função objetivo. (Boldrini, et al., 1980, p. 367, 368).

1.2 Maximizando um problema de programação linear

Consideremos o seguinte problema de programação linear em que precisamos maximizar a função objetivo $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2$.⁴

$$\text{Max} f(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2$$

Sujeito a:

$$x_1 + 3x_2 \leq 7 \quad (1.2.1)$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 8 \quad (1.2.2)$$

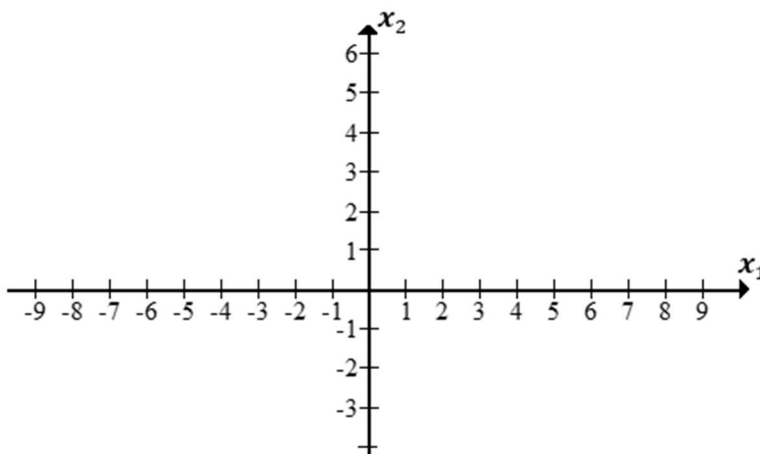
$$x_1 + x_2 \leq 3 \quad (1.2.3)$$

$$x_2 \leq 2 \quad (1.2.4)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (1.2.5)$$

Para resolvê-lo graficamente, primeiramente teremos que estabelecer os dois eixos que irão representar as grandezas x_1 e x_2 . O gráfico da Figura 1.2.1. representa o plano $\mathbb{R}^2$ gerado pelo sistema de coordenadas $x_1 \times x_2$.

Figura 1.2.1. -Gráfico do plano $x_1 \times x_2$



Fonte: Autoria própria. (2025)

Imagem retirada do Sistema Graph⁵ – Microsoft Word

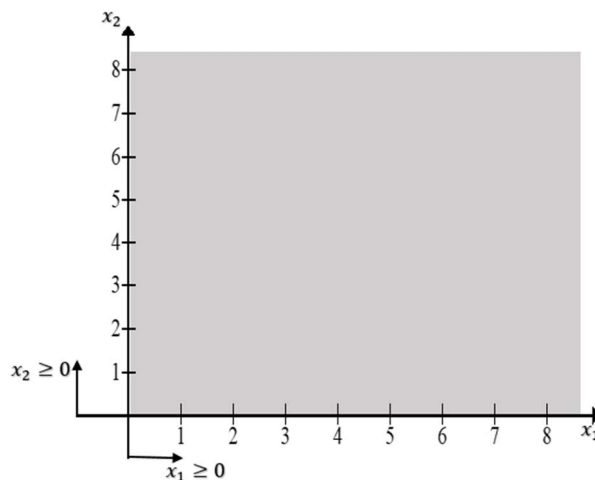
⁴ Este problema de PPL pode ser encontrado no livro do Lachtermacher, (2002, p. 54).

⁵ É um software de código aberto para construção gráfica e que pode ser baixado gratuitamente.

Solução:

O conjunto de soluções viáveis está na intersecção dos semiespaços fechados das restrições (1.2.1) à (1.2.5). As restrições em (1.2.5) impõem a intersecção de semiespaços fechados de $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, no plano $\mathbb{R}^2$. A restrição $x_1 \geq 0$: pode ser escrito como $x_1 + 0x_2 \geq 0$ e seu hiperplano é a reta $x_1 + 0x_2 = 0$ $((0, x_2), x_2 \in \mathbb{R})$, que se trata do eixo vertical x_2 ; para saber a qual semiespaço refere-se podemos, arbitrariamente, escolher um ponto e verificar se ele satisfaz a inequação $x_1 + 0x_2 \geq 0$; testando o ponto $(1, 1)$ conclui-se, então, que satisfaz a desigualdade, isto é, $1 + 0 \cdot 1 = 1 \geq 0$, portanto, este ponto está no referido semiespaço e desta forma, conclui-se que, o semiespaço é o conjunto de todos os pontos do eixo vertical x_2 e a sua direita, para este semiespaço chamaremos de spf_1 . Prosseguindo da mesma forma para $x_2 \geq 0$, nós teremos; $x_2 \geq 0$: que pode ser escrito como $0x_1 + x_2 \geq 0$ e seu hiperplano é a reta $0x_1 + x_2 = 0$ $((x_1, 0), x_1 \in \mathbb{R})$, que se trata do eixo horizontal x_1 ; para saber a qual semiespaço refere-se podemos, arbitrariamente, escolher um ponto e ver se satisfaz a inequação $0x_1 + x_2 \geq 0$; testando o ponto $(1, 1)$ conclui-se, então, que satisfaz a desigualdade, isto é, $0 \cdot 1 + 1 = 1 \geq 0$, portanto, este ponto está no referido semiespaço e desta forma conclui-se que o semiespaço é o conjunto de todos os pontos do eixo horizontal x_1 e os que estão acima dele, para este semiespaço chamaremos de spf_2 . Das restrições $x_1 \geq 0$ (spf_1) e $x_2 \geq 0$ (spf_2), temos a seguinte região poliedral convexa fechada $spf_3 = spf_1 \cap spf_2$ que é o primeiro quadrante do plano cartesiano $x_1 \times x_2$, representado no gráfico da Figura 1.2.2

Figura 1.2.2 – Gráfico da intersecção dos semiespaços fechados: $spf_3 = spf_1 \cap spf_2$.

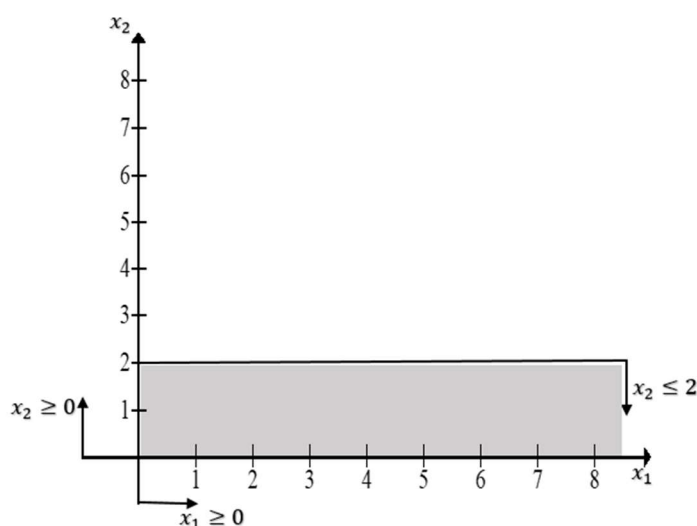


Fonte: Autoria própria (2025)

Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word.

Para a restrição (1.2.4), $x_2 \leq 2$: temos o hiperplano $x_2 = 2$, isto é, $0x_1 + x_2 = 2$ ($(x_1, 2), x_1 \in \mathbb{R}$), que se trata de uma reta paralela ao eixo horizontal x_1 ; temos em segundo o $x_2 < 2$, isto é, $0x_1 + x_2 < 2$, trata-se do semiespaço abaixo do referido hiperplano; finalmente para $x_2 \leq 2$, ou seja, $0x_1 + x_2 \leq 2$, trata-se do semiplano fechado, pois este contém o hiperplano $0x_1 + x_2 = 2$, e para este semiplano fechado o chamaremos de spf_4 ; das restrições $x_2 \leq 2$ (spf_4) e Figura 1.2.2 (spf_3), temos o semiplano fechado $spf_5 = spf_3 \cap spf_4$ que é a região convexa no primeiro quadrante do plano cartesiano $x_1 \times x_2$, representado no gráfico da Figura 1.2.3.

. Figura 1.2.2 – Gráfico da intersecção dos semiespaços fechados: $spf_3 = spf_1 \cap spf_2$.



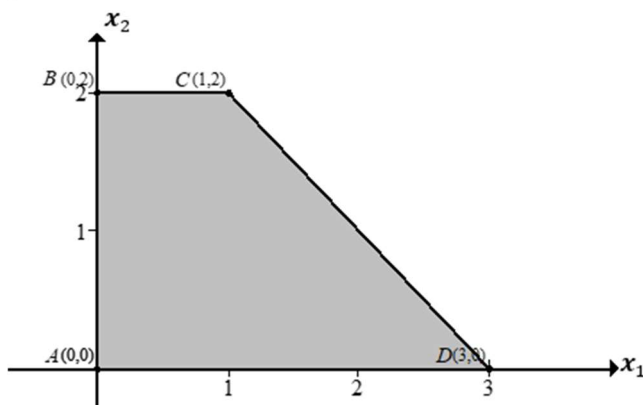
Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word.

As restrições (1.2.1), (1.2.2) e (1.2.3) possuem os respectivos hiperplanos⁶, $x_1 + 3x_2 = 7$, $2x_1 + 2x_2 = 8$ e $x_1 + x_2 = 3$, temos os respectivos semiespaços fechados $x_1 + 3x_2 \leq 7$, $2x_1 + 2x_2 \leq 8$ e $x_1 + x_2 \leq 3$, em que a intersecção de todos estes semiespaços fechados resultam no semiespaço fechado, o qual chamaremos de spf_6 . Finalmente a região formada através das restrições (2.1.1) – (2.1.5) (região factível) é o resultado da intersecção entre os semiespaços fechados de spf_5 (Figura 1.2.3) e spf_6 , ou seja, $spf_7 = spf_5 \cap spf_6$, o qual está representado na Figura 1.2.4, onde consta o conjunto solução viável do referido problema de programação linear. $ABCD$ são os vértices dessa região.

⁶ Para estas restrições da função objetivo, nossos hiperplanos são equações de reta.

Figura 1.2.4 – Conjunto de soluções viáveis do problema linear 1.2, contidos no semiespaço fechado spf_7 (região factível).



Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word.

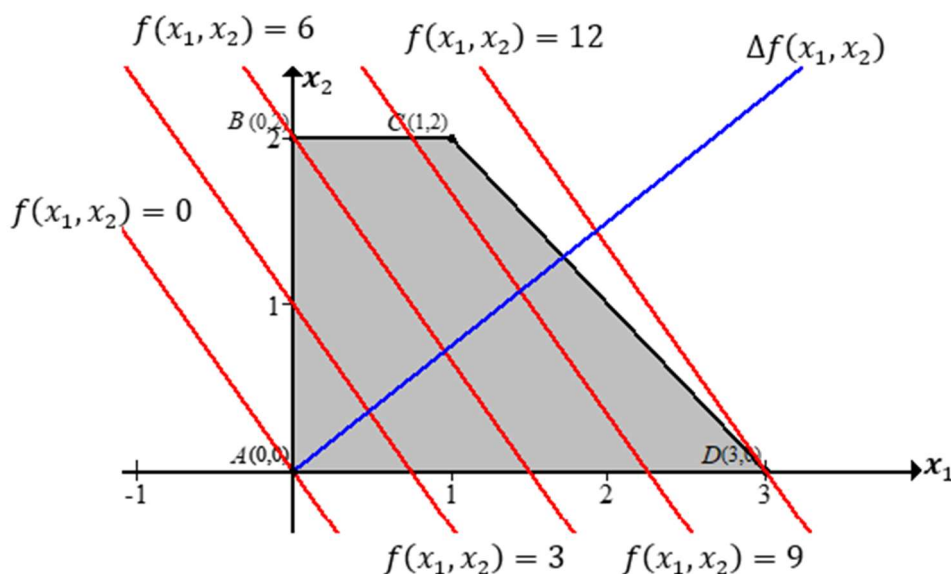
O próximo passo é traçar curvas de nível até que encontre uma curva tangente a região factível, este método também é conhecido como tentativa e erro, ou seja, é o procedimento em que precisamos varrer toda a área da região buscando o ponto ótimo. Veja na Figura 1.2.5 (cinco) curvas de nível com as seguintes imagens para a função objetivo, $f(x_1, x_2) = 0$, $f(x_1, x_2) = 3$, $f(x_1, x_2) = 6$, $f(x_1, x_2) = 9$ e $f(x_1, x_2) = 12$. Observemos que à medida que percorremos com curvas de nível na região factível, afastando-se da origem no sentido do vetor gradiente, de início na origem dos eixos, o ponto D é o limite da região em que uma curva de nível possui um ponto comum a região convexa e limitada (spf_7), portando, valor ótimo da função objetivo é o ponto $D(3, 0)$. Vamos calcular analiticamente o valor da curva de nível que passa pelo ponto $D(3, 0)$.

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2$$

$$f(3, 0) = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 0$$

$$f(3, 0) = 12$$

Figura 1.2.5 – Gráfico da procura da solução viável, por retas perpendiculares ao vetor gradiente.



Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Sistema Graph– Microsoft Word.

1.3 Minimizando um problema de programação linear de uma região convexa fechada e não limitada

A indústria Alumilâminas S/A iniciou suas operações em janeiro de 2001 e já vem conquistando espaço no mercado de laminados brasileiro, tendo contratos fechados de fornecimento para todos os três tipos diferentes de lâminas de alumínio que fabrica: espessuras fina, média ou grossa. Toda a produção da companhia é realizada em duas fábricas, uma localizada em São Paulo e a outra no Rio de Janeiro. Segundo os contratos fechados, a empresa precisa entregar 16 toneladas de lâminas finas, 6 toneladas de lâminas médias e 28 toneladas de lâminas grossas. Devido à qualidade dos produtos da Alumilâminas S/A, há uma demanda extra para cada tipo de lâminas. A fábrica de São Paulo tem um custo de produção diária de R\$100.000,00 para uma capacidade produtiva de 8 toneladas de lâminas finas, 1 tonelada de lâminas médias e 2 toneladas de lâminas grossas por dia. O custo de produção diário da fábrica do Rio de Janeiro é de R\$200.000,00 para uma produção de 2 toneladas de lâminas finas, 1 tonelada de lâminas médias e 7 toneladas de lâminas grossas. Quantos dias cada uma das fábricas deverá operar para atender aos pedidos ao menor custo possível? (Resolva pela análise gráfica - deslocamento da função-objetivo.) (Lachtermacher, 2002).

Modelando o problema:

Os eixos coordenados representarão o número mínimo de dias que cada empresa precisará funcionar para cumprir a entrega, ou seja, os dias de cada empresa serão nossas variáveis de decisão x_1 e x_2 . A quantidade total da produção de cada tipo de lâminas depende do número

de dias de funcionamento dessas empresas, assim como, o custo total também está dependente dos dias de funcionamentos de cada empresa.

x_1 : número mínimo de dias que a empresa de São Paulo precisará funcionar.

x_2 : número mínimo de dias que a empresa do Rio de Janeiro precisará funcionar.

Função objetivo: $100x_1 + 200x_2$: Custo total em milhares de unidades.

Produções de cada tipo de lâminas por cada empresa:

$$8x_1 + 3x_2 \geq 16$$

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

$$3x_1 + 7x_2 \geq 28$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Estamos à procura do menor número de dias que seja possível atender ao contrato e que tenha o menor gasto, ou seja, precisamos minimizar a função objetivo.

$$\text{Minf}(x_1, x_2) = 100x_1 + 200x_2$$

Sujeito a

$$8x_1 + 2x_2 \geq 16 \quad (1.3.1)$$

$$x_1 + x_2 \geq 6 \quad (1.3.2)$$

$$2x_1 + 7x_2 \geq 28 \quad (1.3.3)$$

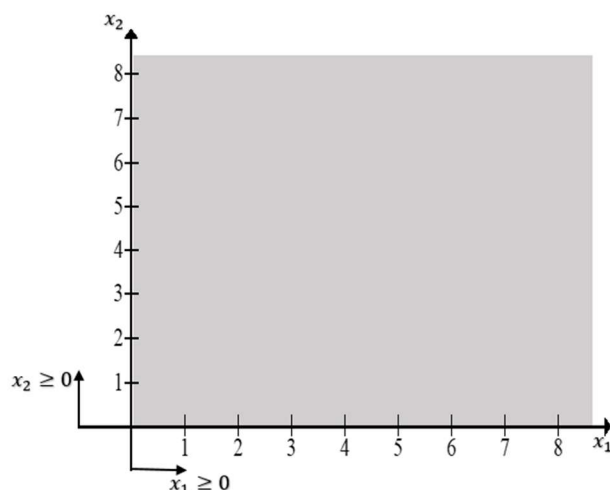
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (1.3.4)$$

Solução:

Para as restrições de (1.3.4) temos; $x_1 \geq 0$ que pode ser reescrito como $x_1 + 0x_2 \geq 0$ que possui o hiperplano $x_1 + 0x_2 = 0$, isto é, $x_1 + 0x_2 = 0 \left((0, x_2), x_2 \in \mathbb{R} \right)$, que se trata do eixo vertical x_2 ; temos em segundo o $x_1 > 0$, isto é, $x_1 + 0x_2 > 0$, trata-se do semiespaço aberto a direita do referido hiperplano; finalmente para $x_1 \geq 0$, ou seja, $x_1 + 0x_2 \geq 0$, trata-se do semiespaço fechado, pois este contém o hiperplano $0x_1 + x_2 = 0$, e para este semiespaço fechado o chamaremos de spf_1 . Já para $x_2 \geq 0$, que pode ser reescrito como $0x_1 + x_2 \geq 0$, possui o hiperplano $0x_1 + x_2 = 0$, isto é, $0x_1 + x_2 = 0 \left((x_1, 0), x_1 \in \mathbb{R} \right)$, que se trata do eixo horizontal x_1 ; temos em segundo o $x_2 > 0$, isto é, $0x_1 + x_2 > 0$ trata-se do semiespaço aberto

acima do referido hiperplano; finalmente para $x_2 \geq 0$, ou seja, $0x_1 + x_2 \geq 0$, trata-se do semi-espço fechado, pois este contém o hiperplano $x_1 + 0x_2 = 0$, e para este semi-espço fechado o chamaremos de spf_2 . Das restrições $x_1 \geq 0$ (spf_1) e $x_2 \geq 0$ (spf_2), temos a seguinte região poliedral convexa fechada $spf_3 = spf_1 \cap spf_2$ que é o primeiro quadrante do plano cartesiano $x_1 \times x_2$, representado no gráfico da Figura 1.3.1.

Figura 1.3.1 – Gráfico da intersecção dos semi-espços fechados: $spf_3 = spf_1 \cap spf_2$.

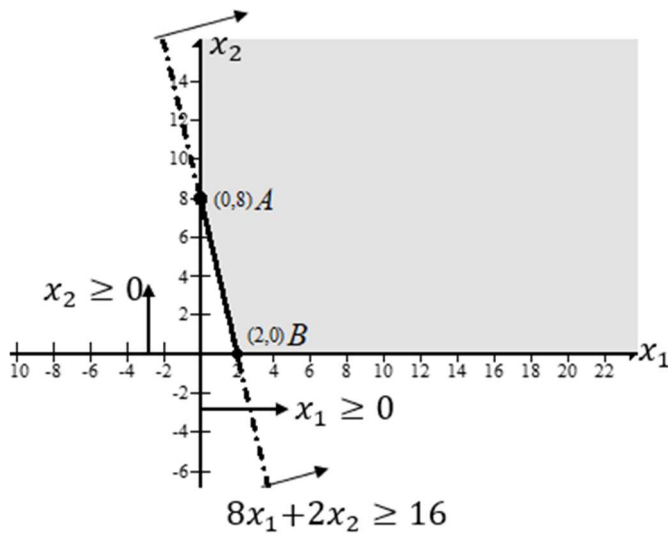


Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word.

Para a restrição (1.3.1), $8x_1 + 2x_2 \geq 16$ temos o hiperplano $8x_1 + 2x_2 = 16$, isto é, $8x_1 + 2x_2 = 16$ ($(x_1, x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}$), que se trata de uma reta passando pelos pontos $A(0, 8)$ e $B(2, 0)$ concorrente aos eixos x_1 e x_2 , ou seja, ela intersecta os dois eixos; temos em segundo o $8x_1 + 2x_2 > 16$, isto é, $8x_1 + 2x_2 > 16$, trata-se do semi-espço acima do referido hiperplano; finalmente para $8x_1 + 2x_2 \geq 16$, trata-se do semi-espço fechado, pois este contém o hiperplano $8x_1 + 2x_2 = 16$, e para este semi-espço fechado o chamaremos de spf_4 ; das restrições $8x_1 + 2x_2 \geq 16$ (spf_4) e Figura 1.3.1 (spf_3), temos o semi-espço fechado $spf_5 = spf_3 \cap spf_4$ que é a região convexa no primeiro quadrante do plano cartesiano $x_1 \times x_2$, representado no gráfico da Figura 1.3.2.

Figura 1.3.2 – Gráfico da intersecção dos semiespaços fechados: $spf_5 = spf_3 \cap spf_4$.

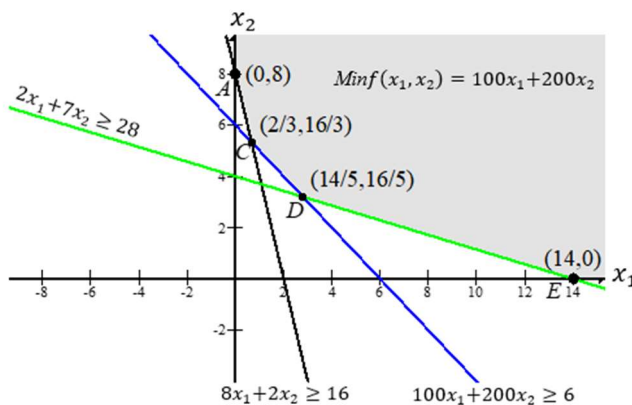


Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word.

As restrições (1.3.2) e (1.3.3) possuem os respectivos hiperplanos, $x_1 + x_2 = 6$, e $2x_1 + 7x_2 = 28$, temos os respectivos semiespaços fechados $x_1 + x_2 \leq 6$ e $2x_1 + 7x_2 \leq 28$, em que a intersecção destes semiespaços fechados resultam no semiespaço fechado, o qual chamaremos de spf_6 . Finalmente a região formada através das restrições (1.2.1) – (2.1.4) (região factível) é o resultado da intersecção entre os semiespaços fechados spf_5 (Figura 1.3.2) e spf_6 , ou seja, $spf_7 = spf_5 \cap spf_6$, o qual está representado na Figura 1.3.3. Os pontos A, C, D e E são vértices dessa da região.

Figura 1.3.3 – Gráfico da intersecção dos semiespaços fechados: $spf_7 = spf_5 \cap spf_6$.



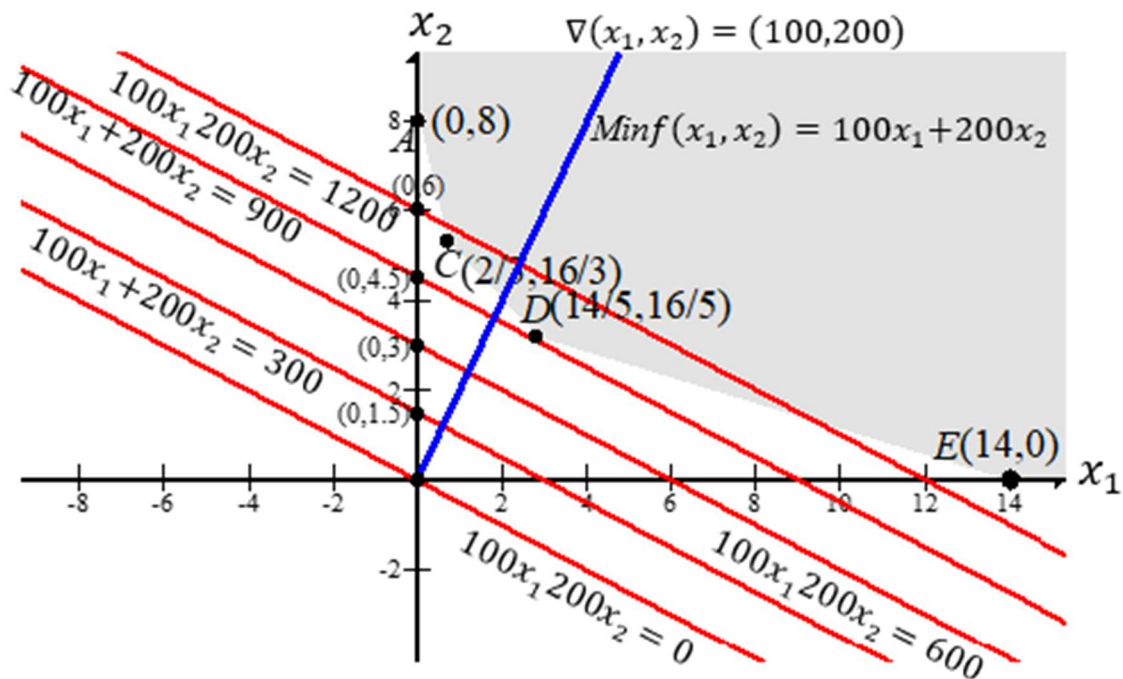
Fonte: Autoria própria (2025)

Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word.

O próximo passo será passar curvas de nível e analisar o gráfico. Veja na Figura 1.3.4 (cinco) curvas de nível (em vermelho) nas alturas $x_2 = 0$, $x_2 = 1.5$, $x_2 = 3$, $x_2 = 4.5$ e $x_2 = 6$

com $x_1 = 0$. Como queremos minimizar $f(x_1, x_2)$ concluímos que precisamos caminhar em direção a região convexa fechada não limitada (spf_7), a partir da origem, até o(os) ponto(s) de tangência(as) da região. Vejamos na Figura 1.3.4 curvas de nível (cinco) com as seguintes imagens, $f(x_1, x_2) = 0, f(x_1, x_2) = 300, f(x_1, x_2) = 600, f(x_1, x_2) = 900$ e $f(x_1, x_2) = 1200$. Elas se aproximam da região spf_7 à medida que se afastam da origem até que a curva $f(x_1, x_2) = 1200$ intersecta a referida região spf_7 . O valor mínimo procurado está entre as curvas de nível $f(x_1, x_2) = 900$ e $f(x_1, x_2) = 1200$. Podemos ver pelo gráfico que o ponto D é o ponto limite para uma curva de nível fora da região, portanto, o ponto D é o ponto que minimiza a região spf_7 .

Figura 1.3.4 – Gráfico com as curvas de nível no semiespaço fechado: $spf_7 = spf_5 \cap spf_6$.



Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word.

Agora vamos calcular analiticamente o valor da curva de nível passando pelo ponto

$$D\left(\frac{14}{5}, \frac{16}{5}\right).$$

$$f\left(\frac{14}{5}, \frac{16}{5}\right) = 100 \cdot \frac{14}{5} + 200 \cdot \frac{16}{5}$$

$$f\left(\frac{14}{5}, \frac{16}{5}\right) = 920$$

Resposta: $x_1 = \frac{14}{5} = 2,8$ dias = 2 dias 19 horas e 12 minutos e $x_2 = \frac{16}{5} = 3,2 = 3$ dias 4 horas e 48 minutos, com um custo de R\$ 920000,00.

1.4 Problema de programação linear de uma produção de frascos de vidro para obtenção do lucro máximo, numa região convexa limitada

Uma máquina produz dois tipos A e B de frascos de vidro, mas não simultaneamente. Ao produzir um frasco do tipo A ela gasta 0,2 horas, e ao produzir um do tipo B, gasta 0,4 horas. Sabendo que a máquina pode trabalhar no máximo 16 horas por dia e que o fabricante tem um lucro de 2 u.c.p. com um frasco do tipo A e 3 u.c.p. com um frasco do tipo B, quantos frascos de cada tipo devem ser produzidos para que o lucro seja máximo?

Modelando o problema:

O lucro total produzido depende de quantas horas cada máquina trabalhou e as horas trabalhadas dependem da quantidade de frascos produzidas por cada máquina, portanto, o nosso problema está dependendo da quantidade de cada frasco e, serão representados por nossas variáveis de decisão.

x_1 : Será a quantidade de frascos do tipo B produzidas pela máquina.

x_2 : Será a quantidade de frasco do tipo A produzidas pela máquina.

Quantidade de horas trabalhadas pela máquina: $0,4x_1 + 0,2x_2 \leq 16$

Lucro total: Função objetivo: $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$

$$\text{Max } f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

Sujeito a:

$$0,4x_1 + 0,2x_2 \leq 16 \quad (1.4.1)$$

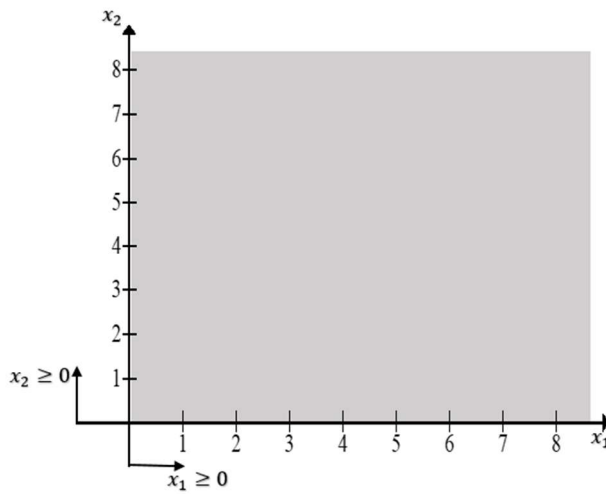
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (1.4.2)$$

Solução:

Para as restrições de (1.4.2) temos; $x_1 \geq 0$ que pode ser reescrito como $x_1 + 0x_2 \geq 0$ que possui o hiperplano $x_1 + 0x_2 = 0$, isto é, $x_1 + 0x_2 = 0 \ ((0, x_2), x_2 \in \mathbb{R})$, que se trata do eixo vertical x_2 ; temos em segundo o $x_1 > 0$, isto é, $x_1 + 0x_2 > 0$, trata-se do semiespaço aberto a direita do referido hiperplano; finalmente para $x_1 \geq 0$, ou seja, $x_1 + 0x_2 \geq 0$, trata-se do semiespaço fechado, pois este contém o hiperplano $0x_1 + x_2 = 0$, e para este semiespaço fechado o chamaremos de spf_1 . Já para $x_2 \geq 0$, que pode ser reescrito como $0x_1 + x_2 \geq 0$, possui o hiperplano $0x_1 + x_2 = 0$, isto é, $0x_1 + x_2 = 0 \ ((x_1, 0), x_1 \in \mathbb{R})$, que se trata do eixo

horizontal x_1 ; temos em segundo o $x_2 > 0$, isto é, $0x_1 + x_2 = 0$ trata-se do semiespaço aberto acima do referido hiperplano; finalmente para $x_2 \geq 0$, ou seja, $0x_1 + x_2 \geq 0$, trata-se do semiespaço fechado, pois este contém o hiperplano $x_1 + 0x_2 = 0$, e para este semiespaço fechado o chamaremos de spf_2 . Das restrições $x_1 \geq 0$ (spf_1) e $x_2 \geq 0$ (spf_2), temos a seguinte região poliedral convexa fechada $spf_3 = spf_1 \cap spf_2$ que é o primeiro quadrante do plano cartesiano $x_1 \times x_2$, representado no gráfico da Figura 1.4.1.

Figura 1.4.1 – Gráfico da intersecção dos semiespaços fechados: $spf_3 = spf_1 \cap spf_2$.

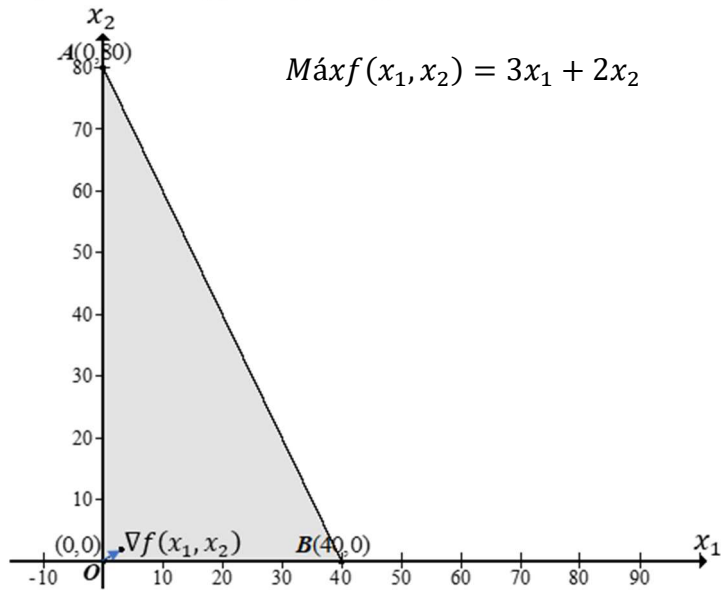


Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word.

Para a restrição (1.4.1), $0,4x_1 + 0,2x_2 \leq 16$: temos o hiperplano $0,4x_1 + 0,2x_2 = 16$, isto é, $0,4x_1 + 0,2x_2 = 16$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ que se trata de uma reta passando pelos pontos $B(0, 80)$ e $C(40, 0)$ concorrente aos eixos x_1 e x_2 , ou seja, ela intersecta os eixos coordenados; temos em segundo $0,4x_1 + 0,2x_2 < 16$, isto é, $0,4x_1 + 0,2x_2 < 16$, trata-se do semiespaço aberto abaixo do referido hiperplano; finalmente para $0,4x_1 + 0,2x_2 \leq 16$, trata-se do semiespaço fechado, pois este contém o hiperplano $0,4x_1 + 0,2x_2 = 16$, e para este semiespaço fechado o chamaremos de spf_4 ; das restrições $0,4x_1 + 0,2x_2 \leq 16$ (spf_4) e Figura 1.4.1 (spf_3), temos a intersecção spf_5 , isto é, o semiespaço fechado $spf_5 = spf_3 \cap spf_4$ que é a região poliedral convexa no primeiro quadrante do plano cartesiano $x_1 \times x_2$ de vértices ABO , representado no gráfico da (Figura 1.4.2), ou seja, $spf_5 = spf_3 \cap spf_4$, o qual está representado na Figura 1.4.2, onde consta o conjunto solução viável do referido problema de programação linear.

Figura 1.4.2 – Conjunto de soluções viáveis do problema linear de 1.4, contidos no semiespaço fechado spf_5 (região factível): $spf_5 = spf_3 \cap spf_4$.

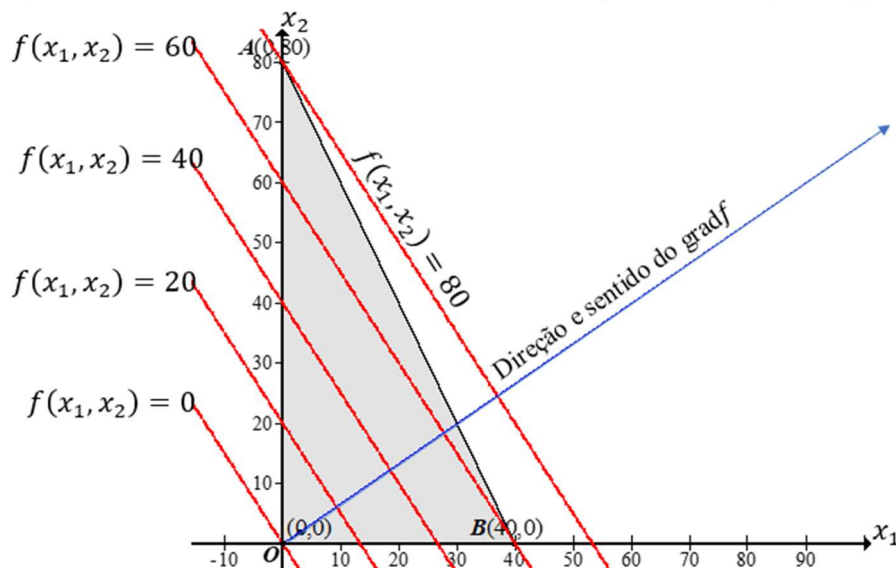


Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word.

O próximo passo será passar curvas de nível e analisar o gráfico. Vejamos na Figura 1.4.3 (cinco) curvas de nível com as seguintes imagens, $f(x_1, x_2) = 0, f(x_1, x_2) = 20, f(x_1, x_2) = 40, f(x_1, x_2) = 60$ e $f(x_1, x_2) = 80$.

Figura 1.4.3 – Gráfico com as curvas de nível no semiespaço fechado: $spf_7 = spf_5 \cap spf_6$.



Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word.

Podemos perceber pelo gráfico que o ponto A é ponto tangente a curva de nível $f(x_1, x_2) = 80$, então, qualquer outro ponto por onde passe uma curva de nível, seguindo no sentido do vetor gradiente, estará fora da região spf_7 , portanto, o ponto A é o ponto ótimo da função objetivo f , isto é, ele é o ponto que maximiza a função objetivo.

Resposta: 80 frascos do tipo A e nenhum frasco do tipo B.

1.5 Problema da velocidade de uma reação química numa região convexa fechada e limitada

Numa indústria química há uma caldeira cuja margem de segurança é tal que a pressão P medida em atmosfera, e a temperatura T , medida em graus Celsius, devem ser reguladas de maneira que $10P + T \leq 400$. Quer-se usar a caldeira para que seja processada uma determinada reação. Para que isso ocorra da forma desejada, a temperatura deve estar entre 80°C e 300°C , e a pressão entre 1 e 20 atmosferas. A que temperatura e pressão, deve trabalhar a caldeira, para que a reação se processe no menor tempo possível, se sabemos que a velocidade da reação é dada por $v = 2T + 30P + 20$. (Boldrini, et al., 1980, p.473).

Modelando o problema:

As restrições do problema de programação linear dado são $10P + T \leq 400$, $80 \leq T \leq 300$, $1 \leq P \leq 20$, e $P, T \geq 0$.

As variáveis de decisão são temperatura T e pressão P , as organizaremos da seguinte forma, T para o eixo das ordenadas e P para as abscissas.

Nossa função objetivo é $v = 2T + 30P + 20$ onde a velocidade precisa ser a maior possível para ter o menor tempo de reação, ou seja, precisamos maximizar a função objetivo.

Solução:

$$\text{Máx } v(P, T) = 2T + 30P + 20$$

Sujeito a:

$$10P + T \leq 400 \quad (1.5.1)$$

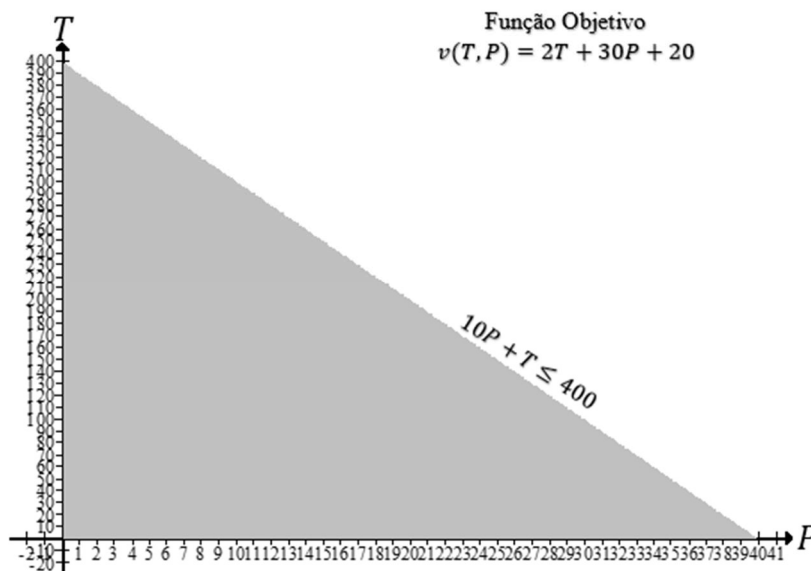
$$80 \leq T \leq 300 \quad (1.5.2)$$

$$1 \leq P \leq 20 \quad (1.5.3)$$

$$P, T \geq 0 \quad (1.5.4)$$

Para a restrição (1.5.1), $10P + T \leq 400$; temos o hiperplano $10P + T = 400$, isto é, $10P + T = 400$ para $P, T \in \mathbb{R}$, que se trata de uma reta passando pelos pontos $F(40, 0)$ e $G(0, 400)$ concorrente aos eixos P e T , ou seja, ela intersecta os eixos cartesianos; temos em segundo $10P + T < 400$, isto é, $10P + T < 400$, trata-se do semiespaço aberto abaixo do referido hiperplano; finalmente para $10P + T \leq 400$, trata-se do semiespaço fechado, pois este contém o hiperplano $10P + T = 400$, e para este semiespaço fechado o chamaremos de spf_1 ; Para as restrições de (1.5.4) sabemos que a intersecção dos semiespaços de $P \geq 0$ e $T \geq 0$, é o semiespaço fechado referente ao primeiro quadrante do plano cartesiano $P \times T$ e o chamaremos de spf_2 . A intersecção desses semiespaços o chamaremos spf_3 , ou seja, $spf_3 = spf_1 \cap spf_2$, e está representado na Figura 1.5.1.

Figura 1.5.1 – Gráfico da intersecção dos semiespaços fechados: $spf_3 = spf_1 \cap spf_2$.



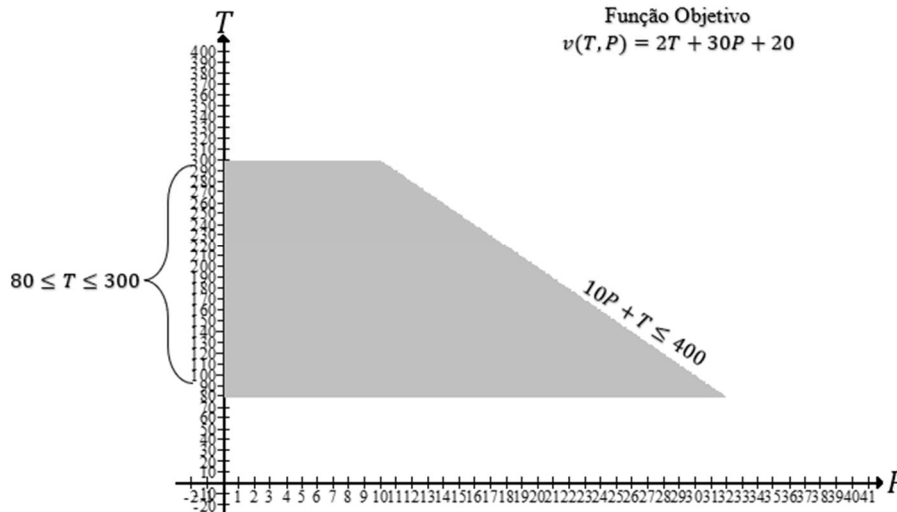
Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word.

Para a restrição $80 \leq T \leq 300$ temos os hiperplanos $T = 80$ e $T = 300$, ou seja, podem ser escritas, respectivamente, como $0P + T = 80$ e $0P + T = 300$, isto é, $0P + T = 80$ $((P, 80), P \in \mathbb{R})$ e $0P + T = 300$ $((P, 300), P \in \mathbb{R})$ que se tratam de duas retas paralelas ao eixo horizontal P , por outro lado temos $T > 80$ e $T < 300$, isto é, $0P + T > 80$ da mesma forma $0P + T < 300$, tratam-se, respectivamente, do semiespaço aberto acima do hiperplano $(0P + T = 80)$ e do semiespaço aberto abaixo do hiperplano $(0P + T = 300)$, ou seja, formam uma região não convexa de intervalo $80 < T < 300$. Com a inclusão dos hiperplanos $T = 80$ e $T = 300$, no semiespaço aberto $80 < T < 300$, teremos o semiespaço fechado pois este

contém os referidos hiperplanos, logo, a região convexa é $80 \leq T \leq 300$ e esta região o chamaremos de spf_4 . Diremos que spf_5 é a região poliedral convexa formada pela intersecção de spf_4 com spf_3 (Figura 1.5.1), isto é, $spf_5 = spf_3 \cap spf_4$.

Figura 1.5.2 – Gráfico da intersecção dos semiespaços fechados: $spf_5 = spf_4 \cap spf_3$.

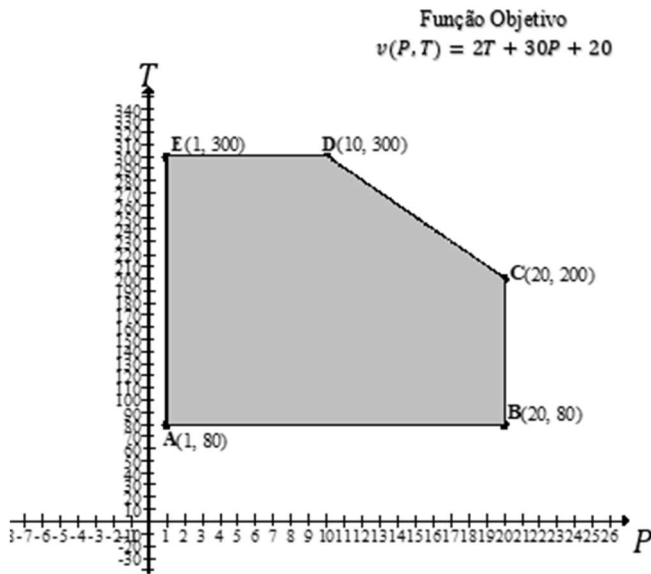


Fonte: (LIMA, 2025).

Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word.

Prosseguindo da mesma forma para a restrição (1.5.3) nós teremos a região poliedral convexa que chamaremos de spf_6 , e a intersecção desta região com a região spf_5 (Figura 1.5.2) a chamaremos de spf_7 que é o conjunto de soluções viáveis do PPL 1.5, ou seja, $spf_7 = spf_5 \cap spf_6$. Veja na Figura 1.5.3 este resultado que mostra a figura plana, de vértices $ABCDE$, formada pelas intersecções dos semiespaços do conjunto das restrições de (1.5.1) – (1.5.4).

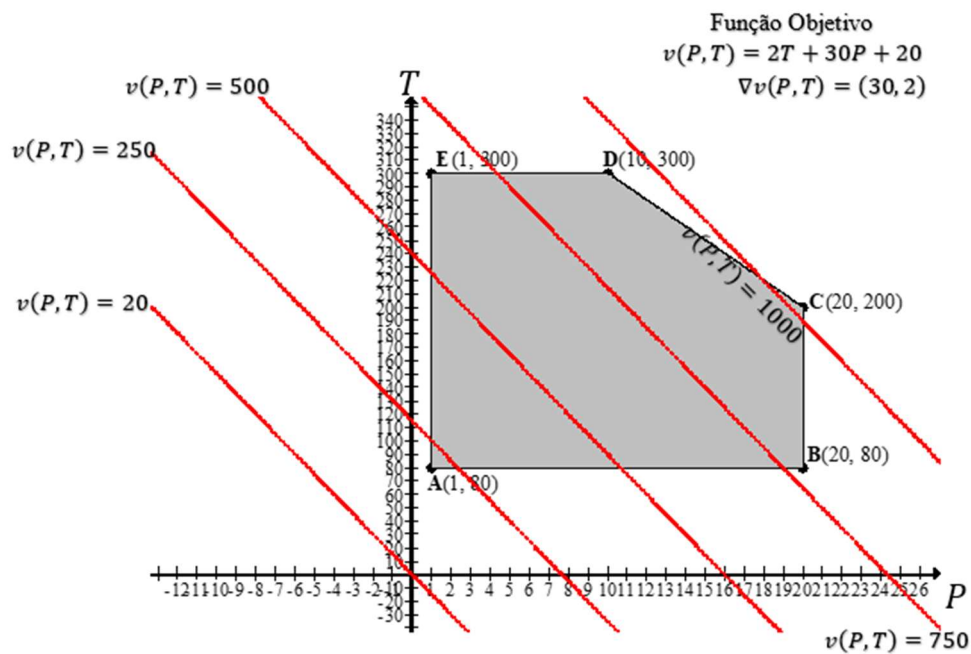
Figura 1.5.3 – Gráfico do conjunto de soluções viáveis do PPL 1.5, contido nos semiespaços fechados: $spf_7 = spf_5 \cap spf_4$.



Fonte: Autoria própria.
Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word.

O próximo passo será passar curvas de nível e analisar o gráfico. Veja na Figura 1.5.4 (cinco) curvas de nível com as seguintes imagens, $v(P, T) = 20$, $v(P, T) = 250$, $v(P, T) = 500$, $v(P, T) = 750$ e $v(P, T) = 1000$.

Figura 1.5.4 – Gráfico com as curvas de nível no semiespaço fechado: $spf_7 = spf_5 \cap spf_6$.



Fonte: Autoria própria.
Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word.

Podemos perceber pelo gráfico que o ponto C é um vértice e, portanto, qualquer outro ponto por onde passe uma curva de nível, seguindo no sentido do vetor gradiente, estará fora da região spf_7 , então, o ponto C é o ponto ótimo da função objetivo $v(P, T)$, isto é, ele é o ponto que maximiza a função objetivo.

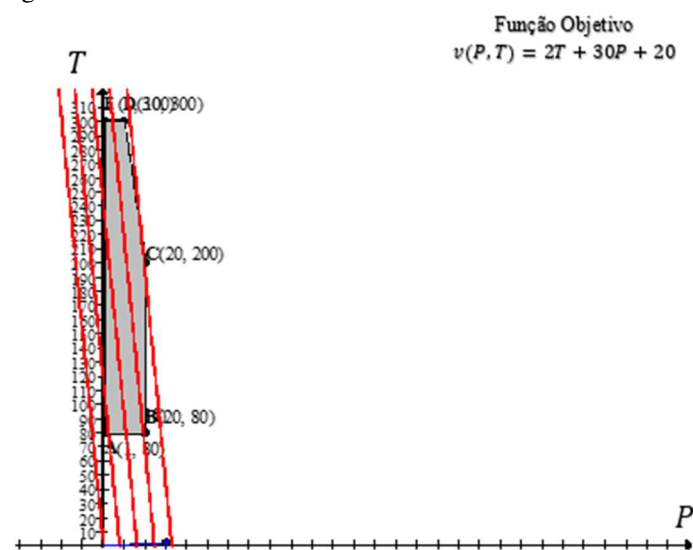
O valor da função no ponto é dado por:

$$v(P, T) = 30P + 2T + 20 \text{ e } C(20, 200), \text{ então}$$

$$v(20, 200) = 30 \cdot 20 + 2 \cdot 200 + 20 = 1020$$

O gráfico 1.5.5 melhor representa a geometria do problema devido os eixos estarem em mesma escala. Observe nela o vetor gradiente próximo ao eixo P , passando a impressão de estar sobre ele.

Figura 1.5.5 – Gráfico com os eixos em mesma escala.



Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word.

1.6 Problema da produção de parafusos, porcas e parafusos

Uma empresa produz porcas, parafusos e pregos, podendo usar dois métodos distintos (mas não simultaneamente) para produzi-los. O primeiro método produz 3.000 porcas, 2.000 parafusos e 2.500 pregos por hora, enquanto o segundo método produz 4.000 parafusos e 4.000 pregos por hora, mas nenhuma porca. A indústria trabalha 18h por dia e tem uma encomenda de 5.000 porcas, 5.000 parafusos e 5.000 pregos. Durante quantas horas ele deve empregar cada método para fazer a entrega o mais rapidamente possível? (Boldrini, et al., 1980).

Modelando o problema:

Para este problema iremos utilizar o eixo das abscissas(horizontal) para representar a quantidade de horas gastas pelo primeiro método, já a para quantidade de horas gasta pelo segundo método será o eixo das ordenadas (vertical)

Como o primeiro método produz porcas, mas o segundo não, então temos:

$$3000x_1 \geq 5000$$

O primeiro método produz 2000 parafusos e o segundo produz 4000, logo:

$$2000x_1 + 4000x_2 \geq 5000$$

O primeiro método produz 2500 pregos e o segundo produz 4000 pregos, logo:

$$2500x_1 + 4000x_2 \geq 5000$$

Nossa função objetivo é $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, então ficaremos com o problema, já modelado, da seguinte forma:

Solução:

$$Minf(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

Sujeito a:

$$3000x_1 \geq 5000 \quad (1.6.1)$$

$$2000x_1 + 4000x_2 \geq 5000 \quad (1.6.2)$$

$$2500x_1 + 4000x_2 \geq 5000 \quad (1.6.3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (1.6.4)$$

Para resolver o PPL vamos encontrar, primeiramente, a região convexa e para isso vamos estabelecer o sistema de eixos coordenados da seguinte maneira, o eixo das ordenadas representará a variável de decisão x_2 e no das abscissas representará x_1 , agora podemos representar, geometricamente, os hiperplanos $s_1: 3000x_1$

$= 5000$, $s_2: 2000x_1 + 4000x_2 = 5000$, $s_3: 2500x_1 + 4000x_2 = 5000$, $s_4: x_1 = 0$ e $s_5: x_2 = 0$. Os hiperplanos s_4 e s_5 são os eixos coordenados, para as representações das retas restantes faremos um estudo analítico. Veja os cálculos nos sistemas de equações de (1.6.5) à (1.6.7) e no gráfico da Figura 1.6.1 as representações desses objetos geométricos.

$$\left\{ \begin{array}{l} 3000x_1 = 5000 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3} \Rightarrow \left(\frac{5}{3}, x_2 \right) \forall x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow A \left(\frac{5}{3}, 0 \right) \\ \left\{ \begin{array}{l} 3000x_1 = 5000 \\ 2000x_1 + 4000x_2 = 5000 \end{array} \right. \Rightarrow B \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{12} \right) \end{array} \right. \quad ((1.6.5))$$

$$\Rightarrow A e B \in s_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2000x_1 + 4000x_2 = 5000 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2} \Rightarrow C\left(\frac{5}{2}, 0\right) \Rightarrow C \text{ e } D \in s_2 \quad ((1.6.6))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2000x_1 + 4000x_2 = 5000 \\ x_1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x_2 = \frac{5}{4} \Rightarrow D\left(0, \frac{5}{4}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2500x_1 + 4000x_2 = 5000 \\ x_1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x_2 = \frac{5}{4} \Rightarrow D\left(0, \frac{5}{4}\right) \Rightarrow D \text{ e } E \in s_3 \quad ((1.6.7))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2500x_1 + 4000x_2 = 5000 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow E(2, 0)$$

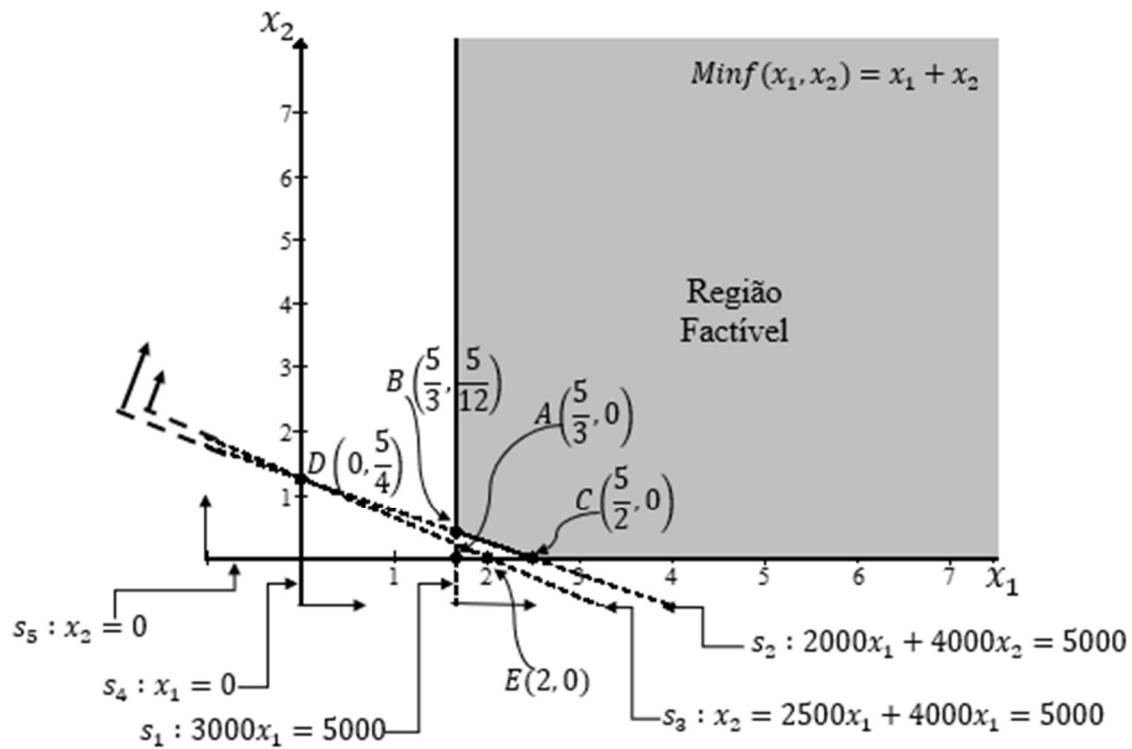


Figura 1.6.1 – Intersecção dos semiespaços e representação dos seus hiperplanos.

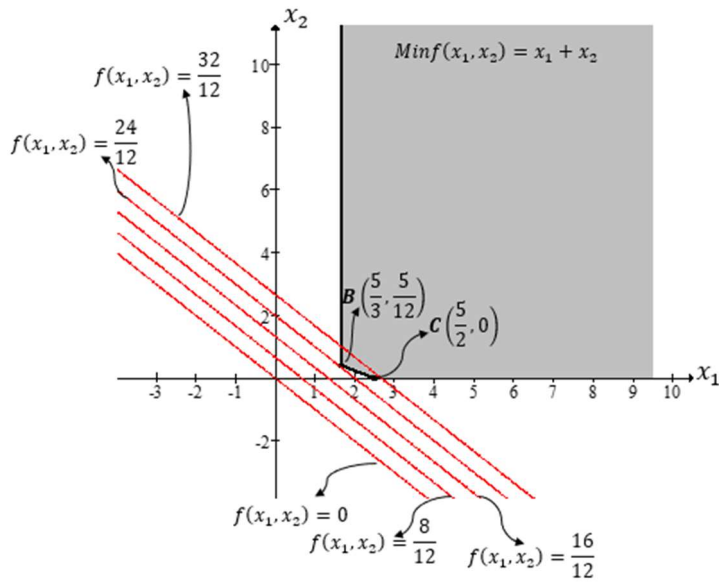
Fonte: Jonas, Lima 2025.

Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word.

O próximo passo será passar curvas de nível e analisar o gráfico. Veja na Figura 1.6.2

(cinco) curvas de nível com $x_2 = 0$, $x_2 = \frac{8}{12}$, $x_2 = \frac{16}{12}$, $x_2 = \frac{24}{12}$ e $x_2 = \frac{32}{12}$, com $x_1 = 0$.

Figura 1.6.2 – Conjunto de solução viável do sistema com as curvas de nível.



Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Sistema Graph – Microsoft Word.

Podemos ver pelo gráfico que o ponto que minimiza nossa função objetivo é o ponto $B\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{12}\right)$, ou seja. $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = \frac{5}{3} + \frac{5}{12} = \frac{25}{12}$.

Portanto teremos $\frac{5}{3}$ de horas para o primeiro método e $\frac{5}{12}$ de horas para o segundo método que são, respectivamente, equivalentes a 100 minutos e 25 minutos.

2 PROBLEMA LINEAR COM MÉTODO SIMPLEX

No capítulo anterior vimos como encontrar soluções de problemas de programação linear pelo método gráfico, mas que resolvem problemas apenas com duas ou três variáveis, sendo que com três variáveis este método não é muito prático, no entanto, ainda sim pode ser resolvido por ele. Neste capítulo mostraremos soluções de problemas de programação linear por uma técnica chamada de método simplex, um chamado de método simplex analítico e o outro de método simplex tabular, usados para resolverem problemas de programação linear com duas, três ou maior que três variáveis. Resolveremos alguns problemas de programação linear por este método.

2.1 Problema de programação linear pelo método simplex analítico

Determine, usando o método Analítico (dicionário), a solução ótima do seguinte PPL: (Lachtermacher, 2002).

$$\text{Max } Z(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad 8x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 8x_4$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 15 \quad (2.1.1)$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 13 \quad (2.1.2)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad (2.1.3)$$

Primeiro passo será transformar as restrições em um conjunto de equações, para isso precisamos adicionar novas variáveis¹ a fim de garantir o equilíbrio entre o lado direito e lado esquerdo das restrições. Para o nosso problema de programação linear padrão, onde será adicionado x_5 em (2.1.1), x_6 em (2.1.2) e serão acrescentadas as duas novas variáveis em (2.1.3) para a condição da não negatividade, veja como ficará o dicionário inicial² em (2.1.4).

¹ Essas variáveis representam a folga entre os lados direito (RHS – Right Hand Side) e lado esquerdo (LHS – Left Hand Side) de um dicionário, por isso são chamadas variáveis de folgas.

² Quando a função objetivo é adicionada como uma equação ao conjunto de equações gerado pelas restrições, o conjunto resultante é chamado de dicionário inicial e ele se renova a cada iteração.

$$\begin{cases} x_5 = 15 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 \\ x_6 = 13 - x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ Z = 8x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 8x_4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} \quad (2.1.4)$$

As variáveis irão se alternar entre básicas e não básicas ³a fim de encontrarmos uma solução cada vez melhor no decorrer do processo, até se chegar à solução ótima do problema de programação linear. Mas para que uma variável se torne não básica é necessário que outra se torne básica e vice-versa, ou seja, uma variável entra na base e outra sai da base. A solução óbvia⁴ do dicionário inicial é $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 0, 15, 13)$. Precisamos melhorar o valor da função objetivo $Z = 8x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 8x_4$, para isso teremos que verificar qual variável, não básica, mais contribui para um aumento na função objetivo. Observe na linha Z de (2.1.4) que para um mesmo valor de incremento as variáveis x_1 e x_4 são as que mais contribuem para o aumento da função objetivo devido terem os maiores coeficientes por este motivo devem entrar na base, mas vamos analisar quem deve sair da base para fazer a melhor escolha entre as duas opções. As linhas que devem ser analisadas são as linhas acima da linha de Z e é importante que a linha possua a variável que vai entrar na base, caso contrário não fará sentido analisa-la. Observemos que para um mesmo valor de incremento para as variáveis não básicas a linha de x_6 chegará primeiro a 0 e como ela bloqueia o aumento da função, por não poder violar a restrição de não negatividade, deverá sair da base. Agora sabemos que x_6 tem que sair da base e, ou x_1 ou x_4 entra na base. Observemos em (2.1.5) como ficará esta linha, para cada uma das opções.

$$\begin{aligned} x_6 = 13 - x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &\Rightarrow x_1 = 13 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 - x_6 \\ x_6 = 13 - x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &\Rightarrow x_4 = \frac{13}{3} - \frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{3} - \frac{2x_3}{3} - \frac{x_6}{3} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Para a nossa escolha entre essas duas, iremos optar pela variável que ficará com o maior valor na solução óbvia do novo dicionário e podemos observar por (2.1.5) que será x_1 a melhor escolha, portanto, x_1 entra na base e x_6 sai da base. Nosso critério de parada do processo será

³ As variáveis que se encontram do lado LHS, de um dicionário, são chamadas de básicas e as do lado RHS de não básicas.

⁴ Sempre que fazemos todas as variáveis não básicas, de um dicionário, iguais a zero encontramos uma solução viável que é chamada de solução óbvia.

quando todos os coeficientes das variáveis na linha de Z ficarem com sinais negativos, depois das devidas substituições.

Vejamos como ficará o novo dicionário em (2.1.6) depois da primeira iteração, com x_1 entrando na base e x_6 saindo da base.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 13 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 - x_6 \\
 \begin{cases} x_1 = 13 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 - x_6 \\ x_5 = 15 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 \end{cases} &\Rightarrow x_5 = 2 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_6 \\
 \begin{cases} x_1 = 13 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 - x_6 \\ Z = 8x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 8x_4 \end{cases} &\Rightarrow Z = 104 - 2x_2 - 10x_3 - 16x_4 - 8x_6 \\
 \begin{cases} x_5 = 2 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_6 \\ Z = 104 - 2x_2 - 10x_3 - 16x_4 - 8x_6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} & \quad (2.1.6)
 \end{aligned}$$

Como os coeficientes das variáveis na linha de Z já ficaram todos com sinais negativos, depois desta iteração, encerraremos aqui o nosso processo, devido qualquer incremento em alguma das variáveis acarretar em um decréscimo no valor da função, portanto, para nossa função objetivo teremos como solução óbvia para este dicionário a seguinte n-upla ordenada, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (13, 0, 0, 0, 2, 0)$, e $Z = 104$. Observe que sempre precisaremos encontrar a solução óbvia do novo dicionário, todavia, as variáveis não básicas serão iguais a zero.

2.2 Solução do problema 1.2 pelo método simplex analítico

Obtenha a solução ótima para o problema abaixo através do método Analítico (confira o resultado com a solução encontrada para o problema 1.2).

$$\begin{aligned}
 &Max \ 4x_1 + 3x_2 \\
 &Sujeito a \\
 &x_1 + 3x_2 \leq 7 \quad (2.2.1)
 \end{aligned}$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 8 \quad (2.2.2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 3 \quad (2.2.3)$$

$$x_2 \leq 2 \quad (2.2.4)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (2.2.5)$$

Introduziremos as variáveis de folga para equilibrar as restrições transformando-as em equações da seguinte forma, adicionando x_3 em (2.2.1), x_4 em (2.2.2), x_5 em (2.2.3) e x_6 em (2.2.4). As novas variáveis precisam ser maiores ou iguais à zero e serão acrescentadas em (2.2.5). Veja como ficará o nosso dicionário, depois das mudanças necessárias para aplicação do método simplex analítico, em (2.2.6).

$$\begin{cases} x_3 = 7 - x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 8 - 2x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 3 - x_1 - x_2 \\ x_6 = 2 - x_2 \\ Z = 4x_1 + 3x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} \quad (2.2.6)$$

A solução óbvia do dicionário inicial é $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 7, 8, 3, 2)$.

Vamos fazer a primeira iteração para melhorar nossa solução e, para isso vamos fazer uma análise e descobrir que variável deve entrar na base e qual deve sair da base, necessariamente nessa ordem.

Observe que x_1 é a variável que contribui para o maior aumento na linha de Z, quando dado o mesmo valor de incremento para as variáveis não básicas, ou seja, é a variável com o maior coeficiente na linha de Z e é ela quem deve entrar na base. Para saber qual variável deve sair da base faremos as análises apenas nas linhas que possuem, a variável que entrará na base, x_1 . Perceba que se o incremento for de 1,5 a variável x_5 será zero, portanto, deverá deixar a base. Veja os cálculos algébricos e como ficará o novo dicionário em (2.2.7) respectivamente.

$$\{x_1 = 3 - x_2 - x_5$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - x_5 \\ x_3 = 7 - x_1 - 3x_2 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 4 - 2x_2 + x_5$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - x_5 \\ x_4 = 8 - 2x_1 - 2x_2 \end{cases} \Rightarrow x_4 = 2 + 2x_5$$

$$\{x_6 = 2 - x_2$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - x_5 \\ Z = 4x_1 + 3x_2 \end{cases} \Rightarrow Z = 12 - x_2 - 4x_5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3 - x_2 - x_5 \\ x_3 = 4 - 2x_2 + x_5 \\ x_4 = 5 + x_5 \\ x_6 = 2 - x_2 \\ Z = 12 - x_2 - 4x_5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.2.7)$$

No novo dicionário, conjunto de equações de (2.2.7), a linha de Z ficou com todas às variáveis com os coeficientes negativos, o que leva a encerrar o algoritmo devido qualquer incremento nas variáveis não básicas, do novo dicionário, levar a um decréscimo na função objetivo. A solução óbvia desse sistema contém a solução ótima do problema de programação linear proposto e, são eles respectivamente.

Solução óbvia do novo dicionário é $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (3, 0, 4, 2, 0, 2)$

Solução ótima do nosso problema de programação linear é $(x_1, x_2) = (3, 0)$

Podemos concluir que 12 é o valor ótimo da função objetivo e o par ordenado que a maximiza é o par ordenado $(3, 0)$. Veja que o resultado é compatível com o método de resolução gráfica. Ou seja, apesar de usarmos métodos diferentes de solução para um problema linear, mas a sua resposta será a mesma.

2.3 Maximizando lucros de uma área de cultivo

Um agricultor tem 200 unidades de área de terra, onde planeja cultivar trigo, arroz e milho. A produção esperada é de 1.800 kg por unidade de área plantada de trigo, 2.100 kg por unidade de área plantada de arroz e 2.900 kg por unidade plantada de milho. Ele tem condições de armazenar no máximo 700.000 kg de qualquer dos produtos. Sabendo que o trigo dá um lucro de \$1,20 por kg, o arroz \$0,60 por kg e o milho \$0,28 por kg, usando o método Analítico (dicionário) determine quantas unidades de área de cada produto ele deve plantar para maximizar o lucro. (Lachtermacher, 2002).

Modelando o problema.

Colocaremos os dados em uma tabela, para ficar mais fácil a visualização dos dados fornecidos, veja na Tabela 2.3.1

Tabela 2.3.1 – Tabela dos dados da produção e lucro do cultivo.

Tipos de plantio		Quilogramas por área	Área de cultivo	Lucro por quilograma
1	Trigo	$P_1 = 1800$	x_1	$L_1 = 1,20$
2	Arroz	$P_2 = 2100$	x_2	$L_2 = 0,60$
3	Milho	$P_3 = 2900$	x_3	$L_3 = 0,28$

Fonte: Autoria própria (2025).

Sendo x_i , com $i = 1, 2$ e 3 , nossas variáveis de decisão. Vamos determinar as restrições para a área de cultivo, quantidade máxima de quilogramas que poderão ser produzidos e também a função de lucro L .

Para área de cultivo podemos definir como em (2.3.1)

$$\sum_{i=1}^3 x_i \leq 200 \quad (2.3.1)$$

Quilogramas por hora é o peso total do cultivo de um determinado plantio dividido pela área total usado neste plantio. Se P_i são os pesos por quilogramas do plantio i , PT_i são os pesos totais em quilogramas de cada plantio e x_i as áreas totais de cada plantio, então podemos estabelecer da forma apresentada em (2.3.2) o peso total do que foi cultivado, não podendo ultrapassar a capacidade de armazenamento.

$$\frac{PT_i}{x_i} = P_i \Rightarrow PT_i = P_i x_i \Rightarrow PT = \sum_{i=1}^3 P_i x_i \leq 700000 \quad (2.3.2)$$

Vamos encontrar a função objetivo L , como $L_i = \frac{LT_i}{PT_i}$, podemos definir a função objetivo da forma dada em (2.3.3).

$$\begin{cases} PT_i = P_i x_i \\ \frac{LT_i}{PT_i} = L_i \Rightarrow LT_i = L_i PT_i \end{cases} \Rightarrow L = \sum_{i=1}^3 L_i P_i x_i \quad (2.3.3)$$

Precisamos maximizar a função (2.3.3) sujeito as restrições de (2.3.1), (2.3.2) e as de não negatividade das variáveis de decisão. Para isso iremos expandir os somatórios e substituir os dados da Tabela 2.3.1 em cada um deles, assim, ficaremos com o problema de PPL na forma padrão. O conjunto formado pela função objetivo de L sujeito as restrições de (2.3.4), (2.3.5) e (2.3.6) é o problema que precisamos maximizar.

$$\text{Max } L(x_1, x_2, x_3) = 2160x_1 + 1260x_2 + 812x_3$$

Sujeito a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 200 \quad (2.3.4)$$

$$1800x_1 + 2100x_2 + 2900x_3 \leq 700000 \quad (2.3.5)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (2.3.6)$$

Vamos iniciar a solução do problema introduzindo as variáveis de folga x_4 e x_5 , onde teremos como dicionário inicial o conjunto de (2.3.7).

$$\begin{cases} x_4 = 200 - x_1 - x_2 - x_3 \\ x_5 = 700000 - 1800x_1 - 2100x_2 - 2900x_3 \\ L = 2160x_1 + 1260x_2 + 812x_3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \end{cases} \quad (2.3.7)$$

A solução óbvia do dicionário inicial é $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 200, 700000)$, implicando em $L = 0$, agora vamos encontrar um valor melhor o problema. Podemos observar na linha de L que x_1 é a variável que mais contribui para o crescimento de L , dado um mesmo valor de incremento para as variáveis não básicas, já que possui o maior coeficiente desta linha, portanto, ela necessariamente entrará na base. Por outro lado x_4 deve sair, já que, à medida que damos um mesmo valor de incremento esta linha será a primeira a zerar, ou seja, ela é o bloqueio para o crescimento da função. Constate que quando dado um incremento de 70 para as variáveis não básicas, x_4 terá um valor negativo de -10 violando a restrição de não negatividade, o que não ocorre na linha de x_5 para este mesmo valor de incremento.

Concluimos que x_1 tem que entrar na base e x_4 tem que sair da base, vamos agora encontrar o novo dicionário para esta primeira iteração.

$$x_1 = 200 - x_2 - x_3 - x_4$$

Substituindo x_1 na linha de x_5 e na linha de L teremos,

$$\begin{aligned}x_5 &= 340000 - 300x_2 - 1100x_3 + 1800x_4 \\L &= 432000 - 900x_2 - 1348x_3 - 2160x_4\end{aligned}$$

O novo dicionário ficará como em (2.3.8)

$$\begin{cases} x_1 = 200 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_5 = 340000 - 300x_2 - 1100x_3 + 1800x_4 \\ L = 432000 - 900x_2 - 1348x_3 - 2160x_4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Como os coeficientes da linha de L estão todos não positivos, já na primeira iteração, devemos encerrar o processo. E na solução óbvia do novo dicionário é a n-upla ordenada $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (200, 0, 0, 0, 340000)$, então teremos como resposta para o problema 200 unidades de medida de área para o Trigo, nenhuma para Arroz e nenhuma de Milho, com um lucro total de 432000.

2.4 Solução de um problema de programação linear utilizando o quadro do algoritmo simplex no método das duas fases

A Cia. ZigZag possui fabricas em Campinas e Belo Horizonte. Esta Cia. produz e distribui máquinas de costuras a comerciantes de várias cidades. Numa determinada semana, a Cia. possui 30 unidades em Campinas e 40 unidades em BH. Nesta mesma semana, esta Cia. deve atender os pedidos dos comerciantes das seguintes cidades: São Paulo 20 unidades, Rio de Janeiro: 25 unidades e Vitória: 25 unidades.

O problema consiste em distribuir as máquinas aos comerciantes de forma a atender os pedidos a um custo mínimo de transporte. Os custos unitários são: (Boldrini, et al., 1980).

Tabela 2.4.1 – Destino e origem.

Destino \ Origem	SP	RJ	Vitória
Campinas	700	1300	2000
BH	2200	1800	1700

Fonte: (BOLDRINI, et al., 1980, p. 400)

Para a solução vamos modelar o problema da seguinte forma:

Nossas variáveis de decisão serão as quantidades de máquinas que saem da origem para seu destino e, adotaremos x_j para isso, faremos da seguinte maneira. Quantidade que sai de Campinas para São Paulo, Rio de Janeiro e Vitória serão respectivamente x_1 , x_2 e x_3 . As quantidades que saem de BH para São Paulo, Rio de Janeiro e Vitória serão respectivamente, x_4 , x_5 e x_6 . As duas cidades de origem precisam atender as três cidades de destinos. Campinas só pode atender SP, RJ e Vitória em no máximo 30 unidades, logo temos: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$.

Da mesma forma BH, só pode atender as três cidades em no máximo 40 unidades, logo: $x_4 + x_5 + x_6 \leq 40$. No entanto, a empresa precisa atender a demanda e como as duas cidades de origem atendem as mesmas cidades, temos $x_1 + x_4 = 20$, para atenderem São Paulo. No atendimento a RJ, terão que terem juntas $x_2 + x_5 = 25$. Por fim, no atendimento de Vitória teremos, $x_3 + x_6 = 25$.

Para a função objetivo, podemos ver na tabela o preço por unidade na intersecção de linha da origem com coluna destino, de cada cidade. Logo ficaremos com a seguinte função objetivo:

$C = 700x_1 + 1300x_2 + 2000x_3 + 2200x_4 + 1800x_5 + 1700x_6$. Com isso temos que resolver o seguinte PPL:

$$\text{Min } C = 700x_1 + 1300x_2 + 2000x_3 + 2200x_4 + 1800x_5 + 1700x_6$$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 30 \quad (2.4.1)$$

$$x_4 + x_5 + x_6 \leq 40 \quad (2.4.2)$$

$$x_1 + x_4 = 20 \quad (2.4.3)$$

$$x_2 + x_5 = 25 \quad (2.4.4)$$

$$x_3 + x_6 = 25 \quad (2.4.5)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \quad (2.4.6)$$

Introduziremos ⁵novas variáveis em (2.4.1) e (2.4.2), uma para cada equação, que são as variáveis de folga. Nas igualdades (2.4.3), (2.4.4) e (2.4.5) iremos introduzir variáveis de excesso e também variáveis artificiais, isso nos levará a construção de uma base para possível solução do nosso problema. As variáveis (variáveis de folga, de excesso e artificiais) serão, respectivamente, x^{f_1} e x^{f_2} ; x^{e_1}, x^{e_2} e x^{e_3} ; já as artificiais iremos representar por x^{a_1}, x^{a_2} e x^{a_3} . Ficaremos com o PPL da seguinte forma:

$$\text{Min } C = 700x_1 + 1300x_2 + 2000x_3 + 2200x_4 + 1800x_5 + 1700x_6$$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x^{f_1} = 30 \quad (2.4.7)$$

$$x_4 + x_5 + x_6 + x^{f_2} = 40 \quad (2.4.8)$$

$$x_1 + x_4 - x^{e_1} + x^{a_1} = 20 \quad (2.4.9)$$

$$x_2 + x_5 - x^{e_2} + x^{a_2} = 25 \quad (2.4.10)$$

$$x_3 + x_6 - x^{e_3} + x^{a_3} = 25 \quad (2.4.11)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x^{f_1}, x^{f_2}, x^{e_1}, x^{e_2}, x^{e_3}, x^{a_1}, x^{a_2}, x^{a_3} \geq 0 \quad (2.4.12)$$

Como há presença de variáveis de folga e artificiais, teremos primeiro que minimizar a função soma, das variáveis artificiais.

Seja C^a a função soma das variáveis artificiais $C^a = x^{a_1} + x^{a_2} + x^{a_3}$, sujeito as restrições de (2.4.7) à (2.4.12). A matriz de coeficientes dessas restrições é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⁵ Quando não temos a possibilidade de construir uma base factível inicial óbvia, que é a identidade, precisamos recorrer a outros métodos de resolução. Um desses métodos é o método das 2 fases, ele faz-se necessário quando nas restrições aparecem sinais de $=$ ou $\geq$. Boldrini, (1980), p. 391, 392.

A base do problema é formada pelas variáveis $x^{f_1}, x^{f_2}, x^{a_1}, x^{a_2}$ e x^{a_3} , as constantes é o vetor coluna $b = [30 \ 40 \ 20 \ 25 \ 25]^T$, agora temos que encontrar o custo reduzido inicial, para montar a tabela inicial do Algoritmo Simplex.

O custo reduzido e o valor atual da função são dados por:

$$Z_N - c_N = c_B B^{-1} N - c_N \quad (2.4.13)$$

$$Z = c_B B^{-1} b \quad (2.4.14)$$

Os coeficientes, na função objetivo C^a é a matriz linha c dado por:

$$c = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Na partição teremos:

$$c_B = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1] \text{ e } c_{N_{(1 \times 9)}} = \bar{0}; B = I_{(5 \times 5)} = B^{-1} \text{ e}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Desta forma podemos encontrar o que nos resta para a construção do quadro inicial do algoritmo. Para encontrar o custo reduzido e do valor inicial da função objetivo, a matriz identidade e o vetor nulo não entrarão na conta por não fazerem diferença nos cálculos, vejamos isso.

$$Z_{N_0}^a - c_{N_0} = c'_{B_{(1 \times 5)}} N_{(5 \times 9)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C^a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T I \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 20 \\ 25 \\ 25 \end{bmatrix} = 70$$

Observemos na Tabela 2.4.2 como fica o quadro inicial o algoritmo. Nela é possível ver que as variáveis não básicas candidatas a deixar a base são x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6 , por possuírem os maiores custos reduzidos e positivos, como elas possuem custos reduzidos iguais, podemos arbitrar entre uma delas para entrar na base (Macambira, 2016). Porém, neste momento iremos apenas optar pelo menor índice da coluna, começando com x_1 entrando na base. Pelo teste da razão, x^{a_1} deve deixar a base.

A linha pivô é a linha 3 de x^{a_1} e a coluna pivô é a coluna da variável x_1 . A tabela 2.4.2 mostra o resultado, já com x_1 na base e x^{a_1} fora da base, após o pivoteamento.

Etapa 1: multiplicar a linha do coeficiente que está na intersecção da coluna do elemento que entra na base e linha do elemento que deixa a base pelo seu inverso multiplicativo, no final desta Etapa o elemento desta intersecção terá valor igual à 1, ele é chamado de elemento pivô. Observe que necessariamente este coeficiente, pelo Teste da razão, é diferente de 0.

Etapa 2: Nesta Etapa temos que zerar, na coluna do elemento pivô, todos elementos acima dele e abaixo dele da seguinte forma;

seja i a linha do elemento pivô e $k \neq i$ a k – ésima linha do elemento da coluna do elemento pivô então, multiplique a linha do elemento pivô por $-a_k$, em que a_k é o coeficiente da linha k da coluna do elemento pivô, adicione o resultado à linha k . Prossiga da mesma forma para todas as outras linhas $k \neq i$ e ao final do processo teremos uma tabela equivalente por linhas a tabela que a gerou. Podemos ver mais sobre esse processo chamado pivoteamento no Passo 6 do APÊNDICE A deste texto e APÊNDICE B na definição B.2.2.2 ou (Boldrini, 1980, p. 383 et seq)

Tabela 2.4.2 ⁶– Tabela inicial do Algoritmo Simplex da primeira fase.

		Numeração das colunas dos coeficientes das variáveis das restrições														
		1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	7 ^a	8 ^a	9 ^a	10 ^a	11 ^a	12 ^a	13 ^a	14 ^a	
Nº		Coeficiente das variáveis														<i>b</i>
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x^{f_1}	x^{f_2}	x^{e_1}	x^{e_2}	x^{e_3}	x^{a_1}	x^{a_2}	x^{a_3}	
0	C^a	1	1	1	1	1	1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	70
1	x^{f_1}	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	30
2	x^{f_2}	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	40
3	x^{a_1}	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	20
4	x^{a_2}	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	25
5	x^{a_3}	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	25

Fonte: Autoria (2025).

Pivotamento da Tabela 2.4.2, com x_1 entrando na base e x^{a_1} deixando a base.

$$\begin{cases} L'_0 \rightarrow -L_3 + L_0 \\ L'_1 \rightarrow -L_3 + L_1 \end{cases}$$

Na Tabela 2.4.3 representa o resultado da primeira iteração.

⁶ Nossas tabelas estão organizadas em linha 0, que pertence a função objetivo, nesta linha estão os custos reduzidos de cada variável. Coluna *b* intersecção com a linha 0 da função objetivo, estarão seus valores atuais da função após cada pivoteamento. A intersecção da coluna *b* com as linhas de 1 à 5 estão os valores das variáveis atuais das variáveis básicas e as colunas das variáveis de x_1 à x^{a_3} começando na linha 1 e indo até linha 5, são os coeficientes atuais das variáveis das restrições.

Tabela 2.4.3 – Resultado da primeira iteração.

		Numeração das colunas dos coeficientes das variáveis das restrições															
		1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	7 ^a	8 ^a	9 ^a	10 ^a	11 ^a	12 ^a	13 ^a	14 ^a		
Nº		Coeficiente das variáveis															
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x^{f_1}	x^{f_2}	x^{e_1}	x^{e_2}	x^{e_3}	x^{a_1}	x^{a_2}	x^{a_3}	b	
0	C^a	0	1	1	0	1	1	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	50	
1	x^{f_1}	0	1	1	-1	0	0	1	0	1	0	0	-1	0	0	10	
2	x^{f_2}	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	40	
3	x_1	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	20	
4	x^{a_2}	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	25	
5	x^{a_3}	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	25	

Fonte: Autoria própria (2025).

Podemos ver pela Tabela 2.4.3 que temos mais de uma opção para entrar na base e são elas x_2, x_3, x_5 e x_6 . No entanto, seguiremos pelo menor índice das colunas o que nos levará a x_2 para entrar na base o que acarretará, pelo teste da razão, à x^{f_1} saindo da base. Veja a Tabela 2.4.4, o resultado da segunda iteração, com x_2 na base e x^{f_1} fora da base.

Pivoteamento da Tabela 3.4.3, com x_2 entrando na base e x^{f_1} saindo da base

$$\begin{cases} L'_0 \rightarrow -L_1 + L_0 \\ L'_4 \rightarrow -L_1 + L_4 \end{cases}$$

Tabela 2.4.4 – Resultado da terceira iteração.

		Numeração das colunas dos coeficientes das variáveis das restrições															
		1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	7 ^a	8 ^a	9 ^a	10 ^a	11 ^a	12 ^a	13 ^a	14 ^a		
Nº		Coeficiente das variáveis															
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x^{f_1}	x^{f_2}	x^{e_1}	x^{e_2}	x^{e_3}	x^{a_1}	x^{a_2}	x^{a_3}	b	
0	C^a	0	0	0	1	1	1	-1	0	-1	-1	-1	0	0	0	40	
1	x_2	0	1	1	-1	0	0	1	0	1	0	0	-1	0	0	10	
2	x^{f_2}	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	40	
3	x_1	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	20	
4	x^{a_2}	0	0	-1	1	1	0	-1	0	-1	-1	0	1	1	0	15	
5	x^{a_3}	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	25	

Fonte: Autoria própria (2025).

Na Tabela 2.4.4 podemos ver que novamente há empate entre os custos reduzidos, como sempre podemos arbitrar, então, vamos escolher o menor índice das colunas o que nos levará a x_4 para entrar na base, pelo teste da razão, x^{a_2} deixará a base. Veja o resultado da terceira iteração na Tabela 3.4.5, com x_4 na base e x^{a_2} fora da base.

Pivoteamento da Tabela 2.4.3, com x_4 entrando na base e x^{a_2} saindo da base.

$$\begin{cases} L'_0 \rightarrow -L_4 + L_0 \\ L'_1 \rightarrow L_4 + L_1 \\ L'_2 \rightarrow -L_4 + L_2 \\ L'_3 \rightarrow -L_4 + L_3 \end{cases}$$

Tabela 2.4.5 – Resultado da quarta iteração.

		Numeração das colunas dos coeficientes das variáveis das restrições															
		1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	7 ^a	8 ^a	9 ^a	10 ^a	11 ^a	12 ^a	13 ^a	14 ^a		
Nº		Coeficiente das variáveis															
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x^{f_1}	x^{f_2}	x^{e_1}	x^{e_2}	x^{e_3}	x^{a_1}	x^{a_2}	x^{a_3}	b	
0	C^a	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	25	
1	x_2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	25	
2	x^{f_2}	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	-1	-1	0	25	
3	x_1	1	0	1	0	-1	0	1	0	0	1	0	0	-1	0	5	
4	x_4	0	0	-1	1	1	0	-1	0	-1	-1	0	1	1	0	15	
5	x^{a_3}	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	25	

Fonte: Autoria própria (2025).

Novamente há um empate entre os custos reduzidos e como nós estamos arbitrando entre a variável que está na coluna de menor índice para entrar na base, dessa vez quem entrará na base será x_3 , pelo teste da razão x_1 deve deixar a base. Veja na Tabela 2.4.6 o resultado da quinta iteração.

Pivoteamento da Tabela 2.4.5, com x_3 entrando na base e x_1 deixando a base.

$$\begin{cases} L'_0 \rightarrow -L_3 + L_0 \\ L'_2 \rightarrow -L_3 + L_2 \\ L'_4 \rightarrow L_3 + L_4 \\ L'_5 \rightarrow -L_3 + L_5 \end{cases}$$

Tabela 2.4.6 – Resultado da quinta iteração.

		Numeração das colunas dos coeficientes das variáveis das restrições															
		1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	7 ^a	8 ^a	9 ^a	10 ^a	11 ^a	12 ^a	13 ^a	14 ^a		
Nº		Coeficiente das variáveis															
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x^{f_1}	x^{f_2}	x^{e_1}	x^{e_2}	x^{e_3}	x^{a_1}	x^{a_2}	x^{a_3}	b	
0	C^a	-1	0	0	0	1	1	-1	0	0	-1	-1	-1	0	0	20	
1	x_2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	25	
2	x^{f_2}	-1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	-1	0	0	20	
3	x_3	1	0	1	0	-1	0	1	0	0	1	0	0	-1	0	5	
4	x_4	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	20	
5	x^{a_3}	-1	0	0	0	1	1	-1	0	0	-1	-1	0	1	1	20	

Fonte: Autoria própria (2025).

Novamente houve outro empate no critério de quem entra na base, mas como já foi estabelecido, x_5 entrará na base, pelo teste da razão houve um empate entre x^{f_2} e x^{a_3} , mas nosso objetivo nessa primeira fase é tirar todas as variáveis artificiais da base⁷, neste caso, iremos optar por x^{a_3} deixar a base. Portanto, x_5 entrará na base e x^{a_3} sairá da base. Veja o resultado da sexta iteração na Tabela 2.4.7.

Pivoteamento da Tabela 2.4.6, com x_5 entrando na base e x^{a_3} saindo da base.

$$\begin{cases} L'_0 \rightarrow -L_5 + L_0 \\ L'_1 \rightarrow -L_5 + L_1 \\ L'_2 \rightarrow -L_5 + L_2 \\ L'_3 \rightarrow L_5 + L_3 \end{cases}$$

⁷ A função soma, das variáveis artificiais, tendem a zero quando se aproximam do valor ótimo. Quando a função objetivo inicial possui solução a função soma é exatamente igual a zero no ponto ótimo, caso contrário o problema não possui solução. Boldrini, 1980, p. 391.

Tabela 2.4.7 – Resultado da sexta iteração.

		Numeração das colunas dos coeficientes das variáveis das restrições															
		1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	7 ^a	8 ^a	9 ^a	10 ^a	11 ^a	12 ^a	13 ^a	14 ^a		
Nº		Coeficiente das variáveis															
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x^{f_1}	x^{f_2}	x^{e_1}	x^{e_2}	x^{e_3}	x^{a_1}	x^{a_2}	x^{a_3}	b	
0	C^a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	
1	x_2	1	1	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	0	0	-1	5	
2	x^{f_2}	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	
3	x_3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	25	
4	x_4	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	20	
5	x_5	-1	0	0	0	1	1	-1	0	0	-1	-1	0	1	1	20	

Fonte: Autoria própria (2025).

Com isso chegamos ao final da primeira fase e podemos confirmar que a função original possui solução, afinal, chegamos à solução ótima da função dada pelo somatório das variáveis artificiais e pudemos comprovar que o resultado é 0 no ótimo.

Para a segunda fase iremos desacoplar do quadro as variáveis artificiais e a função dada pelo somatório delas e, acoplar a função legítima do problema, a função C . Para o quadro inicial da segunda fase faltam alguns dados⁸ importantes que são, os custos reduzidos do início da segunda fase, e o valor atual da função objetivo C e para obtê-los vamos usar as equações (2.4.13) e (2.4.14) para encontrar esses valores. Como as variáveis da base no momento que encerramos a primeira fase são x_2, x^{f_2}, x_3, x_4 e x_5 , podemos determinar uma nova partição nos coeficientes, tanto da função objetivo, quanto das restrições; será de acordo com as variáveis que estão na base e as que estão fora. Observe que isso foi feito quando iniciamos a primeira fase, lá foi particionado de acordo com as variáveis que estavam em correspondência com a matriz identidade.

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; N' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

⁸ Atenção! Os coeficientes da função objetivo que serão usados nesta etapa são os coeficientes da função objetivo C e o custo reduzido de qualquer variável que está na base é igual a zero.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c' = [700 \quad 1300 \quad 2000 \quad 2200 \quad 1800 \quad 1700 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$c'_B = [1300 \quad 0 \quad 2000 \quad 2200 \quad 1800] \text{ e } c'_N = [700 \quad 1700 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$b = [30 \quad 40 \quad 20 \quad 25 \quad 25]^T$$

De (2.4.13)

$$\begin{aligned} Z_N - c_N &= \begin{bmatrix} 1300 \\ 0 \\ 2000 \\ 2200 \\ 1800 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 700 \\ 1700 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ &= [1000 \quad 800 \quad -500 \quad -2200 \quad -1800 \quad -2500] \end{aligned}$$

De (2.4.14)

$$c_B B^{-1} b = [1300 \quad 0 \quad 2000 \quad 2200 \quad 1800] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 20 \\ 25 \\ 25 \end{bmatrix} = 136500$$

Com isso nosso quadro inicial da segunda fase ficará como na Tabela 2.4.8, onde já podemos observar que x_1 possui o maior custo reduzido, por isso entrará na base e x_2 , pelo teste da razão, sairá da base.

Tabela 2.4.8 – Quadro inicial da segunda fase.

		Numeração das colunas dos coeficientes das variáveis das restrições											
		1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	7 ^a	8 ^a	9 ^a	10 ^a	11 ^a	
Nº		Coeficientes das variáveis.											
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x^{f_1}	x^{f_2}	x^{e_1}	x^{e_2}	x^{e_3}	b
0	C	1000	0	0	0	0	800	-500	0	-2200	-1800	-2500	136500
1	x_2	1	1	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	5
2	x^{f_2}	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
3	x_3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	25
4	x_4	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	20
5	x_5	-1	0	0	0	1	1	-1	0	0	-1	-1	20

Fonte: Autoria própria (2025).

Pivoteamento da Tabela 2.4.8, com x_1 entrando na base e x_2 saindo da base.

$$\begin{cases} L'_0 \rightarrow -1000L_1 + L_0 \\ L'_4 \rightarrow -L_1 + L_4 \\ L'_5 \rightarrow L_1 + L_5 \end{cases}$$

Tabela 2.4.9 – Resultado da sétima iteração

		Numeração das colunas dos coeficientes das variáveis das restrições											
		1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	7 ^a	8 ^a	9 ^a	10 ^a	11 ^a	
Nº		Coeficientes das variáveis.											
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x^{f_1}	x^{f_2}	x^{e_1}	x^{e_2}	x^{e_3}	b
0	C^a	0	-1000	0	0	0	1800	-1500	0	-2200	-1800	-3500	131500
1	x_1	1	1	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	5
2	x^{f_2}	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
3	x_3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	25
4	x_4	0	-1	0	1	0	1	-1	0	-1	0	-1	15
5	x_5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	25

Fonte: Autoria própria (2025).

Na Tabela 2.4.9 podemos ver que x_6 será a próxima variável a entrar na base e x_4 , pelo teste da razão, terá que sair. Veja o resultado da Tabela 2.4.10 após o pivoteamento.

Pivoteamento da Tabela 2.4.9, com x_6 entrando na base e x_4 saindo da base.

$$\begin{cases} L'_0 \rightarrow -1800L_4 + L_0 \\ L'_1 \rightarrow L_4 + L_1 \\ L'_3 \rightarrow -L_4 + L_3 \end{cases}$$

Tabela 2.4.10 – Resultado da oitava iteração

		Numeração das colunas dos coeficientes das variáveis das restrições											
		1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	7 ^a	8 ^a	9 ^a	10 ^a	11 ^a	
Nº		Coeficientes das variáveis.											<i>b</i>
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x^{f_1}	x^{f_2}	x^{e_1}	x^{e_2}	x^{e_3}	
0	C^a	0	800	0	-1800	0	0	300	0	-400	-1800	-1700	104500
1	x_1	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	20
2	x^{f_2}	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
3	x_3	0	1	1	-1	0	0	1	0	1	0	0	10
4	x_6	0	-1	0	1	0	1	-1	0	-1	0	-1	15
5	x_5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	25

Fonte: Autoria própria (2025).

Podemos ver pela Tabela 2.4.10 que x_2 será a próxima variável a entrar na base e x_3 sairá. Veja na Tabela 2.4.11, após o pivoteamento, que conseguimos nosso objetivo final ao encontrar a solução ótima do nosso problema.

Pivoteamento da Tabela 2.4.9 da segunda fase, com x_2 entrando na base e x_3 deixando a base.

$$\begin{cases} L'_0 \rightarrow -800L_3 + L_0 \\ L'_4 \rightarrow L_3 + L_4 \\ L'_5 \rightarrow -L_3 + L_5 \end{cases}$$

Tabela 2.4.11 - Quadro final do Algoritmo Simplex.

		Numeração das colunas dos coeficientes das variáveis das restrições											
		1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	7 ^a	8 ^a	9 ^a	10 ^a	11 ^a	
Nº		Coeficientes das variáveis.											b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x^{f_1}	x^{f_2}	x^{e_1}	x^{e_2}	x^{e_3}	
0	C^a	0	0	0	-1000	0	0	-500	0	-1200	-1800	-1700	96500
1	x_1	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	20
2	x^{f_2}	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
3	x_2	0	1	1	-1	0	0	1	0	1	0	0	10
4	x_6	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	25
5	x_5	0	0	-1	1	1	0	-1	0	-1	-1	0	15

Fonte: Lima, Jonas 2025.

Com isso concluímos que o custo mínimo com o transporte é de R\$ 96500,00. E $x_1 = 20$ unidades de máquinas de costuras transportadas de Campinas para São Paulo, $x_2 = 10$ unidades de máquinas de costuras transportadas de Campinas para o Rio de Janeiro, $x_3 = 0$ unidades de máquinas de costuras transportadas de Campinas para Vitória, $x_4 = 0$ unidades de máquinas de costuras transportadas de Belo Horizonte para São Paulo, $x_5 = 15$ unidades de máquinas de costuras transportadas de Belo Horizonte para o Rio de Janeiro e $x_6 = 25$ unidades de máquinas de costuras transportadas de Belo Horizonte para Vitória, com todas as restrições satisfeitas, portanto, temos uma solução básica factível ótima.

2.5 Uma visão algébrica do algoritmo simplex com aplicação em um problema de programação linear pelo método simplex das 2 fases

Arley Tão cria porcos para vender, e ele deseja determinar as quantidades de cada alimento que deverão ser dadas a cada porco para obter os requerimentos a um custo mínimo. O número de unidades de cada tipo de ingrediente nutricional básico encontrado num quilo de cada alimento é dado na tabela abaixo, juntamente com os requerimentos diários e o custo.

Tabela 2.5.1 – Tabela custo diário por quantidade de vitaminas.

Ingrediente Nutricional	Quilo de Milho	Quilo de cereais	Quilo De alfafa	Mínimo reque-rido diariamente
Carboidratos	90	20	40	200
Proteínas	30	80	60	180
Vitaminas	10	20	60	150
Custa Cr\$	2540,00	2360,00	2000	

Fonte: (Boldrini, et al., 1980, p. 399)

Iremos modelar o problema e depois resolvê-lo pelo Método Simplex das Duas Fases⁹ com operações matriciais e sempre atualizando o quadro Simplex, para uma visão mais detalhada de como funciona o algoritmo.

Modelando o problema:

As variáveis de decisão serão, x_1 para a quantidade de quilos de milho comprados, x_2 para a quantidade de quilos de cereais comprados e x_3 a quantidade de quilos de alfafa comprados. Logo teremos que minimizar a função objetivo Z , sujeito as restrições de (2.5.1) – (2.5.4).

$$\text{Min}Z(x_1, x_2, x_3) = 2540x_1 + 2360x_2 + 2000x_3$$

Sujeito a

$$90x_1 + 20x_2 + 40x_3 \geq 200 \quad (2.5.1)$$

$$30x_1 + 80x_2 + 60x_3 \geq 180 \quad (2.5.2)$$

$$10x_1 + 20x_2 + 60x_3 \geq 150 \quad (2.5.3)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (2.5.4)$$

Introduzindo novas variáveis, que para estes casos são chamadas de variáveis de excesso x_4^e, x_5^e, x_6^e e variáveis artificiais x_7^a, x_8^a e x_9^a onde ficaremos com o problema de PPL (2.5.5).

⁹ Esse método é usado quando não é possível construir uma base, matriz identidade, ou seja, quando houver sinais de $\geq$ ou $=$ no conjunto de restrições, excetuando-se as restrições de não negatividade, de um problema de programação linear.

$$\text{Min}Z = 2540x_1 + 2360x_2 + 2000x_3$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} 90x_1 + 20x_2 + 40x_3 - x_4^f + x_7^a &= 200 \\ 30x_1 + 80x_2 + 60x_3 - x_5^f + x_8^a &= 180 \\ 10x_1 + 20x_2 + 60x_3 - x_6^f + x_9^a &= 150 \\ x_1, x_2, x_3, x_1^f, x_2^f, x_3^f, x_7^a, x_8^a, x_9^a &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Teremos que minimizar, na primeira fase, a função objetivo Z^a em que ela é a soma das variáveis artificiais inseridas no PPL inicial, sujeitas as mesmas restrições de (2.5.5).

$$\text{Min}Z^a = x_7^a + x_8^a + x_9^a$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} 90x_1 + 20x_2 + 40x_3 - x_4 + x_7^a &= 200 \\ 30x_1 + 80x_2 + 60x_3 - x_5 + x_8^a &= 180 \\ 10x_1 + 20x_2 + 60x_3 - x_6 + x_9^a &= 150 \\ x_1, x_2, x_3, x_4^f, x_5^f, x_6^f, x_7^a, x_8^a, x_9^a &\geq 0 \end{aligned}$$

Para a solução do problema primeiro vamos apresentar algumas fórmulas utilizadas no algoritmo. a Tabela (2.5.2) é a representação do Algoritmo Simplex na forma algébrica reduzida.

Tabela 2.5.2 – Tabela do Algoritmo Simplex para enésima iteração após montar o quadro.

	x_{N_n}	x_{B_n}	
f_n	$c_{B_n} B_n^{-1} N_n - c_{N_n}$	0	$c_{B_n} B_n^{-1} b$
x_{B_n}	$B_n^{-1} N_n$	$B_n^{-1} B_n = I$	$B_n^{-1} b$

Fonte: Adaptada de (Boldrini, et al., 1980, p. 387 – 389).

$$(f_{N_n} - c_{N_n}) = (c_{B_n} B_n^{-1} N_n - c_{N_n}), \text{ é o custo reduzido da função} \quad (2.5.6)$$

atual na enésima iteração.

$$(\text{Teste da razão}) = \frac{b_{n_i}}{y_{n_{ij}}}. \quad (2.5.7)$$

j_{B_n} : os índices das colunas dos x_j da submatriz básica na n ésima iteração. (2.5.8)

j_{N_n} : os índices das colunas dos x_j da submatriz não básica na n ésima iteração.

$$f_{B_n} = c_{B_n} B_n^{-1} b, \text{ é o valor atualizado da função objetivo.} \quad (2.5.9)$$

$$N'_n = B_n^{-1} N_n \text{ é a atualização das colunas } x_j, \text{ da sub matriz não básica na } n\text{ésima iteração.} \quad (2.5.10)$$

$$b_{n_{ix1}} = B_{n_{ix1}}^{-1} b_{ix1}, \text{ é o valor atualizado das variáveis básicas, com } i = i'. \quad (2.5.11)$$

Faremos partições nas matrizes do nosso problema, a fim de aplicar o algoritmo, da seguinte forma. Matriz A , coeficiente das restrições¹⁰, será particionada em matriz básica B_0 e matriz não básica N_0 , os coeficientes c da função Z^a em c_{B_0} e c_{N_0} , a matriz coluna das variáveis em x_{B_n} e x_{N_n} , mas sempre mantendo a ordem de correspondência na linha e coluna. E $n \in \mathbb{N}$ representará n ésima iteração. Para $n = 0$ não houve iteração e, B_0 é a base inicial do Algoritmo Simplex. Desta forma:

$$A = \begin{bmatrix} 90 & 20 & 40 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 80 & 60 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 20 & 60 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } N_0 = \begin{bmatrix} 90 & 20 & 40 & -1 & 0 & 0 \\ 30 & 80 & 60 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & 20 & 60 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4^f \quad x_5^f \quad x_6^f \quad x_7^a \quad x_8^a \quad x_9^a]^T$$

¹⁰ As funções Z e Z^a são sempre sujeitas as mesmas restrições.

$$x_{B_0} = [x_7^a \quad x_8^a \quad x_9^a]^T \text{ e } x_{N_0} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4^f \quad x_5^f \quad x_6^f]^T$$

O vetor $c = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$, são coeficientes para a função objetivo Z^a . Sua partição para a base B_0 é:

$$c_{B_0} = [1 \quad 1 \quad 1], c_{N_0} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

De (2.5.8).(índices dos coeficientes das variáveis básicas e não básicas matrizes).

$$j_{B_0} = 7, 8, 9 \text{ e } j_{N_0} = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ (numeração das colunas da matriz } A).$$

Para a construção Tabela inicial temos $B_0 = I = B^{-1}$, N_0 , c_{B_0} , x_{B_0} e $b_0 = b$ o que resume a Tabela 2.5.2 na Tabela 2.5.3.

Tabela 2.5.3 – Tabela inicial Algoritmo Simplex na forma algébrica.

x_{N_0}		x_{B_0}	
Z_0^a	$c_{B_0} N_0$	0	$c_{B_0} b$
x_{B_0}	N_0	I	b_0

Fonte: Adaptada de Boldrini (1980, p. 387 et seq).

Fazendo as operações matriciais em $c_{B_0} N_0$ e $c_{B_0} b$ a Tabela 2.5.3 pode ser expressa como a Tabela 2.5.4. Observemos essas operações abaixo e o resultado expresso na Tabela 2.5.4.

De (2.5.7.) (custo reduzido inicial)

$$c_{B_0} N_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 90 & 20 & 40 & -1 & 0 & 0 \\ 30 & 80 & 60 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & 20 & 60 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [130 \quad 120 \quad 160 \quad -1 \quad -1 \quad -1]; j \leq 1 \leq 6$$

De (2.5.10) (valor inicial da função objetivo).

$$Z_0^a = c_{B_0} b = [1 \quad 1 \quad 1][200 \quad 180 \quad 150]^T = 530$$

De (2.5.10) (valor inicial dos coeficientes da matriz de coeficientes das variáveis não básicas).

$$N'_0 = IN = N = \begin{bmatrix} 90 & 20 & 40 & -1 & 0 & 0 \\ 30 & 80 & 60 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & 20 & 60 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

De (2.5.11) (valor inicial das variáveis básicas).

$$b_{0_{(3 \times 1)}} = Ib = b$$

Tabela 2.5.4 – Tabela inicial do Algoritmo Simplex. Estendida.

	Coeficientes das variáveis									b
	x_1	x_2	x_3	x_4^f	x_5^f	x_6^f	x_7^a	x_8^a	x_9^a	
Z_0^a	130	120	160	-1	-1	-1	0	0	0	530
x_7^a	90	20	40	-1	0	0	1	0	0	200
x_8^a	30	80	60	0	-1	0	0	1	0	180
x_9^a	10	60	60	0	0	-1	0	0	1	150

Fonte: Autoria própria (2025).

Do critério de entrada na base (maior dos custos reduzidos encontrados com (2.5.6)) deve entrar na base a variável x_3 por possuir o maior valor de custo reduzido que é 160. Vamos ao critério de quem sai da base, que é o valor mínimo entre a razão dos valores atuais, das variáveis que estão na base e os respectivos correspondentes atuais na coluna de quem entra na base, neste caso é o x_3 , e é necessário que ele seja estritamente maior que 0. Com x_3 entrando na base nos leva à $j = 3$ com $1 \leq i \leq 3$. Logo por (2.5.7) (Teste da razão):

$$\frac{b_{n_i}}{y_{n_{ij}}} \stackrel{11}{\Rightarrow} \frac{b_{0_1}}{y_{0_{13}}} = \frac{200}{40} = 5; \frac{b_{0_2}}{y_{0_{23}}} = \frac{180}{60} = 3; \frac{b_{0_3}}{y_{0_{33}}} = \frac{150}{60} = 2,5$$

¹¹ A equação (2.5.7) é chamada de teste da razão.

Assim concluímos que x_9^a deve deixar a base. Agora temos uma nova base, com isso teremos uma nova partição ¹²como se segue:

De (2.5.8).(determinação dos índices das variáveis que estão na base e das que estão fora da base).

$$j_{B_1} = 7, 8 \text{ e } 3; j_{N_1} = 1, 2, 9, 4, 5 \text{ e } 6.$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \Rightarrow B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{60} \end{bmatrix}; N_1 = \begin{bmatrix} 90 & 20 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 30 & 80 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & 60 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_{B_1} = [x_7^a \quad x_8^a \quad x_3]^T \text{ e } x_{N_1} = [x_1 \quad x_2 \quad x_9^a \quad x_4^f \quad x_5^f \quad x_6^f]^T$$

$$c_{B_1} = [1 \quad 1 \quad 0]; c_{N_1} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

De (2.5.6) (Custo reduzido da primeira iteração)

$$Z_{N_1-c_{N_1}}^a = c_{B_1} B_1^{-1} N_1 - c_{N_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 90 & 30 & 10 \\ 20 & 80 & 60 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$- \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{250}{3} \\ -20 \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{250}{3} & -20 & -\frac{5}{3} & -1 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

¹² Atenção! A primeira partição foi para montar o quadro inicial do Algoritmo Simplex.

De (2.5.9) (valor atualizado da função objetivo).

$$Z_{B_1}^a = c_{B_1} B_1^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 180 \\ 150 \end{bmatrix} = 130$$

De (2.5.10) (colunas da submatriz não básicas atualizada da primeira iteração).

$$B_1^{-1} N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 90 & 30 & 10 \\ 20 & 80 & 60 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{250}{3} & -20 & -\frac{2}{3} & -1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 20 & 20 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{60} & 0 & 0 & -\frac{1}{60} \end{bmatrix}$$

De (2.5.11) (valor atualizado das variáveis básicas da primeira iteração).

$$b_{1(3 \times 1)} = B_{1(3 \times 3)}^{-1} b_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 180 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 30 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Vejamos na Tabela 2.5.5 como ficará o quadro do Algoritmo Simplex após a primeira iteração, nela é possível observar que o x_3 possui valor igual a $\frac{5}{2}$, para esta iteração, que para a função objetivo Z acarreta o valor de custo igual a C\$ 5000,00.

Tabela 2.5.5 – Tabela da 1ª Iteração do Algoritmo Simplex.

	Coeficientes das variáveis									
	x_1	x_2	x_3	x_4^f	x_5^f	x_6^f	x_7^a	x_8^a	x_9^a	
Z_n^a	$\frac{250}{3}$	-20	0	-1	0	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{5}{3}$	130
x_7^a	$\frac{250}{3}$	-20	0	-1	0	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	100
x_8^a	20	20	0	0	-1	0	0	1	-1	30
x_3	$\frac{1}{6}$	1	1	0	0	$-\frac{1}{60}$	0	0	$\frac{1}{60}$	$\frac{5}{2}$

Fonte: Autoria própria (2025).

De (2.5.6) concluímos que x_1 entra na base, que nos leva à $j = 1$ e $1 \leq i \leq 3$ para o teste da razão (2.5.7) para verificação de quem deixa a base na primeira iteração.

$$\frac{b_{n_i}}{y_{n_{ij}}} \Rightarrow \frac{b_{1_1}}{y_{1_{11}}} = \frac{100}{\frac{250}{3}} = 1,2; \frac{b_{1_2}}{y_{1_{21}}} = \frac{30}{20} = 1,5; \frac{b_{1_3}}{y_{1_{31}}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{6}} = 15$$

Assim conclui-se que x_7^a deve deixar a base, então, faremos a partição para a segunda iteração da seguinte forma:

De (2.5.8). (índices das variáveis que estão na base e das que estão fora da base na segunda iteração).

$$j_{B_2} = 1, 8, 3 \text{ e } j_{N_2} = 7, 2, 9, 4, 5, 6.$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 90 & 0 & 40 \\ 30 & 1 & 60 \\ 10 & 0 & 60 \end{bmatrix} \Rightarrow B_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{250} & 0 & -\frac{2}{125} \\ -\frac{6}{25} & 1 & -\frac{21}{25} \\ -\frac{1}{500} & 0 & \frac{9}{500} \end{bmatrix}; N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 20 & 80 & 60 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$x_{B_2} = [x_1 \quad x_8^a \quad x_3]^T \text{ e } x_{N_2} = [x_7^a \quad x_2 \quad x_9^a \quad x_4^f \quad x_5^f \quad x_6^f]^T$$

$$c_{B_2} = [0 \quad 1 \quad 0]; \quad c_{N_2} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

De (2.5.6) (Custo reduzido para a segunda iteração).

$$\begin{aligned} Z_{N_2}^a - c_{N_2} &= c_{B_2} B_2^{-1} N_2 - c_{N_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{3}{250} & 0 & -\frac{1}{125} \\ -\frac{6}{25} & 1 & -\frac{21}{25} \\ -\frac{1}{500} & 0 & \frac{9}{500} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 20 & 80 & 60 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{31}{25} & \frac{124}{5} & -\frac{46}{25} & \frac{6}{25} & -1 & \frac{21}{25} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De (2.5.9) (valor atualizado da função objetivo na segunda iteração).

$$Z_{B_2}^a = c_{B_2} B_2^{-1} b = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{3}{250} & 0 & -\frac{1}{125} \\ -\frac{6}{25} & 1 & -\frac{21}{25} \\ -\frac{1}{500} & 0 & \frac{9}{500} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 180 \\ 150 \end{bmatrix} = 6$$

De (2.5.10) (colunas da submatriz não básicas atualizada na segunda iteração).

$$\begin{aligned} B_2^{-1} N_2 &= \begin{bmatrix} \frac{3}{250} & 0 & -\frac{1}{125} \\ -\frac{6}{25} & 1 & -\frac{21}{25} \\ -\frac{1}{500} & 0 & \frac{9}{500} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 20 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 60 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{250} & -\frac{6}{25} & -\frac{1}{125} & -\frac{3}{250} & 0 & \frac{1}{125} \\ \frac{6}{25} & \frac{124}{5} & -\frac{21}{25} & \frac{6}{25} & -1 & \frac{21}{25} \\ -\frac{1}{500} & \frac{26}{25} & \frac{9}{500} & \frac{1}{500} & 0 & -\frac{9}{500} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De (2.5.11) (valor atualizado das variáveis básicas na segunda iteração).

$$B_{2(3 \times 1)} = B_{2(3 \times 3)}^{-1} b_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{250} & 0 & -\frac{1}{125} \\ -\frac{6}{25} & 1 & -\frac{21}{25} \\ -\frac{1}{500} & 0 & \frac{9}{500} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 180 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ 6 \\ \frac{23}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 6 \\ 2,3 \end{bmatrix}$$

Distribuindo na Tabela 2.5.6 os valores encontrados de acordo com a ordem que estão na partição $j_{B_2} = 1, 8, 3$ e $j_{N_2} = 7, 2, 9, 4, 5, 6$.

Tabela 2.5.6 – Tabela da 2ª Iteração do Algoritmo Simplex.

	Coeficientes das variáveis									
	x_1	x_2	x_3	x_4^f	x_5^f	x_6^f	x_7^a	x_8^a	x_9^a	
Z_2^a	0	$\frac{124}{5}$	0	$\frac{6}{25}$	-1	$\frac{21}{25}$	$-\frac{31}{25}$	0	$-\frac{46}{25}$	6
x_1	1	$-\frac{6}{25}$	0	$-\frac{3}{250}$	0	$\frac{1}{125}$	$\frac{3}{250}$	0	$-\frac{1}{125}$	1,2
x_8^a	0	$\frac{124}{5}$	0	$\frac{6}{25}$	-1	$\frac{21}{25}$	$-\frac{6}{25}$	1	$-\frac{21}{25}$	6
x_3	0	$\frac{26}{25}$	1	$\frac{1}{500}$	0	$-\frac{9}{500}$	$-\frac{1}{500}$	0	$\frac{9}{500}$	2,3

Fonte: Autoria própria (2025).

De (2.5.6) concluímos que x_2 entra na base, que nos leva à $j = 2$ e $1 \leq i \leq 3$ para o teste da razão (2.5.7) para verificação de quem deixa a base.

De (2.5.8) (índices colunas das variáveis básica e não básicas da 2ª iteração).

$$j_{B_2} = 1, 8, 3 \text{ e } j_{N_2} = 7, 2, 9, 4, 5, 6.$$

De (2.5.7) (Teste da razão para 3ª iteração).

$$\frac{b_{n_i}}{y_{n_{ij}}} \Rightarrow \frac{b_{2_2}}{y_{3_{22}}} = \frac{6}{\frac{124}{5}} = \frac{30}{124} \cong 0,24; \frac{b_{2_3}}{y_{3_{32}}} = \frac{2,3}{\frac{26}{25}} = \frac{57,5}{25} \cong 2,3$$

Assim conclui-se que x_8^a deve deixar a base, então, faremos a partição para a segunda iteração da seguinte forma:

De (2.5.8) (são os coeficientes das variáveis, respectivamente, básicas e não básicas da terceira iteração) teremos; $j_{B_3} = 1, 2$ e 3 ; $j_{N_3} = 7, 8, 9, 4, 5$ e 6 . Então faremos as seguintes partições.

$$B_3 = \begin{bmatrix} 90 & 20 & 40 \\ 30 & 80 & 60 \\ 10 & 60 & 60 \end{bmatrix} \Rightarrow B_3^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{730} & -\frac{1}{730} & -\frac{1}{146} \\ \frac{3}{730} & \frac{5}{292} & -\frac{21}{1460} \\ -\frac{1}{1460} & -\frac{2}{365} & \frac{33}{1460} \end{bmatrix}; N_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$x_{B_3} = [x_1 \quad x_8^a \quad x_3]^T \text{ e } x_{N_3} = [x_7^a \quad x_2 \quad x_9^a \quad x_4^f \quad x_5^f \quad x_6^f]^T$$

$$c_{B_3} = [0 \quad 0 \quad 0]; c_{N_3} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

De (2.5.6) (custo reduzido da função objetivo atual na terceira iteração).

$$Z_{N_3}^a - c_{N_3} = c_{B_3} B_3^{-1} N_3 - c_{N_3} = [0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{9}{730} & -\frac{1}{730} & -\frac{1}{146} \\ \frac{3}{730} & \frac{5}{292} & -\frac{21}{1460} \\ -\frac{1}{1460} & -\frac{2}{365} & \frac{33}{1460} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T - [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] = [-1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

De (2.5.9) (valor atualizado da função objetivo na terceira iteração).

$$Z_{B_3}^a = c_{B_3} B_3^{-1} b = [0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{9}{730} & -\frac{1}{730} & -\frac{1}{146} \\ \frac{3}{730} & -\frac{5}{292} & -\frac{21}{1460} \\ \frac{1}{1460} & -\frac{2}{365} & \frac{33}{1460} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 180 \\ 150 \end{bmatrix} = 0$$

De (2.5.10) (colunas da submatriz não básicas atualizadas na terceira iteração).

$$B_3^{-1} N_3 = \begin{bmatrix} \frac{9}{730} & -\frac{1}{730} & -\frac{1}{146} \\ \frac{3}{730} & -\frac{5}{292} & -\frac{21}{1460} \\ \frac{1}{1460} & -\frac{2}{365} & \frac{33}{1460} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{730} & -\frac{1}{730} & -\frac{1}{146} & -\frac{9}{730} & \frac{1}{730} & \frac{1}{146} \\ \frac{3}{730} & -\frac{5}{292} & -\frac{21}{1460} & \frac{3}{730} & -\frac{5}{292} & \frac{21}{1460} \\ \frac{1}{1460} & -\frac{2}{365} & \frac{33}{1460} & \frac{1}{1460} & \frac{2}{365} & -\frac{33}{1460} \end{bmatrix}$$

De (2.5.11) (valor atualizado das variáveis básicas na terceira iteração).

$$B_{3(3 \times 1)} = B_{3(3 \times 3)}^{-1} b_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} \frac{9}{730} & -\frac{1}{730} & -\frac{1}{146} \\ \frac{3}{730} & -\frac{5}{292} & -\frac{21}{1460} \\ \frac{1}{1460} & -\frac{2}{365} & \frac{33}{1460} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 180 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{87}{73} \\ \frac{15}{146} \\ \frac{331}{146} \end{bmatrix}$$

Distribuindo na Tabela 2.5.7 os valores encontrados de acordo com a disposição em que foi feito a partição $j_{B_3} = 1, 2 \text{ e } 3$; $j_{N_3} = 7, 8, 9, 4, 5 \text{ e } 6$.

Tabela 2.5.7 – Valor ótimo da função artificial.

	Coeficientes das variáveis									
	x_1	x_2	x_3	x_4^f	x_5^f	x_6^f	x_7^a	x_8^a	x_9^a	
Z_3^a	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
x_1	1	0	0	$-\frac{9}{730}$	$\frac{1}{730}$	$\frac{1}{146}$	$-\frac{9}{730}$	$-\frac{1}{730}$	$-\frac{1}{146}$	$\frac{87}{73}$
x_2	0	1	0	$\frac{3}{730}$	$-\frac{5}{292}$	$\frac{21}{1460}$	$-\frac{3}{730}$	$\frac{5}{292}$	$-\frac{21}{1460}$	$\frac{15}{146}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{1460}$	$\frac{2}{365}$	$-\frac{33}{1460}$	$-\frac{1}{1460}$	$-\frac{2}{365}$	$\frac{33}{1460}$	$\frac{331}{146}$

Fonte: Autoria própria (2025)

Assim concluímos a primeira fase. Iniciando a segunda fase do método das duas fases. Para isso função Z^a será descartada da Tabela 2.5.7 com suas variáveis artificiais e acoplada a função original do problema. (Boldrini, et al., 1980, 391 et seq).

De (2.5.9) teremos, $j'_{B_3} = 1, 2, 3$ e $j'_{N_3} = 4, 5, 6$. N'_3 é a mesma submatriz não básica, excetuando-se pelos coeficientes das variáveis artificiais, que estavam na primeira fase, assim como, a submatriz básica e os coeficientes das restrições. Mas os coeficientes, que serão usados na segunda fase, serão os da função objetivo Z já acoplada ao sistema.

$$A' = \begin{bmatrix} 90 & 20 & 40 & -1 & 0 & 0 \\ 30 & 80 & 60 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & 60 & 60 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 90 & 20 & 40 \\ 30 & 80 & 60 \\ 10 & 60 & 60 \end{bmatrix} \Rightarrow B_3^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{730} & -\frac{1}{730} & -\frac{1}{146} \\ -\frac{3}{730} & \frac{5}{292} & -\frac{21}{1460} \\ \frac{1}{1460} & -\frac{2}{365} & \frac{33}{1460} \end{bmatrix}; N'_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x' = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4^f \quad x_5^f \quad x_6^f]^T$$

$$x_{B_3} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T \text{ e } x'_{N_3} = [x_4^f \quad x_5^f \quad x_6^f]^T$$

$$c' = [2540 \quad 2360 \quad 2000 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$c'_{B_3} = [2540 \quad 2360 \quad 2000]; \quad c'_{N_3} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

De (2.5.6) (custo reduzido para tabela inicial da segunda fase).

$$Z_{N'_3} - c'_{N'_3} = c'_{B_3} B_3^{-1} N'_3 - c'_{N'_3} = [2540 \quad 2360 \quad 2000] \begin{bmatrix} \frac{9}{730} & -\frac{1}{730} & -\frac{1}{146} \\ \frac{3}{730} & \frac{5}{292} & -\frac{21}{1460} \\ -\frac{1}{1460} & -\frac{2}{365} & \frac{33}{1460} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - [0 \quad 0 \quad 0] = \begin{bmatrix} -\frac{1478}{73} & -\frac{1896}{73} & \frac{448}{73} \end{bmatrix}$$

De (2.5.9) (valor atualizado da função objetivo para Tabela inicial da segunda fase).

$$Z_{B_3} = c'_{B_3} B_3^{-1} b = [2540 \quad 2360 \quad 2000] \begin{bmatrix} \frac{9}{730} & -\frac{1}{730} & -\frac{1}{146} \\ \frac{3}{730} & \frac{5}{292} & -\frac{21}{1460} \\ -\frac{1}{1460} & -\frac{2}{365} & \frac{33}{1460} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 180 \\ 150 \end{bmatrix} = \frac{569680}{73}$$

Podemos concluir que x_6^f deve entrar na base, por ser o maior dos custos reduzidos, então $j = 6$ para o teste da razão. E o valor atual da função Z para a terceira base encontrada é de $\frac{569680}{73} \cong 7803,84$. Vaja a Tabela 2.5.8, que é a tabela inicial do algoritmo para a função Z na segunda fase.

Tabela 2.5.8 – Tabela inicial da 2ª fase do Algoritmo Simplex aplicado na função Z.

	Coeficientes das variáveis						
	x_1	x_2	x_3	x_4^f	x_5^f	x_6^f	
Z_{B_3}	0	0	0	$-\frac{1478}{73}$	$-\frac{1896}{73}$	$\frac{448}{73}$	$\frac{569680}{73}$
x_1	1	0	0	$-\frac{9}{730}$	$\frac{1}{730}$	$\frac{1}{146}$	$\frac{87}{73}$
x_2	0	1	0	$\frac{3}{730}$	$-\frac{5}{292}$	$\frac{21}{1460}$	$\frac{15}{146}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{1460}$	$\frac{2}{365}$	$-\frac{33}{1460}$	$\frac{331}{146}$

Fonte Autoria própria (2025).

De (2.5.7) (Teste da razão para a 4ª iteração)

$$\frac{b_{n_i}}{y_{n_{ij}}} \Rightarrow \frac{b'_{3_1}}{y'_{3_{16}}} = \frac{\frac{87}{73}}{\frac{1}{146}} = \frac{87 \cdot 146}{73} = 174; \frac{b'_{3_2}}{y'_{3_{26}}} = \frac{\frac{15}{1460}}{\frac{21}{1460}} = \frac{15 \cdot 1460}{21 \cdot 1460} \cong 0,71$$

Portanto x_2 deve sair da base e, como já havíamos concluído, x_6^f deve entrar na base, assim;

De (2.5.8) teremos, $j_{B_4} = 1, 6, 3$ e $4, 5, 2$. Então faremos as seguintes partições para a 4ª iteração.

$$A' = \begin{bmatrix} 90 & 20 & 40 & -1 & 0 & 0 \\ 30 & 80 & 60 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & 60 & 60 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 90 & 0 & 40 \\ 30 & 0 & 60 \\ 10 & -1 & 60 \end{bmatrix} \Rightarrow B_4^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{70} & -\frac{1}{105} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{25}{21} & -1 \\ -\frac{1}{140} & \frac{3}{140} & 0 \end{bmatrix}; N_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 20 \\ 0 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix}$$

$$x' = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4^f \quad x_5^f \quad x_6^f]^T; x_{B_4} = [x_1 \quad x_6^f \quad x_3]^T \text{ e } x_{N_4} = [x_4^f \quad x_5^f \quad x_2]^T$$

$$c' = [2540 \quad 2360 \quad 2000 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$c'_{B_4} = [2540 \quad 0 \quad 2000]; c'_{N_4} = [0 \quad 0 \quad 2360]$$

De (2.5.6) (custo reduzido da função objetivo na 4ª iteração).

$$Z_{N_4} - c_{B_4} = c'_{B_4} B_4^{-1} N_4 - c'_{N_4} = [2540 \quad 0 \quad 2000] \begin{bmatrix} \frac{1}{70} & -\frac{1}{105} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{25}{21} & -1 \\ -\frac{1}{140} & \frac{3}{140} & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 20 \\ 0 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} - [1 \quad -1 \quad 2360] = \begin{bmatrix} -\frac{149}{7} & -\frac{346}{21} & -\frac{10630}{21} \end{bmatrix}$$

De (2.5.9) (valor atualizado da função objetivo na 4ª iteração).

$$Z_{B_4} = c'_{B_4} B_4^{-1} b = [2540 \quad 0 \quad 2000] \begin{bmatrix} \frac{1}{70} & -\frac{1}{105} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{25}{21} & -1 \\ -\frac{1}{140} & \frac{3}{140} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 180 \\ 150 \end{bmatrix} = 7760$$

De (2.5.10) (colunas da submatriz não básicas atualizadas na 4ª iteração).

$$N'_4 = B_4^{-1} N_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{70} & -\frac{1}{105} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{25}{21} & -1 \\ -\frac{1}{140} & \frac{3}{140} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 20 \\ 0 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{70} & \frac{1}{105} & -\frac{10}{21} \\ \frac{2}{7} & -\frac{25}{21} & \frac{620}{21} \\ \frac{1}{140} & -\frac{3}{140} & \frac{11}{7} \end{bmatrix}$$

De (2.5.11) (valor atualizado das variáveis básicas na 4ª iteração).

$$b_{4(3 \times 1)} = B_{4(3 \times 3)}^{-1} b_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{70} & -\frac{1}{105} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{25}{21} & -1 \\ -\frac{1}{140} & \frac{3}{140} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 180 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{7} \\ \frac{50}{7} \\ \frac{17}{7} \end{bmatrix}$$

Vejamos na Tabela 2.5.9 como ficará o quadro após a quarta iteração, ela será a tabela final do algoritmo, qualquer valor de incremento, nas variáveis que estão fora da base, causará um aumento da função objetivo, visto que, os custos reduzidos nesta iteração são todos menores que zero. Portanto chegamos ao ponto ótimo do problema, com valor da função objetivo igual a Cr\$ 7760,00 de custo. Com $x_1 = \frac{8}{7}$, $x_2 = 0$ e $x_3 = \frac{17}{7}$.

Tabela 2.5.9 – Tabela final do Algoritmo Simplex método das duas fases.

	Coeficientes das variáveis						
	x_1	x_2	x_3	x_4^f	x_5^f	x_6^f	
Z_{B_3}	0	$-\frac{10630}{21}$	0	$-\frac{149}{7}$	$-\frac{346}{21}$	0	7760
x_1	1	$-\frac{10}{21}$	0	$-\frac{1}{70}$	$\frac{1}{105}$	0	$\frac{8}{7}$
x_6^f	0	$\frac{620}{21}$	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{25}{21}$	1	$\frac{50}{7}$
x_3	0	$\frac{11}{7}$	1	$\frac{1}{140}$	$-\frac{3}{140}$	0	$\frac{17}{7}$

Fonte: Lima, Jonas 2025.

3 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR UTILIZANDO A FERRAMENTA DO SOLVER DO EXCEL

3.1 Ativando o suplemento solver do excel

Neste Capítulo iremos usar o microcomputador para a resolução de problemas de programação linear e o software que iremos usar é uma ferramenta do programa Excel, apesar da sua instalação no seu microcomputador o recurso não é diretamente instalado, como afirmado por Manzano.

Após a instalação do Excel, componente do conjunto de aplicativos Microsoft Office, o recurso **Solver** não é diretamente instalado e, portanto, a ferramenta **Solver** não é disponibilizada automaticamente na planilha. Isso ocorre por tratar de um recurso adicional (suplementos), que necessita ser ativado à parte. Suplementos são recursos especiais, que podem ser ativados, geralmente pelos usuários que têm conhecimentos mais avançados. (Manzano, et al, 2013, p. 137-139).

Então vejamos os comandos necessários para ativação desta ferramenta. Segundo MOZANO (2013). Todas essas ferramentas, entre outras, são ativadas somente com a execução do comando. Faremos aqui todos os comandos dados por ele, para ativação da ferramenta Solver.

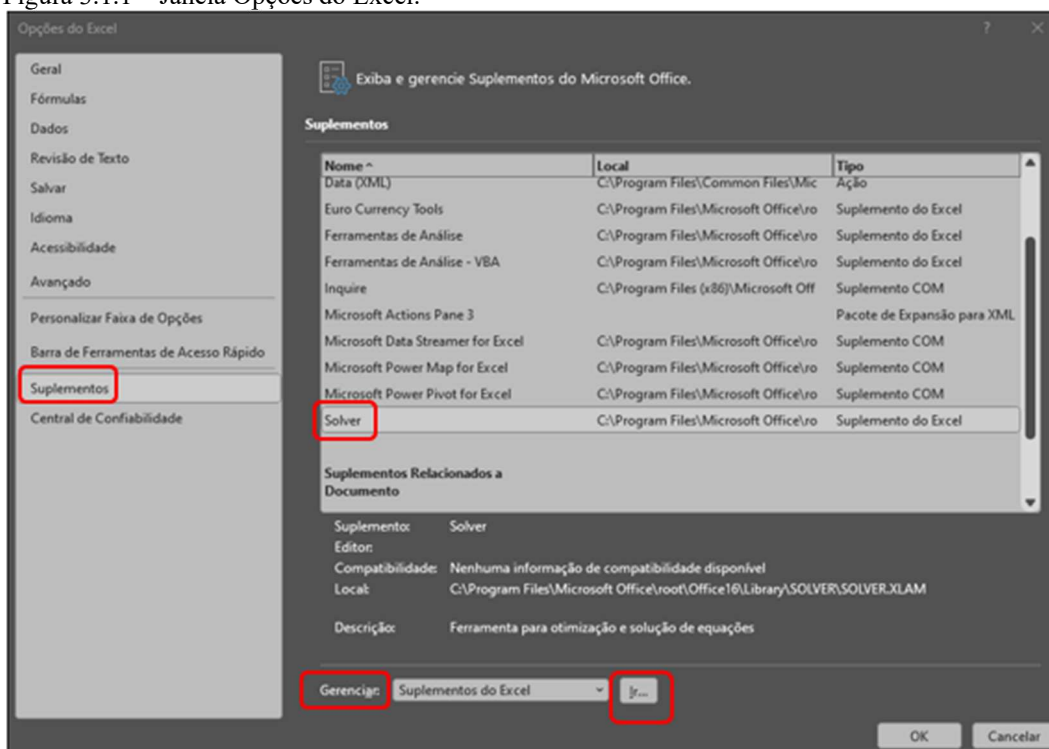
Guia: ARQUIVO

Opção: Opções

Seleção: Suplementos

Surge a caixa de diálogo “Opções do Excel”. Veja na Figura 3.1.1.

Figura 3.1.1 – Janela Opções do Excel.



Fonte: Autoria própria (2025).

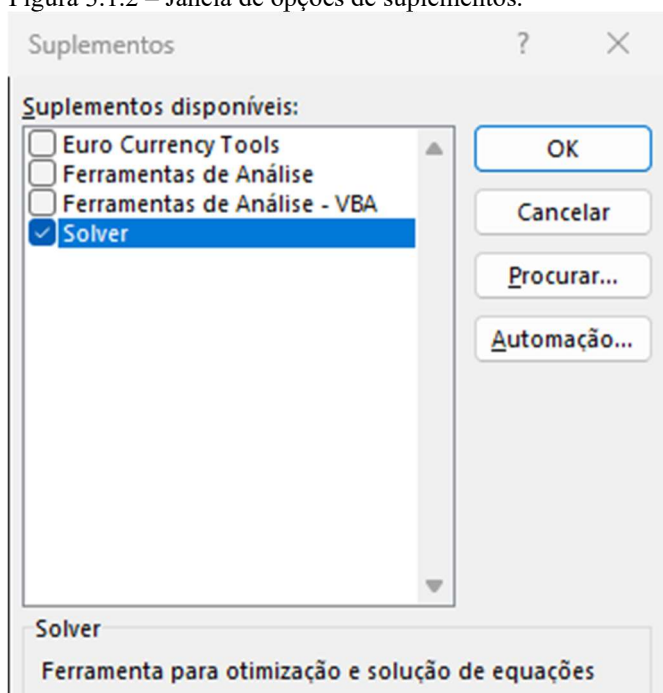
Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021.

Na parte mais à esquerda da Figura 3.1.1 encontra-se a opção de suplementos, clique, sempre com o botão esquerdo do mouse, sobre ele e na janela à direita escolha a opção do Solver. Na mesma janela, canto inferior ao lado esquerdo, está o gerenciador de ferramentas ativas/inativas do Excel, em que no campo existe um botão drop-down ¹, que aponta para a opção suplementos do Excel, acionemos o botão Ir.

Com isso se abrirá a caixa de diálogo Suplementos com exatamente 4 opções, como mostra a Figura 3.1.2, ela aparecerá com todas as opções igualmente as três primeiras, agora basta marcar a opção do Solver, como já aparece marcado na Figura 3.1.2, e acionaremos o botão OK. Caso o suplemento ainda não tenha sido instalado, o Excel pede a confirmação de instalação, clique em sim e o processo se completar, o que pode demorar um pouco. (Manzano, et al., 2013, p. 137-139)

¹ A lista suspensa, ou drop-down list, no Excel é uma lista de opções predefinidas que o usuário pode selecionar em vez de digitar manualmente.

Figura 3.1.2 – Janela de opções de suplementos.

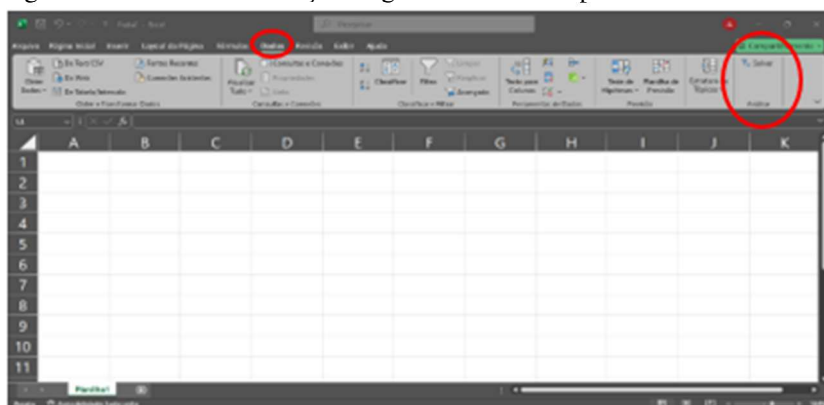


Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021

Se todos os passos foram seguidos corretamente neste momento o Solver já está ativo e aparecerá para você na Barra Menu-Guia Dados – Solver. Como mostra a Figura 3.1.3, o Solver se encontra na parte superior direito do seu monitor.

Figura 3.1.3 – Janela de seleção da guia Dados onde aparece o Solver como opção.



Fonte: Autoria própria (2025)

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021

3.2 Solução do problema 1.3 com a ferramenta solver do excel

Antes de iniciar as soluções dos problemas de programação, propriamente dito, iremos primeiro estabelecer alguns critérios que precisarão ser seguidos. (Lachtermacher, 2002) Temos

que designar cada uma das células, na planilha eletrônica do Excel, que ficarão associadas com os seguintes elementos:

- Função – Objetivo (Expressão a ser otimizada).
- Variáveis de decisão (Variáveis que o modelador pode alterar seu valor).
- Para cada restrição:
 - Uma para o lado esquerdo da restrição – LHS (left hand side).
 - Uma para o lado direito da restrição – RHS (right hand side).

Agora vamos resolver o problema 1.3 que já foi modelado para a solução gráfica, aqui iremos modela-lo para planilha do Excel e encontrar sua solução com a ferramenta Solver, ao final iremos comparar os resultados. Precisamos minimizar o seguinte problema:

$$\text{Min}Z(x_1, x_2) = 100x_1 + 200x_2$$

Sujeito a

$$8x_1 + 2x_2 \geq 16$$

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + 7x_2 \geq 28$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Nas células B2 e C2 estarão os coeficientes da função objetivo, as células B3 e C3 no momento estarão vazias, mas serão nossas células variáveis do problema, elas mostrarão o valor final das variáveis quando a função objetivo for resolvida. Já a célula B4 será nossa célula alvo, quando formos definir o objetivo, será ela que apresentará o resultado ótimo da função objetivo, caso o problema esteja modelado corretamente ou possua solução. As células B8, B9 e B10 são as células em que estarão os coeficientes das restrições da variável x_1 , as células C8, C9 e C10 são as células dos coeficientes da variável x_2 nas restrições. A coluna de E8 até E10 é o lado esquerdo das restrições, nela aparecerá o resultado que informa o quanto as restrições foram satisfeitas. Por fim, não menos importante, a coluna de G8 até G10 é o lado direito das restrições, em cada célula está o coeficiente da sua respectiva restrição. Veja na figura 3.2.1 a planilha do Excel antes de quaisquer comandos ou fórmulas.

Figura 3.2.1 – Primeira planilha da modelagem do problema 2.2.

	A	B	C	D	E	F	G
1	FUNÇÃO	X1	X2				
2	OBJETIVO	100	200				
3	Células Variáveis →						
4	Z=						
5							
6	VARIÁVEIS DAS RESTRIÇÕES	Coeficiente das variáveis					Constantes
7	Nº DAS RESTRIÇÕES	X1	X2		LHS		RHS
8	1	8	2			≥	16
9	2	1	1			≥	6
10	3	2	7			≥	28

Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021.

Neste problema nós teremos apenas 4 fórmulas, veja na Tabela 3.2.1 quais são as fórmulas, o seu endereço de célula e quais células são usadas nas fórmulas.

Tabela 3.2.1 – Tabela de fórmulas do problema 2.2, modelagem para o Solver.

FÓRMULAS DA MODELAGEM DO PROBLEMA		
REPRESENTA	ENDEREÇO DE CÉLULA	FÓRMULA
VALOR DA (F.O) $Z(x_1, x_2)$	B4	=B2*B3+C2*C3
LHS DA 1ª RESTRIÇÃO	E8	=B8*\$B\$3+C8*\$C\$3
LHS DA 2ª RESTRIÇÃO	E9	=B9*\$B\$3+C9*\$C\$3
LHS DA 3ª RESTRIÇÃO	E10	=B10*\$B\$3+C10*\$C\$3

Fonte: Autoria própria (2025).

Observemos na Figura 3.2.2 como ficará a planilha após acréscimo das fórmulas da Tabela 4.2.1. Agora basta dar os comandos necessários para avisar ao Excel qual é nossa célula alvo (onde será apresentado o valor da função objetivo), as células variáveis (onde aparecerá o valor das variáveis do ponto ótimo) e das restrições do problema.

O \$ significa que as e linhas e colunas são fixas, a fim de facilitar a cópia de comandos que possuem o mesmo padrão, nas colunas e linhas adjacentes, isto é, inserir fórmulas pelo “click e arraste”.

Figura 3.2.2 – Planilha após as fórmulas da Tabela 4.2.1.

	A	B	C	D	E	F	G
1	FUNÇÃO	X1	X2				
2	OBJETIVO	100	200				
3	Células Variáveis →						
4	Z=	0					
5							
6	VARIÁVEIS DAS RESTRIÇÕES	Coeficiente das variáveis					Constantes
7	Nº DAS RESTRIÇÕES	X1	X2		LHS		RHS
8	1	8	2		0	≥	16
9	2	1	1		0	≥	6
10	3	2	7		0	≥	28

Fonte: Lima, Jonas 2025.

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021

Abrindo a caixa de diálogo da ferramenta do Solver. Na barra de Menu do Excel, indo até a guia Dados e com um clique simples, lado esquerdo do mouse sobre ela teremos várias opções nessa guia, dentre elas tem a ferramenta do Solver como mostrado na Figura 3.1.3. Com um clique simples sobre botão do Solver abrirá a caixa de diálogo com nome Parâmetros do Solver como mostra a Figura 3.2.3.

Figura 3.2.3 – Caixa de diálogo parâmetros do Solver

Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021

Na primeira linha temos o campo “Definir Objetivo”, é nele que você indicará qual é sua célula alvo (célula em que aparecerá o valor da função objetivo). Há pelo menos duas maneiras de fazer isso. A primeira é colocando digitalmente o endereço de célula, para o nosso caso ficará \$B\$4, a segunda maneira é clicando no botão de seleção que está do lado esquerdo

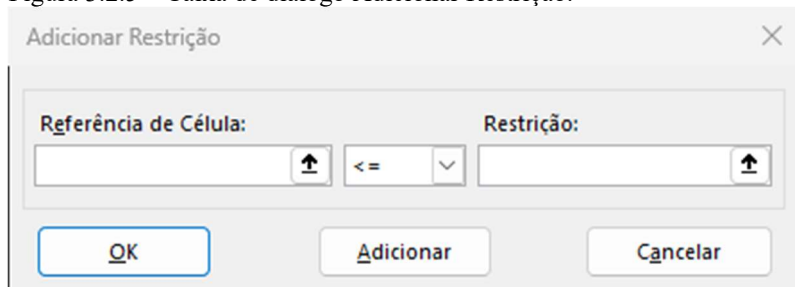
do campo representado por uma seta virada para cima. Ele te levará direto para a planilha de células do Excel, onde você irá dar um clique sobre a célula desejada.

Iremos agora para a segunda linha. Ela começa com o nome “Para:” e têm como opções “Máx, Mín e Valor de:” temos que optar apenas pela primeira ou segunda opção, no caso desse problema marcaremos a segunda opção.

Terceira linha tem o nome “Alterando Células Variáveis” esta linha possui um campo logo abaixo do seu nome onde colocaremos as células que foram selecionadas para os valores das variáveis da função objetivo, no caso do presente problema são as células B3 e C3. A forma de selecionar as células desejadas são digitando seus endereços de células, ou pelo botão de seleção presente no campo e em ambos os casos, após a seleção para o nosso problema, ficará com o campo $\$B\$3:\$C\3 nele.

O campo seguinte possui o nome “Sujeito às Restrições” esse campo é maior que os anteriores e têm como opções “Adicionar, Alterar, Excluir, Redefinir Tudo e Carregar/Salvar” daremos um clique em “Adicionar” o que te levará para a caixa de diálogo com o nome “Adicionar Restrição” como na Figura 3.2.5.

Figura 3.2.5 – Caixa de diálogo Adicionar Restrição.



Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021

No campo “Referência de Célula:” está destinado aos lados esquerdos (LHS) das células das nossas restrições. No campo ao meio teremos como opções, ao clicar no drop-down, “ $\leq$, $=$, $\geq$, int, bin e dif” dos quais nos interessam apenas as três primeiras e que escolheremos de acordo com o sinal de cada restrição. Já no campo “Restrição” é destinado ao lado direito de cada restrição, nele serão selecionados os endereços das células uma por uma, caso tenham sinais diferentes ou se for opção do modelador e também pode ser selecionado várias células numa única vez, como veremos a seguir. Selecionando o LHS da primeira restrição (E8), selecionando o sinal de $\geq$, selecionando o RHS da primeira restrição (G8) e clicando no botão “Adicionar”. Selecionando as duas células restantes, do lado LHS (E9 e E10), selecionando o sinal de $\geq$ e selecionar as duas células restantes do lado RHS (G9 e G10), sempre mantendo a ordem

de linha e coluna, clique em OK e retornaremos a caixa de diálogo “Parâmetros do Solver”. Terminando as seleções elas terão, no campo “Sujeito às Restrições”, o seguinte formato:

$\$E\$8 \geq \$G\8

$\$E\$9:\$E\$10 \geq \$G\$9:\$G\10

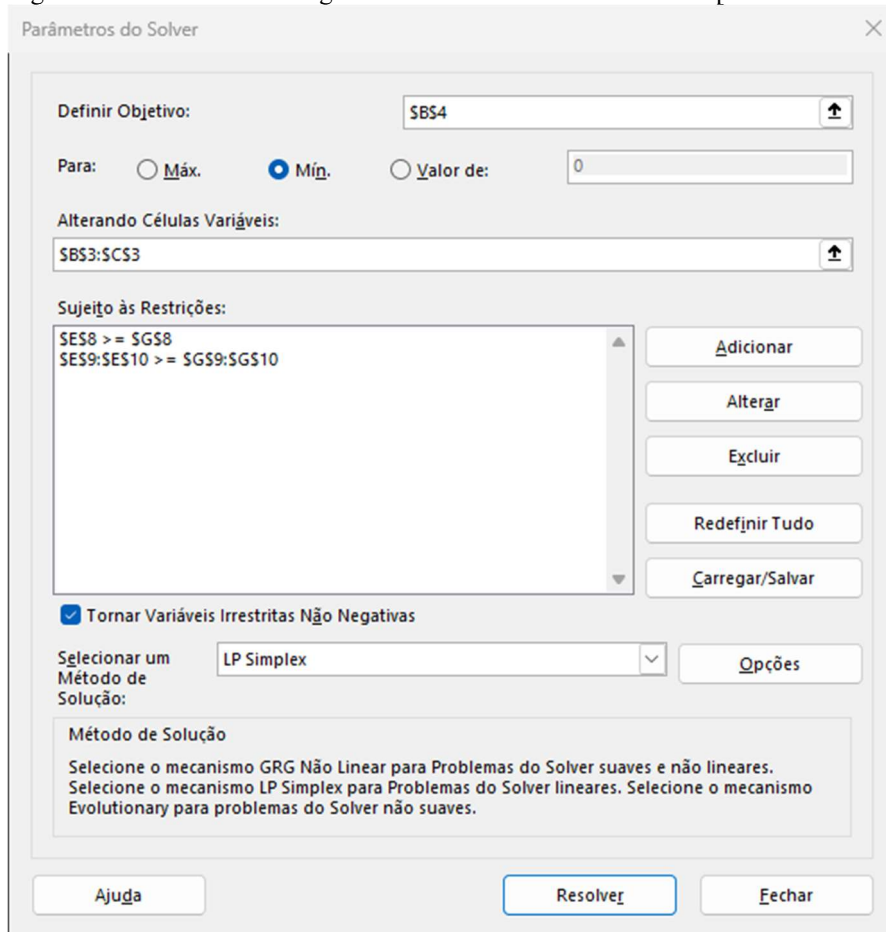
Esta seleção poderia ter também o seguinte formato:

$\$E\$8:\$E\$10 \geq \$G\$8:\$G\10 .

Com o retorno à caixa de diálogo “Parâmetros do Solver” temos a próxima linha com o nome “Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas” há um check box que precisamos deixar marcado.

Logo abaixo há um outro campo com o nome “Selecionar um Método de Solução” nesse campo tem uma drop-down com as opções de “GRG Não Linear, LP Simplex e Evolutionary” das quais só estamos interessados na opção LP Simplex e a deixaremos marcada. Seguido todos os passos corretamente ficaremos a caixa de diálogo “Parâmetros do Solver” como na Figura 3.2.6.

Figura 3.2.6 – Caixa de diálogo Parâmetros do Solver com os campos selecionados.

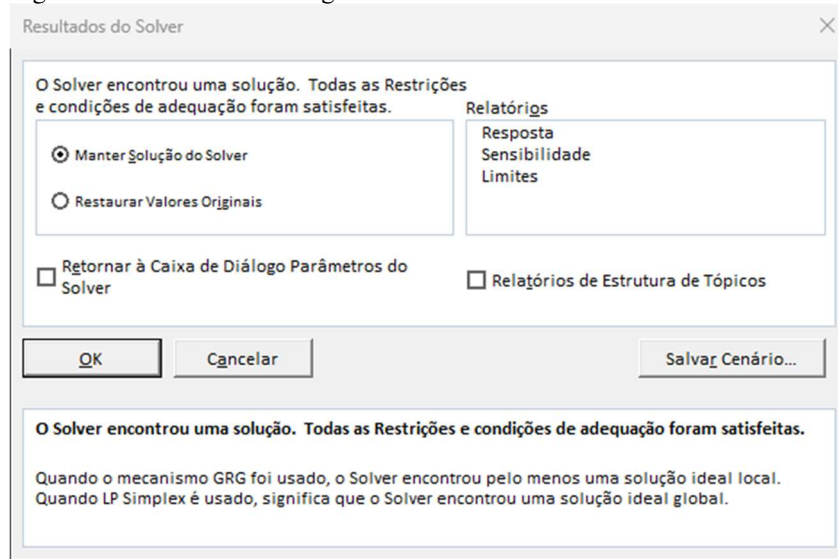


Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021.

Com todos os parâmetros devidamente selecionados só precisamos dar o comando para o Solver resolver o nosso problema, para isso basta clicar no botão resolver e o obteremos nossa resposta. Como podemos ver na nova caixa de diálogo com o nome “Resultados do Solver” nela o Solver avisa se conseguiu encontrar uma solução com todas as restrições e adequações. Como mostra na Figura 3.2.7.

Figura 3.2.7 – Caixa de diálogo Resultados do Solver.



Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021.

Neste momento, das opções apresentadas, só nos interessa marcar em “Relatórios” a opção “Resposta” e clicar em Ok, para retornar à tela principal de planilhas do Excel e verificar nossa resposta e o relatório de resposta do nosso problema. Veja nas Figura 3.2.8 e Figura 3.2.9.

Figura 3.2.8 – Planilha do Excel com a resposta do problema 2.2.

	A	B	C	D	E	F	G
1	FUNÇÃO	X1	X2				
2	OBJETIVO	100	200				
3	Células Variáveis →	2,8	3,2				
4	Z=	920					
5							
6	VARIÁVEIS DAS RESTRIÇÕES	Coeficiente das variáveis					Constantes
7	Nº DAS RESTRIÇÕES	X1	X2		LHS		RHS
8	1	8	2		28,8	≥	16
9	2	1	1		6	≥	6
10	3	2	7		28	≥	28

Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021

Resposta: $x_1 = \frac{14}{5} = 2,8$ dias = 2 dias 19 horas e 12 minutos e $x_2 = \frac{16}{5} = 3,2 = 3$ dias 4 horas e 48 minutos, com um custo de R\$ 920000,00.

Podemos comparar os resultados das soluções encontradas pelo método simplex analítico, isto é, sem usar a Tabela Simplex, e perceber que são os mesmos resultados encontrados com o Suplemento Solver do Excel.

Figura 3.2.9 – Relatório de Resposta do problema 2.2 do Solver.

Microsoft Excel 16.0 Relatório de Respostas
Planilha: [Pasta1.xlsx]Planilha 1
Relatório Criado: 15/02/2025 16:09:33
Resultado: O Solver encontrou uma solução. Todas as Restrições e condições de adequação foram satisfeitas.
Mecanismo do Solver
Mecanismo: LP Simplex
Tempo da Solução: 0,015 Segundos.
Iterações: 3 Subproblemas: 0
Opções do Solver
Tempo Máx. Ilimitado, Iterações Ilimitado, Precisão 0,000001, Usar Escala Automática
Subproblemas Máx. Ilimitado, Soluç. Máx. Núm. Inteiro Ilimitado, Tolerância de Número Inteiro 1%

Célula do Objetivo (Mín.)

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final
\$B\$4	Z= X1	920	920

Células Variáveis

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final	Número Inteiro
\$B\$3	Células Variáveis → X1	2,8	2,8 Conting.	
\$C\$3	Células Variáveis → X2	3,2	3,2 Conting.	

Restrições

Célula	Nome	Valor da Célula	Fórmula	Status	Margem de Atraso
\$E\$8	LHS	28,8	\$E\$8>=\$G\$8	Não-associação	12,8
\$E\$9	LHS	6	\$E\$9>=\$G\$9	Associação	0
\$E\$10	LHS	28	\$E\$10>=\$G\$10	Associação	0

Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Professoenal Plus 2021

O relatório mostra que foram feitas três iterações, o valor da função objetivo e das variáveis de decisão com seus respectivos endereços de células. Na última parte do relatório podemos ver a referência ao lado esquerdo da função, com seus respectivos endereços de células e também que todas as restrições do problema foram satisfeitas.

3.3 Um problema de produção de motos

A Motorbike S/A produz os modelos das motos C250, C 750 e C1000. A, B e C são os três componentes que entram no processo produtivo, cuja a oferta diária é pequena para limitar a produção. Os suprimentos diários A, B e C são, respectivamente, de 400 kg, 200kg e 300 kg. Embora os componentes B e C possam não ser utilizados ao dia, todos os componentes A existentes devem ser utilizados ao dia por razões de segurança.

A Tabela 3.3.1 apresenta o lucro unitário e as quantidades de componentes para produzir cada modelo de motocicleta:

Tabela 3.3.1 – Lucro unitário por quantidade de componentes.

Motocicleta		Componentes (kg)		
Modelo	Lucro unitário	A	B	C
C250	R\$ 140,00	2	1	1
C750	R\$ 300,00	8	1	0
C1000	R\$ 400,00	2	4	1

Fonte: (Lachtermacher, 2002).

Encontre a programação produção diária ótima utilizando a ferramenta Solver do Excel.

Para modelar o problema chamaremos de x_1 a quantidades de motos C250 produzidas, de x_2 a quantidades de motos C750 produzidas e x_3 a quantidades de motos C1000 produzidas. O lucro total será dado por $L(x_1, x_2, x_3) = 140x_1 + 300x_2 + 400x_3$, já para as restrições sabemos que o componente A precisa ser usado totalmente ao dia, ou seja, não pode haver sobras por medidas de segurança, no entanto, os componentes B e C não precisam ser usados totalmente o que levará ao seguinte PPL:

$$\text{Máx} L(x_1, x_2, x_3) = 140x_1 + 300x_2 + 400x_3$$

Sujeito a:

$$2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 400$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 200$$

$$x_1 + x_3 \leq 300$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Para solução com a ferramenta Solver do Excel foi elaborada a Tabela 3.3.2

Tabela 3.3.2 – Plano de modelagem para a ferramenta Solver do Excel do problema 3.3.

FÓRMULAS DA MODELAGEM DO PROBLEMA		
REPRESENTA	CÉLULA	FÓRMULA
VALOR DA FUNÇÃO L	B4	$=B2*B3+C2*C3+D2*D3$
LHS DA 1ª RESTRIÇÃO	E8	$=B8*\$B\$3+C8*\$C\$3+D8*\$D\3
LHS DA 2ª RESTRIÇÃO	E9	$=B9*\$B\$3+C9*\$C\$3+D9*\$D\3
LHS DA 3ª RESTRIÇÃO	E10	$=B10*\$B\$3+C10*\$C\$3+D10*\$D\3
Células Variáveis $\rightarrow$	$[x_1 \rightarrow B3]; [x_2 \rightarrow C3]; [x_3 \rightarrow D3]$	

Fonte: Autoria própria (2025)

O problema já foi modelado e ficará com o formato da Figura 3.3.1.

Figura 3.3.1 – Problema da produção de motos modelado.

	A	B	C	D	E	F	G
1	FUNÇÃO	X1	X2	X3			
2	OBJETIVO	140	300	400			
3	Células Variáveis $\rightarrow$						
4	$L =$	0					
5							
6	VARIÁVEIS DAS RESTRIÇÕES	Coeficiente das Restrições					
7	Nº DAS RESTRIÇÕES	X1	X2	X3	LHS		RHS
8	1	2	8	2	0	=	400
9	2	1	1	4	0	$\leq$	200
10	3	1	0	1	0	$\leq$	300

Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021.

Agora iremos dar os comandos para a ferramenta Solver resolver o nosso problema de programação. Os comandos serão:

- Definir objetivo: $\$B\4
- Para: Marcar a opção Máx
- Alterando células variáveis: $\$B\$3:\$D\3
- Sujeito às restrições: Adicionar $\$E\$8 = \$G\8 e $\$E\$9:\$E\$10 \leq \$G\$9:\$G\10
- Tornar variáveis irrestritas não negativas: Marcar essa opção.
- Selecionar um método de solução: LP Simplex
- Resolver: Clicar
- Após o clique marcaremos a “opção resposta”, na nova caixa de diálogo que será aberta e clicaremos em ok, caso queiramos um relatório de resposta, caso não, basta clicarmos em ok e retornaremos para a planilha do Excel, como a tela da Figura 3.3.2.

Figura 3.3.2 – Solução do Solver para o problema da produção de Motos.

	A	B	C	D	E	F	G
1	FUNÇÃO	X1	X2	X3			
2	OBJETIVO	140	300	400			
3	Células Variáveis →	0	40	40			
4	L =	28000					
5							
6	VARIÁVEIS DAS RESTRIÇÕES	Coeficiente das Restrições					Constantes
7	Nº DAS RESTRIÇÕES	X1	X2	X3	LHS		RHS
8	1	2	8	2	400	=	400
9	2	1	1	4	200	≤	200
10	3	1	0	1	40	≤	300

Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021.

Resposta: $x_1 = 0$, $x_2 = 40$ e $x_3 = 40$, com um lucro $L(x_1, x_2, x_3) = R\$28000,00$.

3.4 Encontrando o nível de produção ótima com solver do excel

Uma empresa industrial fabrica três produtos $p1$, $p2$ e $p3$, com lucro unitário de, respectivamente, R\$ 2,00, R\$ 3,00 e R\$ 4,00. O gerente de produção identificou as seguintes restrições no processo produtivo:

- A capacidade produtiva total é de 30 unidades por mês.
- Por utilizar material radioativo, a empresa recebe uma autorização do governo federal para importar apenas uma quantidade fixa de 60 kg desse material, o qual deve ser plenamente utilizado durante o mês por razões de segurança.
- As quantidades necessárias do material radioativo para a fabricação dos produtos $p1$, $p2$ e $p3$ são de, respectivamente, 2kg, 1kg e 3kg.

Encontre o nível de produção ótima utilizando o Solver do Excel. (Lachtermacher, 2002, p. 101).

Solução:

Para o modelo o problema podemos afirmar que o lucro L é dado por $L = 2p1 + 3p2 + 4p3$, para as restrições, podemos concluir de a) que, $p1 + p2 + p3 \leq 30$, de b) conclui-se que, esse produto precisa ser utilizado plenamente por razões de segurança, o que acarreta para c) a restrição $2p1 + p2 + 3p3 = 60$. E $p1, p2$ e $p3$ representarão a quantidade de cada produto produzido, o que nos leva ao seguinte PPL:

$$\text{Máx} L = 2p1 + 3p2 + 4p3$$

Sujeito à:

$$\begin{aligned}
 p1 + p2 + p3 &\leq 30 \\
 2p1 + p2 + 3p3 &= 60 \\
 p1, p2, p3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Para solução com a ferramenta Solver do Excel foi elaborada a Tabela 3.4.1

Tabela 3.4.1 – Plano de modelagem para a ferramenta Solver do Excel do problema 3.4.

FÓRMULAS DA MODELAGEM DO PROBLEMA		
REPRESENTA	CÉLULA	FÓRMULA
VALOR DA FUNÇÃO L	B4	=B2*B3+C2*C3+D2*D3
LHS DA 1ª RESTRIÇÃO	E8	=B8*\$B\$3+C8*\$C\$3+D8*\$D\$3
LHS DA 2ª RESTRIÇÃO	E9	=B9*\$B\$3+C9*\$C\$3+D9*\$D\$3
Células Variáveis→	[p1 → B3]; [p2 → C3]; [p3 → D3]	

Fonte: Autoria própria (2025).

Com o problema já modelado ficará da forma mostrada na Figura 3.4.1 na planilha do Excel.

Figura 3.4.1 – Problema do nível ótimo modelado para solução com o Solver.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	FUNÇÃO	p1	p2	p3						
2	OBJETIVO	2	3	4						
3	Células Variáveis →									
4	$L =$	0								
5										
6	VARIÁVEIS DAS RESTRIÇÕES	Coeficiente das Restrições					Constantes			
7	Nº DAS RESTRIÇÕES	p1	p2	p3	LHS		RHS			
8	1	1	1	1	0	≤	30			
9	2	2	1	3	0	=	60			
10										
11										
12										

Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021.

Precisamos apenas dar os comandos necessários para o Solver resolver o problema, encontrando o lucro máximo da função objetivo e a quantidade de cada produto produzido nesse lucro. Vejamos o resultado na Figura 3.4.2 e o relatório de resposta na Figura 3.4.3.

Figura 3.4.2 – Resposta do que foi proposto no problema 4.4.

	A	B	C	D	E	F	G
1	FUNÇÃO	p1	p2	p3			
2	OBJETIVO	2	3	4			
3	Células Variáveis →	0	15	15			
4	$L =$	105					
5							
6	VARIÁVEIS DAS RESTRIÇÕES	Coeficiente das Restrições				Constantes	
7	Nº DAS RESTRIÇÕES	p1	p2	p3	LHS		RHS
8	1	1	1	1	30	≤	30
9	2	2	1	3	60	=	60

Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021.

Resposta: $p1 = 0, p2 = 15$ e $p3 = 15$, com um lucro $L(p1, p2, p3) = R\$105,00$.

Figura 3.4.3 – Relatório de resposta do problema 3.4.

Microsoft Excel 16.0 Relatório de Respostas

Planilha: [Pasta1.xlsx]Planilha11

Relatório Criado: 16/02/2025 07:32:22

Resultado: O Solver encontrou uma solução. Todas as Restrições e condições de adequação foram satisfeitas

Mecanismo do Solver

Mecanismo: LP Simplex

Tempo da Solução: 0,016 Segundos.

Iterações: 2 Subproblemas: 0

Opções do Solver

Tempo Máx. Ilimitado, Iterações Ilimitado, Precision 0,000001, Usar Escala Automática

Subproblemas Máx. Ilimitado, Soluções Máx. Núm. Inteiro Ilimitado, Tolerância de Número Inteiro 1%, Assumir

Célula do Objetivo (Máx.)

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final
\$B\$4	p1	0	105

Células Variáveis

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final	Número Inteiro
\$B\$3	Células Variáveis → p1	0	0	Conting.
\$C\$3	Células Variáveis → p2	0	15	Conting.
\$D\$3	Células Variáveis → p3	0	15	Conting.

Restrições

Célula	Nome	Valor da Célula	Fórmula	Status	Margem de Atraso
\$E\$8	LHS	30	\$E\$8<=\$G\$8	Associação	0
\$E\$9	LHS	60	\$E\$9=\$G\$9	Associação	0

Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021.

3.5 Problema de um custo de transporte em relação a capacidade dos caminhões utilizando a ferramenta solver do excel

Uma companhia de transporte dispõe de 4 caminhões com capacidade para transportar 5.000 kg, 4 caminhões de 10.000 kg de capacidade e 2 caminhões de 20.000 kg de capacidade. O custo por hora dos caminhões do primeiro tipo é 200 u.c.p., do segundo 300 u.c.p. e do terceiro 400 u.c.p. Como devem ser usados os caminhões para transportar uma carga de 80.000

kg, para que o custo seja o mínimo? Você pode encontrar esse problema no livro do (Boldrini, et al., 1980 p. 372).

Modelando o problema.

Adotemos x_1 para a quantidade de caminhões com capacidade máxima de carregar 5.000 kg, x_2 para os caminhões com capacidade máxima de 10.000 kg e x_3 os caminhões com capacidade máxima de 20.000 kg. Se C é o custo total no transporte, ele será dado por, $C(x_1, x_2, x_3) = 200x_1 + 300x_2 + 400x_3$ que é justamente a função objetivo. Para as restrições temos; 1ª restrição $x_1 \leq 4$ (quantidade máxima de caminhões com capacidade de 5000 kg); 2ª restrição $x_2 \leq 4$ (quantidade máxima de caminhões com capacidade de 10.000 kg); 3ª restrição $x_3 \leq 2$ (quantidade máxima de caminhões com capacidade de 20.000 kg); 4ª restrição $5000x_1 + 10000x_2 + 20000x_3 = 80000$ (quantidade total a ser transportada); por fim as restrições $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. A função o objetivo $C(x_1, x_2, x_3) = 200x_1 + 300x_2 + 400x_3$ é que devemos minimizar.

Portanto, ficaremos com o seguinte PPL para resolver:

$$\text{Min}C(x_1, x_2, x_3) = 200x_1 + 300x_2 + 400x_3$$

Sujeito a:

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_3 \leq 2$$

$$5000x_1 + 10000x_2 + 20000x_3 = 80000$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Na modelagem para o Solver nos levará a Tabela 3.5.1 e Figura 3.5.1 que é o PPL, já na planilha do Excel, modelado para o Solver resolver.

Tabela 3.5.1 – Plano de modelagem para a ferramenta Solver do Excel do problema 4.5

FÓRMULAS DA MODELAGEM DO PROBLEMA		
REPRESENTA	CÉLULA	FÓRMULA
VALOR DA FUNÇÃO OBJETIVO $C(x_1, x_2, x_3)$	B4	=B2*B3+C2*C3+D2*D3
LHS DA 1ª RESTRIÇÃO	E8	=B8*\$B\$3+C8*\$C\$3+D8*\$D\$3
LHS DA 2ª RESTRIÇÃO	E9	=B9*\$B\$3+C9*\$C\$3+D9*\$D\$3
LHS DA 3ª RESTRIÇÃO	E10	=B10*\$B\$3+C10*\$C\$3+D10*\$D\$3
LHS DA 4ª RESTRIÇÃO	E11	=B11*\$B\$3+C11*\$C\$3+D11*\$D\$3
Células Variáveis →	$[x_1 \rightarrow B3]; [x_2 \rightarrow C3]; [x_3 \rightarrow D3]$	

Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 3.5.1 – Problema 3.5 do custo de transporte modelado para solução com o Solver.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	FUNÇÃO	x_1	x_2	x_3				
2	OBJETIVO	200	300	400				
3	Células Variáveis →							
4	$\text{Min}C(x_1, x_2, x_3) =$	0						
5								
6	VARIÁVEIS DAS RESTRIÇÕES	x_1	x_2	x_3				Constantes
7	Nº DAS RESTRIÇÕES					LHS		RHS
8	1ª	1	0	0		0	≤	4
9	2ª	0	1	0		0	≤	4
10	3ª	0	0	1		0	≤	2
11	4ª	5000	10000	20000		0	≥	80000

Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021.

Agora basta avisar para o Solver resolver e logo após obteremos como resposta a planilha da Figura 3.5.2.

Figura 3.5.2 – Problema 3.5 do custo de transporte com solução do Solver.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	FUNÇÃO	x_1	x_2	x_3				
2	OBJETIVO	200	300	400				
3	Células Variáveis →	0	4	2				
4	$C(x_1, x_2, x_3) =$	2000						
5								
6	VARIÁVEIS DAS RESTRIÇÕES	x_1	x_2	x_3				Constantes
7	Nº DAS RESTRIÇÕES					LHS		RHS
8	1ª	1	0	0		0	≤	4
9	2ª	0	1	0		4	≤	4
10	3ª	0	0	1		2	≤	2
11	4ª	5000	10000	20000		80000	≥	80000

Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021.

Portanto a resposta do PPL é $x_1 = 0, x_2 = 4$ e $x_3 = 2$, com um custo $C(x_1, x_2, x_3) = \text{R\$ } 2000,00$.

3.6 Problema de pl da produção x lucro de vendas de televisores

A Cia. VT produz televisores em cores e em preto e branco. Uma pesquisa de mercado indicou que mensalmente podem ser vendidos, no máximo, 4.000 unidades de aparelhos em cores e 1.000 unidades em preto e branco. O setor de produção informou que o número de homens-horas disponíveis por mês é de 50.000, e um aparelho colorido requer 20 homens-horas e um aparelho preto e branco requer 15 homens-horas.

O departamento de vendas informou que para atender os pedidos já efetuados este mês, deverão ser produzidos, no mínimo, 800 aparelhos coloridos. Os aparelhos são embalados em caixas de papelão e o departamento de matéria-prima informou que, por uma falha de previsão, existem disponíveis somente 4.200 caixas para embalagem dos aparelhos e para este mês não está prevista nova compra deste material. Os lucros unitários dos aparelhos são Cr\$ 50.000,00 (colorido) e Cr\$ 28.000 (preto e branco). Deseja-se estabelecer o plano de produção que produzirá o lucro máximo para esta indústria. Esse problema pode ser encontrado no livro do (Boldrini, et al., 1980, p. 398).

Solução:

Para modelar o problema podemos chamar de x_c a quantidade de aparelhos coloridos e de x_p a quantidade de aparelhos em preto e branco. Para a 1ª restrição teremos $x_c \leq 4000$ (é a quantidade máxima de aparelhos em cores que poderão ser vendidos); para a 2ª restrição teremos $x_p \leq 1000$ (é a quantidade máxima de aparelhos em preto e branco que poderão ser vendidos); para a 3ª restrição teremos $20x_c + 15x_p = 50000$ (quantidade de homens horas para produzir cada tipo de aparelho vezes a quantidade individual de cada tipo de aparelho é o total de aparelhos produzidos); para a 4ª restrição teremos $x_c \geq 800$ (quantidade mínima de aparelhos coloridos produzidos); para a 5ª restrição teremos $x_c + x_p = 4200$ (quantidade total de aparelhos que deverão ser produzidos terá que ser igual a quantidade de caixas); as restrições triviais $x_c, x_p \geq 0$; e a função objetivo será dada por $L(x_c, x_p) = 50000x_c + 28000x_p$, o que nos leva ao seguinte PPL:

$$\text{Máx} L(x_c, x_p) = 50000x_c + 28000x_p$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
 x_c &\leq 4000 \\
 x_p &\leq 1000 \\
 20x_c + 15x_p &= 50000 \\
 x_c &\geq 800 \\
 x_c + x_p &= 4200 \\
 x_c, x_p &\geq 0
 \end{aligned}$$

Nossa modelagem para o Solver nos levará a Tabela 3.6.1 e Figura 3.6.1 que é o PPL, já na planilha do Excel, modelado para o Solver resolver.

Tabela 3.6.1 – Plano de modelagem para a ferramenta Solver do Excel do problema 3.6

FÓRMULAS DA MODELAGEM DO PROBLEMA		
REPRESENTA	CÉLULA	FÓRMULA
VALOR DA FUNÇÃO OBJETIVO $L(x_c, x_p)$	B4	=B2*B3+C2*C3
LHS DA 1ª RESTRIÇÃO	E8	=B8*\$B\$3+C8*\$C\$3
LHS DA 2ª RESTRIÇÃO	E9	=B9*\$B\$3+C9*\$C\$3
LHS DA 3ª RESTRIÇÃO	E10	=B10*\$B\$3+C10*\$C\$3
LHS DA 4ª RESTRIÇÃO	E11	=B11*\$B\$3+C11*\$C\$3
LHS DA 5ª RESTRIÇÃO	E12	=B12*\$B\$3+C12*\$C\$3
Células Variáveis→	$[x_c \rightarrow B3]; [x_p \rightarrow C3]$	

Fonte: Autoria própria (2025).

O PPL já foi modelado com as fórmulas de comandos do Excel e ficará com o formato da Figura 3.6.1 na planilha.

Figura 3.6.1 – Problema de produção x venda de televisores modelado para solução com o Solver.

	A	B	C	D	E	F	G
1	FUNÇÃO	x_c	x_p				
2	OBJETIVO	CR\$ 50.000,00	CR\$ 28.000,00				
3	Células Variáveis →						
4	$L(x_p, x_c) =$	CR\$ 0,00					
5							
6	VARIÁVEIS DAS RESTRIÇÕES	Coeficiente das variáveis					Constantes
7	Nº DAS RESTRIÇÕES	x_c	x_p		LHS		RHS
8	1ª	1	0		0	≤	4000
9	2ª	0	1		0	≤	1000
10	3ª	20	15		0	=	50000
11	4ª	1	0		0	≥	800
12	5ª	1	1		0	≤	4200

Fonte: Lima, Jonas 2025.

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021.

Agora basta avisar para o Solver resolver e logo após obteremos como resposta a planilha da Figura 3.6.2.

Figura 3.6.2 – Resposta do problema 3.6 de produção x venda dado pelo Solver.

	A	B	C	D	E	F	G
1	FUNÇÃO	x_c	x_p				
2	OBJETIVO	CR\$ 50.000,00	CR\$ 28.000,00				
3	Células Variáveis →	2500	0				
4	$L(x_p, x_c) =$	CR\$ 125.000.000,00					
5							
6	VARIÁVEIS DAS RESTRIÇÕES	Coeficiente das variáveis					Constantes
7	Nº DAS RESTRIÇÕES	x_c	x_p		LHS		RHS
8	1ª	1	0		2500	≤	4000
9	2ª	0	1		0	≤	1000
10	3ª	20	15		50000	=	50000
11	4ª	1	0		2500	≥	800
12	5ª	1	1		2500	≤	4200

Fonte: Autoria própria(2025)

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021

Portanto a resposta do PPL é $x_c = 2500, x_p = 0$, com um lucro de

$$L(x_1, x_2) = \text{CR\$ } 125000000,00.$$

3.7 Diversificar investimento para rendimento máximo com o solver

A Cia. Sovina de Investimento possui Cr\$ 6.000.000,00, quantia esta que deverá ser aplicada em 5 tipos de investimentos, sendo que os retornos para cada investimento são: 1(I1): 10%, investimento 2 (I2): 8%; investimento 3 (I3): 6%; investimento 4 (I4): 5%; investimento (I5): 9%.

O gerente desta Cia. deseja diversificar os investimentos para obter o máximo rendimento possível. Dado o elemento de risco envolvido, o gerente restringiu a quantia aplicada no

I1 a não mais que a quantia total que irá investir em I3, I4 e I5 (em conjunto). A quantia total aplicada em I2 e I5 deve ser pelo menos igual a quantia aplicada em I3. O I2 deve estar limitado a um nível que não exceda a quantidade aplicada em I4.

É preciso determinar a alocação ótima de investimento entre as 5 categorias, de uma forma que o retorno ao final do ano seja o máximo possível. Problema retirado do livro do (Boldrini, et al., 1980, p.399).

Modelando o problema:

Se x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são as partes do capital alocados, respectivamente, nos investimentos I1, I2, I3, I4 e I5, podemos determinar algebricamente, para as restrições e o retorno R dos investimentos o seguinte:

Para a primeira restrição $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6000000$; para a segunda restrição $x_1 \leq x_3 + x_4 + x_5$; para a terceira restrição $x_2 + x_5 \geq x_3$; para a quarta restrição $x_2 \leq x_4$; as restrições triviais $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$; onde $R(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0,1x_1 + 0,08x_2 + 0,06x_3 + 0,05x_4 + 0,09x_5$ é a função objetivo, o que nos leva ao seguinte PPL.

$$\text{Máx} R(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0,1x_1 + 0,08x_2 + 0,06x_3 + 0,05x_4 + 0,09x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6000000$$

$$x_1 \leq x_3 + x_4 + x_5$$

$$x_2 + x_5 \geq x_3$$

$$x_2 \leq x_4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Nossa modelagem para o Solver nos levará a Tabela 3.7.1 e Figura 3.7.1 que é o PPL, já na planilha do Excel, modelado para o Solver resolver.

Tabela 3.7.1 – Plano de modelagem para o problema de diversificação de investimento para o Solver.

FÓRMULAS DA MODELAGEM DO PROBLEMA		
REPRESENTA	CÉLULA	FÓRMULAS DE COMANDO
VALOR DA FUNÇÃO OBJETIVO $R(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$	B4	=B2*B3+C2*C3+D2*D3
LHS DA 1ª RESTRIÇÃO	H8	=B8*\$B\$3+C8*\$C\$3+D8*\$D\$3+E8*\$E\$3+F8*\$F\$3
LHS DA 2ª RESTRIÇÃO	H9	=B9*\$B\$3
RHS DA 2ª RESTRIÇÃO	J9	=D9*\$D\$3+E9*\$E\$3+F9*\$F\$3
LHS DA 3ª RESTRIÇÃO	H10	=C10*\$C\$3+F10*\$F\$3
RHS DA 3ª RESTRIÇÃO	J10	=D10*\$D\$3
LHS DA 4ª RESTRIÇÃO	H11	=C11*\$C\$3
RHS DA 4ª RESTRIÇÃO	J11	=E11*\$E\$3
Células Variáveis →	[$x_1 \rightarrow B3$]; [$x_2 \rightarrow C3$]; [$x_3 \rightarrow D3$]; [$x_4 \rightarrow E3$]; [$x_5 \rightarrow F3$]	

Fonte: Autoria própria (2025).

Esse problema se difere na modelagem dos problemas anteriores por possuírem variáveis do lado direito das restrições 2, 3 e 4, e não apenas constantes, no entanto, basta ficarmos atentos as quais pertencem ao lado direito das restrições, quais pertencem ao lado esquerdo das restrições e seguir os mesmos conceitos das fórmulas de comando, ao inseri-las.

Figura 3.7.1 – Problema de diversificação de investimento modelado para o Solver.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	FUNÇÃO	x_1	x_1	x_1	x_1					
2	OBJETIVO	0,1	0,08	0,06	0,05	0,09				
3	Células Variáveis →									
4	$R(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$	0								
5										
6	VARIÁVEIS DAS RESTRIÇÕES	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1		LHS		RHS
7	Nº DAS RESTRIÇÕES									
8	1ª	1	1	1	1	1		0	=	6000000
9	2ª	1	0	1	1	1		0	≤	0
10	3ª	0	1	1	0	1		0	≥	0
11	4ª	0	1	0	1	0		0	≤	0

Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021.

Agora basta avisar para o Solver resolver o problema, nada diferente do que foi feito nos problemas anteriores, assim, obteremos como resposta do Solver o que mostra na Figura 3.7.2 como solução do problema 3.7.

Figura 3.7.2 – Resultado do problema da diversificação de investimento utilizando o Solver.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	FUNÇÃO	x_1	x_1	x_1	x_1					
2	OBJETIVO	0,1	0,08	0,06	0,05	0,09				
3	Células Variáveis →	3000000	0	0	0	3000000				
4	$R(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$	570000								
5										
6	VARIÁVEIS DAS RESTRIÇÕES	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1		LHS		RHS
7	Nº DAS RESTRIÇÕES									
8	1ª	1	1	1	1	1		6000000	=	6000000
9	2ª	1	0	1	1	1		3000000	≤	3000000
10	3ª	0	1	1	0	1		3000000	≥	0
11	4ª	0	1	0	1	0		0	≤	0

Fonte: Autoria própria (2025).

Imagem retirada do Excel/Microsoft Office LTSC Profissional Plus 2021.

Assim podemos concluir que deverão ser investidos uma quantia $x_1 = \text{Cr\$ } 3.000.000,00$ no primeiro tipo de investimento e uma quantia $x_5 = \text{Cr\$ } 3.000.000,00$ no quinto tipo de investimento, com um rendimento máximo $R = \text{Cr\$ } 570.000,00$.

CONCLUSÃO

Com o que foi apresentado no primeiro capítulo sobre Problemas de Programação Linear, apresentamos na Seção 1.1 os fundamentos matemáticos que servem de base para a solução pelo método gráfico e que este método só é aplicável em conjuntos convexos limitados e conjuntos convexos não limitados do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, espaços em que são possíveis visualizações gráficas. No entanto, os conceitos apresentados podem ser estendidos para dimensões maiores, as ideias conceituais são as mesmas e elas podem ser provadas matematicamente.

Nas Seções de 1.2 – 1.6 foram feitas cinco aplicações de solução pelo método gráfico, foi possível perceber que as soluções são restringidas ao primeiro quadrante, isto é, se um PPL possui solução(ões) esta(as) será(ão) encontrada(as) no primeiro quadrante. Também foi possível perceber que todo conjunto formado pelas intersecções dos semiespaços das restrições possuem um valor mínimo, mas nem todos possuem um valor máximo para a função objetivo, a exemplo podemos citar a região encontrada no problema 1.3 que é uma região poliedral convexa não limitada. Embora o método gráfico não seja aplicável à problemas com mais de três variáveis, mas, ainda assim, é possível resolver muitos problemas envolvendo duas ou três variáveis.

Foi mostrado no Capítulo 2 a capacidade que o método do Algoritmo Simplex possui para resolver Problemas de Programação Linear para n variáveis, até mesmos para duas ou três dimensões, como deu pra ver no problema da 1.2, com uma aplicação desse Algoritmo chegamos ao mesmo resultado do método gráfico. Esse Algoritmo consiste na construção de uma base inicial (matriz identidade) para iniciar o Algoritmo e melhorar a função objetivo a cada iteração até chegar ao ponto de Otimização. O Algoritmo Simplex, embora não tão trivial perceber, mas parte do mesmo princípio do método gráfico, podemos perceber isso no método das duas fases, que ao acrescentar variáveis artificiais no sistema inicial, temos que minimizar a função soma das variáveis artificiais e, isso é totalmente compreensível, visto que, ao incluir as variáveis de excesso estaremos com pontos sobre os hiperplanos do conjunto convexo e, com a inclusão de variáveis artificiais não negativas no sistema, para construção de uma base, só há uma possibilidade de o PPL possuir solução e é que esta soma seja igual à 0, isto é, todas variáveis artificiais precisam, obrigatoriamente, serem iguais à 0 caso contrário a solução estaria no semiespaço aberto o que é um absurdo, pois nenhum ponto do semiespaço aberto satisfaz as restrições do PPL.

Com a concepção do método simplex houve um avanço significativo no ramo da programação linear, conceitos implementados aos adventos computacionais foram vistos como ferramentas poderosas para tomadas de decisão na alocação de recursos e gerenciamento de

atividades, o que elevou o número de usuários buscando estas ferramentas para tomadas de decisões, com base nos resultados matemáticos obtidos. Podemos citar como modelo de situações deste tipo o problema 3.3 (Produção de motos), 3.4 (Nível de produção ótima) e 3.6 (Produção de televisores). Problemas desses tipos ou que envolvam um número maior de variáveis são resolvidos com bastante facilidade com auxílio computacional o que facilita e muito na tomada de decisão de quem conhece e se beneficia dessas ferramentas, visto que, suas decisões são tomadas com base em números quantitativos que lhe proporciona o melhor resultado.

Apesar dos métodos apresentados serem bastante eficazes nas soluções PPL, estes métodos, tanto o Método gráfico quanto o Algoritmo simplex possuem uma limitação comum que é o de não obterem respostas para problemas lineares em conjuntos não convexos. Com base no texto exposto, nesta limitação, e no item *ii* do Teorema B.2.2.5 do APÊNDICE B deste texto, que abrange todos os casos de problemas lineares que possuem solução única, ficará como proposta de pesquisa, desenvolver um Algoritmo que resolva modelos matemáticos tanto em conjuntos convexos quanto em conjuntos não convexos.

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, J. L e al, el. 1980. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo : Ed. Harper & Raw do Brasil, 1980. pp. 350-399.

GOLDBARG, Marco. c. 2005. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. 2 ed. Rio de Janeiro : Elsevier, 2005. pp. 10-23, 474.

GRAPH. Disponível em: <<https://www.padowan.dk/>>. Acesso em 1 de Janeiro.

HOWARD, A e RORRES, C. 2012. **Álgebra com aplicações [recurso eletrônico]**. 10 ed. Porto Alegre : Bookman, 2012. pp. 120-127.

LACHTERMACHER, Gerson. 2002. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões**. 3. ed. Rio de Janeiro : Elsevier, 2002. pp. 51-103.

MANZANO, José A. N. G e MANZANO, André L. N. G. 2013. **Estudo Dirigido de Microsoft@Excel 2013 Avançado**. 1. Ed. São Paulo : Érica, 2013. pp. 137-139.

Matrix Calculator. Disponível em: <<https://matrixcalc.org/pt>>. Acesso em: 10 - 28 de Fevereiro de 2025.

MUNHOZ, I Polezi e AKKARI, Alessandra C Santos. 2018. **Pesquisa Operacional**. Londrina: Ed e Distr. Educacional S.A, 2018. pp. 11-15.

SANTOS, R. J. 2012. **Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Belo Horizonte : Imprensa Universitária da UFMG, 2012. pp. 1-54.

STEWART, J. 2013. **Cáculo**. 7. Ed. São Paulo : Cengage Learning, 2013. pp. 796 - 846. Vol. 2.

MACAMBIRA, Uzeda dos Santos e et al. 2016. **Programação Linear**. João Pessoa : Ed. da UFPB, 2016. pp. 91-92. Vol. II.

APÊNDICES

APÊNDICE A: Teoria sobre a programação linear

Definição 1. Um subconjunto A de um espaço vetorial V é uma variedade linear de V se existe um subespaço W de V e um vetor v_0 de V , tal que:

$$A = \{v \in V; v = v_0 + w \text{ para todo } w \in W\}$$

Usaremos a notação $A = v_0 + W$ para indicar a variedade linear. Observe que se $v_0 \neq 0$, então A não é um subespaço. Por dimensão de A , denotada $\dim A$, entendemos a dimensão de W .

Exemplo 1: Um exemplo de variedade linear de dimensão 1 ao $\mathbb{R}^2$ é uma reta (que passe ou não pela origem), como indica).

Um ponto do plano é uma variedade linear de dimensão zero.

Exemplo 2: Todo subespaço é, em particular, uma variedade linear ($v_0 = 0$).

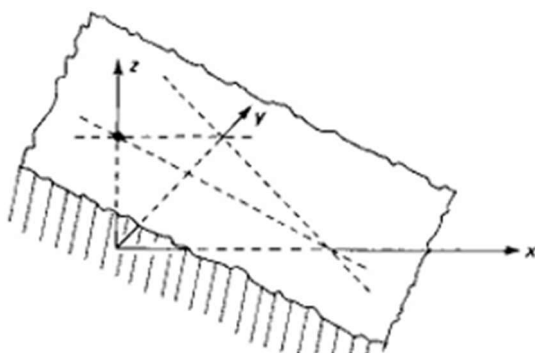
Exemplo 3: De modo geral: se um sistema de equações lineares é compatível (isto é, admite solução) seu conjunto solução é uma variedade linear de dimensão igual ao grau de liberdade do sistema.

Um hiperplano divide o espaço vetorial em 2 semiespaços. Por exemplo, ao considerarmos o hiperplano em $\mathbb{R}^3$ descrito por:

$$2x + 3y + 3z - 2 = 0$$

Teremos o espaço dividido em dois semiespaços que são os pontos (x, y, z) que satisfazem $2x + 3y + 3z - 2 \geq 0$ ou $2x + 3y + 3z - 2 \leq 0$, respectivamente. Na Figura A.1.

Figura A.1 – Espaço dividido pelo plano.



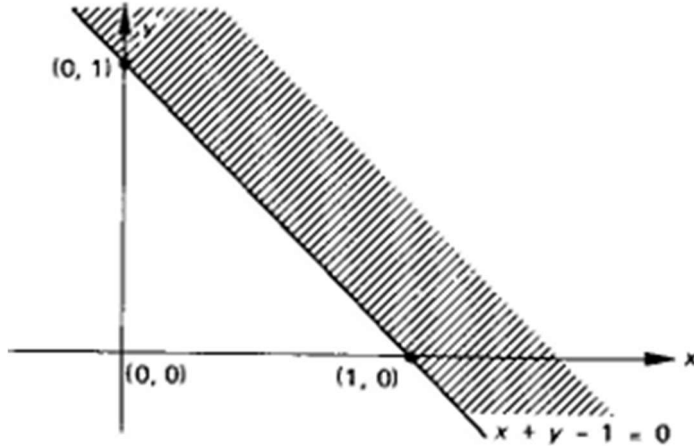
Fonte: (BoldrinI, et al., 1980).

a região hachurada representa o semiespaço $2x + 3y + 3z - 2 \leq 0$.

Se considerarmos, agora, o hiperplano $x + y - 1 = 0$ no $\mathbb{R}^2$ (que é uma reta no plano), qual é o semiespaço descrito por $x + y - 1 \geq 0$? (Note que como aqui o espaço vetorial é o

$\mathbb{R}^2$, o semiespaço será dado geometricamente por um semiplano). Para resolvermos este problema, uma vez traçado o hiperplano (no caso da reta) $x + y - 1 = 0$, escolhemos um ponto de $\mathbb{R}^2$, por exemplo a origem $(0, 0)$ e verificamos se ele satisfaz ou não a desigualdade. Neste caso, como para $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = -1 < 0$, o ponto $(0, 0)$ não está no semiespaço procurado; este será aquele que não contém a origem. Figura A.2.

Figura A.2 – Espaço $\mathbb{R}^2$ dividido por uma reta.



Fonte: (Boldrini, et al., 1980).

Usa-se, ainda, distinguir entre semiespaço fechado (o que contém o hiperplano) e semiespaço aberto (o que não contém o hiperplano). No último exemplo, o semiespaço aberto, descrito por $x + y - 1 > 0$, será o semiplano assinalado, excluindo-se a reta $x + y - 1 = 0$.

Para hiperplanos definidos por uma equação de mais do que três variáveis não teremos uma visão geométrica dos semiespaços vetoriais como nos exemplos anteriores, mas estes conceitos são abordados da mesma maneira:

$$\text{Hiperplano } \mathbf{H} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$$

É uma variedade afim de dimensão $n - 1$ que divide o $\mathbb{R}^n$ em dois subespaços fechados:

$$\mathbf{H}^+ = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \dots + a_nx_n \geq b \text{ e}$$

$$\mathbf{H}^- = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \dots + a_nx_n \leq b$$

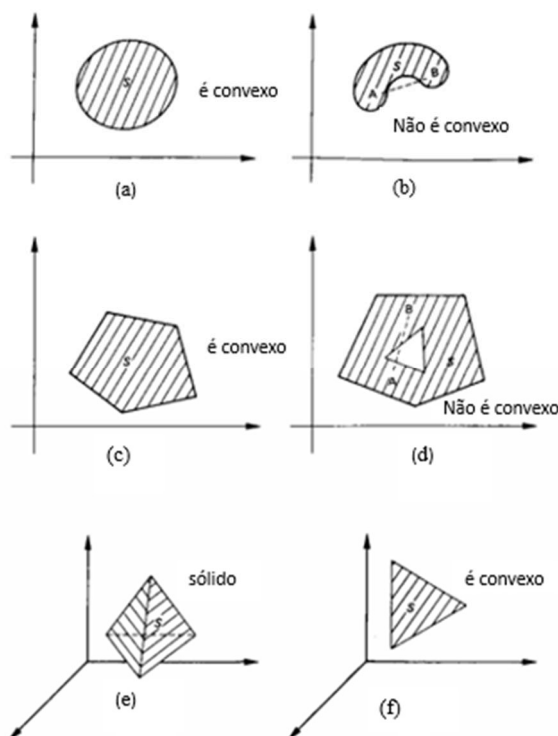
Definição 2. Sejam A e B dois pontos do $\mathbb{R}^n$. O segmento de extremos A e B é o conjunto $\overline{AB}$ de pontos $\mathbb{R}^n$, dado por:

$$\overline{AB} = \{(1 - t)A + tB; 0 \leq t \leq 1\} \text{ (Boldrini, et al., 1980).}$$

Esta definição corresponde exatamente à nossa intuição de segmento em dimensão dois e três.

Definição 3. Um subconjunto $X \in \mathbb{R}^n$ é convexo se e somente se, para os vetores $x_1, x_2 \in X$ tem-se que $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \in X$ e $\lambda \in (0, 1)$. (Boldrini, et al., 1980). Veja os exemplos da Figura A.3.

Figura A.3 – Regiões fechadas convexas e não convexas.



Fonte: (Boldrini, et al., 1980).

Teorema 1. Um semiespaço fechado é convexo.

Teorema 2. A intersecção de conjuntos convexas é um conjunto convexo.

Definição 4. Uma região poliedral convexa fechada em $\mathbb{R}^n$ é uma intersecção de uma quantidade finita de semiespaços fechados de $\mathbb{R}^n$.

Devido aos dois teoremas anteriores, uma região poliedral convexa é um conjunto convexo.

Definição 5. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado se existirem constantes $k_i, i = 1, \dots, n$ tais que, se $(x_1, \dots, x_n) \in A$ então $x_i \leq k_i, i = 1, \dots, n$. (Boldrini, et al., 1980) Vejam a Figura A.3.

Fonte: (Boldrini, et al., 1980).

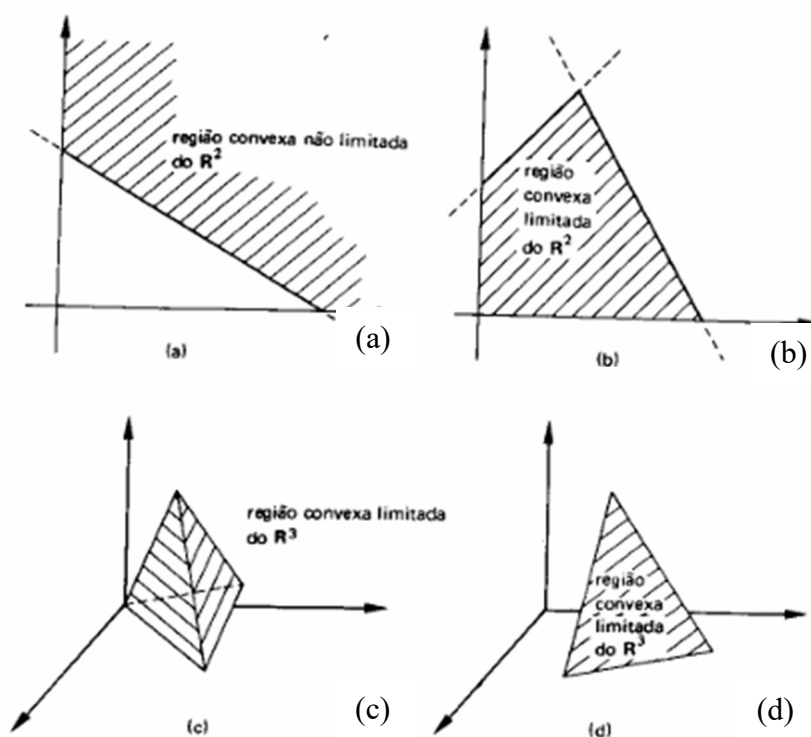


Figura A.4 – Regiões poliedrais convexas fechadas limitadas e não limitadas.

Definição 6. Dada uma região poliedral convexa fechada do $\mathbb{R}^n$ (determinada por um sistema de inequações lineares), os vértices dessa região são os pontos da região que satisfazem um dos possíveis sistemas de n equações lineares independentes, obtidas substituindo-se as desigualdades por igualdades.

Observação: Depois de resolver um sistema, a fim de verificar se o ponto está na região, testamos para ver se ele satisfaz todas as desigualdades.

Caracterização Geométrica dos Vértices: Os vértices que aqui foram definidos “algebricamente” são os pontos extremos da região poliedral convexa $\mathbb{R}$. Com isto queremos dizer que eles são os pontos da região que não estão contidos no “interior” de nenhum segmento contido na região. Mais formalmente: “ P é vértice de $\mathbb{R}$ se, e somente se, P está num segmento AB contido em $\mathbb{R}$ então $P = A$ ou $P = B$ ”.

Introdução à Programação Linear (PL)

A programação linear trata do problema específico de:

Maximizar ou minimizar (Otimizar) uma função do tipo:

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b,$$

restrita a um subconjunto A poliedral convexo de $\mathbb{R}^n$.

(Note que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma transformação afim, isto é, $f(x) = L(x) + b$ onde L é uma transformação linear, $b \in \mathbb{R}$.)

Na linguagem de programação linear (PL), f é chamada função objetivo (f.o.) e A é denominado região factível.

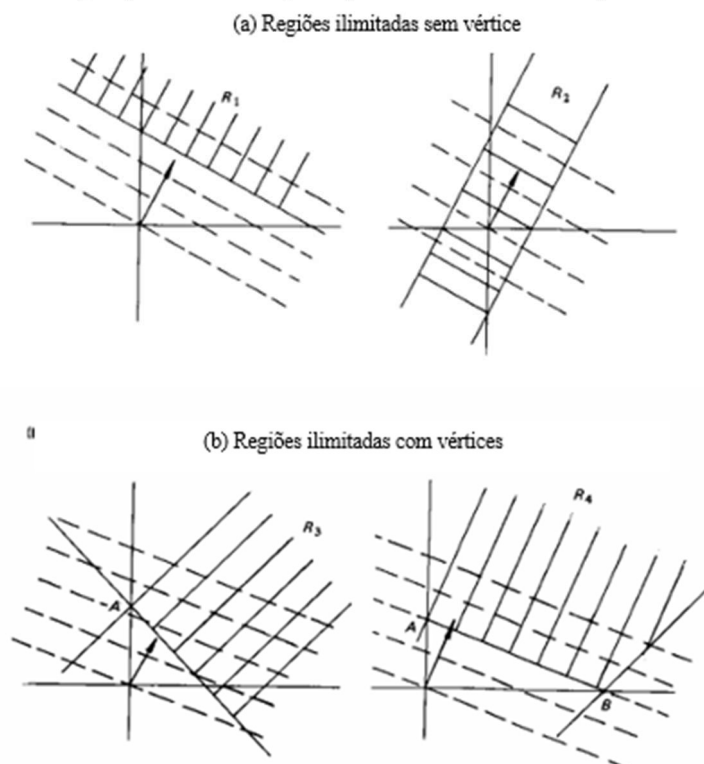
Método de Solução Geométrico e Tipos de Solução

O procedimento que vamos apresentar é conhecido como método geométrico de resolução de PL. Em que para determinar o máximo de f , você deve “caminhar” na região por retas perpendiculares ao vetor gradiente da f.o. e no mesmo sentido dele. Para minimizar o conceito é o mesmo, mudando apenas o sentido.

Exemplo 4.

Vamos considerar todos os tipos possíveis de regiões poliedrais convexas no $\mathbb{R}^2$ e pesquisar os máximos de uma função $f(x, y) = ax + by + c$. Figura A.5 tomamos $a = 1$ e $b = 2$.

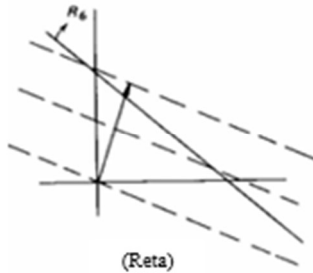
A.5 – Tipos possíveis de regiões poliedrais convexas no plano.



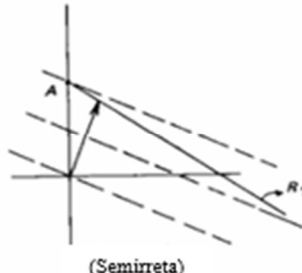
(c) Região limitada (portanto, com pelo menos três vértices)



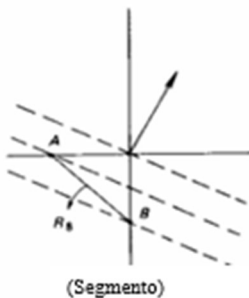
(d) Casos degenerados



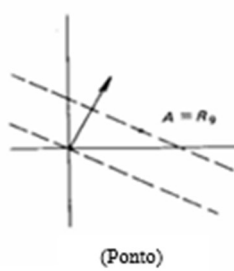
(Reta)



(Semirreta)



(Segmento)



(Ponto)

(Boldrini, et al., 1980).

Podemos observar, portanto, que a função

$$f(x, y) = x + 2y + c \text{ na região}$$

$\mathbb{R}_1$ assume mínimo em toda reta (“fronteira” de $\mathbb{R}_1$) e não assume máximo.

$\mathbb{R}_2$ não assume máximo nem mínimo.

$\mathbb{R}_3$ não assume máximo nem mínimo.

$\mathbb{R}_4$ assume mínimo nos vértices A e B , portanto assume mínimo em todo segmento AB , e não assume máximo.

$\mathbb{R}_5$ assume mínimo no vértice A e máximo no vértice C .

$\mathbb{R}_6$ não assume máximo nem mínimo.

$\mathbb{R}_7$ assume máximo no vértice A e não assume mínimo.

$\mathbb{R}_8$ assume mínimo no vértice B e máximo no vértice A .

$\mathbb{R}_9$ tem o valor máximo igual ao valor mínimo e igual a $f(A)$.

Solução Para um Número Qualquer de Variáveis

Podemos estender o método geométrico descrito no Exemplo 4 para problemas de PL em geral. Teremos então para $f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b$ o vetor gradiente $c = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Em termos de produto interno temos $f(x) = \langle x, c \rangle + b$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. A função objetivo será, portanto, constante nos hiperplanos perpendiculares a c .

No caso de problemas envolvendo três variáveis ainda é possível visualizar geometricamente. Os pontos de mínimo ou máximo da f.o. serão procurados varrendo-se a região factível por planos perpendiculares ao vetor gradiente $c = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.

Fica difícil, trabalhar na prática com este procedimento geométrico para quatro ou mais variáveis. Mas esta noção de procurar máximos e mínimos da função objetivo por uma varredura de hiperplanos perpendiculares ao gradiente nos permite intuir dois fatos cruciais na programação linear.

i) A função objetivo assume necessariamente um valor máximo e um valor mínimo quando a região poliedral convexa (factível) for limitada. (Boldrini, et al., 1980).

ii) Os vértices desempenham um papel fundamental na procura de máximos e mínimos para a função objetivo. (Boldrini, et al., 1980).

TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

O primeiro resultado nos diz que os valores extremos de uma função afim são assumidos nos pontos extremos dos segmentos.

Lema 1. Seja $f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b$ e seja P um ponto interior a um segmento $\overline{AB}$ do $\mathbb{R}^n$, isto é, $P = \lambda A + (1 - \lambda)B$, $0 < \lambda < 1$.

Então teremos $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$ ou $f(B) \leq f(P) \leq f(A)$.

Prova: Como $P = \lambda A + (1 - \lambda)B$ e f é uma transformação afim.

$f(x) = L(x) + b$, onde $L(x) = L(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ é linear.

$f(P) = L(P) + b = L(\lambda A + (1 - \lambda)B) + b = \lambda L(A) + (1 - \lambda)L(B) + b$.

Suponha $f(A) \leq f(B) \Rightarrow L(A) \leq L(B)$

Como $f(P) = \lambda L(A) + (1 - \lambda)L(B) + b$ temos

$\lambda L(A) + (1 - \lambda)L(A) + b \leq f(P) \leq \lambda L(B) + (1 - \lambda)L(B) + b$.

$$L(A) + b \leq f(P) \leq L(B) + b$$

Portanto:

$$f(A) \leq f(P) \leq f(B)$$

Da mesma forma, se tivermos $f(B) \leq f(A)$ mostramos que $f(B) \leq f(P) \leq f(A)$.

Lema 2. Seja $f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b$. Se dentre os valores que f que assumir num segmento $\overline{AB}$ do $\mathbb{R}^n$, o valor máximo (mínimo) for assumido num ponto P interior deste segmento, então f será constante em $\overline{AB}$.

Analizando os enunciados dos lemas 1 e 2 e a natureza de uma região poliedral convexa, estamos em condição de enunciar o principal resultado da PL.

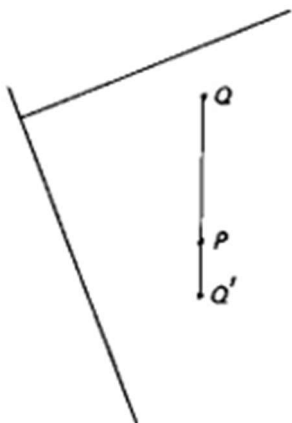
Teorema 3. Seja $f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b$ definida numa região poliedral convexa A do $\mathbb{R}^n$. Suponha que f assuma um valor máximo (mínimo) nesta região. Então, se A possui vértice(s), este valor máximo (mínimo) será assumido num vértice. (Boldrini, et al., 1980).

Prova: (Para regiões A do $\mathbb{R}^2$.) Suponhamos que o valor máximo (mínimo) de f seja assumido num ponto P de A .

Considerando todas as regiões poliedrais convexas possíveis do $\mathbb{R}^2$ (vejamos o Exemplo 4), podemos ter:

- i) P é um vértice. (Neste caso o teorema já estará provado.)
- ii) P está numa aresta. Do lema 2, f assumirá este valor máximo (mínimo) em toda aresta. Como a região A possui vértice(s) esta aresta conterà um vértice v obrigatoriamente. Portanto, $f(P) = f(v)$.
- iii) P está no interior de A . Neste caso, f será constante em toda região A . De fato:

Figura A.6 – Um ponto interior de uma região poliedral convexa.



Fonte: (Boldrini, et al., 1980).

Suponha que o posto de A seja igual a m e que $n > m$.

(a) Solução Básica

Dado um conjunto de m equações lineares com n incógnitas, conforme definido em (I), vamos chamar de B qualquer submatriz $m \times m$, não-singular, formada por m colunas independentes de A (se A tem posto igual a m então tal submatriz existe. E seja N a submatriz $m \times (n - m)$ formada pelas $n - m$ colunas restantes (aquelas que não pertencem a B). Portanto, $Ax = b$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$Bx_B + Nx_N = b$$

pois A foi particionada em B e N ($A = [B, N]$) e x em x_B e x_N ($x = [x_B, x_N]$), onde $x_B = [\text{vetor de } m \text{ componentes formado pelas variáveis associadas às colunas de } B]$ e $x_N = [\text{vetor de } (n - m) \text{ componentes formado pelas variáveis associadas a } N]$.

Então, se todos os componentes de x_N forem fixos e iguais a zero, a solução para o conjunto resultante, $Bx_B = b$, é dito ser uma solução básica para (I) com respeito à base B . Os componentes de x_B são chamados de variáveis básicas e os componentes de x_N de variáveis não-básicas.

(b) Solução Básica Degenerada

Se uma ou mais variáveis básicas em uma solução básica tem valor zero, esta solução é dita ser solução básica degenerada. Do ponto de vista geométrico, isto ocorre quando temos um vértice determinado pela intersecção de mais de duas retas.

Vamos considerar o seguinte sistema

$$\left. \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \quad (\text{II})$$

o qual, representa as restrições de um problema de programação linear na forma padrão.

c) Solução Factível

Um vetor x satisfazendo todas as restrições de (II) é dito ser factível para este sistema. Uma solução factível para (II) que também é básica é chamada de solução básica factível. Se

esta solução também for uma solução básica degenerada, ela será chamada de solução básica factível degenerada.

Considere um problema de programação linear na forma padrão:

$$\begin{cases} \text{Min } cx \\ \text{s/a } Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III})$$

d) Solução Básica Factível Ótima

É a solução básica factível que dentre todas as soluções básicas factíveis de (III) nos dá o valor ótimo (no caso, o valor mínimo) para a função objetivo.

Teorema 5. Dado um problema de programação linear na forma padrão (III) onde A é uma matriz $m \times (n + m)$ de posto m ,

- i) se há uma solução factível, há uma solução básica factível;
- ii) se há uma solução factível ótima, há uma solução básica factível ótima.

Do Teorema 5 e da equivalência entre solução básica factível e vértice temos que o método simplex é finito, pois um sistema linear de m equações com $(n + m)$ incógnitas tem no máximo

$$\binom{n+m}{n} = \frac{(n+m)!}{m!n!} \text{ soluções básicas}$$

Logo, o método simplex efetua um número menor que $\binom{n+m}{m}$ iterações para encontrar a solução ótima, pois o algoritmo simplex é um procedimento de busca, isto é, nove-se de vértice factível em vértice factível, ou seja, de solução básica factível em solução básica factível até encontrar o ótimo.

Método Simplex – Uma Visão Algébrica

Considere o problema de programação linear (IV) dado na forma padrão

$$\begin{cases} \text{Min } z = cx \\ \text{s/a } Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{IV})$$

onde

$$A \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$$

$$x \in \mathbb{R}^{1 \times (n+m)}$$

$$b \in \mathbb{R}^{1 \times m}$$

$$c \in \mathbb{R}^{(n+m) \times 1}$$

O que nós vamos fazer agora é particionar a matriz A em duas submatrizes, B e N , que chamaremos de submatriz básica e submatriz não básica, respectivamente. Da mesma forma, faremos isto com os vetores $x[x_B, x_N]$ e $c = [c_B, c_N]$.

Uma vez feito isto, nós podemos reescrever o problema expresso em (IV) da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Min } z & = c_B x_B + c_N x_N \\ \text{s/a} & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B \geq 0, x_N \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{V})$$

Se expressáramos $Bx_B + Nx_N = b$ na forma $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ e substituirmos este resultado na linha da função objetivo obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Min } z + 0x_B + (c_B B^{-1}N - c_N)x_N & = c_B B^{-1}b \\ \text{s/a} & x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\ & x_B \geq 0, x_N \geq 0 \end{array} \right.$$

O problema acima é expresso na forma de quadro da seguinte maneira:

Tabela 1 – Quadro algébrico do Algoritmo Simplex.

	x_B	x_N	
z	0	$c_B B^{-1}N - c_N$	$c_B B^{-1}b$
x_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

Fonte: (Boldrini, et al., 1980).

Este(a) quadro/tabela no dá a representação da linha da função objetivo z e das variáveis básicas em termos das variáveis não-básicas. Quando temos uma solução básica factível, ou seja, uma solução do tipo $x = (x_B, x_N) = (x_B, 0)$, nós obtemos o valor atual de z (pode ser lido

diretamente do quadro na intersecção da linha z com a coluna mais à direita do quadro) e os valores atuais das variáveis básicas (na coluna mais à direita, logo abaixo da linha de z).

Sempre que temos uma solução básica factível nós desejamos saber se esta solução é ótima ou não. Para sabermos se estamos no ótimo basta verificarmos qual é o efeito produzido no valor da função objetivo quando fazemos uma variável não-básica, digamos x_j , sair do nível zero e passar para um nível positivo; se ao fazermos isto ocorrer uma melhoria no valor da função objetivo, é interessante x_j entrar na base. Para compreendermos melhor, vamos expressar a equação $z = c_B B^{-1}b - (c_B B^{-1}N - c_N)x_N$ de outra maneira:

$$z = z_0 - (z_j - c_j)x_j \quad \forall x_j \text{ pertencente à submatriz } N.$$

onde: $z_0 = c_B B^{-1}b \equiv$ valor atual da função objetivo

$$z_j = c_B B^{-1}a_j$$

$(z_j - c_j) =$ custo reduzido da variável x_j .

Como o problema é minimizar, então é interessante que x_j entre na base quando o seu custo reduzido $(z_j - c_j)$ for maior do que zero, porque assim quando x_j cresce o valor da função objetivo decresce. ($z_j - c_j \leq 0$, então o valor da função objetivo aumentará, ou permanecerá o mesmo, quando x_j aumentar. Portanto, para um problema de minimização as nossas candidatas a entrar na base serão as variáveis não-básicas cujo custo reduzido $(z_j - c_j)$ for maior do que zero. Quando uma ou mais variáveis não-básicas satisfazem $(z_j - c_j) > 0$ usa-se como o critério de desempate escolher aquela variável não-básica que tiver o custo reduzido mais positivo, mudança que acarretará um efeito nas variáveis básicas dado pela equação:

$$x_B = \hat{b} - y_k x_k$$

onde $\hat{b} = B^{-1}b \equiv$ valor atual das variáveis básicas

$$y_j = B^{-1}a_k \equiv \text{coluna da variável } x_j \text{ atualizada}$$

que pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k$$

ou ainda,

$$x_{B_i} = \hat{b}_i - y_{ik} x_k$$

Quando a variável x_k cresce podem ocorrer 3 casos:

- 1) Se $y_{ik} > 0$, então a variável x_{B_i} diminui à medida que x_k cresce, ou seja, x_{B_i} é candidata a sair da base.
- 2) Se $y_{ik} = 0$, então x_{B_i} não se altera quando x_k cresce.
- 3) Se $y_{ik} < 0$, então x_{B_i} cresce à medida que x_k cresce.

Nós só devemos nos preocupar com o caso 1, $y_{ik} > 0$, pois quando x_k cresce, x_{B_i} diminui e nós devemos tomar o cuidado de não deixar que x_{B_i} se torne negativo. Cada variável básica que tem seu componente em y_k maior do que zero é uma candidata a deixar a base, e deixa a base aquele que zera primeiro.

Tipos de Solução

Nós podemos verificar através do quadro simplex soluções do tipo:

a) Alternativa

Se no quadro simplex tivermos o ótimo e existir uma variável não-básica, digamos x_k , com seu custo reduzido ($z_k - c_k$) igual a zero, então nós temos soluções alternativas. Isso é fácil de ver pois

$$z = z_0 - (z_k - c_k)x_k \text{ e } (z_k - c_k) = 0,$$

então x_k pode entrar na base que o valor da função objetivo z não se altera, ou seja, mudamos de uma solução básica factível (vértice) para outra sem alterar a função objetivo; isto ocorre quando temos soluções alternativas.

b) Ilimitada ($z \rightarrow \alpha$)

Se no quadro existir alguma variável não-básica candidata a entrar na base, digamos x_k , e y_k tem todos os seus componentes menores ou iguais a zero, então nós temos solução ótima infinita, pois x_k pode crescer que nenhuma variável básica sairá da base porque crescerá junto com x_k , mas se as variáveis básicas crescerem sem limite, z que é função dessas variáveis crescerá sem limite também.

Observação: Compare estas observações com Exemplo 4.

Resumo do Método Simplex

Passos do Algoritmo Simplex – Problema de Minimização

Passo 1: Ache a solução básica factível com base B . Forme o quadro simplex inicial.

Tabela A.2 – Quadro inicial do algoritmo

	x_B	x_N	
z	0	$c_B B^{-1} N - c_N$	$c_B B^{-1} b$
x_B	I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

Fonte: (Boldrini, et al., 1980).

Passo 2: Calcule $(z_k - c_k) = \text{máximo } \{(z_k - c_k) = \text{para todas as variáveis não-básicas } x_j\}$

Passo 3 (critério de otimalidade): Se $(z_k - c_k) \leq 0$ então pare: a solução atual é ótima. Caso contrário, vá para o passo 4.

Passo 4: Se $y_k \leq 0$, então para: a solução ótima é ilimitada. Caso contrário, vá para o passo 5.

Passo 5 (teste da razão): Determine o índice r como se segue

$$\frac{\hat{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\hat{b}_i}{y_{ik}} \text{ para apenas os } y_{ik} > 0 \right\}$$

Passo 6: Pivote em y_{rk}

Pivoteamento em y_{rk} é definido como.

a) Divida a linha r por y_{rk} .

b) Para $i = 1, 2, \dots, m$ e $i \neq r$, atualize a i -ésima linha da seguinte maneira:

“multiplique a nova linha r por $-y_{ik}$ e some a linha resultante à linha i ”.

c) Atualize a linha da função objetivo da seguinte maneira:

“multiplique a nova linha r por $(z_k - c_k)$ e some a linha resultante com a linha da função objetivo”

Passo 7. Atualize as variáveis básicas e não-básicas onde x_k entra na base e x_{B_r} deixa a base e volte para o passo 2.

Observação 1: Se o problema for maximizar, apenas o passo 3 (critério de otimalidade) sofrerá.

Passo 3 (critério de otimalidade): Se $(z_k - c_k) \geq 0$ então pare: a solução atual é ótima. Caso contrário, vá para o passo 4.

Observação 2: O método simplex trabalha apenas com variáveis não-negativas, ou seja, $x \geq 0$. Na prática, isso nem sempre acontece; nestes casos precisamos fazer uma transformação de variáveis para garantir que todas as variáveis sejam não-negativas.

MÉTODO DAS 2 FASES

Quando nós temos um problema linear com todas as restrições do tipo $\leq$ nós temos uma base factível inicial óbvia, que é a identidade formada pelas colunas das variáveis de folga. Mas nem sempre isso é possível, neste caso, precisamos de um método que nos dê uma solução básica factível inicial. Um desses métodos é o método das 2 fases.

O método das duas fases começa com a fase 1, que é a minimização da soma das variáveis, sujeita as restrições $Ax + x_a = b, x \geq 0$ e $x_a \geq 0$. Se o problema original

$Ax = b, x \geq 0$, tem solução factível, então o valor ótimo para a função objetivo da fase 1 é zero, pois todas as variáveis artificiais acopladas ao problema original tendem a zero, ou seja, elas deixam a base, após eliminarmos as colunas pertencentes às variáveis não-básicas, começamos a fase 2 que é resolver o problema original com a base factível encontrada na fase 1.

RESUMO DO MÉTODO DAS 2 FASES

Fase 1: Para cada restrição do tipo $\geq$ ou $=$ associe uma variável artificial. Resolva o problema abaixo começando com a solução básica factível $x = 0$ e $x_a = b$.

$$\begin{aligned} \text{Min } z_a &= Ix_a \\ \text{s/a } Ax + x_a &= b \\ x &\geq 0, x_a \geq 0 \end{aligned}$$

Se no ótimo o valor de $z_a \neq 0$, então pare: o seu problema original não tem solução factível. Caso contrário, elimine todas as colunas artificiais e a linha da função objetivo artificial. Vá para a fase 2.

Fase 2: Acople a função objetivo linear original e resolva o problema com a solução básica factível $x_B = B^{-1}b$ e $x_N = 0$. Observe que x_B contém as variáveis legítimas do problema original uma vez que as variáveis artificiais deixaram a base. Portanto, nós devemos resolver o seguinte problema:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & c_B x_B + c_N x_N \\
 \text{s/a} & x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\
 & x_B \geq 0, x_N \geq 0
 \end{array}$$

APÊNDICE B: Teoria sobre matrizes e sistemas lineares

B.1 MATRIZES

B.1.1 Resumo sobre matrizes e notações de matrizes

Uma **matriz** A , $m \times n$ (m por n), é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A i -ésima linha de A é

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}],$$

para $i = 1, \dots, m$ e a j -ésima coluna de A é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},$$

para $j = 1, \dots, n$. Usamos também a notação $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Dizemos que a_{ij} ou $[A]_{ij}$ é o elemento ou a entrada de posição i, j da matriz A .

Se $m = n$, dizemos que A é uma matriz quadrada de ordem n e os elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ formam a diagonal (principal) de A .

Uma matriz que só possui uma linha é chamada matriz linha, e uma matriz que só possui uma coluna é chamada matriz coluna. Matrizes linha e matrizes coluna são chamadas de Vetores.

Dizemos que duas matrizes são iguais se elas têm o mesmo tamanho e os elementos correspondentes são iguais, ou seja, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{p \times q}$ são iguais se $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

B.1.2 Resumo de operações com matrizes

Definição B.1.2.1: A soma de duas matrizes de mesmo tamanho $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é definida como sendo a matriz $m \times n$

$$C = A + B$$

obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B , ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Escrevemos também $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Definição B.1.2.2: A multiplicação de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ por um escalar (número) α é definida pela matriz $m \times n$

$$B = \alpha A$$

Obtida multiplicando-se cada elemento da matriz A pelo escalar α , ou seja,

$$b_{ij} = \alpha a_{ij},$$

para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Escrevemos também $[\alpha A]_{ij} = \alpha a_{ij}$. Dizemos que a matriz B é um múltiplo escalar da matriz A .

Definição B.1.2.3: O produto de duas matrizes, tais que o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda, $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$ é definido pela matriz $m \times n$

$$C = AB$$

Obtida da seguinte forma:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}, \quad (\text{B.1.2.1})$$

A equação (B.1.2.1) está dizendo que o elemento i, j do produto é igual à soma dos produtos dos elementos da i -ésima linha de A pelos elementos correspondentes da j -ésima coluna de B .

A equação (B.1.2.1) pode ser escrita de forma compacta usando a notação de somatório.

$$[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

e dizemos “somatório de k variando de 1 a p de $a_{ik}b_{kj}$ ”.

Definição B.1.2.4: A transposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é definida pela matriz $n \times m$

$$B = A^t$$

Obtida trocando-se as linhas com as colunas, ou seja,

$$b_{ij} = a_{ji},$$

para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. Escrevemos também $[A^t]_{ij} = a_{ji}$.

B.1.3: Propriedades da Álgebra Matricial

Teorema B.1.3.1: Sejam A, B e C matrizes com tamanhos apropriados, α e β escalares.

São válidas as seguintes propriedades para as operações matriciais: (Santos, 2012).

(a) (comutatividade) $A + B = B + A$;

(b) (associatividade) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(c) (elemento neutro) A matriz $[\bar{0}]_{ij} = 0$, para $i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots, n$ é tal que

$$A + \bar{0} = A,$$

Para toda matriz $A, m \times n$. A matriz $\bar{0}$ é chamada matriz nula $m \times n$.

(d) (elemento simétrico) Para cada matriz A , existe uma única matriz $-A$, definida por $[-A]_{ij} = -a_{ij}$ tal que

$$A + (-A) = \bar{0}.$$

(e) (associatividade) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;

(f) (distributividade) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

(g) (distributividade) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

(h) (associatividade) $A(BC) = (AB)C$;

(i) (elemento neutro) Para cada inteiro positivo p a matriz, $p \times p$,

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

chamada matriz identidade é tal que

$$AI_n = I_m A = A, \text{ para toda matriz } A = (a_{ij})_{m \times n}.$$

(j) (distributividade) $A(A + C) = AB + AC$ e $(B + C)A = BA + CA$;

(k) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

(l) $(A^t)^t = A$;

$$(m) (A + B)^t = A^t + B^t;$$

$$(n) (\alpha A)^t = \alpha A^t;$$

$$(o) (AB)^t = B^t A^t.$$

B.2 SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

B.2.1 Objetos matemáticos de um sistema linear

Muitos problemas de várias áreas da Ciência recaem na solução de sistemas lineares. Vamos ver como a álgebra matricial pode simplificar o estudo dos sistemas lineares.

Uma equação linear em n variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

em que $a_1, a_2, \dots, a_n$ e b são constantes reais.

Um sistema de equações lineares ou simplesmente sistema linear é um conjunto de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que a_{ij} e b_k são constantes reais, para $i, k = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Usando o produto de matrizes que definimos no Apêndice A, o sistema linear acima pode ser escrito como uma equação matricial

$$AX = B,$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Uma solução de um sistema linear é uma matriz $S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$ tal que as equações do sistema

são satisfeitas quando substituimos $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$. O conjunto de todas as

soluções do sistema é chamado conjunto solução ou solução geral do sistema. A matriz A é chamada matriz de coeficientes do sistema linear.

B.2.2 Operações Elementares

Uma forma de resolver um sistema linear é substituir o sistema inicial por outro que tenha o mesmo conjunto solução do primeiro, mas que seja mais fácil de resolver. O outro sistema é obtido depois de aplicar sucessivamente uma série de operações, não alteram a solução do sistema, sobre as equações. As operações que são usadas são:

- Trocar a posição de duas equações do sistema;
- Multiplicar uma equação por um escalar diferente de zero;
- Somar a uma equação outra equação multiplicada por um escalar.

Estas operações são chamadas de operações elementares. Quando aplicamos operações elementares sobre as equações de um sistema linear somente os coeficientes do sistema são alterados, assim podemos aplicar as operações sobre a matriz de coeficientes do sistema, que chamamos de matriz aumentada, ou seja, a matriz

$$[A | B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

Definição B.2.2.1: Uma operação elementar sobre as linhas de uma matriz é uma das seguintes operações:

(a) Permuta das i -ésima e j -ésima linhas, $(L_i \longleftrightarrow L_j)$;

Exemplo B.2.2.1: $L_2 \longrightarrow L_3$

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{array} \right]$$

(b) Multiplicação da i -ésima linha por um escalar não nulo k . $(L_i \longrightarrow kL_i)$;

Exemplo B.2.2.2: $L_2 \longrightarrow -3L_2$

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{array} \right]$$

(c) Substituição da i -ésima linha pela i -ésima linha mais k vezes a j -ésima linha.

$$(L_i \longrightarrow L_i + kL_j)$$

Exemplo B.2.2.3: $L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B é linha equivalente a A , se B for obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A . Notações: $A \rightarrow B$ ou $A \sim B$.

O próximo teorema garante que ao aplicarmos operações elementares às equações de um sistema o conjunto solução não é alterado.

Teorema B.2.2.1: Se dois sistemas lineares $AX = B$ e $CX = D$, são tais que a matriz aumentada $[C \mid D]$ é obtida de $[A \mid B]$ aplicando-se uma operação elementar, então os dois sistemas possuem as mesmas soluções. (Santos, 2012).

Definição B.2.2.2: Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ está na forma escalonada reduzida quando satisfaz as seguintes condições:

(a) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo).

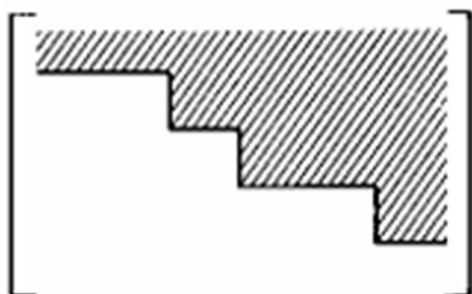
(b) O pivô (1º elemento não nulo de uma linha) de cada linha não nula é igual a 1;

(c) O pivô de cada linha não nula ocorre à direita do pivô da linha anterior, isto é, se as linhas $1, \dots, r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i , então $k_1 < k_2 < \dots < k_r$.

(d) Se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos são iguais a zero.

A terceira condição impõe a forma escada à matriz:

Figura B 2.2.1: – Desenho da Forma escada de uma matriz



Fonte: (Boldrini, et al., 1980).

Isto é, o número de zeros procedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas, se houver.

Exemplo B. 2.2.4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Não é a forma escada pois a segunda condição não é satisfeita, ou}$$

seja, na terceira linha o primeiro elemento diferente de zero possui na sua coluna outro elemento diferente de zero que é o -1 e que deveria ser 0 nesta posição.

Exemplo B.2.2.5:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Não é a forma escada pois não satisfaz a primeira e a quarta condições. A}$$

primeira condição não é satisfeita pelo fato de o primeiro elemento não nulo da primeira linha ser 2 que é diferente de 1, já a quarta condição não é satisfeita pois $k_1 = 2$ e $k_2 = 1 \Rightarrow k_2 < k_1$.

Exemplo B.2.2.6:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Não satisfaz a primeira nem a terceira condições. A primeira}$$

condição não é satisfeita, pelo fato do primeiro elemento não nulo da terceira linha ser -1 que é diferente de 1. Já a terceira condição não foi satisfeita, pelo motivo da linha nula ocorrer acima

de uma linha não nula, ou seja, a segunda linha é nula e a terceira linha é não nula o que não satisfaz a terceira condição.

Exemplo B.2.2.7:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 É a forma escada pois todas as condições são satisfeitas. Note que

o primeiro elemento diferente de zero da primeira linha ocorre na segunda coluna e todos os elementos abaixo dele são zero. Na segunda linha o primeiro elemento diferente de zero é igual a 1 ocorre na quarta coluna, com todos os outros elementos da coluna, na qual ele pertence, iguais a zero.

Se uma matriz satisfaz as propriedades (a) e (c), mas não necessariamente (b) e (d), dizemos que ela está na forma escalonada.

Em geral, se o sistema linear tiver solução e a forma escalonada reduzida da matriz aumentada possuir colunas sem pivôs, as variáveis que não estão associadas a pivôs podem ser consideradas variáveis livres, isto é, podem assumir valores arbitrários. As variáveis associadas aos pivôs terão os seus valores dependentes das variáveis livres.

Lembramos que o sistema linear não tem solução se a última linha não nula da forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema for da forma $[0 \cdots 0 \mid b'_m]$, com $b'_m \neq 0$.

Teorema B.2.2.2: Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $m \times 1$. Se o sistema linear $AX = B$ possui duas soluções distintas $x_0 \neq x_1$, então ele tem infinitas soluções. (Santos, 2012).

Definição B.2.2.3: Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é equivalente por linhas a uma matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, se B pode ser obtida de A aplicando - se uma sequência de operações elementares sobre as suas linhas. Observação: elas são equivalentes por linhas, não são iguais!

A relação “ser equivalentes por linhas” satisfaz as seguintes propriedades:

- Toda matriz é equivalente por linhas a ela mesma (reflexividade);
- Se A é equivalente por linhas a B , então B é equivalente por linhas a A (simetria);
- Se A é equivalente por linhas a B e B é equivalente por linhas a C , então A é equivalente por linhas a C (transitividade).

Teorema B.2.2.3. Toda matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é equivalente por linhas a uma única matriz escalonada reduzida. (Boldrini, et al., 1980).

$$R = (r_{ij})_{m \times n}$$

Teorema B.2.2.4: Seja R uma matriz $n \times n$, na forma escalonada reduzida. Se $R \neq I_n$, então R tem uma linha nula. (Santos, 2012).

Posto e Nulidade de Matrizes

Definição B.2.2.4: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, seja $B_{m \times n}$ a matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a A . O posto de A , denotado por p , é o número de linhas não nulas de B . A nulidade de A é o número $n - p$.

Observamos que dada uma matriz A qualquer, para achar seu posto precisamos encontrar primeiro sua matriz-linha reduzida à forma escada, e depois contar suas linhas não nulas. Este número é o posto de A . A nulidade é a diferença entre colunas de A e o posto.

Exemplo B.2.2.8: Desejamos encontrar o posto e a nulidade de A , onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, efetuamos as seguintes operações com matrizes:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 - L_1]{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 + 4L_2]{L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow \frac{1}{8}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \rightarrow L_2 - 2L_3]{L_1 \rightarrow L_1 + 3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O posto de A é 3 e a nulidade de A é $4 - 3 = 1$.

Observação: Se interpretarmos a matriz A dada acima como sendo a matriz ampliada de um sistema linear, teremos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

A matriz reduzida à forma escada é linha equivalente à matriz A . Assim, o sistema que ela representa:

$$\begin{cases} x_1 & & = -\frac{7}{8} \\ & x_2 & = -\frac{1}{4} \\ & & x_3 = \frac{11}{8} \end{cases}$$

é equivalente ao sistema inicial, possuindo a mesma solução que este.

Exemplo B.2.2.9: Desejamos encontrar o posto e a nulidade de B , onde

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$$

Assim, efetuamos as seguintes operações:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 4L_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \rightarrow -\frac{1}{9}L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \end{matrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 4L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O posto de B é 2, e a nulidade é $3 - 2 = 1$. Repare que a matriz

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

tem o mesmo posto e nulidade de B .

Reinterpretando as matrizes acima como um sistema de equações, diremos que o sistema de quatro equações associado à matriz inicial:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 4y = 2 \\ x - 5y = 1 \\ 4x + 16y = 8 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema de duas equações:

$$\begin{cases} x + 0y = \frac{14}{9} \\ 0x + y = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Associado à matriz-linha reduzida à forma escada. Este é um caso de sistema com equações redundantes. A terceira e a quarta equações (que se tornam nulas no final do processo) podem ser desprezadas. Isto significa que o sistema inicial é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$$

Associado à matriz B_1 .

Usamos dizer também que, neste caso, as duas primeiras equações são “independentes” e que as demais são “dependentes” destas. Ainda segundo esta terminologia, denominamos posto de uma matriz o número de linhas “independentes” desta. Você pode observar que uma linha será “dependente” de outras (isto é, será igual a zero no final do processo de redução) se ela puder ser escrita como soma de produtos destas outras linhas por constantes. Costumamos dizer também que esta linha é uma combinação linear das outras. Por exemplo, na matriz B podemos dizer que a primeira e a segunda linhas são independentes, enquanto que a terceira e a quarta são combinações lineares das duas primeiras linhas.

Teorema B.2.2.5: (Boldrini, et al., 1980).

i) Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.

ii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$, a solução será única.

iii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.

Demonstração:

1ª Parte: Se o posto da matriz ampliada for maior que o da matriz dos coeficientes (menor não pode ser), então esta matriz reduzida à forma escada deve ter pelo menos uma linha do tipo $[0 \ 0 \ \cdots \ c_k]$, com $c_k \neq 0$. Isto significa que o sistema associado a esta matriz (que é equivalente ao inicial) tem uma equação do tipo:

$$0x_1 + \cdots + 0x_n = c_k \neq 0$$

e, portanto, não admite solução.

2ª Parte: Por outro lado, se o posto da matriz ampliada, P , for igual ao da matriz de coeficientes, temos dois casos a considerar:

a) se $p = n$, teremos a matriz-linha reduzida à forma escada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_n \\ \hline 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A solução do sistema será $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$, portanto o sistema admite uma única solução.

b) se $p \neq n$ então $p < n$ (pois p não pode ser maior que n)

Neste caso, devemos considerar as várias possibilidades para a matriz-linha reduzida à forma escada. Podemos analisar inicialmente quando esta matriz de posto $p < n$ tem a forma:

1.

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1p+1} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{pp+1} & \cdots & a_{pn} & c_p \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Teremos, neste caso:
$$\begin{cases} x_1 = c_1 - a_{1p+1}x_{p+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_p = c_p - a_{pp+1}x_{p+1} - \cdots - a_{pn}x_n \end{cases}$$

e o sistema terá, portanto, infinitas soluções, sendo $x_{p+1}, \dots, x_n$ variáveis livres.

Uma segunda forma a ser considerada para a matriz reduzida é

2.

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1p+2} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & 1 & a_{pp+2} & \cdots & a_{pn} & c_p \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

então
$$\begin{cases} x_2 = c_1 - a_{1p+2}x_{p+2} - \cdots - a_{1n}x_n \\ x_3 = c_2 - a_{2p+2}x_{p+2} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_{p+1} = c_p - a_{pp+2}x_{p+2} - \cdots - a_{pn}x_n \end{cases}$$

resultante das operações elementares, para se levar em consideração esta coluna de zeros que não vimos escrevendo.

Teorema B.3.1.1: Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, é tal que $m < n$, então o sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem solução diferente da solução trivial, ou seja, todo sistema homogêneo com menos equações do que incógnitas tem infinitas soluções.

Proposição B.3.1.2 Seja $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

(a) Se X e Y são soluções do sistema homogêneo, $AX = \bar{0}$, então $X + Y$ também o é.

(b) Se X é solução do sistema homogêneo, $AX = \bar{0}$, então αX também o é.

Observação: Estas propriedades não são válidas para sistemas lineares em geral.

B.3.2 Matrizes Elementares

Definição B.3.2.1 Uma matriz elementar $n \times n$ é uma matriz obtida da matriz identidade I_n aplicando-se uma, e somente uma, operação elementar.

Vamos denotar por E_{ij} a matriz elementar obtida trocando-se a linha i com a linha j da matriz I_n , $E_i(\alpha)$ a matriz elementar obtida multiplicando-se a linha i da matriz I_n pelo escalar $\alpha \neq 0$ e $E_{i,j}(\alpha)$ a matriz elementar obtida da matriz I_n , somando-se à linha j , α vezes a linha i .

$$E_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & & & \ddots \\ \cdot & & & 0 & \cdots & 1 & & & \cdot \\ \cdot & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \cdot \\ \cdot & & & 1 & \cdots & 0 & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ , \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$E_i(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & \cdot \\ \cdot & & & \alpha & & & \cdot \\ \cdot & & & & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

$$\text{e } E_{i,j}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & \cdot \\ \cdot & & \vdots & \ddots & & & \cdot \\ \cdot & & \alpha & \cdots & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix}$$

Aplicar uma operação elementar em uma matriz, corresponde a multiplicar a matriz à esquerda por uma matriz elementar, é o que diz o Teorema B.3.2.1.

Teorema B.3.2.1. Sejam E uma matriz elementar $m \times n$ e A uma matriz qualquer $m \times n$. Então, EA é igual à matriz obtida aplicando-se na matriz A a mesma operação elementar que originou E . (Santos, 2012).