



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS  
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

MARIA MONTEIRO GOMES

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: DA TEORIA À PRÁTICA

BARCARENA-PA  
2024

MARIA MONTEIRO GOMES

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: DA TEORIA À PRÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus Universitário de Abaetetuba, Polo Universitário de Barcarena, Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro.

BARCARENA-PA  
2024

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

G633e Gomes, Maria Monteiro.  
Equações diferenciais ordinárias : da teoria à prática / Maria  
Monteiro Gomes. — 2024.  
63 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade  
Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de  
Matemática, Abaetetuba, 2024.

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Pesquisa. 3.  
Aplicações. I. Título.

CDD 510

---


MARIA MONTEIRO GOMES

## EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: DA TEORIA A PRÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciatura em Matemática, pela Unidade Federal do Pará.

Data de aprovação: 04 de janeiro de 2024.


Conceito: Excelente

Documento assinado digitalmente  
 **SEBASTIAO MARTINS SIQUEIRA CORDEIRO**  
Data: 26/01/2024 08:04:08-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro**  
**Presidente/Orientador**

Documento assinado digitalmente  
 **WILSON RODRIGUES OLIVEIRA**  
Data: 26/01/2024 15:38:03-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Ms. Wilson de Sousa Rodrigues**  
**Membro Interno – FACET/CUBT**

Documento assinado digitalmente  
 **JOSE FRANCISCO DA SILVA COSTA**  
Data: 26/01/2024 14:52:16-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Dr. José Francisco Santos da Costa**  
**Membro Externo FADECAM/CUBT**

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus por ter me concedido forças para alcançar a conclusão da graduação. À minha família, em especial aos meus pais, Marice da Cunha Gomes e Maria Raimunda Monteiro Gomes, expresso minha gratidão por todo apoio e incentivo, assim como aos meus irmãos.

Estendo meus agradecimentos a todos os professores do curso de Matemática, destacando o meu orientador, Professor Doutor Sebastião Martins Siqueira Cordeiro, por me proporcionar a oportunidade de ser sua bolsista de iniciação científica ao longo da graduação.

Também quero expressar minha gratidão aos colegas de turma de Matemática 2019 do Polo de Barcarena e aos amigos que me acompanharam durante toda a jornada acadêmica.

“A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo”.  
(GALILEO GALILEI, século XVI a XVII)

“Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei nos ombros de gigantes”.

(ISAAC NEWTON, século XVII.)

## RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo das equações diferenciais ordinárias, visando apresentar os resultados das pesquisas realizadas, além de enfatizar a relevância da modelagem e aplicação de problemas relacionados à biologia, física e química. Neste contexto, ao percorrer brevemente a trajetória histórica das equações diferenciais, e revisar conceitos prévios importantes para a pesquisa, buscou-se a compreensão das equações diferenciais, bem como as classificações de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade, assim como os métodos para encontrar soluções. Em seguida, realizou-se o estudo das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e de ordem superior. Culminando na abordagem prática que finaliza o produto desta pesquisa trazendo as aplicações, evidenciando a relevância desse campo de estudo.

**Palavra-chave:** Equações diferenciais ordinárias; Pesquisa; Aplicações.

## ABSTRACT

This work presents a study of ordinary differential equations, aiming to present the results of the research carried out, in addition to emphasizing the relevance of modeling and application of problems related to biology, physics and chemistry. In this context, by briefly going through the historical trajectory of differential equations, and reviewing important previous concepts for research, we sought to understand the equations differentials, as well as classifications according to type, order and linearity, as well as methods for finding solutions. Then, the study of the first order and higher order ordinary differential equations. Culminating in practical approach that finalizes the product of this research by bringing applications, highlighting the relevance of this field of study.

**Keywords:** Ordinary Differential Equations; Research; Applications.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Histórico</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Preliminares</b>	<b>14</b>
3.1	Funções . . . . .	14
3.2	Limite . . . . .	14
3.2.1	Propriedades do limite . . . . .	14
3.3	Continuidade . . . . .	15
3.4	Derivadas . . . . .	16
3.5	Integral . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Equações Diferenciais</b>	<b>19</b>
4.1	Classificação de acordo com o Tipo . . . . .	19
4.2	Classificação de acordo com a Ordem . . . . .	19
4.3	Classificação de acordo com Linearidade . . . . .	20
4.4	Soluções para uma Equação Diferencial . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Equações Diferenciais Ordinária de Primeira Ordem</b>	<b>22</b>
5.1	Equações Separáveis . . . . .	22
5.2	Equações Exatas . . . . .	23
5.3	Método dos Fatores Integrantes . . . . .	25
5.4	Equações de Bernoulli, Riccati e Clairaut . . . . .	27
5.4.1	Equação de Bernoulli . . . . .	27
5.4.2	Equação de Riccati . . . . .	28
5.4.3	Equação de Clairaut . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Equações Diferenciais de Ordem Superior</b>	<b>32</b>
6.1	Problema de valor inicial . . . . .	32
6.2	Problema de valor de contorno . . . . .	32
6.3	Dependência e Independência Linear . . . . .	33
6.3.1	Wronskiano . . . . .	34
6.4	Equações Homogêneas e Não-Homogêneas . . . . .	35
6.4.1	Equações Homogêneas . . . . .	35
6.4.2	Equações Não-homogêneas . . . . .	37
6.5	Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes . . . . .	38
6.6	Método dos coeficientes indeterminados . . . . .	41

<b>7</b>	<b>Aplicações</b>	<b>44</b>
7.1	Criação de Tilápia do Nilo . . . . .	44
7.1.1	Modelo de Malthus . . . . .	44
7.1.2	Modelo de Gompertz . . . . .	44
7.2	Crescimento populacional . . . . .	52
7.3	Resfriamento de corpos . . . . .	55
7.4	Problema de misturas . . . . .	58
<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>62</b>
	<b>Referências</b>	<b>63</b>

# 1 Introdução

O presente trabalho representa o desfecho de pesquisas desenvolvidas durante a graduação, por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), sob a orientação do Professor Doutor Sebastião Martins Siqueira Cordeiro. A pesquisa estendeu-se ao longo de três anos de intensa dedicação, culminando na produção de resultados significativos e na ampliação do conhecimento acerca da aplicação da modelagem matemática.

O objetivo primordial deste trabalho é apresentar os resultados finais das pesquisas desenvolvidas, mas também destacar a relevância da modelagem e da aplicação de problemas relacionados as questões biológicas, físicas e químicas. Ao longo desse período, foi possível explorar questões que permeiam diferentes domínios, contribuindo assim para a compreensão e avanço do conhecimento matemático.

Esta pesquisa está estruturada em quatro partes distintas. Inicialmente, abrange a busca histórica das equações diferenciais, explorando os principais eventos e contribuições matemáticas que moldaram a compreensão atual deste ramo. Nesse contexto, destacam-se figuras proeminentes como Isaac Newton, Leibniz e Pierre-Simon Laplace, cujas contribuições foram fundamentais para o desenvolvimento da teoria das equações diferenciais.

Em seguida, a pesquisa é dedicada a uma revisão detalhada de conceitos relacionados ao cálculo, com aprofundamento em aspectos da análise real. Neste capítulo, serão abordados temas essenciais, como funções, limites, continuidade, derivadas e integral. Para cada conceito, serão apresentadas definições, teoremas e corolários relevantes, estabelecendo a base teórica necessária para a compreensão dos estudos subsequentes.

Dessa maneira, a pesquisa concentra-se no estudo das equações diferenciais ordinárias, explorando classificações de acordo com tipo, ordem e linearidade. Além disso, apresentam-se as equações diferenciais de primeira ordem e de ordem superior. Com isso, serão discutidos conceitos-chave, fornecendo uma base sólida para a compreensão das aplicações apresentadas na última parte do trabalho.

Sendo assim, é apresentando aplicações práticas dos conhecimentos adquiridos, apresentando quartos problemas que foram abordados e solucionados por meio da modelagem matemática. Esse capítulo destaca a aplicabilidade dos conceitos estudados na resolução de desafios concretos, evidenciando a importância do trabalho científico.

## 2 Histórico

Em primeiro momento, apresenta-se o desenvolvimento das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) ao longo da história da matemática, mostrando que o cálculo, como se conhece hoje, é resultado da evolução dos antigos métodos usados para a resolução de problemas relacionados ao cálculo de área e volume. Na antiguidade, os gregos solucionavam tais problemas utilizando o método de exaustão, que consiste em inscrever um polígono regular em um círculo e aumentar o número de lados desse polígono até alcançar o resultado da área desejada. Esse método é comumente creditado ao matemático Eudoxo de Cnido (c. 370 a.C), pois, entre os matemáticos de sua época que estudaram o método, ele se destacou. No entanto, uma demonstração mais rigorosa foi realizada pelo matemático grego Arquimedes (c. 287 a.C.), o que permitiu obter resultados mais precisos.

Nesse sentido, outros matemáticos que também contribuíram para o desenvolvimento de conceitos relacionados ao cálculo foram Johann Kepler (1571-1630), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Evangelista Torricelli (1608-1647), Pierre de Fermat (1601?-1665), Isaac Barrow (1630-1677) e outros. O matemático Isaac Barrow “foi o primeiro a perceber, de maneira plena, que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra. Essa importante descoberta é conhecida como o teorema fundamental do cálculo” (EVES, 2004, p. 435), surgindo assim um novo ramo da matemática e dando novos rumos para a história, segundo Eves (2004, p. 417):

Primeiro surgiu o cálculo integral e só muito tempo depois o cálculo diferencial. A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangente a curvas e de questões sobre máximos e mínimos.

Durante o século XVII, com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, inventado por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), a contribuição de ambos para a criação do cálculo realizou-se de forma independente. Newton utilizou o conhecimento do cálculo para abordar problemas na física, o que é evidenciado pela notação e escrita que ele empregou. Tanto é verdade que ele fez sua descoberta e nomeou-a de “método dos fluxos”, publicando-a em 1736, embora a tivesse escrito em 1671.

Para Leibniz, a abordagem de desenvolvimento do cálculo estava mais voltada para a área da matemática. Ele inventou a simbologia da integral e da derivada, que conhecemos e usamos atualmente. Sua descoberta ocorreu entre 1673 e 1676, além de suas outras contribuições para a matemática, como o teorema dos determinantes, que contribui para o estudo de sistemas de equações lineares.

Ademais, Newton e Leibniz tiveram divergências a respeito da invenção do cálculo. Apesar da descoberta de Newton ser anterior, Leibniz foi o primeiro a publicar seus

resultados, conforme destaca Eves (2004). Apesar dessa disputa, ambos são reconhecidos como inventores do cálculo diferencial e integral.

A partir do século XVIII, surgiram a teoria das equações diferenciais, graças aos avanços no cálculo. Os tipos de problemas aplicados às equações diferenciais envolviam assuntos físicos e astronômicos. Os matemáticos Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748) foram responsáveis por estudar o cálculo de Leibniz e desenvolveram a modelagem de fenômenos físicos usando equações diferenciais, procurando encontrar suas soluções.

Além disso, “no campo das equações diferenciais, Jacques Bernoulli contribuiu com o estudo da ‘equação de Bernoulli’  $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ ”, conforme destacado por Boyer e Merzbach (2012, p. 293). Leibniz e Johann Bernoulli resolveram essa equação, sendo que Johann utilizou o método de redução da equação linear por meio da substituição  $z = y^{1-n}$ .

Adicionalmente, o matemático Leonhard Euler (1707-1783) contribuiu significativamente com o desenvolvimento da técnica dos “fatores integrantes, métodos sistemáticos para resolver equações lineares de ordem superior com coeficientes constantes, e a distinção entre equações lineares homogêneas e não homogêneas, bem como entre solução particular e solução geral” (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 308).

O desenvolvimento dos métodos para a resolução de equações diferenciais ordinárias iniciou-se assim que se compreendeu a relação inversa entre a derivada e a integral. Consoante aos estudos das equações diferenciais, Euler trabalhou em torno da conhecida equação de Riccati, que é expressa da seguinte forma:  $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ . Ele conseguiu observar que, ao encontrar uma solução particular dada por  $v = f(x)$ , poderia fazer a substituição por  $y = v + \frac{1}{z}$ . Desta maneira, transformando-a em uma equação diferencial linear em  $z$  de forma que pudesse obter a solução geral. Outras observações atribuídas a Euler, segundo Boyer e Merzbach (2012, p. 309):

Em *Commentarii de Petersburgo*, de 1760-1763, Euler observou também que se duas soluções particulares são conhecidas, então uma solução geral pode ser expressa em termos de uma simples quadratura. Até certo ponto, a dívida onipresente que temos com Euler no campo das equações diferenciais está indicada no fato de que um tipo de equação linear a coeficientes variáveis tem seu nome. A equação de Euler  $x^n y^{(n)} + a_n x^{n-1} y^{(n-1)} = f(x)$  (onde o expoente entre parênteses indica ordem de derivação) se reduz facilmente, pela substituição  $x = e^t$ , a uma equação linear a coeficiente constantes.

Após Euler, percebe-se que os estudos de equação diferencial avançaram de maneira primordial, devido ao conhecimento das propriedades, definições e ao entendimento de algumas funções. Daniel Bernoulli (1700-1782) utilizou o trabalho de Euler em seus estudos. O matemático Alexis Claude Clairaut (1713-1765) é responsável por desenvolver as equações exatas e pela equação de Clairaut. Além disso, no século XVIII, Joseph Louis

Lagrange (1736-1813) trabalhou com cálculo e, com isso, iniciou o método de aproximação das raízes, além das equações gerais de movimento dinâmico que levaram o seu nome. Publicado em 1788, pode-se observar que Lagrange, ao longo de sua vida, contribuiu para outros ramos além das equações diferenciais, como a teoria dos grupos, na qual possui um famoso teorema conhecido como o Teorema de Lagrange.

Durante o século XIX, encontram-se as principais publicações do trabalho de Pierre-Simon Laplace (1749-1827). O reconhecimento na matemática deve-se à hipótese nebular cosmogonia conhecida como equação de Laplace, que pertence à teoria do Potencial, assim como a transformada de Laplace, a qual tem aplicabilidade à equação diferencial linear de ordem  $n$  com coeficientes constantes, além do teorema de Laplace. Ademais, outro matemático, Adrien-Marie Legendre (1752-1833), contemporâneo de Laplace e Lagrange, também teve suas obras publicadas no século XIX. Sua contribuição está ligada à equação diferencial  $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$ , que tem bastante relevância na matemática aplicada. Suas soluções são conhecidas como funções de Legendre.

No decorrer do século XIX, o interesse nas equações diferenciais não lineares foi o próximo foco dos estudos matemáticos. Neste sentido, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) foi um grande contribuidor nas áreas da matemática pura e aplicada, aprofundando-se em ambas. Publicou várias pesquisas que ajudaram no avanço da matemática, focando na convergência e divergência de séries infinitas, na teoria das funções reais e complexas, nos estudos de determinantes, na probabilidade, nas equações diferenciais e na física-matemática (EVES, 2004).

A partir das contribuições de outros matemáticos do século XX, as equações diferenciais ordinárias tiveram desenvolvimento em diversos âmbitos para além da matemática, como nas engenharias, biologia, física e outras áreas. Isso se deve aos conhecimentos adquiridos, como equações de primeira, segunda e ordem superior, além de equações diferenciais com coeficientes variáveis e a transformada de Laplace. Portanto, encontram-se inúmeras aplicações que, ao longo dos próximos capítulos, serão abordadas.

## 3 Preliminares

Neste capítulo, apresenta-se uma breve introdução à análise real, a qual aborda conceitos e definições sobre função, limite, continuidade, derivada e integral. Por meio desse conhecimento prévio, pode-se dar encaminhamento ao estudo das Equações Diferenciais.

### 3.1 Funções

A revisão da definição de função é necessária para o estudo da análise real. Em que  $D$  e  $Y$  são dois conjuntos, uma função  $f$  é uma lei de formação que associa cada elemento  $d$  do conjunto  $D$  a um único  $y$  do conjunto  $Y$ . De maneira formal, uma função pode ser entendida da seguinte maneira.

**Definição 3.1.** *Uma função “ $f : D \rightarrow Y$ ” é uma lei que associa elementos de um conjunto  $D$ , chamado o domínio da função, a elementos de um outro conjunto  $Y$ , chamado o contradomínio da função.*

Ao analisar uma função, percebe-se que ela estabelece uma relação na qual cada elemento do domínio está diretamente associado ao seu contradomínio. Essa definição contribui significativamente para um entendimento mais aprofundado de Equações Diferenciais, sendo encontrada no livro de Ávila (1999).

### 3.2 Limite

O conceito de limite é aplicado no estudo do comportamento de uma função  $f$  em um dado intervalo  $I$ . As definições, teoremas e corolários apresentados nesta seção foram retirados do livro de Ávila (1999).

**Definição 3.2.** *Dada uma função  $f$  com domínio  $D$ , seja  $a$  um ponto de acumulação de  $D$  (que pode ou não pertencer a  $D$ ). Diz-se que um número  $L$  é o limite de  $f(x)$  com  $x$  tendendo a  $a$  se, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .*

#### 3.2.1 Propriedades do limite

**Teorema 3.1.** *Se uma função  $f$  tem limite com  $x \rightarrow a$ , então  $|f(x)|$  tem limite e  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow a} f(x)|$ . Em particular, se  $f$  é contínua em  $x = a$ , então  $|f(x)|$  também é contínua nesse ponto, isto é,  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |f(a)|$ .*

**Teorema 3.2.** *Se uma função  $f$  com domínio  $D$  tem limite  $L$  com  $x \rightarrow a$ , e se  $A < L < B$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow A < f(x) < B$ .*

**Corolário 3.1.** *Se uma função  $f$  com domínio  $D$  tem limite  $L$  com  $x \rightarrow a$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x)$  é limitada em  $V'_\delta(a) \cap D$ .*

**Corolário 3.2** (Permanência do sinal). *Se uma função  $f$  com domínio  $D$  tem limite  $L \neq 0$  com  $x \rightarrow a$ , então existe  $\delta > 0$  tal que, em  $V'_\delta(a) \cap D$ ,  $f(x) > L/2$  se  $L > 0$  e  $f(x) < L/2$  se  $L < 0$ .*

**Teorema 3.3.** *Se duas funções  $f$  e  $g$  com o mesmo domínio  $D$  têm limites com  $x \rightarrow a$ , então*

(a)  $f(x) + g(x)$  tem limite e  $\lim[f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x)$ ;

(b) sendo  $k$  constante,  $kf(x)$  tem limite e  $\lim[kf(x)] = k \cdot \lim f(x)$ ;

(c)  $f(x) \cdot g(x)$  tem limite e  $\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$ ;

(d) se, além das hipóteses feitas,  $\lim g(x) \neq 0$ , então  $f(x)/g(x)$  tem limite e  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ .

### 3.3 Continuidade

Nesta subseção, será abordado o conceito de função contínua de maneira breve, podendo-se encontrar mais detalhes no livro de “Análise Real” de Lima (2020).

**Definição 3.3.** *Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , definida no conjunto  $X \subset \mathbb{R}$ , diz-se contínua no ponto  $a \in X$  quando, para todo  $\varepsilon > 0$  dado arbitrariamente, pode-se obter  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$  e  $|x - a| < \delta$  impliquem  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .*

**Teorema 3.4.** *Sejam  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas no ponto  $a \in X$ , com  $f(a) < g(a)$ . Existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$ .*

**Corolário 3.3.** *Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  contínua no ponto  $a \in X$ . Se  $f(a) \neq 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$ ,  $f(x)$  tem o mesmo sinal de  $f(a)$ .*

**Corolário 3.4.** *Dados  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas, sejam  $Y = \{x \in X; f(x) < g(x)\}$  e  $Z = \{x \in X; f(x) \leq g(x)\}$ . Existem  $A \subset \mathbb{R}$  aberto e  $F \subset \mathbb{R}$  fechado tais que  $Y = X \cap A$  e  $Z = X \cap F$ . Em particular, se  $X$  é aberto então  $Y$  é aberto e se  $X$  é fechado então  $Z$  é fechado.*

**Teorema 3.5.** *A fim de que a função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  seja contínua no ponto  $a$  é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos  $x_n \in X$  com  $\lim x_n = a$ , se tenha  $\lim f(x_n) = f(a)$ .*

**Corolário 3.5.** *Se  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas no ponto  $a \in X$  então são contínuas nesse mesmo ponto as funções  $f + g, f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}$ , bem como a função  $f/g$ , caso seja  $g(a) \neq 0$ .*

**Teorema 3.6.** *Sejam  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  contínua no ponto  $a \in X, g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  contínua no ponto  $b = f(a) \in Y$  e  $f(X) \subset Y$ , de modo que a composta  $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$  está bem definida. Então  $g \circ f$  é contínua no ponto  $a$ . (A composta de duas funções contínuas é contínua).*

Com base nos teoremas e corolários apresentados anteriormente, pode-se compreender que a continuidade é uma propriedade que certas funções possuem, que ocorre em um intervalo da função. As demonstrações dos teoremas 3.4 e 3.6 podem ser encontradas nas páginas 72 e 73, respectivamente, no livro *Análise Real* supracitado.

### 3.4 Derivadas

A derivação surgiu do problema de calcular a reta tangente a uma curva da função  $f$ . Para resolver este problema, é necessário traçar uma reta secante à  $f$ , representada pelo quociente

$$s(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nele, encontra-se o coeficiente angular da reta secante  $s$  ao gráfico de  $f$ .

A definição da derivada de uma função  $f$  em um determinado ponto  $a$  de seu domínio é dada pelo seguinte limite:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

onde  $x \neq a$ . Calculando o limite de  $x$  tendendo para o ponto  $a$ , encontra-se o valor do coeficiente angular da reta tangente a este ponto. A derivada no ponto  $a$  pode ser representada com as seguintes notações:  $f'(a)$ ,  $\frac{df}{dx}(a)$  e  $Df(a)$ . A representação da derivada de  $f$  no ponto  $a$ , quando este limite existe, é dada por:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Leia-se  $f$  “linha” de  $a$ . Além dessa representação, pode-se encontrar esse limite escrito da seguinte forma:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

A derivação tem um caráter local, ou seja, dado um intervalo  $I$  da função  $f$ , caso exista o limite da função  $f$  no ponto  $a$ ,  $f$  possui derivada neste ponto.

**Teorema 3.7.** *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida em um intervalo  $I$ .*

- (a) *Se  $f$  é derivável à direita em um ponto  $a \in I$  então  $f$  é contínua à direita em  $a$ .*
- (b) *Se  $f$  é derivável à esquerda em um ponto  $a \in I$  então  $f$  é contínua à esquerda em  $a$ .*
- (c) *Se  $f$  é derivável à direita e à esquerda em um ponto  $a \in I$  então  $f$  é contínua em  $a$ .*  
*Em particular, se  $f$  for derivável em  $a$ , ela é contínua.*

**Teorema 3.8** (Regras de derivação). *Sejam  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deriváveis no ponto  $a \in I$ . As*

funções  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$  e  $f/g$  (onde  $g(a) \neq 0$ ) são também deriváveis no ponto  $a$ , com

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a), \\ (f \cdot g)'(a) &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \quad \text{e} \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}.\end{aligned}$$

**Teorema 3.9** (Regra da cadeia). *Sejam  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções reais definidas em intervalos  $I$  e  $J$ , respectivamente, tais que  $f(I) \subset J$  e  $f(a)$  é um ponto interior de  $J$ . Suponhamos que  $f$  seja derivável em  $a$  e  $g$  derivável em  $f(a)$ . Então, a função composta  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável em  $a$  e vale a fórmula:*

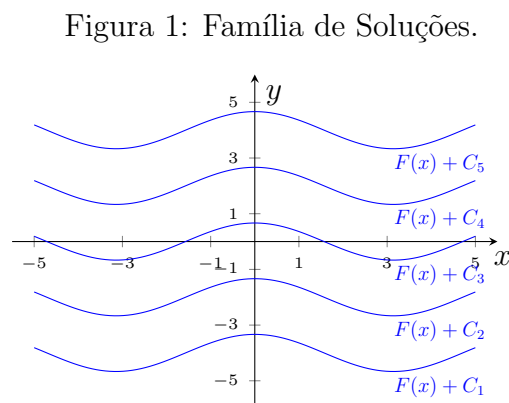
$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

As demonstrações dos teoremas 3.7, 3.8 e 3.9 podem ser vistos respectivamente a partir da página 77 a 82 do livro de Análise I de Figueiredo (1996).

### 3.5 Integral

A integral indefinida é um conceito fundamental na análise matemática que está associado à antiderivação. Dada uma função  $f(x)$ , sua integral indefinida, como visto na Figura 1 é uma “família” de funções, do tipo  $F(x) + C$ , onde  $F(x)$  é a primitiva de  $f(x)$  e  $C$  é uma constante de integração arbitrária. Matematicamente, isso é expresso como:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$



Fonte: Elaborado pela autora.

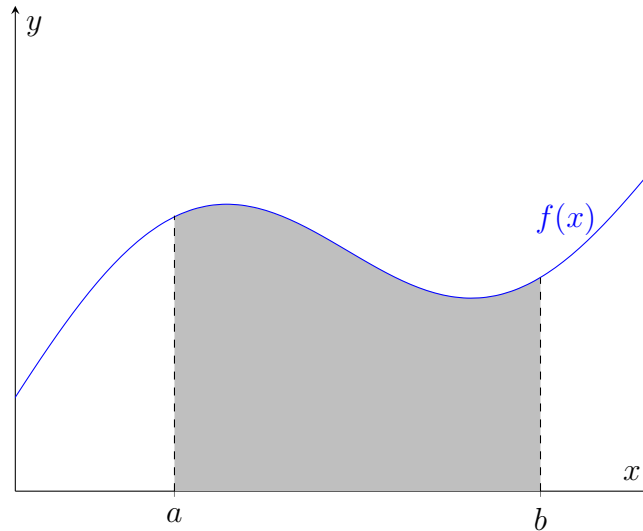
A integral definida está associada ao cálculo de áreas sob curvas, sendo utilizada para determinar a acumulação total de uma função em um intervalo específico. Considerando

uma função contínua  $f(x)$  definida no intervalo  $[a, b]$ , a integral definida de  $f(x)$  de  $a$  até  $b$  é denotada por:

$$\int_a^b f(x) dx,$$

representando a área algébrica sob a curva de  $f(x)$  entre  $x = a$  e  $x = b$ . Geometricamente, como ilustrado na Figura 2.

Figura 2: Área sob a curva  $f(x)$ .



Fonte: Elaborado pela autora.

Resumidamente, a integral indefinida conduz à obtenção de uma família de funções, ao passo que a integral definida produz um valor numérico, representando o acúmulo de uma quantidade ao longo de um intervalo específico.

**Teorema 3.10** (Teorema fundamental do cálculo). *Se uma função integrável  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possui uma primitiva  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  então*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

*Em outros termos, se uma função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possui derivada integrável, então*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx.$$

O teorema 3.10 se encontra no livro “Curso de análise” de Lima (2019).

## 4 Equações Diferenciais

Nos próximos capítulos, apresenta-se as definições, os conceitos e os métodos de resolução das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) de primeira ordem e ordem superior. No entanto, antes do aprofundamento nesses tópicos, é necessário apresentar ao leitor os conceitos básicos relacionados às equações diferenciais.

**Definição 4.1** (Equação diferencial). *Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de **Equação Diferencial(ED)**.*

A partir dessa definição, verifica-se que as equações diferenciais podem ser classificadas de três maneiras distintas, de acordo com a ordem, o tipo e a linearidade.

### 4.1 Classificação de acordo com o Tipo

As equações diferenciais são classificadas em relação ao tipo de duas formas distintas, levando em consideração que uma equação diferencial que tenha apenas derivadas ordinárias de um ou mais variável dependente, em relação a uma única variável independente é chamada de **Equação Diferencial Ordinária**, ou **EDO**.

**Exemplo 4.1.**

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - 5y &= 1 \\ (y - x)dx + 4xdy &= 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y &= 0\end{aligned}$$

Observa-se que em todas as equações, a variável dependente é  $y$ , e uma única variável independente é  $x$ .

Quando a equação diferencial possui derivadas parciais de um ou mais variáveis dependentes com duas ou mais variáveis independentes, ela é chamada de **Equação Diferencial Parcial**, ou **EDP**.

**Exemplo 4.2.**

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Verifica-se que a equação possui duas variáveis dependentes,  $u$  e  $v$ , assim como duas variáveis independentes,  $y$  e  $x$ .

### 4.2 Classificação de acordo com a Ordem

Para identificar a ordem de uma equação diferencial, basta observar a maior derivada presente na equação diferencial, como pode ser verificado nos exemplos a seguir.

**Exemplo 4.3.**

$$4x \frac{dy}{dx} + y = x$$

Note que, no exemplo 4.3, é apresentada uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.

**Exemplo 4.4.**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left( \frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x$$

O exemplo 4.4 trata-se de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

**Exemplo 4.5.**

$$a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Observa-se, no exemplo 4.5, que se trata de uma equação diferencial parcial de quarta ordem.

### 4.3 Classificação de acordo com Linearidade

A classificação de acordo com a linearidade mostra-se essencial para verificar se uma equação diferencial é **linear** ou **não-linear**.

Uma equação diferencial dita **linear** pode ser escrita da seguinte maneira

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x). \quad (1)$$

Além disso, as equações diferenciais lineares podem ser caracterizadas por duas propriedades:

- (i) *A variável dependente  $y$  e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de termo envolvendo  $y$  é 1.*
- (ii) *Cada coeficiente depende apenas da variável independente  $x$ .*

Uma equação diferencial que não é linear é chamada de não linear. Em outras palavras, uma equação diferencial não linear não pode ser expressa na forma de (1).

**Exemplo 4.6.**

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Nota-se que é uma EDO de segunda ordem linear, pois os coeficientes que envolvem  $y$  são iguais a 1.

**Exemplo 4.7.**

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + y^2 = 0$$

Observa-se que esta EDO é de terceira ordem não linear, devido ao fato de o expoente  $y^2$  ser diferente de 1.

## 4.4 Soluções para uma Equação Diferencial

**Definição 4.2.** Qualquer função  $f$  definida em algum intervalo  $I$ , que quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de **solução** para a equação no intervalo.

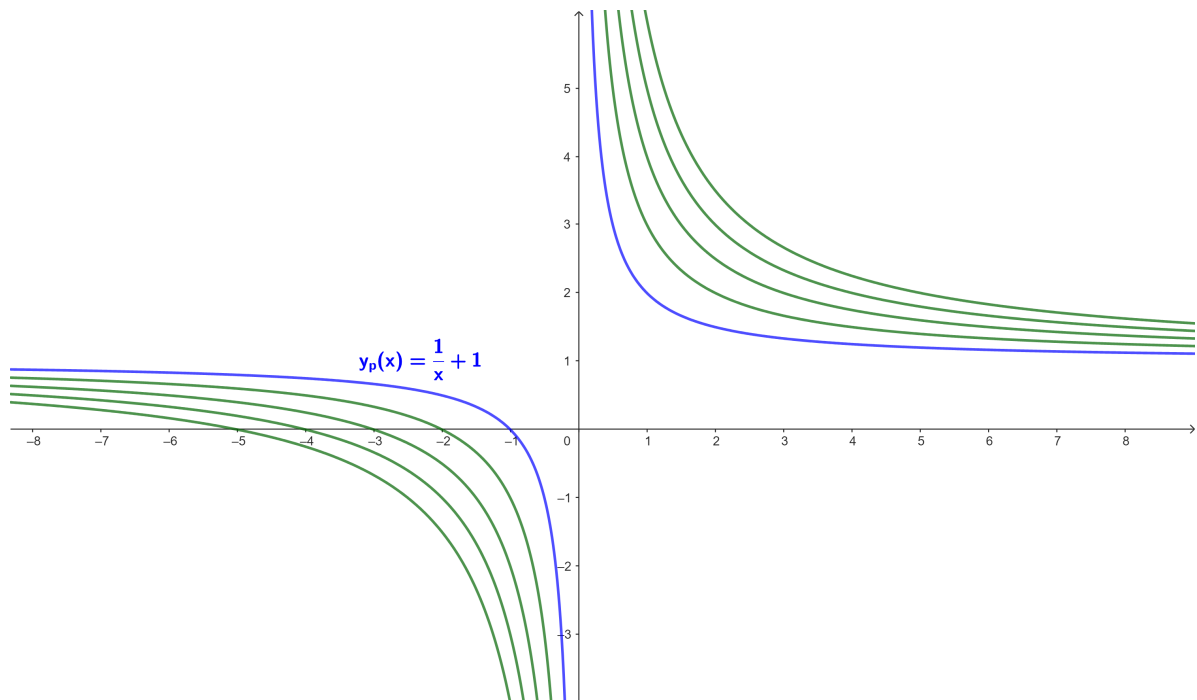
A solução da equação diferencial pode ser determinada de duas maneiras. Se não houver restrições, é obtida a solução geral para a equação diferencial. No entanto, se for fornecida uma condição inicial para a equação, encontra-se a solução particular da equação diferencial.

**Exemplo 4.8.**

$$x \cdot \frac{dy}{dx} + y = 1. \quad (2)$$

A função  $y = \frac{c}{x} + 1$  é solução geral de (2) e  $y_p(x) = \frac{1}{x} + 1$  é uma solução particular, onde a constante  $c = 1$ . Veja a Figura 3 que mostra a solução geral representada na cor verde e a solução particular  $y_p(x)$  na cor azul.

Figura 3: Gráfico da família de soluções e sua solução particular  $y_p(x)$  de (2).



Fonte: Elaborada pela autora.

## 5 Equações Diferenciais Ordinária de Primeira Ordem

No decorrer desta seção, serão apresentadas informações a respeito das EDOs de primeira ordem, bem como, o procedimento para encontrar suas soluções por meio de métodos. Vale ressaltar que os principais resultados apresentados foram retirados dos livros de Equações Diferenciais de Zill e Cullen (2001) e Equações Diferenciais Aplicadas de Figueiredo e Neves (2001).

Uma equação diferencial de primeira ordem pode ser descrita da seguinte maneira.

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (3)$$

onde  $p: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $q: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  são funções reais contínuas definidas em intervalo aberto  $(a,b)$ . Uma função  $y: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução de (3) se ela for diferenciável e satisfaz à equação. Usamos a notação  $y' = dy/dx$  para designar a derivada de  $y$  com relação à sua variável independente  $x$ . No estudo da equação (3) aparecem dois problemas básicos: (a) obter a solução geral da equação (3), isto é, uma expressão que engloba todas as soluções; (b) obter a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (4)$$

onde  $t_0 \in (a, b)$  e  $x_0$  são os dados iniciais. Podemos observar que (4) é um problema de valor inicial onde  $x_0 \in (a, b)$  e  $y_0$  são dados iniciais.

### 5.1 Equações Separáveis

**Definição 5.1.** *Uma equação diferencial da forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \quad (5)$$

*é chamada separável ou tem variáveis separáveis.*

Observe-se que a equação (5) pode ser separada e escrita da seguinte forma

$$h(y)dy = g(x)dx, \quad (6)$$

logo pode-se integrar ambos os lados de (6), obtendo o seguinte resultado

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c.$$

Usa-se o método para resolver equações do tipo (5) em que pode-se separar as variáveis como no exemplo a seguir.

**Exemplo 5.1.** Resolva a equação diferencial dada.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

Solução.

$$y \cdot dy = x^2 \cdot dx$$

usando integração em ambos os lados, obtemos

$$\int y \cdot dy = \int x^2 \cdot dx$$
$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + c.$$

Para a solução de forma explícita pode-se escrever da seguinte maneira

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + c}$$

## 5.2 Equações Exatas

**Definição 5.2.** *Uma expressão diferencial*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

*é uma diferencial exata em uma região  $R$  do plano  $xy$  se ela corresponde à diferencial total de alguma função  $f(x, y)$ . Uma equação diferencial da forma*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

*é chamada de uma equação exata se a expressão do lado esquerdo é uma diferencial exata.*

**Teorema 5.1** (Critério para uma Diferencial Exata). *Sejam  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  funções contínuas com derivadas parciais contínuas em uma região retangular  $R$  definida por  $a < x < b, c < y < d$ . Então, uma condição necessária e suficiente para que*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

*seja uma diferencial exata é*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

*Demonstração.* Para simplificar, suponha que  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em todo plano  $(x, y)$ . Agora, se a expressão  $M(x, y)dx + N(x, y)dy$  é exata, existe alguma função  $f$  tal que

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

para todo  $(x, y)$  em  $R$ . Logo,

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

A igualdade das derivadas parciais mistas é uma consequência da continuidade das derivadas parciais de primeira ordem de  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$ .  $\square$

Sendo assim, o Teorema 5.1 é crucial para determinar se uma equação diferencial é exata ou não. É importante salientar que a demonstração do Teorema 5.1 foi extraída do livro “Equações Diferenciais” de Zill e Cullen (2001).

**Exemplo 5.2.** Resolva a equação diferencial

$$2xydx + (x^2 - 1)dy = 0.$$

Solução. Sendo  $M(x, y) = 2xy$  e  $N(x, y) = x^2 - 1$ , pela condição tem-se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

observe que a equação é exata, pelo Teorema 5.1, existe uma função  $f(x, y)$ , tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1.$$

Aplicando a integral em  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ , tem-se que,

$$f(x, y) = \int 2xy dx \Rightarrow f(x, y) = x^2y + g(y).$$

Derivando  $x^2y + g(y)$  em relação a  $y$ , obtém-se que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y)$$

e posteriormente igualando o resultado com  $N(x, y)$ , segue-se que

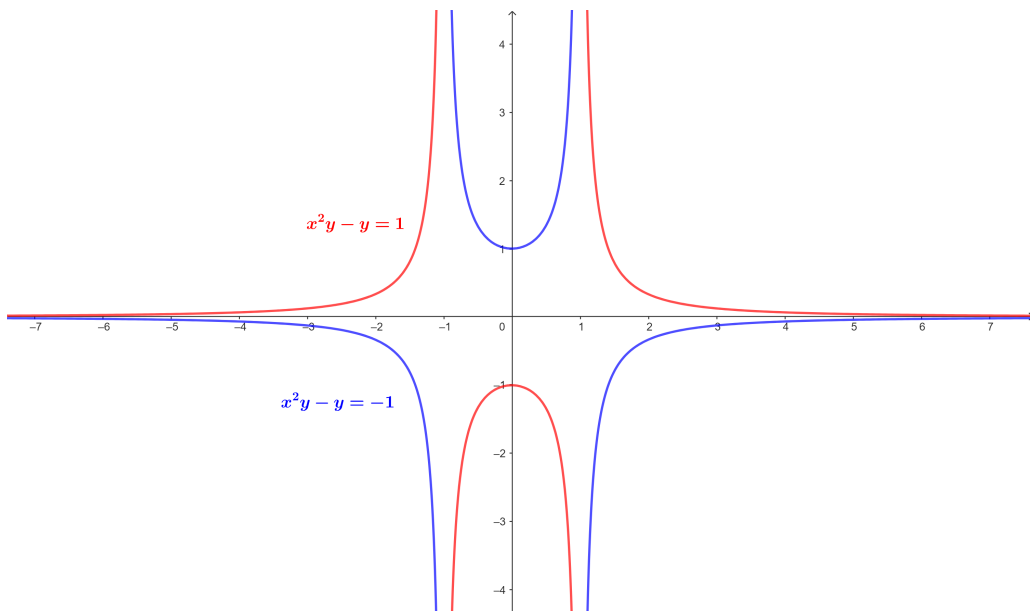
$$x^2 + g'(y) = x^2 - 1.$$

Logo,  $g'(y) = -1$  e  $g(y) = -y$ . Sendo  $f(x, y) = c$  segue o resultado

$$f(x, y) = x^2y - y = c.$$

Portanto, obtemos uma família de curvas com  $x^2y - y = c$ , onde a constante de integração  $c$  pode assumir diversos valores como por exemplo  $c = 1$  (veja Figura 4 curva da cor vermelha) ou  $c = -1$  (veja Figura 4 curva da cor azul).

Figura 4: Família de curvas.



Fonte: Elaborada pela autora.

### 5.3 Método dos Fatores Integrantes

O método dos fatores integrantes é utilizado para tornar uma equação diferencial não exatas em uma equação diferencial exatas, e assim, encontrar a solução da EDO de primeira ordem.

O fator integrante é dado por

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}. \quad (7)$$

*Demonstração.* Considere uma equação diferencial ordinária linear da seguinte forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \quad (8)$$

Ao multiplicarmos (8) ambos os lados da equação diferencial  $\mu(x)$ , obtém-se:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x) \quad (9)$$

observe que o primeiro membro de (9) pode ser escrito como sendo a derivada do fator integrante vezes  $y$ ,

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)q(x). \quad (10)$$

Substituindo o segundo membro de (10) por  $\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\mu(x)y] &= \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y \\ \frac{d}{dx}\mu(x)y + \mu(x)\frac{dy}{dx} &= \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y \\ \frac{d}{dx}\mu(x) &= \mu(x)p(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Fazendo a separação variáveis de (11), tem-se que

$$\frac{d}{\mu(x)}\mu(x) = p(x)dx. \quad (12)$$

Integrando em ambos lados de (12), tem-se

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{\mu(x)}\mu(x) &= \int p(x)dx \\ \ln(\mu) &= \int p(x)dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Aplicando a exponencial em ambos os lados de (13), tem-se que

$$e^{\ln(\mu)} = e^{\int p(x)dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

□

Dessa forma, pode-se demonstrar que o fator integrante é dado por (7). Um resultado importante que serve para resolver EDOs de primeira ordem.

**Exemplo 5.3.** Resolva a equação  $y' - 4y = 12$ .

Solução. Verifica-se que o  $p(x) = -4$  e aplicando a

$$\mu(x) = e^{\int -4dx}$$

$$\mu(x) = e^{-4x}.$$

Encontrando a  $\mu(x)$  pode-se aplicar em ambos os lados a equação, tem-se

$$\left(\frac{dy}{dx} - 4y\right) e^{-4x} = 12e^{-4x}$$

$$(e^{-4x}y)' = 12e^{-4x}$$

$$\int (e^{-4x}y)' = \int 12e^{-4x}$$

$$e^{-4x}y = -3e^{-4x} + c. \tag{14}$$

Na equação (14) vamos multiplicar ambos os lados por  $e^{4x}$ , temos que

$$e^{4x}e^{-4x}y = -3e^{-4x}e^{4x} + ce^{4x}$$

logo,

$$y = -3 + ce^{4x}.$$

## 5.4 Equações de Bernoulli, Riccati e Clairaut

Nesta subseção, serão apresentadas três equações não lineares que podem ser transformadas em equações diferenciais já conhecidas, que foram abordadas nas subseções anteriores.

### 5.4.1 Equação de Bernoulli

A equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n \tag{15}$$

em que  $n$  é um número real qualquer, é chamado de equação de Bernoulli. Para resolver (15) usa-se uma mudança de variável, dada por

$$y^{1-n} = z. \tag{16}$$

**Exemplo 5.4.** Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^{-1}y^{-2}$$

sendo  $x > 0$ .

Solução. Primeiro passo usar a mudança de variável, tem-se que

$$\begin{aligned}y^{1-(-2)} &= z \\y &= z^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}\tag{17}$$

Segundo passo é derivar (17), obtêm-se o seguinte resultado,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Terceiro passo, substituir os resultados na equação, tem-se

$$\frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z^{\frac{1}{3}} = x^{-1} \cdot z^{-\frac{2}{3}}\tag{18}$$

vamos multiplicar ambos os membro de (18) por  $3z^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{3}{x}z = 3x^{-1}.\tag{19}$$

Observe que, com a mudança de variável, a equação de Bernoulli se transforma em uma EDO de primeira ordem. Utilizando o método do fator integrante, é possível resolver a equação, tem-se que

$$\mu(x) = x^3$$

multiplicando (18) por  $\mu(x)$  segue-se que

$$\begin{aligned}(x^3z)' &= 3x^2 \\ \int (x^3z)' &= \int 3x^2 \\ x^3z &= 3x^3 + c \\ z &= 1 + cx^{-3}\end{aligned}$$

sabe-se que  $y = z^{\frac{1}{3}}$ , obtém o resultado da solução da equação de Bernoulli dado por

$$y = (1 + cx^{-3})^{\frac{1}{3}}.$$

#### 5.4.2 Equação de Riccati

A equação diferencial não-linear

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2\tag{20}$$

é chamada de equação de Riccati. Se  $y_1$  é uma solução particular para (20), então as substituições

$$y = y_1 + u \quad (21)$$

e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} \quad (22)$$

em (20) consegue-se redução equação em termos de  $u$ . Substituindo (21) no primeiro membro de (20) e no segundo membro  $y$  por (21), segue que

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} &= P(x) + Q(x)(y_1 + u) + R(x)(y_1 + u)^2 \\ \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} &= P(x) + Q(x)(y_1 + u) + R(x)(y_1^2 + 2y_1u + u^2) \\ \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} &= (P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2) + Q(x)u + R(x)(2y_1u) + R(x)u^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Note que na equação (23),  $\frac{dy_1}{dx} = (P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2)$  segue-se que,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= Q(x)u + R(x)(2y_1u) + R(x)u^2 \\ \frac{du}{dx} - u(Q(x) + R(x)(2y_1)) &= R(x)u^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Como (24) é uma equação de Bernoulli com  $n = 2$ , esta equação pode ser reduzida através da substituição  $w = u^{-1}$ , se tornado uma equação linear dado por

$$\frac{dw}{dx} + w(Q(x) + R(x)(2y_1)) = -R(x). \quad (25)$$

**Exemplo 5.5.** Resolva a equação de Riccati, onde  $y_1 = -e^x$  é uma solução particular para

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2.$$

Solução. Usando (20) para identificar  $P(x) = e^{2x}$ ,  $Q(x) = 1 + 2e^x$  e  $R(x) = 1$  da equação e (25) para substituir os valores encontrados, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} + (1 + 2e^x + 2(-e^x) \cdot 1)w &= -1 \\ \frac{dw}{dx} + w &= -1. \end{aligned} \quad (26)$$

Utilizando o método do fator integrante para resolver (26) segue-se que

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int 1 dx} \\ \mu(x) &= e^x.\end{aligned}\tag{27}$$

Aplicando (27) em ambos os lados de (26) tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[e^x w] &= -e^x \\ \int \frac{d}{dx}[e^x w] &= - \int e^x \\ e^x w &= -e^x + c \\ w &= -1 + \frac{c}{e^x}.\end{aligned}\tag{28}$$

Note que o equação (28) está  $w$  em função de  $x$ , para colocar  $y$  em função de  $x$  basta fazer as seguintes mudanças de variáveis

$$\begin{aligned}w &= u^{-1} \\ u^{-1} &= -1 + \frac{c}{e^x}\end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}u &= e^x + y \\ (e^x + y)^{-1} &= -1 + \frac{c}{e^x}.\end{aligned}$$

A solução da equação é

$$y = -e^x + \frac{1}{ce^{-x} - 1}.$$

### 5.4.3 Equação de Clairaut

Uma EDO da forma

$$y = xy' + f(y')\tag{29}$$

é conhecida como Equação de Clairaut.

Para resolver essa equação basta tomar  $t(x) = y'(x)$  e aplicando em (29),

$$y = xt(x) + f(t(x))\tag{30}$$

derivando ambos os lados de (30), tem-se

$$y' = t(x) + x \frac{dt}{dx} + f'(t) \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dt}{dx}[x + f'(t)] = 0. \quad (31)$$

Note que na equação (31) ou  $\frac{dt}{dx} = 0$ , isto vai implicar que  $t = c$ , onde  $c$  é uma constante, tem-se uma solução não singular dada por

$$y = xc + f(c) \quad (32)$$

ou  $x + f'(t) = 0$ , isto implica que  $x = -f'(t)$  e aplicando em (29), tem-se a solução singular dada por

$$y = -f'(t)t + f(t). \quad (33)$$

**Exemplo 5.6.** Obtenha a solução não singular e singular da equação de Clairaut dada por

$$y = x \frac{dy}{dx} - \left( \frac{dy}{dx} \right)^3.$$

Solução. Primeiramente identifica-se  $f(y') = -(y')^3$ , tomando  $y' = t$  implica que

$$f(t) = -t^3$$

obtem-se por (32) uma família de soluções dada por

$$y = xc - c^3.$$

Como  $f'(t) = -3t^2$ , sabendo que  $x = 3t^2$ , a solução singular obtida de (33), é

$$y = 3t^2 \cdot t - t^3$$

$$y = 2t^3.$$

Note que  $t^2 = \frac{x}{3}$ , elevando ambos os lados por  $(t^2)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ , isto implica que  $t^3 = \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ . Logo a solução singular é

$$y = 2 \left( \frac{x}{3} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

## 6 Equações Diferenciais de Ordem Superior

Neste capítulo, serão apresentados métodos para resolver equações diferenciais lineares de ordem  $n > 1$  ( $n$  maior que um), bem como problemas de valor inicial e de contorno, dependência e independência linear, equações homogêneas e não homogêneas, função complementar, equações lineares homogêneas com coeficientes constantes e método coeficientes indeterminados. As definições e teoremas apresentados foram retirados do livro Equações Diferenciais de Zill e Cullen (2001).

### 6.1 Problema de valor inicial

Conforme mencionado nos capítulos anteriores, ao resolver uma equação diferencial, é possível encontrar uma variedade de soluções que satisfazem à equação. Entretanto, para chegar a uma única solução de uma equação diferencial de  $n$ -ésima ordem, é necessário estabelecer condições iniciais para o problema. Desta forma, dada uma equação de  $n$ -ésima ordem, tem-se o sistema

$$\begin{cases} a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (34)$$

note que  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$  são valores específicos. Sendo assim, temos um Problema de Valor Inicial (PVI) que envolve condições iniciais, em que se busca uma solução em um determinado intervalo  $I$  que contenha  $x_0$ .

**Teorema 6.1** (Existência de uma única solução). *Sejam  $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$  e  $g(x)$  contínuas em um intervalo  $I$  com  $a_n(x) \neq 0$  para todo  $x$  neste intervalo. Se  $x = x_0$  é algum ponto deste intervalo, então existe uma única solução  $y(x)$  para o problema de valor inicial (34) neste intervalo.*

### 6.2 Problema de valor de contorno

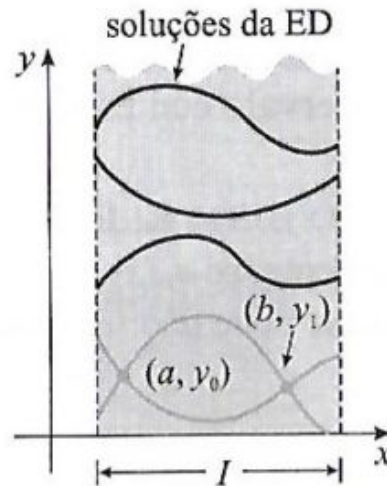
Dada uma equação diferencial de  $n$ -ésima ordem e a variável dependente ou suas derivadas são pontos distintos, tem-se o Problema de Valor de Contorno (PVC). Para exemplificar, tomando uma equação diferencial de segunda ordem, tem o seguinte sistema

$$\begin{cases} a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ y(a) = y_0, y(b) = y_1 \end{cases} \quad (35)$$

em que  $y(a) = y_0, y(b) = y_1$  são condições de contorno ou condições de fronteira. Para solucionar o problema, é necessário encontrar uma função que atenda à equação diferencial

em um intervalo  $I$ , que contenha  $a$  e  $b$ , e nos pontos  $(a, y_0)$  e  $(b, y_1)$  em que o gráfico (veja Figura 5) os intercepta.

Figura 5: PVC.



Fonte: Zill e Cullen (2001).

Considerando as equações diferenciais de segunda ordem, pode-se encontrar três possibilidades de contorno, apresentadas abaixo

$$\begin{aligned} y'(a) &= y'_0, & y(b) &= y_1; \\ y(a) &= y_0, & y'(b) &= y'_1; \\ y'(a) &= y'_0, & y'(b) &= y'_1. \end{aligned}$$

Uma consequência do Teorema 6.1 quando todas as condições são satisfeitas encontra-se como solução do problema as seguintes possibilidades como: várias soluções, uma única ou nenhuma solução.

### 6.3 Dependência e Independência Linear

Para o estudo das equações diferenciais é indispensável ter familiaridade com os conceitos de dependência e independência linear.

**Definição 6.1** (Dependência Linear). *Dizemos que uma conjunto de funções  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $\dots$ ,  $f_n(x)$  é **linearmente dependente** em um intervalo  $I$  se existem  $c_1, c_2, \dots, c_n$  não todas nulas, tais que*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

para todo  $x$  no intervalo.

O conjunto de funções é linearmente dependente (LD) em  $I$  quando há pelo menos uma constante diferente de zero. Dessa forma, ao combinar linearmente todas as funções com as constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  não são todas nulas, gera-se uma combinação para todo  $x \in I$ .

**Exemplo 6.1.** As funções  $f_1(x) = \sqrt{x} + 5$ ,  $f_2(x) = \sqrt{x} + 5x$ ,  $f_3(x) = x - 1$ ,  $f_4(x) = x^2$  são linearmente dependente no intervalo  $(0, \infty)$ , pois  $f_2(x)$  pode ser escrita como uma combinação linear de  $f_1(x)$ ,  $f_3(x)$  e  $f_4(x)$ .

Note que

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 1 \cdot f_1(x) + 5 \cdot f_3(x) + 0 \cdot f_4(x) \\ &= 1 \cdot (\sqrt{x} + 5) + 5 \cdot (x - 1) + 0 \cdot x^2 \\ &= \sqrt{x} + 5x. \end{aligned}$$

**Definição 6.2** (Independência Linear). Dizemos que uma conjunto de funções  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  é **linearmente independente** em um intervalo  $I$  se ele não é linearmente dependente no intervalo.

Em outras palavras, a definição 6.2 mostra que, quando um conjunto de funções é linearmente independente (LI) em  $I$ , a única solução possível é a combinação linear, em que as constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são nulas.

### 6.3.1 Wronskiano

Um critério que permite determinar se um conjunto de funções é LI.

**Teorema 6.2** (Critério para Independência Linear de Funções). *Suponha que*

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$$

*sejam diferenciáveis pelo menos  $n - 1$  vezes. Se o determinante*

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

*for diferente de zero em pelo menos um ponto do intervalo  $I$ , então as funções*

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$$

*serão linearmente independentes no intervalo.*

Veja a demonstração do teorema 6.2 na página 150 do livro de Equações Diferenciais de Zill e Cullen (2001).

**Corolário 6.1.** Se  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  possuem pelo menos  $n - 1$  derivadas e são linearmente dependentes em  $I$ , então

$$W(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = 0$$

para todo  $x$  no intervalo.

**Exemplo 6.2.** Considere as funções  $f_1(x) = x^2e^x$  e  $f_2(x) = x$  obtenha o Wronskiano.

$$W(x^2e^x, x) = \begin{vmatrix} x^2e^x & x \\ 2xe^x + x^2e^x & 1 \end{vmatrix} = -x^2e^x - x^3e^x$$

pelo teorema 6.2 as funções  $f_1$  e  $f_2$  são LI.

**Exemplo 6.3.** Considere as funções  $f_1(x) = 2x^2 + 3$ ,  $f_2(x) = x^2$  e  $f_3(x) = 1$  obtenha o Wronskiano.

$$W(2x^2 + 3, x^2, 1) = \begin{vmatrix} 2x^2 + 3 & x^2 & 1 \\ 4x & 2x & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

pelo corolário 6.1 as funções  $f_1, f_2$  e  $f_3$  são LD.

## 6.4 Equações Homogêneas e Não-Homogêneas

Nesta subseção, apresenta-se as definições de equações homogêneas e não homogêneas, bem como os teoremas e métodos para se chegar às soluções para essas equações.

### 6.4.1 Equações Homogêneas

Uma equação diferencial de ordem  $n$  é dita homogênea, quando pode ser escrita da seguinte maneira

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0. \quad (36)$$

A seguir, apresentam-se as principais definições e teoremas que estão relacionados às equações homogêneas.

**Teorema 6.3** (Princípio de Superposição - Equações Homogêneas). *Sejam  $y_1, y_2, \dots, y_k$  solução para a equação diferencial linear de  $n$ -ésima ordem homogênea (36) em um intervalo  $I$ . Então, a combinação linear*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x),$$

em que os  $c_i, i = 1, 2, \dots, k$ , são constantes, é também uma solução no intervalo.

**Corolário 6.2. (i)** *Um múltiplo  $y = c_1 y_1(x)$  de uma solução  $y_1(x)$  para uma equação diferencial linear homogênea é também uma solução.*

**(ii)** *Um equação diferencial linear homogênea sempre possui a solução trivial  $y = 0$ .*

No teorema 6.3, afirma-se que a soma de duas ou mais soluções para uma equação homogênea resulta também em uma solução, assim como sua combinação linear também gera uma solução. Veja a demonstração do teorema 6.3 na página 153 do livro Equações Diferenciais de Zill e Cullen (2001).

**Teorema 6.4** (Critério para Independência Linear de Soluções). *Sejam  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ,  $n$  soluções para a equação diferencial linear homogênea de  $n$ -ésima ordem (36) em um intervalo  $I$ . Então, o conjunto de soluções é **linearmente independente** em  $I$  se e somente se*

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$$

*para todo  $x$  no intervalo*

A demonstração do teorema esta na página 155 do livro de Equações Diferenciais de Zill e Cullen (2001).

**Definição 6.3** (Conjunto Fundamental de Soluções). *Qualquer conjunto  $y_1, y_2, \dots, y_n$  de  $n$  soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de  $n$ -ésima ordem (36) em um intervalo  $I$  é chamado de **conjunto fundamental de soluções** no intervalo.*

**Teorema 6.5.** *Sejam  $y_1, y_2, \dots, y_n$   $n$  soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de  $n$ -ésima ordem (36) em um intervalo  $I$ . Então, toda solução  $Y(x)$  para (36) é uma combinação linear das  $n$  soluções independentes  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , ou seja, podemos encontrar constantes  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , tais que*

$$Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

A demonstração do teorema se encontra na página 156 do livro Equações Diferenciais de Zill e Cullen (2001).

**Teorema 6.6** (Existência de um Conjunto Fundamental). *Existe um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial linear homogênea de  $n$ -ésima ordem (36) em um intervalo  $I$ .*

**Definição 6.4** (Solução Geral - Equações Homogêneas). *Sejam  $y_1, y_2, \dots, y_n$   $n$  soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de  $n$ -ésima ordem*

(36) em um intervalo  $I$ . A solução geral para a equação no intervalo é definida por

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x),$$

em que os  $c_i, i = 1, 2, \dots, n$  são constantes arbitrárias.

**Exemplo 6.4.** A equação  $y'' - 9y = 0$  possui duas soluções  $y_1 = e^{3x}$  e  $y_2 = e^{-3x}$ .

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6 \neq 0$$

para todo valor de  $x$ ,  $y_1$  e  $y_2$  formam um conjunto fundamental de soluções em  $(-\infty, \infty)$ . A solução geral para a equação diferencial no intervalo é

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}.$$

#### 6.4.2 Equações Não-homogêneas

Uma equação diferencial de ordem  $n$  é dita não-homogênea, quando pode ser escrita da seguinte maneira

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (37)$$

sendo  $g(x)$  diferente de zero.

Em relação à definição de solução de (37), dada qualquer função  $y_p$  que satisfaça (37) é conhecida como solução particular da equação não-homogênea.

**Exemplo 6.5.** Uma solução particular para  $y'' + 9y = 27$  é  $y_p = 3$  pois  $y_p'' = 0$  e

$$0 + 9y_p = 9 \cdot 3 = 27.$$

**Teorema 6.7.** *Sejam  $y_1, y_2, \dots, y_n$  soluções para a equação diferencial linear homogênea de  $n$ -ésima ordem (36) em um intervalo  $I$  e seja  $y_p$  qualquer solução para a equação não-homogênea (37) no mesmo intervalo. Então,*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \dots, c_k y_k(x) + y_p(x)$$

*é também uma solução para a equação não-homogênea no intervalo para qualquer constantes  $c_1, c_2, \dots, c_k$ .*

**Teorema 6.8.** *Seja  $y_p$  uma dada solução para a equação diferencial linear não-homogênea de  $n$ -ésima ordem (37) em um intervalo  $I$  e sejam  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  um conjunto fundamental de soluções para a equação homogênea associada (36) no intervalo. Então, para qualquer*

solução  $Y(x)$  de (37) em  $I$ , podemos encontrar constantes  $C_1, C_2, \dots, C_n$  tais que

$$Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) + y_p(x).$$

**Definição 6.5** (Solução Geral - Equações Não-homogêneas). *Seja  $y_p$  uma dada solução para a equação diferencial linear não-homogênea de  $n$ -ésima ordem (37) em um intervalo  $I$  e seja*

$$y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

*a solução geral para a equação homogênea associada (36) no intervalo. A solução geral para a equação não-homogênea no intervalo é definida por*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p(x)$$

$$y = y_c(x) + y_p(x).$$

A definição 6.5 mostra que a combinação linear de  $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$  é chamada de função complementar para (37) ou seja, a solução geral para uma equação não-homogêneas é composta por uma função complementar  $y_c$  mais qualquer solução particular  $y_p$ .

**Teorema 6.9** (Princípio de Superposição - Equações Não-homogêneas). *Sejam  $y_{p1}, y_{p2}, \dots, y_{pk}$   $k$  soluções particulares para a equação diferencial linear de  $n$ -ésima ordem (37) em um intervalo  $I$ , correspondendo a  $k$  funções distintas  $g_1, g_2, \dots, g_k$ . Isso é, suponha que  $y_{pi}$  seja uma solução particular para a equação diferencial correspondente*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_i(x),$$

*em que  $i = 1, 2, \dots, k$ . Então,*

$$y_p = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \dots + y_{pk}(x)$$

*é uma solução particular para*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_k(x).$$

## 6.5 Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

Para melhor compreensão deste estudo, toma-se como exemplo as equações diferenciais de segunda ordem da forma

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{38}$$

Uma solução para a equação (38) se encontra-se na forma  $y = e^{mx}$ , então derivando tem-se  $y' = me^{mx}$  e  $y'' = m^2e^{mx}$ , assim substituindo em (38) obtém-se

$$\begin{aligned} am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} &= 0 \quad \text{ou} \\ e^{mx}(am^2 + bm + c) &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Note que, em (39) a função  $e^{mx} \neq 0$  para qualquer valor real de  $x$ . Para que a função exponencial satisfaça (38), é necessário escolher  $m$  tal que seja a raiz da equação

$$am^2 + bm + c = 0. \quad (40)$$

A equação (40) é conhecida como equação auxiliar ou característica em (38). Dessa forma, no processo de resolução da equação (40), há três hipóteses possíveis.

**(I) Raízes Reais Distintas:** Ocorre quando  $\Delta > 0$  tem-se duas raízes  $m_1$  e  $m_2$  distintas. Portanto a solução geral tem a seguinte forma

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}.$$

**(II) Raízes Reais Iguais:** Ocorre quando  $\Delta = 0$  resulta em duas raízes  $m_1$  e  $m_2$  iguais. Portanto a solução geral tem a seguinte forma

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x}.$$

**(III) Raízes Complexas Conjugadas:** Ocorre quando  $\Delta < 0$  obtém-se duas raízes  $m_1 = \alpha + i\beta$  e  $m_2 = \alpha - i\beta$  complexas. Portanto a solução geral tem a seguinte forma

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x).$$

**Exemplo 6.6.** Resolva a equação diferencial

$$2y'' - 5y' + 2y = 0.$$

Solução. Primeiramente montamos a equação auxiliar

$$2m^2 - 5m + 2 = 0$$

calculando  $\Delta$  e encontrando as raízes da equação, tem-se

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4.2.2$$

$$\Delta = 9$$

Utilizado a formula

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a},$$

as raízes encontradas são  $m_1 = 2$  e  $m_2 = \frac{1}{2}$ . Logo, a solução geral é

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}.$$

**Exemplo 6.7.** Resolva a equação diferencial

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

Solução. A equação auxiliar dada por

$$m^2 - 8m + 16 = 0$$

calculando  $\Delta$  e encontrando as raízes da equação auxiliar, tem-se

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4.1.16$$

$$\Delta = 0$$

assim, as raízes encontradas são  $m_1 = m_2 = 4$ . Logo,

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{4x}$$

é solução geral.

**Exemplo 6.8.** Resolva a equação diferencial

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Solução. A equação auxiliar dada por

$$m^2 - 2m + 5 = 0$$

calculando  $\Delta$  e encontrando as raízes, tem-se

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4.1.5$$

$$\Delta = -16$$

assim, as raízes encontradas são  $m_1 = 1 + 2i$  e  $m_2 = 1 - 2i$ . Logo,

$$y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

é solução geral.

Generalizado para uma equação (36) de ordem  $n > 2$  em que os  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , são constantes reais, tem-se a equação auxiliar de grau  $n$  da forma

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0. \quad (41)$$

O caso (I) para equação (41), onde todas as raízes são diferentes, encontra-se a seguinte solução geral para (36) dada por

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x}.$$

Observação: É difícil estabelecer os casos análogos de (II) e (III) para a equação (41) de grau  $n > 2$ , pois pode acontecer várias possibilidades de combinações dependendo do grau da equação (41).

Quando a equação (41) tem  $k$  raízes reais iguais a  $m_1$ , a solução geral é a combinação linear das soluções LI,

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + c_3 x^2 e^{m_1 x} + \dots + c_k x^{k-1} e^{m_1 x}.$$

## 6.6 Método dos coeficientes indeterminados

Essa técnica permite resolver equações diferenciais lineares não-homogêneas de ordem  $n$  que possuem coeficientes constantes, sendo  $g(x)$  uma função constante. Para encontrar a solução geral da equação (37), são necessários dois passos.

**Passo 1:** Encontrar a função complementar  $y_c$ .

**Passo 2:** Encontrar qualquer solução particular  $y_p$  da equação não-homogênea.

A função complementar ou solução complementar é a solução geral da equação homogênea associada. A função  $g(x)$  é constante e por ser uma função polinomial, expo-

nencial,  $\text{sen}\beta x$ ,  $\text{cos}\beta x$ , ou somas e produtos dessas funções. Para encontrar  $y_p$  poder fazer tentativas (veja Tabela 1).

Tabela 1: Tentativas para Soluções Particulares.

$g(x)$	Forma de $y_p$
1 (qualquer constante)	$A$
$5x + 7$	$Ax + B$
$3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + c$
$x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
$\text{sen } 4x$	$A \cos 4x + B \text{sen } 4x$
$\text{cos } 4x$	$A \cos 4x + B \text{sen } 4x$
$e^{5x}$	$Ae^{5x}$
$(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
$x^2 e^{5x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
$e^{3x} \text{sen } 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \text{sen } 4x$
$5x^2 \text{sen } 4x$	$(Ax^2 + Bx + c) \cos 4x + (Dx^2 + Ex + F) \text{sen } 4x$
$xe^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + D)e^{3x} \text{sen } 4x$

Fonte: Zill e Cullen (2001).

**Exemplo 6.9.** Resolva a equação diferencial não-homogênea

$$y''' + y'' = e^x \cos x.$$

Solução.

**Passo 1.** A equação auxiliar dada por

$$\begin{aligned} m^3 + m^2 &= 0 \quad \text{ou} \\ m^2(m + 1) &= 0 \end{aligned}$$

as raízes são  $m_1 = m_2 = 0$  e  $m_3 = -1$ . Logo, a função complementar é

$$y_c = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}.$$

**Passo 2.** Para encontra a solução particular que satisfaça  $g(x) = e^x \cos x$ , verifica-se a tabela 1 para a tentativa de  $y_p$ , neste caso, temos que

$$y_p = Ae^x \cos x + Be^x \text{sen} x.$$

Fazendo a segunda e terceira derivada de  $y_p$  e substituindo na equação diferencial

não-homogênea, segue que

$$\begin{aligned}y_p''' + y_p'' &= e^x \cos x \\(-2A + 4B)e^x \cos x + (-4A - 2B)e^x \operatorname{sen} x &= e^x \cos x\end{aligned}$$

tem-se, o sistema

$$\begin{aligned}-2A + 4B &= 1 \\-4A - 2B &= 0.\end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, obtêm os valores de  $A = -\frac{1}{10}$  e  $B = \frac{1}{5}$ . Portanto, a solução particular é dada por

$$y_p = -\frac{1}{10}e^x \cos x + \frac{1}{5}e^x \operatorname{sen} x.$$

A solução geral para a equação diferencial não-homogênea é

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} - \frac{1}{10}e^x \cos x + \frac{1}{5}e^x \operatorname{sen} x.$$

## 7 Aplicações

Neste capítulo será apresentado aplicações sobre criação de tilápia, crescimento populacional, resfriamento de corpos e problema de misturas.

### 7.1 Criação de Tilápia do Nilo

A criação da tilápia do Nilo é uma atividade aquacultura amplamente rentável, devido à adaptabilidade da espécie a diversas condições ambientais, ao seu crescimento rápido e à eficiência na conversão alimentar. A tilápia do Nilo oferece grandes oportunidades para aquicultores, devido aos baixos custos de produção, aos ciclos de produção curtos e à crescente demanda global por peixe, especialmente nos mercados internacionais.

#### 7.1.1 Modelo de Malthus

Esse modelo foi criado por Thomas Robert Malthus (1766-1834) e descreve o crescimento populacional considerando uma taxa que depende do tamanho da população. Sendo  $P$  a representação da população no instante  $t$ , desta forma, tem-se

$$\frac{dP}{dt} = f(P),$$

em que a função  $f$  descreve a quantidade de indivíduos de  $P$ . Segundo Zill e Cullen (2001, p. 135), “Malthus argumentou que a forma apropriada para  $f(P)$ , pelo menos quando a população fosse pequena, deveria ser um múltiplo constante de  $P$ ”. Com isso, tem-se a seguinte forma

$$\frac{dP}{dt} = rP,$$

sendo  $r$  uma constante. O modelo apresenta um comportamento exponencial devido à solução ser dada por

$$P(t) = P_0 \cdot e^{rt}. \quad (42)$$

#### 7.1.2 Modelo de Gompertz

O Modelo de Gompertz descreve o crescimento exponencial retardado, sendo frequentemente aplicado em contextos biológicos para modelar o crescimento de populações ao longo do tempo. Este modelo foi proposto pelo matemático Benjamin Gompertz no início do século XIX e é amplamente utilizado em biologia, demografia e ciências da saúde.

Com esse modelo, é possível observar a taxa de crescimento de massa característica da espécie em função do tempo. Para compreender essa abordagem, Bassanezi (2002, p. 343) apresenta a seguinte equação diferencial com a condição inicial:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bx \ln x = x(a - b \ln x) \\ x(0) = x_0 \quad \text{com } a > 0 \text{ e } b > 0. \end{cases} \quad (43)$$

A taxa de crescimento  $r(x) = a - b \ln x > 0$  decresce com  $x$  e o valor de estabilidade de  $x$  é obtido considerando-se  $r(x) = 0$ , isto é,

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \iff \quad (a - b \ln x) = 0 \quad \iff \quad x_\infty = e^{\frac{a}{b}}, \text{ com } x > 0.$$

Observamos que quando  $x$  é muito pequeno,  $r(x)$  é muito grande pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} r(x) = +\infty.$$

Agora, como  $0 = a - b \ln x_\infty$ , podemos tomar  $a = b \ln x_\infty$  na equação (43) e reescrevê-la como

$$\frac{dx}{dt} = bx \ln x_\infty - b \ln x = bx \ln \left( \frac{x_\infty}{x} \right) = x \ln \left( \frac{x_\infty}{x} \right)^b \quad (44)$$

e neste caso,  $r(x) = \ln \left( \frac{x_\infty}{x} \right)^b$ .

A solução de (43) é obtida considerando-se a mudança de variável  $z = \ln x$ :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = a - bz.$$

Integrando,

$$\int \frac{dz}{a - bz} = \int dt \quad \iff \quad \frac{1}{b}[a - bz] = t + c.$$

Para  $t=0$ , obtemos  $c = -\frac{1}{b} \ln |a - b \ln x_0|$ .

Portanto,  $\ln |a - bz| = -bt + \ln |a - b \ln x_0|$ ,

$$a - bz = (a - b \ln x_0)e^{-bt} \quad \iff \quad z(t) = \frac{1}{b}[a - (a - b \ln x_0)e^{-bt}].$$

Voltando à variável  $x = e^z$ , obtemos

$$x(t) = e^{\frac{a}{b}} \cdot e^{[-(\frac{a}{b} - \ln x_0)e^{-bt}]},$$

ou

$$x(t) = x_\infty \left( \frac{x_0}{x_\infty} \right)^{e^{-bt}}. \quad (45)$$

A curva  $x(t)$  tem um ponto de inflexão quando

$$t = t_m = \frac{1}{b} \ln \left( \frac{a}{b} - \ln x_0 \right)$$

e

$$x(t_m) = \frac{1}{e} x_\infty = \frac{1}{e} e^{\frac{a}{b}} = e^{\frac{a-b}{b}}.$$

Com base nessas informações, foi realizado o estudo desses modelos, tendo como referência o trabalho de Poloni (2018), que realiza a comparação entre esses modelos.

**Problema 1.** Na tabela a seguir, apresentam-se os dados extraídos do livro “Criação de Tilápias” de Borges e Berthier (2019). Para esta aplicação, serão utilizados os modelos de Malthus e Gompertz, comparando os resultados e verificando qual é o método mais adequado para esse cenário de crescimento da tilápia do Nilo.

Tabela 2: Dados da criação da tilápia.

t	Dias	Peso (g)
0	7	2
1	14	5,5
2	21	11
3	28	18
4	35	27
5	42	39
6	49	55
7	56	76
8	63	103
9	70	133
10	77	169
11	84	209
12	91	254
13	98	304
14	105	356
15	112	411
16	119	466
17	126	521
18	133	574
19	140	626
20	147	676
21	154	726
22	161	776
23	168	826
24	175	876
25	182	926
26	189	976

Fonte: Adaptado de Borges e Berthier (2019).

**Solução:** Com a equação (42), é possível efetuar a substituição dos dados apresentados na tabela 2, para encontrar o fator  $r$ . O valor de  $t$  é calculado a partir do cálculo de  $t = 189 - 7 = 182$  dias. Em segunda,  $P(t) = 976$  gramas e  $P_0 = 2$  gramas, de acordo com

os dados calcula-se

$$\begin{aligned}976 &= 2 \cdot e^{r \cdot 182} \\ \frac{976}{2} &= e^{r \cdot 182} \\ 488 &= e^{r \cdot 182} \\ \ln(488) &= \ln(e^{r \cdot 182}) \\ \ln(488) &= 182 \cdot r \\ r &= \frac{\ln(488)}{182} \\ r &= 0,0340.\end{aligned}$$

Logo, pode-se escrever a fórmula geral de Malthus como sendo,

$$P(t) = 2 \cdot e^{0,0340 \cdot t}.$$

Substituindo os valores de  $t$  da Tabela 2 na fórmula, obtém-se a tabela a seguir.

Tabela 3: Modelo de Malthus.

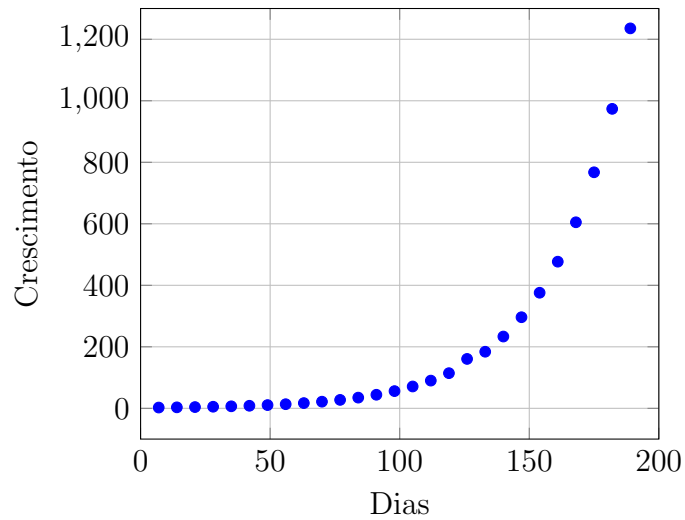
t	Dias	Peso (g)	Malthus
0	7	2	2,537
1	14	5,5	3,219
2	21	11	4,084
3	28	18	5,181
4	35	27	6,574
5	42	39	8,340
6	49	55	10,581
7	56	76	13,425
8	63	103	17,032
9	70	133	21,609
10	77	169	27,416
11	84	209	34,783
12	91	254	44,130
13	98	304	55,988
14	105	356	71,033
15	112	411	90,120
16	119	466	114,336
17	126	521	160,637
18	133	574	184,038
19	140	626	233,491
20	147	676	296,233
21	154	726	375,833
22	161	776	476,823
23	168	826	604,950
24	175	876	767,506
25	182	926	973,742
26	189	976	1235,396

Fonte: Elaborado pela autora.

Ao examinar os dados apresentados na Tabela 3, observa-se que, nos instantes  $t(0)$  ao  $t(8)$ , o crescimento é gradual. Esse comportamento pode ser atribuído à transição da tilápia da fase jovem para a fase de crescimento. No intervalo de  $t(9)$  a  $t(22)$ , ocorre um aumento mais notável, caracterizando uma fase de crescimento mais substancial. Posteriormente, nos instantes  $t(23)$  ao  $t(26)$ , o crescimento é ainda mais acelerado, representando uma etapa de crescimento rápido.

Contudo, o modelo de Malthus não reflete a situação real, uma vez que, ao analisar o gráfico presente na figura (6), é possível inferir que a tendência é que o crescimento dos peixes vai ao infinito. Apesar desse afastamento da realidade, o modelo de Malthus é útil para fornecer o termo  $r$ , que será incorporado no modelo Gompertz.

Figura 6: Gráfico do método de Malthus



Fonte: Elaborado pela autora

Ao empregar os dados no modelo de Gompertz, utilizando a equação (45) com  $x_\infty = 850$ , conforme indicado por Poloni (2018), que afirmou ser esse o peso ideal para o abate da tilápia do Nilo, e considerando o termo  $r$  obtido no modelo anterior, onde  $r = b = 0,0340$  e  $x_0 = 2$ , podemos substituir esses valores na equação, resultando em

$$x(t) = 850 \left( \frac{2}{850} \right)^{e^{-0,0340t}}$$

novamente, aplicando os dados  $t$  da Tabela 2, obtêm-se os valores presentes na Tabela 4.

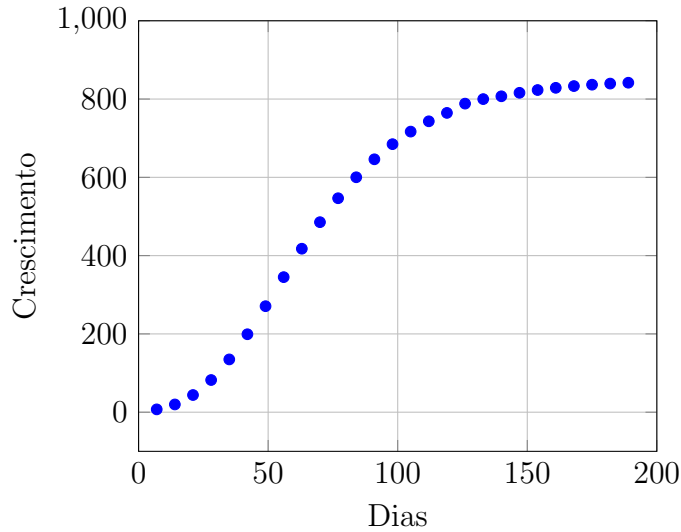
Tabela 4: Modelo de Gompertz.

t	Dias	Peso (g)	Gompertz
0	7	2	7,206
1	14	5,5	19,792
2	21	11	43,887
3	28	18	82,213
4	35	27	134,836
5	42	39	199,141
6	49	55	270,800
7	56	76	345,035
8	63	103	417,632
9	70	133	485,467
10	77	169	546,615
11	84	209	600,193
12	91	254	646,099
13	98	304	684,744
14	105	356	716,827
15	112	411	743,170
16	119	466	764,614
17	126	521	788,305
18	133	574	799,894
19	140	626	807,058
20	147	676	815,968
21	154	726	823,060
22	161	776	828,694
23	168	826	833,161
24	175	876	836,699
25	182	926	839,499
26	189	976	841,712

Fonte: Elaborado pela autora.

Ao analisar os dados apresentados na Tabela 4 e compará-los aos mesmos intervalos do modelo de Malthus, nota-se que, inicialmente, o crescimento é maior do que no modelo anterior. No segundo intervalo, o aumento é ainda mais acentuado, enquanto no terceiro, o crescimento tende a se estabilizar em relação ao limite previamente estipulado.

Figura 7: Gráfico do método de Gompertz



Fonte: Elaborado pela autora

Em conclusão, a escolha entre os modelos de Malthus e Gompertz revela-se crucial ao planejar a criação de tilápias do Nilo. O modelo de Malthus, embora valioso para entender as fases iniciais de crescimento, apresenta uma abordagem mais simplificada, assumindo um crescimento exponencial ilimitado. Por outro lado, o modelo de Gompertz, ao incorporar fatores de saturação e desaceleração do crescimento, oferece uma perspectiva mais realista, especialmente considerando as complexas interações ambientais.

A escolha entre esses modelos depende da necessidade de representar nuances específicas da dinâmica populacional das tilápias do Nilo. Em virtude da natureza mais complexa do ambiente de criação, o modelo de Gompertz emerge como a opção mais adequada, permitindo uma compreensão mais precisa e aplicável das tendências de crescimento e limitações que influenciam essa espécie específica.

## 7.2 Crescimento populacional

O modelo do crescimento populacional descreve fenômenos dinâmicos em diversas áreas do conhecimento, essa modelagem representa matematicamente a variação da população ao longo do tempo, ou seja, a taxa de crescimento populacional. Sendo assim,

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad (46)$$

onde  $k$  é uma constante de proporção. Para encontrar a solução geral de (46), note-se que ela pode ser separada, então

$$\begin{aligned}\frac{dP}{P} &= k dt \\ \int \frac{dP}{P} &= \int k dt \\ \ln |P| &= kt + c \\ P &= \pm e^{kt} e^c.\end{aligned}$$

Verifique que  $\pm e^c$  é uma constante, que será representada por  $P_0$ , tem-se

$$P(t) = P_0 e^{kt} \quad (47)$$

é solução geral da equação (46). As aplicações apresentadas a seguir foram retiradas de Zill e Cullen (2001).

**Problema 2.** Sabe-se que a população de uma certa comunidade cresce a uma taxa proporcional ao número de pessoas presentes em qualquer instante. (a) Se a população duplicou em 5 anos, quando ela triplicará? (b) Quando quadruplicará?

**Solução:** Primeiramente vamos encontrar o valor de  $k$ . Sabemos que  $P(5) = 2P_0$  e substituindo na solução geral (47), temos que

$$\begin{aligned}2P_0 &= P_0 e^{5k} \\ 2 &= e^{5k}\end{aligned}$$

aplicando o  $\ln$  em ambos os lados da igualdade, segue que

$$\begin{aligned}k &= \frac{\ln(2)}{5} \\ k &= 0,1386\end{aligned}$$

considerando as quatro primeiras casas decimais. Escrevendo (47) como sendo

$$P(t) = P_0 e^{0,1386t} \quad (48)$$

obtemos a solução para qualquer instante  $t$ .

(a) A população triplica quando  $P(t) = 3P_0$  substituindo os valores em (48), tem-se

$$3P_0 = P_0 e^{0,1386t}$$

$$\ln(3) = 0,1386t$$

$$t = \frac{\ln(3)}{0,1386}$$

$$t = 7,9 \text{ anos.}$$

(b) A população quadruplica quando  $P(t) = 4P_0$ , então

$$4P_0 = P_0 e^{0,1386t}$$

$$\ln(4) = 0,1386t$$

$$t = \frac{\ln(4)}{0,1386}$$

$$t = 10 \text{ anos.}$$

**Problema 3.** A população de uma cidade cresce a uma taxa proporcional à população em qualquer tempo. Sua população inicial de 500 habitantes aumenta 15% em 10 anos. Qual será a população em 30 anos?

**Solução:** O problema apresenta uma população inicial de 500 habitantes, ou seja,  $P(0) = 500$ . No entanto, em 10 anos, ela aumentou 15% em relação à população inicial. Sabe-se que 15% de 500 é igual a 75. Dessa forma, em 10 anos, a população passou a ser de 575 habitantes. Sendo assim,  $P(10) = 575$ . Com base nessas informações, é possível calcular o valor de  $k$ , substituindo os valores em (47), segue que

$$575 = 500 \cdot e^{10k}$$

$$\ln\left(\frac{575}{500}\right) = 10k$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{575}{500}\right)}{10}$$

$$k = 0,013976$$

Vamos obter a solução geral para qualquer valor de  $t$ , como sendo

$$P(t) = 500 \cdot e^{0,013976 \cdot t} \tag{49}$$

O problema quer saber quantos habitantes terá em 30 anos, ou seja,  $P(30) = ?$ . Para

encontrar  $P(30)$  substitui-se os valores em (49), assim

$$P(30) = 500 \cdot e^{0,013976 \cdot 30}$$

$$P(30) = 760 \text{ habitantes.}$$

Portanto, em 30 anos a população será de 760 habitantes.

### 7.3 Resfriamento de corpos

O modelo de resfriamento de corpos, desenvolvido por Newton, descreve o fenômeno da variação de temperatura. Segundo Zill e Cullen (2001, p.107), “a lei de resfriamento de Newton diz que a taxa de variação de temperatura  $T(t)$  de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura constante  $T_m$  do meio ambiente”. Dessa forma, obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \\ T(0) = T_0 \end{array} \right. \quad (50)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \\ T(0) = T_0 \end{array} \right. \quad (51)$$

onde  $k$  é uma constante.

Note que a equação diferencial (50) é separável, e para resolver utiliza-se o método de separação de variáveis, dada por

$$\frac{1}{(T - T_m)} \cdot dT = -k \cdot dt. \quad (52)$$

Integrando ambos os lados da igualdade de (52), temos

$$\int \frac{1}{(T - T_m)} \cdot dT = - \int k \cdot dt$$

$$\ln |T - T_m| = -kt + c$$

$$e^{\ln |T - T_m|} = e^{-kt} e^c$$

porém,  $e^c$  é uma constante, então vamos representar apenas por  $c_1$

$$T - T_m = c_1 e^{-kt}.$$

Portanto, a solução geral da equação diferencial (50) é dado por

$$T = c_1 e^{-kt} + T_m. \quad (53)$$

Para resolver o PVI basta substituir os valores de (51) em (53) tem-se

$$T_0 = c_1 e^{-k \cdot 0} + T_m$$

$$T_0 = c_1 + T_m$$

$$c_1 = T_0 - T_m$$

logo, a solução do PVI é dada por

$$T = (T_0 - T_m)e^{-kt} + T_m. \quad (54)$$

A modelagem do resfriamento de corpos pode ser aplicada em cenários criminais. Os problemas apresentados foram adaptado de Sá (2019) e Bassanezi e Junior (1988).

**Problema 4.** Um corpo é encontrado às 10 horas da manhã com uma temperatura de  $33^\circ\text{C}$  e às 11 horas apresenta uma temperatura de  $25^\circ\text{C}$ . Moradores do local disseram que ouviram disparos de arma de fogo por volta das 8 horas e também em torno de 9 horas da manhã. A polícia prendeu o suspeito A e o suspeito B, autores dos disparos respectivamente. Qual deles deve ser indiciado por assassinato se a temperatura ambiente no local do crime era de  $20^\circ\text{C}$ ?

**Solução:** Sabendo que a temperatura ambiente na hora do crime é  $T_m = 20$ , sendo a primeira e segunda medição do corpo como  $T_1 = 33$  e  $T_2 = 25$  em um intervalo de uma hora. Utilizando a solução do resfriamento (54) e substituindo os valores para encontra  $k$ , tem-se que

$$25 = 20 + (33 - 20)e^{-k}$$

$$25 = 20 + 13e^{-k}$$

$$\frac{5}{13} = e^{-k}$$

$$\ln\left(\frac{5}{13}\right) = -k$$

$$k = -\ln\left(\frac{5}{13}\right)$$

$$k = 0,9555$$

Considerando a temperatura normal de uma pessoa viva igual a  $36,5^\circ\text{C}$  no instante  $t = 0$ , tem-se

$$33 = (36,5 - 20)e^{-0,9555t} + 20$$

$$33 - 20 = 16,5e^{-0,9555t}$$

$$\frac{13}{16,5} = e^{-0,9555t}.$$

Aplicando  $\ln$  em ambos os lados da expressão, obtém-se

$$\ln\left(\frac{13}{16,5}\right) = -0,9555t$$
$$t = \frac{\ln\left(\frac{13}{16,5}\right)}{-0,9555}$$
$$t \simeq 0,2 = 12 \text{ minutos.}$$

A vítima foi assassinada 12 minutos antes de ser encontrada às 10 horas, ou seja, o horário de óbito foi às 9 horas e 48 minutos. Sendo assim, B será indiciado por homicídio.

**Problema 5.** Um empresário é encontrado morto em seu escritório pela secretária que liga imediatamente para a polícia. Quando a polícia chega, 2 hora depois da chamada, examina o corpo e sua temperatura é  $30^\circ\text{C}$ , uma hora depois, mede novamente, a temperatura é  $26,5^\circ\text{C}$ , sabendo que a temperatura do ambiente se manteve constante em  $20^\circ\text{C}$ . Uma hora depois o detetive prende a secretária. Por quê?

**Solução:** Sabendo que  $T_m = 20$ ,  $T_1 = 30$  e  $T_2 = 26,5$  e o intervalo da primeira medição a outra foi de uma hora. Além disso, considere a temperatura de uma pessoa viva igual a  $36,5^\circ\text{C}$ . Substituindo as informações dadas no problema em (54) para encontrar o valor de  $k$ , tem-se que

$$26,5 = 20 + (30 - 20)e^{-k}$$
$$6,5 = 10e^{-k}$$
$$\frac{6,5}{10} = e^{-k}$$

aplicando  $\ln$  em ambos os lados, implica que

$$k = -\ln\left(\frac{6,5}{10}\right)$$
$$k = 0,4308.$$

Agora podemos encontrar a hora que o empresário morreu, considerando  $T_0 = 36,5$

$$\begin{aligned}30 &= 20 + (36,5 - 20)e^{-0,4308t} \\10 &= 16,5e^{-0,4308t} \\ \frac{10}{16,5} &= e^{-0,4308t} \\ \ln\left(\frac{10}{16,5}\right) &= -0,4308t \\ t &= \frac{\ln\left(\frac{10}{16,5}\right)}{-0,4308} \\ t &\simeq 1,16 = 69 \text{ minutos.}\end{aligned}$$

Dessa forma, a morte do empresário ocorreu 1 hora e 09 minutos antes da polícia chegar. Quando a secretária ligou para a polícia, o seu chefe ainda estava vivo, o que torna a principal suspeita do crime.

## 7.4 Problema de misturas

A mistura de duas substâncias pode ser modelada matematicamente por meio de uma equação diferencial ordinária. De acordo com as explicações de Silva (2021), a formação de uma mistura homogênea entre duas soluções requer uma análise cuidadosa da composição de soluto e solvente. O soluto, neste contexto, é definido como a substância dissolvida na solução, enquanto o solvente é o meio em que essa dissolução ocorre.

A compreensão do problema de misturas de duas substâncias é fundamental para diversos campos da ciência, e a modelagem matemática desse processo frequentemente recorre a equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não homogênea. A aplicação consiste na mistura salina realizada em um tanque contendo água e sal, que pode ser descrita pela taxa de sal no tanque no instante  $t$ , representada por  $\frac{dQ}{dt}$ . Essa taxa é igual à taxa de entrada das substâncias menos a taxa de saída, ou seja,

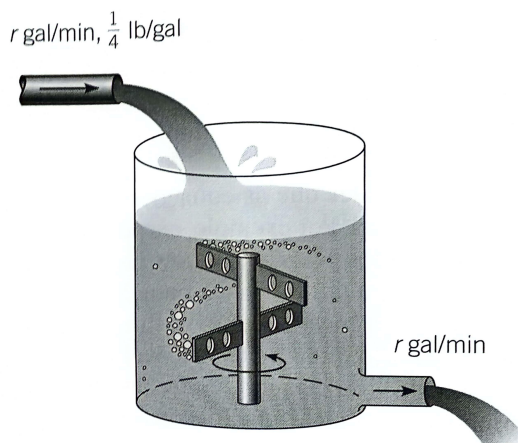
$$\frac{dQ}{dt} = \text{taxa de entrada das substâncias} - \text{taxa de saída das substâncias.}$$

É interessante notar que as unidades de medida desempenham um papel crucial nesse contexto, destacando-se as unidades de libras (lb) e galões (gal). Uma libra, equivalente a aproximadamente 435,5 gramas (g), representa uma medida significativa no cálculo das concentrações, enquanto um galão, correspondente a 3,785 litros (L), é uma unidade essencial para quantificar volumes.

Vale ressaltar que o problema apresentado, foi extraído da obra de Boyce e DiPrima (2010), ilustra a aplicação prática desses conceitos.

**Problema 6.** No instante  $t = 0$  um tanque contém  $Q_0$  libras de sal dissolvidos em 100 galões de água; veja a Figura 8. Suponha que está entrando no tanque, a uma taxa de  $r$  galões por minutos, água contendo  $1/4$  de libra de sal por galão e que a mistura bem mexida está saindo do tanque à mesma taxa. Escreva o problema de valor inicial que descreve esse fluxo. Encontre a quantidade de sal  $Q(t)$  no tanque em qualquer instante  $t$  e encontre, também, a quantidade limite  $Q_L$  presente após um período de tempo bem longo. Se  $r = 3$  e  $Q_0 = 2Q_L$ , encontre o instante  $T$  após o qual o nível de sal está a 2% de  $Q_L$ . Encontre, também, a taxa de fluxo necessário para que o valor de  $T$  não seja maior do que 45 minutos.

Figura 8: Tanque de água.



Fonte: Boyce e DiPrima (2010).

**Solução:** Sabendo que a taxa de entrada de sal é a concentração  $\frac{1}{4}$  lb/gal (libra por galão) vezes a taxa de fluxo  $r$  gal/min (galões por minutos), já a taxa de saída sabe-se que a taxa de fluxo  $r$  de saída e de entrada são iguais, além disso, o volume de água no tanque mantém-se constante e igual a 100 gal, além disso, como a mistura esta sendo “bem mexida” a concentração é uniforme no tanque, então  $\frac{Q(t)}{100}$  lb/gal, logo a taxa de saída é  $r$  vezes  $\frac{Q(t)}{100}$  lb/min. A equação diferencial que descreve esse processo é

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{rQ}{100}, \quad (55)$$

com a condição inicial de  $Q(0) = Q_0$ .

Reescrevendo (55), nota-se que a equação é uma EDO de primeira ordem, da forma

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}. \quad (56)$$

Usando o método do fator integrante, sabendo que  $p(t) = \frac{r}{100}$ , tem-se que

$$\begin{aligned}\mu(t) &= e^{\int \frac{r}{100} dt} \\ \mu(t) &= e^{\frac{r}{100}t}.\end{aligned}$$

Multiplicando de ambos os lados por  $\mu(t)$  em (56), obtém-se

$$\begin{aligned}e^{\frac{r}{100}t} \cdot \frac{dQ}{dt} + e^{\frac{r}{100}t} \cdot \frac{rQ}{100} &= \frac{r}{4} \cdot e^{\frac{r}{100}t} \\ (e^{\frac{r}{100}t} \cdot Q(t))' &= \frac{r}{4} \cdot e^{\frac{r}{100}t}\end{aligned}$$

aplicando a integral em ambos os lados, tem-se

$$\begin{aligned}\int (e^{\frac{r}{100}t} \cdot Q(t))' dt &= \int \frac{r}{4} \cdot e^{\frac{r}{100}t} dt \\ e^{\frac{r}{100}t} \cdot Q(t) &= \frac{r}{4} \cdot \frac{100}{r} \cdot e^{\frac{r}{100}t} + c \\ e^{\frac{r}{100}t} \cdot Q(t) &= 25 \cdot e^{\frac{r}{100}t} + c\end{aligned}$$

assim, a solução geral é dado por

$$Q(t) = 25 + c \cdot e^{-\frac{r}{100}t}. \quad (57)$$

Resolvendo o PVI, sabendo que  $Q(0) = Q_0$ , substituindo na solução geral (57) segue que

$$\begin{aligned}Q_0 &= 25 + c \cdot e^{-\frac{r}{100} \cdot 0} \\ Q_0 &= 25 + c \\ c &= Q_0 - 25.\end{aligned} \quad (58)$$

Substituindo (58) em (57) tem-se a solução para PVI dada pela seguinte equação

$$Q(t) = 25 + (Q_0 - 25)e^{-\frac{r}{100}t}. \quad (59)$$

Relembrando que precisa-se encontrar a quantidade limite  $Q_L$ . Fazendo o cálculo

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_0 - 25)e^{-\frac{r}{100}t} \\ &= 25 + (Q_0 - 25) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{r}{100}t} \\ &= 25 + (Q_0 - 25) \cdot 0 \\ &= 25\end{aligned}$$

portanto, o valor de  $Q_L = 25$ .

Como já dito anteriormente  $r = 3$  e  $Q_0 = 2Q_L$ , como o valor  $Q_L = 25$ , então  $2Q_L = 50$ . Substituindo na equação (59), tem-se

$$\begin{aligned} Q(t) &= 25 + (50 - 25)e^{\frac{3}{100}t} \\ Q(t) &= 25 + 25e^{-0,03t}. \end{aligned} \tag{60}$$

Para encontrar o instante  $T$  após o nível de sal está a 2% de  $Q_L$ . Sabe-se que 2% de 25 é 0,5, com essa informação, encontra-se o instante  $T$  em que  $Q(t)$  vale 25,5, ou seja fazendo  $t = T$  e  $Q(T) = 25,5$  na equação (60) e resolvendo para  $T$ , obtém-se que

$$\begin{aligned} 25,5 &= 25 + 25e^{-0,03T} \\ 25,5 - 25 &= 25e^{-0,03T} \\ 0,5 &= 25e^{-0,03T} \\ \frac{0,5}{25} &= e^{-0,03T} \\ \ln\left(\frac{0,5}{25}\right) &= -0,03T \\ T &= \frac{\ln\left(\frac{0,5}{25}\right)}{-0,03} \\ T &\cong 130,4 \text{ minutos.} \end{aligned}$$

Dessa maneira, encontra-se o valor de  $T$ .

O problema pede para encontrar a taxa de fluxo necessária na qual o valor de  $T$  não seja maior do que 45 minutos. Desse forma, para determinar o valor de  $r$  de maneira que  $T = 45$ . Fazendo  $T = t$  e sabendo que  $Q_0 = 50$ ,  $Q(t) = 25,5$  e utilizando a equação (59), segue o resultado

$$\begin{aligned} 25,5 &= 25 + (50 - 25)e^{-\frac{r}{100} \cdot 45} \\ 0,5 &= 25e^{-\frac{r}{100} \cdot 45} \\ \frac{0,5}{25} &= e^{-\frac{45}{100} \cdot r} \\ \ln\left(\frac{0,5}{25}\right) &= -0,45r \\ r &= \frac{\ln\left(\frac{0,5}{25}\right)}{-0,45} \\ r &\cong 8,69 \text{ gal/min.} \end{aligned}$$

## 8 Conclusão

Em síntese, este estudo ressalta a importância das equações diferenciais ordinárias, destacando quatro aplicações que abrangeram os conhecimentos biológicos, físicos e químicos. Dessa maneira, as EDOs são ferramentas capazes de modelar questões associadas à criação de tilápia do Nilo, crescimento populacional, resfriamento de corpos e problema de misturas, demonstraram desempenhar um papel crucial na modelagem e compreensão de fenômenos dinâmicos. Essas equações são essenciais na análise de sistemas dinâmicos, onde as taxas de mudança de uma variável em relação à outra, proporcionando a compreensão do comportamento do sistema ao longo do tempo.

Ao compartilhar os resultados desta pesquisa, busca-se não apenas enriquecer o corpo de conhecimento existente, mas também disseminar a importância da pesquisa científica. Este trabalho representa, portanto, uma contribuição significativa para a compreensão e aplicação da matemática em contextos teóricos e práticos.

Por fim, almeja-se contribuir para futuras investigações nesta área, espera-se que este trabalho proporcione uma base sólida para o avanço do entendimento dos conceitos abordados e sua aplicabilidade prática. Recomenda-se, como extensão natural deste estudo, aprofundar as investigações nas aplicações, notadamente no estudo do crescimento da tilápia do Nilo. Sugere-se a condução de uma pesquisa de campo mais abrangente, incorporando outros parâmetros e modelos, a fim de aprimorar a precisão na descrição desse cenário específico.

## Referências

- ÁVILA, G. **Introdução à Análise Matemática**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1999. 254 p. ISBN 978-85-212-0168-7.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2002. 389 p. ISBN 85-7244-207-3.
- BASSANEZI, R. C.; JUNIOR, W. C. F. **Equações Diferenciais Com Aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988. 572 p. ISBN 978-85-294-0201-7.
- BORGES, A. M.; BERTHIER, F. M. **Criação de Tilápias**. 3. ed. Brasília: Emater-Df, 2019. 56 p. ISSN 1676-9279.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010. 434 p. ISBN 978-5-216-1756-3.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. 508 p. ISBN 978-85-212-0641-5.
- EVES, H. W. **Introdução à História da Matemática**. 4. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. 843 p. ISBN 85-268-0657-2.
- FIGUEIREDO, D. G. de. **Análise I**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996. 266 p. ISBN 978-85-216-1062-5.
- FIGUEIREDO, D. G. de; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2001. 301 p. (Coleção Matemática Universitária). ISBN 85-7028-014-9.
- LIMA, E. L. **Curso de Análise vol.1**. 15. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2019. 320 p. (Coleção Projeto Euclides). ISBN 978-85-244-0468-9.
- LIMA, E. L. **Análise Real: Funções de uma variável vol. 1**. 13. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. 216 p. (Coleção Matemática Universitária). ISBN 978-65-990-5285-9.
- POLONI, D. R. **Aplicação de Equações Diferenciais ao Modelo de Crescimento de Tilápia-do-Nilo**. 47 p. TCC — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, 2018.
- SILVA, J. R. **Modelagem com Equações Diferenciais de Primeira Ordem Utilizando como Ferramenta Auxiliar o Método de Runge-Kutta**. 56 p. TCC — Curso de Matemática, Abaetetuba, 2021.
- Sá, M. S. **Equações Diferenciais Ordinárias: Aplicações e uma proposta de intervenção no ensino básico**. São Cristóvão, SE, p. 138, 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática).
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2001. v. 1. 473 p. ISBN 978-85-346-1291-3.