



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

CLEBER DOS SANTOS CARDOSO

**ESTUDO DO FORMALISMO LAGRANGIANO E
HAMILTONIANO APLICADOS EM SISTEMAS DE
LANÇAMENTOS VERTICAIS DISSIPATIVOS**

Abaetetuba-PA

2021

CLEBER DOS SANTOS CARDOSO

**ESTUDO DO FORMALISMO LAGRANGIANO E
HAMILTONIANO APLICADOS EM SISTEMAS DE
LANÇAMENTOS VERTICAIS DISSIPATIVOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
à Universidade Federal do Pará, Campus Uni-
versitário de Abaetetuba para a obtenção do
título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Manuel Eleutério Ro-
drigues

Abaetetuba-PA

2021

CLEBER DOS SANTOS CARDOSO

**ESTUDO DO FORMALISMO LAGRANGIANO E
HAMILTONIANO APLICADOS EM SISTEMAS DE
LANÇAMENTOS VERTICAIS DISSIPATIVOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
à Universidade Federal do Pará, Campus Uni-
versitário de Abaetetuba para a obtenção do
título de Licenciado em Física.

Data de aprovação: ___/___/___

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Manuel Eleutério Rodrigues
Orientador - UFPA

Profa. Dra. Cleidilane Sena Costa
Examinador interno - UFPA

Prof. Dr. Marcos Allan Leite dos Reis
Examinador interno - UFPA

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado força e perseverança durante o curso.

Aos meus pais Sebastião e Luciene por todo o apoio que me prestaram em todos os momentos da minha vida acadêmica.

Aos meus irmãos por terem tido paciência e me apoiado durante meus estudos.

Aos meus amigos que dividiram os bons e maus momentos do curso, em especial ao Marcos Paulo, Josiel e Anderson.

A minha namorada Joyce Lobato por me dar força principalmente na reta final do curso.

Ao professor doutor Manuel Eleutério pela excelente orientação e por ter compartilhado seu conhecimento durante o percurso da graduação.

A todo corpo docente do curso de Física que se esforçaram ao máximo para repassar seus ensinamentos da melhor forma possível.

Resumo

As mecânicas de Lagrange e de Hamilton constituem uma poderosa ferramenta no estudo de diversos sistemas físicos, no entanto, elas foram desenvolvidas para sistemas ideais, sem levar em consideração forças de natureza dissipativa. Em virtude disso, nesse trabalho buscou-se construir funções lagrangianas e hamiltonianas que permitem obter as equações de movimento do lançamento vertical de uma esfera sujeita à força resistiva do ar proporcional a velocidade linear e a quadrática, respectivamente. Para isso, foram utilizados como ferramentas matemáticas a função de dissipação de Rayleigh, os princípios de lagrangiana equivalente e do cálculo fracionário. Como resultado deste trabalho, conseguiu-se encontrar de forma satisfatória as equações de movimento e, além disso, formulou-se pela primeira vez uma função lagrangiana com derivada fracionária para uma força dissipativa proporcional ao quadrado da velocidade.

Palavras-chave: Lançamento Vertical. Lagrangiana Equivalente. Cálculo Fracionário.

Abstract

The mechanics of Lagrange and Hamilton constitute a powerful tool in the study of various physical systems, however, they were developed for ideal systems, without taking into account forces of a dissipative nature. As a result, this work sought to build Lagrangian's functions and Hamiltonian's that allow to obtain the equations of motion of the vertical launch of a sphere subjected to the resistive force of air proportional to linear and quadratic speed, respectively. For this, they were used as mathematical tools the Rayleigh dissipation function, the principles of equivalent lagrangian and fractional calculus. As a result of this work, we were able to satisfactorily find the equations of motion and, moreover, a Lagrangian function was formulated for the first time with fractional derivative for a dissipative force proportional to the square of the velocity.

Keywords: Vertical Release. Lagrangian Equivalent. Fractional Calculation.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diferentes caminhos que uma partícula pode ir de um ponto 1 até um ponto 2 e vice versa.	19
Figura 2 – Queda livre de uma partícula	22
Figura 3 – Máquina de Atwood	23
Figura 4 – Partícula movendo-se ao longo de uma curva parabólica	25
Figura 5 – Cilindro rolando em um plano horizontal	25
Figura 6 – Deslocamento virtual e real de uma partícula em superfície movendo-se	26
Figura 7 – Máquina de Atwood	36
Figura 8 – Pêndulo Simples	37
Figura 9 – Em (a) tem-se a força resistiva devido a viscosidade do fluido e em (b) tem-se a força resistiva devido a diferença de pressão	48
Figura 10 – Relação de variação entre o coeficiente de arrasto C_a e o número de Reynolds N_R para uma pequena esfera	53

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	OBJETIVOS	13
2.1	Geral	13
2.2	Específicos	13
3	MECÂNICA CLÁSSICA	14
3.1	Princípios da Mecânica Newtoniana	14
3.1.1	Leis de Newton	14
3.1.2	Leis de Conservação	16
3.1.3	Equações de Movimento para Partícula Única	21
3.2	Dinâmica de Lagrange	24
3.2.1	Vínculos	24
3.2.2	Princípio de d'Alembert	26
3.2.3	Coordenadas Generalizadas e Equações de Lagrange	28
3.2.4	Princípio de Hamilton e Equações de Lagrange	32
3.2.5	Aplicação das Equações de Lagrange	35
3.3	Dinâmica de Hamilton	38
3.3.1	Equações Canônicas de Hamilton	38
3.3.2	Hamiltoniana e Energia total	40
3.3.3	Aplicações da Dinâmica de Hamilton	41
3.3.4	Considerações Sobre a Lagrangiana e a Hamiltoniana	42
4	CÁLCULO FRACIONÁRIO	43
4.1	Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville	43
4.1.1	Integrais Fracionárias de Riemann-Liouville	44
4.1.2	Derivadas Fracionárias de Riemann-Liouville	44
4.1.3	Relações entre Integrais e Derivadas de Riemann-Liouville	45
4.2	Cálculo Fracionário de Caputo	46
5	FORMULAÇÃO LAGRANGIANA E HAMILTONIANA PARA SISTEMAS DISSIPATIVOS, APLICADO AO CASO DO MOVIMENTO VERTICAL DE UMA ESFERA	47
5.1	Força de Resistência nos Fluidos	47
5.1.1	Relação Entre Coeficiente de Arrasto e Número de Reynolds.	52
5.2	Generalização da Função de Reyleigh para o caso quadrático.	54
5.2.1	Função de dissipação de Rayleigh.	54

5.3	Lagrangiana Equivalente	58
5.4	Equação de Lagrange Generalizada para Derivadas de Ordem Superior	68
5.4.1	Lagrangiana para Sistema dissipativo.	69
6	CONCLUSÃO	75
	REFERÊNCIAS	77

1 INTRODUÇÃO

O lançamento vertical é rotineiro no dia a dia, seja na queda de um copo ou ao jogar-se uma pedra para o alto. O movimento de queda dos corpos já foi tema central de discussão entre os defensores do filósofo grego Aristóteles (384-322 a.c), para os quais dois corpos de massas diferentes não caíam ao mesmo tempo, e o físico Galileu Galilei que utilizando a experimentação demonstrou a contrariedade das conclusões Aristotelicas, dando início a um novo processo científico. Porém, ao abandonar simultaneamente dois corpos de pesos bastante diferentes, ou mesmo lança-los para o auto, como uma pena ou uma esfera, será notório que ambas não chegam ao seu destino final no mesmo espaço de tempo, onde para Galileu seria possivelmente o efeito do ar como uma força retardadora sobre o objeto.

O problema foi resolvido por Isaac Newton, para o qual a queda de corpos para uma mesma altura não acontece nos mesmos instantes, devido a uma segunda força proveniente do contato dos objetos próximos a superfície da terra com o ar, esta força tem maior influência em objetos menos "pesados", e depende também das dimensões do corpo, como o diâmetro e a geometria. Por exemplo, uma folha de caderno sofre mais impactos da resistividade do ar que uma esfera maciça. Assim, Newton elaborou bases mais sólidas que incluía um formalismo matemático apropriado para a cinemática do movimento, o que certamente é imprescindível para qualquer estudo no meio científico.

Na dinâmica newtoniana é necessário levar em consideração todas as forças envolvidas, o que por sua vez pode se tornar um processo trabalhoso e exaustivo. Nesse sentido, a dinâmica de Lagrange e Hamilton é mais abrangente, onde ambas têm a vantagem de não utilizar forças e acelerações vetoriais empregados no método de Newton, bastando trabalhar apenas com duas funções escalares, as energias cinética (T) e potencial (V). As equações de Lagrange ainda são válidas para qualquer sistema arbitrário de coordenadas generalizadas, possibilitando a escolha adequada do sistema a ser trabalhado. O método de Hamilton é ainda mais amplo, e assim como as equações de Lagrange são validas para qualquer conjunto de coordenadas generalizadas, sendo também uma função escalar com dependência dos momentos correspondentes. De fato, devido as novas definições de coordenadas e momentos estas equações tem sua aplicação ampliada, compreendendo um sentido físico mais concreto, pois, trata-se da energia total do sistema.

Os formalismos de Lagrange e Hamilton embora apresentem inúmeras vantagens, são somente validos para sistemas ideais, onde forças dissipativas não estão inclusas. As forças de resistência que mais interessam são aquelas que em meio viscoso variam de maneira complicada com a velocidade, onde em certas condições a força resistiva é proporcional a algumas potencias de velocidade e é nesses casos que concentra-se-á nosso

estudo, buscando desenvolver funções lagrangianas e hamiltonianas capazes de gerar as equações de movimento do lançamento vertical de uma esfera sujeita a essas forças.

Este trabalho foi estruturado em capítulos 3, 4, 5, 6 (conclusão). No capítulo 3, foi realizado uma revisão da mecânica clássica, com a abordagem dos assuntos mais relevantes para sistemas ideais. No capítulo 4, foi feito um breve estudo sobre o cálculo fracionário. No capítulo 5 foi feito o desenvolvimento dos objetivos do trabalho, com a formulação lagrangiana e hamiltoniana para sistemas dissipativos aplicado ao caso do movimento vertical de uma esfera. Por fim, nas conclusões se estabeleu o parecer dos resultados obtidos.

2 OBJETIVOS

2.1 Geral

Obter as equações de movimento do lançamento vertical de uma esfera sujeita à força resistiva do ar proporcional a velocidade linear e a velocidade quadrática, respectivamente.

2.2 Específicos

Os objetivos específicos foram desenvolvidos de acordo com as ferramentas matemáticas utilizadas, a saber:

1. Função de dissipação de Rayleigh
 - Fazer a generalização para o caso dissipativo quadrático.
2. Lagrangiana equivalente
 - Criar funções lagrangianas para forças dissipativas proporcionais à velocidade e ao quadrado da velocidade, que gerem as equações de movimento.
 - A partir das lagrangianas criadas, encontrar as funções de Hamilton geradoras das equações de movimento.
3. Equação de Lagrange Generalizada para Derivadas de Ordem Superior
 - Por meio do cálculo fracionário produzir as equações generalizadas de Lagrange.
 - Criar funções de Lagrange com derivada fracionária que produzam as equações de movimento tanto para a dissipação proporcional com a velocidade linear como quadrática.
 - A partir das lagrangianas com termo fracionário, encontrar as funções de Hamilton geradoras das equações de movimento.

3 MECÂNICA CLÁSSICA

A mecânica é uma ramificação da física que estuda a dinâmica do movimento de partículas e as descreve através de equações matemáticas. Dessa maneira, far-se-à neste capítulo uma revisão sobre as leis de Newton, teoremas de conservação mais relevantes e também à respeito dos formalismos de Lagrange e Hamilton, deixando clara ainda que todo o desenvolvimento clássico desenvolvido aqui se remete a sistemas conservativos, que foram elaborados de acordo com [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10].

3.1 Princípios da Mecânica Newtoniana

Newton forneceu as leis fundamentais da dinâmica em sua celebre obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* em 1687. Um breve apanhado será desenvolvido aqui, afim de viabilizar-se o desenvolvimento das abordagens dinâmicas de Hamilton e Lagrange. Abaixo se fornecerá a elaboração moderna da dinâmica, lembrando ao leitor que não há demonstração para estes postulados como se está acostumado, pois tratam-se de leis embasadas na experiência.

3.1.1 Leis de Newton

Primeira lei de Newton : Há sistemas ditos inerciais, nos quais um corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, exceto se uma força for aplicada à este.

Segunda lei de Newton : Um corpo sob a ação de uma força move-se de tal maneira que a variação do momento é igual a própria força aplicada, como mostrado na equação (3.1):

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}}, \quad (3.1)$$

onde trataremos os termos negrito como vetores, sendo \mathbf{F} a força aplicada e $\dot{\mathbf{P}}$ a variação do momento, ressalta-se que o ponto sobre os termos significa a derivada temporal, ou seja; $\dot{\cdot} = \frac{d}{dt}$.

Terceira lei de Newton : Para cada ação corresponde uma reação com mesma direção, de igual magnitude, porém, de sentido oposto, isto é:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \quad (3.2)$$

onde \mathbf{F}_{12} é a força exercida sobre a partícula 1 devido a 2 e \mathbf{F}_{21} é a força exercida sobre a partícula 2 devido a 1.

Façamos algumas discussões a respeito destes enunciados. Analisando a primeira lei, é notório que sua essência é a definição de sistema inercial, ja que é necessário um meio

totalmente isolado, impossível para o mundo real, mas que é possível uma aproximação, evitando ao máximo que a partícula interaja com o meio externo. De fato, esta lei somente oferece o sentido completo para uma força nula, de onde também podemos inferir uma ideia muito vaga de força, porém, sem perda de generalidade no sentido desta lei, sendo preciso ao menos de forma elementar a inclusão desta forma física.

Na segunda lei de Newton, temos a definição de força, aqui definido como a variação do momento, ou como denominado por Newton, ou seja quantidade de movimento, isto porque nas suas observações havia percebido que massa inercial, aceleração e força estavam entrelaçados, sendo a aceleração inversamente proporcional à massa (Newton variava a massa inercial), mantendo uma força contante. Notoriamente, este fato não é muito promissor para estudar a dinâmica de movimento, porém, Newton percebeu que mantendo a massa constante e variando a força aplicada, a aceleração agora tornava-se proporcional à força, ou seja, quando se aumenta a força tem-se maior variação de velocidade, ao contrário de quando se diminui a força aplicada. Assim, relacionar força com quantidade de movimento torna-se mais simples e concreto. Em nossa discussão acabou-se inserindo uma nova definição conceituada por Newton como quantidade de movimento, assim como abaixo:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}, \quad (3.3)$$

em que \mathbf{P} é o momento, m a massa e \mathbf{v} a velocidade vetorial.

Embora Newton tenha utilizado o termo quantidade de movimento na equação, esta não é completa sem a definição de massa inercial, porém, como massa, tempo e comprimento já tem seus conceitos bem entendidos, utiliza-se-á de forma operacional tal definição. Então, a segunda lei de Newton torna-se:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (3.4)$$

Por ultimo, tem-se a terceira lei, também conhecida como princípio da ação e reação. Esta não tem abrangência geral, pois é falha em muitos meios físicos como na interação de cargas elétricas em movimento. Vale ressaltar que para essa lei a aplicabilidade vale unicamente para sistemas ideais e isolados, dando-nos ainda a possibilidade de definição da massa, a qual em nenhuma das duas leis já discutidas anteriormente teve seu conceito definido, mas que é imprescindível para robustecer os enunciados de Newton. Desta forma, consideremos que \mathbf{F}_{12} é a força exercida sobre a partícula 1 devido a partícula 2 e \mathbf{F}_{21} é a força sobre 2 devido à partícula 1, ou seja, simultaneamente a partícula 2 irá empurrar a primeira com uma força igual e de direção oposta e também na mesma linha que às une, tem-se com isso:

$$\frac{d\mathbf{P}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{P}_2}{dt}. \quad (3.5)$$

Continuando a manipulação teremos:

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = -m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt}$$

$$-\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}, \quad (3.6)$$

onde a_1 e a_2 são o módulo da aceleração respectivo dos momentos \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 expressos na (3.5). Assim, pode-se considerar por exemplo a massa m_1 como unitária, e, utilizando instrumentos apropriados calcular-se o módulo aceleração de dois corpos interagindo, quanto a massa m_2 , pode-se realizar a pesagem de maneira usual, comparando seu peso com um peso padrão definido no sistema internacional de medidas.

Outro esclarecimento importante sobre a terceira lei, trata da conservação do momento total, assim, faremos a seguir algumas considerações sobre esta questão, considerando aqui o desenvolvimento dos cálculos para uma única partícula, e, qualquer mudança será evidentemente destacada.

3.1.2 Leis de Conservação

As lei de conservação desenvolvidas aqui, não constituem uma prova matemática, mas sim, uma consequência das leis de Newton, embora atualmente tenha-se bastante consistência que as leis de conservação são obedecidas por muitos sistemas físicos, obviamente provados experimentalmente.

O primeiro dos teoremas trata da conservação do momento linear, onde vamos considerar para melhor entendimento, o desenvolvimento em uma única partícula, como já colocado. Assim, se a partícula não encontra nenhuma força, então a partir da equação (3.1) com $\mathbf{F} = 0$ tem-se $\dot{\mathbf{P}} = 0$, tornando \mathbf{P} um vetor constante no tempo. Portanto, o primeiro teorema de conservação torna-se:

- A quantidade de movimento total \mathbf{P} de uma partícula é conservado quando a força resultante sobre ela é zero.

Ou seja, para uma partícula sujeita a nenhuma força tem-se:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \dot{\mathbf{P}} = 0, \quad (3.7)$$

percebe-se que $\dot{\mathbf{P}} = 0$ é uma equação vetorial e portanto se aplica a todas as componentes do momento linear. Tomando o caso particular em que se tem um vetor constante em uma única direção \mathbf{S} , tal que $\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{S} = 0$, de modo que seja constante no tempo.

Assim, teremos:

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{S} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (3.8)$$

ou então integrando-se em relação ao tempo:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = \text{constante}. \quad (3.9)$$

Desta forma, é notório que a quantidade de movimento linear é constante na direção em que a força é nula.

O segundo teorema importante trata da quantidade de movimento angular, onde descreveremos de maneira direta. Defini-se a quantidade de movimento angular como:

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{P}. \quad (3.10)$$

Definamos também o torque, tal que:

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (3.11)$$

sendo \mathbf{r} o vetor posição da origem até o ponto no qual se aplica a força. Como $\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$, então, para uma partícula o torque se tornará:

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{P}}. \quad (3.12)$$

Fazendo-se primeiramente a variação do momento angular em relação ao tempo, temos que:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{P})}{dt} = \frac{d(\mathbf{r})}{dt} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \frac{d(\mathbf{P})}{dt}. \quad (3.13)$$

Como teremos;

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{r})}{dt} \times \mathbf{P} &= \frac{d(\mathbf{r})}{dt} \times m\mathbf{V} \\ &= \frac{d(\mathbf{r})}{dt} \times m \frac{d(\mathbf{r})}{dt} \\ &= m \left(\frac{d(\mathbf{r})}{dt} \times \frac{d(\mathbf{r})}{dt} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

então, a (3.13) fica:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{P})}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d(\mathbf{P})}{dt} \quad (3.15)$$

que conseqüentemente fica igual ao torque, como abaixo:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d(\mathbf{P})}{dt} = \mathbf{N}. \quad (3.16)$$

Então para uma partícula sujeita a um torque nulo, tem-se $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$, que torna o vetor \mathbf{L} constante no tempo.

Chegamos então a mais um teorema importante.

- Uma partícula sujeita a um torque nulo, conserva seu momento angular.

Discutiremos agora o teorema de conservação da energia. Começar-se-á primeiramente considerando que uma força \mathbf{F} realiza trabalho sobre uma partícula que se move de um ponto 1 até um outro ponto 2, esse trabalho é definido como sendo:

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.17)$$

Sendo \mathbf{F} a força aplicada à uma partícula,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = m d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= \frac{m}{2} d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{m}{2} d(v^2) = d\left(\frac{m}{2} v^2\right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

então, na integral (3.17) tem-se uma diferencial exata. Desta maneira o trabalho realizado pela força é igual a variação da energia cinética, como abaixo:

$$W_{12} = \int_1^2 d\left(\frac{m}{2} v^2\right) = \frac{m}{2} v_2^2 - \frac{m}{2} v_1^2 = T_2 - T_1, \quad (3.19)$$

onde $T = \frac{m}{2} v^2$ é a energia cinética.

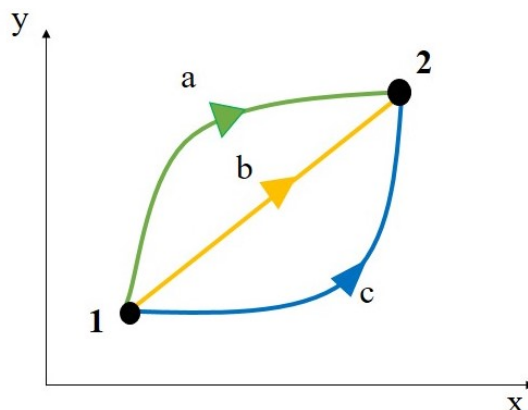
Sobre a equação (3.19), em muitas questões físicas o trabalho realizado pela força \mathbf{F} sobre uma partícula manterá a energia cinética inalterável, independente do caminho tomado pela mesma. Isto será possível por exemplo para o caso de um campo de força gravitacional constante. Assim, se um corpo é elevado até certa altura, por qualquer caminho, estar-se-á realizando trabalho sobre ela da forma mgh , por sua vez a partícula realizará o mesmo trabalho para retornar a sua condição inicial. A capacidade de realizar trabalho é denominada de energia potencial da partícula ou do corpo. Pode-se então definir sem perda de generalidade que o trabalho realizado pela força sobre a partícula para levá-la de um ponto 1 até um ponto 2 é:

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U_1 - U_2. \quad (3.20)$$

O leitor poderia perguntar-se se o correto na equação acima seria $U_2 - U_1$, porém a explicação é bastante simples, uma vez que a energia potencial tende à aumentar a medida que se modifica um objeto de seu estado natural. A Exemplo tem-se a elevação de um corpo qualquer a partir do solo até uma altura determinada. Assim, a energia potencial em seu estado natural é menor que aquela na qual se aplicou um trabalho para modificá-la, como no exemplo básico descrito.

Detalhando um pouco mais a respeito da independência de caminho, quando uma força realiza trabalho em uma partícula, esta força é denominada de conservativa, assim, para melhor ilustração verifiquemos a figura que se segue;

Figura 1 – Diferentes caminhos que uma partícula pode ir de um ponto 1 até um ponto 2 e vice versa.



Fonte: Autoria própria.

Supondo-se agora que uma partícula vá do ponto 1 até o ponto 2 pelo caminho **a** e volte pelo caminho **b**, então o trabalho resultante deste processo será:

$$W_{\mathbf{T}} = W_{12}^{\mathbf{a}} + W_{21}^{\mathbf{b}}$$

$$W_{\mathbf{T}} = W_{12}^{\mathbf{a}} - W_{12}^{\mathbf{b}}, \quad (3.21)$$

onde o sinal negativo se remete-se à troca de 12 por 21.

Sendo a força conservativa, teremos então:

$$W_{12}^{\mathbf{a}} = W_{21}^{\mathbf{b}} \quad (3.22)$$

Logo na (3.21) o trabalho total em um caminho fechado é igual a zero:

$$W_{\mathbf{T}} = 0,$$

este resultado pode ser reescrito segundo uma integral de linha:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_2^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (3.23)$$

Desta maneira temos o que se denomina de força conservativa, considerando um caminho fechado, então também a força pode ser representada da forma como se segue:

$$\mathbf{F} = -\nabla U. \quad (3.24)$$

Esta condição é possível desde que o rotacional da função vetorial (no caso \mathbf{F}) seja nulo, para um gradiente de uma função escalar dependente da posição, vejamos como se conduz esta afirmação. Voltando novamente para o caminho fechado, realizemos a integral fechada na (3.21) como se segue:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_2^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.25)$$

Faremos uso agora do teorema de Stokes, que por sua vez irá transformar a integral de linha acima em uma integral de superfície, como destacar-se-á abaixo para a melhor compreensão do leitor:

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} . \quad (3.26)$$

No entanto, para uma força suposta conservativa tem-se:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (3.27)$$

Assim, o rotacional da força \mathbf{F} deve ser nulo, ou seja:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.28)$$

também é sabido da análise vetorial que o rotacional do gradiente de uma função escalar é igual a zero, ou seja;

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0, \quad (3.29)$$

com $\Phi(x, y, z)$.

Mesmo porque o gradiente de uma função escalar dependente da posição é igual à:

$$\nabla \Phi(x, y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.30)$$

Portanto, reiteramos que toda força expressa pelo gradiente de uma função escalar dependente da posição terá obviamente seu rotacional nulo, e, deste modo se terá uma força conservativa. Neste caso, a força como já colocada em (3.24) pode ser escrita como função da energia potencial dependente da posição que no caso $U(x, y, z)$. Vale agora discutirmos a respeito do sinal negativo presente nesta nova nomenclatura de força, a explicação mais simples de tomar-se neste primeiro momento é que as forças da natureza sempre buscam o seu estado de equilíbrio estável. Porém, pode-se inferir também que na natureza o ponto de equilíbrio está associado ao ponto de mínimo, como se sabe por meio do cálculo usual. Então, a força deve apontar para o mínimo da função energia, enquanto que o gradiente da energia potencial aponta para o máximo, sendo então necessário inserir o sinal negativo para inverter a direção de convergência da função. Assim, o sinal negativo diz que a força está direcionada para a região de menor energia potencial, ficando a (3.24).

Prosseguindo, define-se a energia total como:

$$E = T + U, \quad (3.31)$$

fazendo-se a derivada temporal desta equação obtém-se:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} \quad (3.32)$$

Neste caso, para tirar-se deduções, precisaremos utilizar a equação (3.19), desta forma teremos:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = d\left(\frac{m}{2}v^2\right) = dT \quad (3.33)$$

que fazendo-se a derivada temporal em ambos os lados, teremos a seguinte manipulação:

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (3.34)$$

tomando ainda a derivada total de $U(\mathbf{r})$, vem que:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{dU}{dt} &= (\nabla U) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.35)$$

substitui-se agora as equações (3.34) e (3.14) em (3.32), que fica:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + (\nabla U) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{dE}{dt} &= (\mathbf{F} + (\nabla U)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{dE}{dt} &= (-\nabla U + \nabla U) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Se a função U não é explícita no tempo então a sua variação temporal torna-se; $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$. Desta forma, tornando a energia constante no tempo, onde chega-se à mais um teorema importante:

- A energia total de uma partícula sujeita a um campo de força conservativo é constante no tempo, logo é conservada.

Muito embora estejamos tratando de campo de força conservativo, onde a anergia é conservada, existem sistemas em que ela não se conserva, isto porque ocorre dissipação dessa energia por meio de trocas com outros meios físicos, sistemas esses correspondentes à realidade, ou seja na natureza real a energia sempre realizará trocas, não significando que a mesma tenha "sumido", mas sim se transportado para um outro meio interagente.

3.1.3 Equações de Movimento para Partícula Única

As equações de movimento são desenvolvidas a partir da segunda lei de Newton;

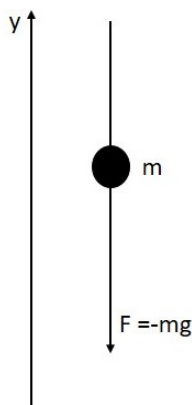
$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (3.37)$$

ela possibilita em muitos casos uma forma analítica de verificar o comportamento de uma partícula, antecipando o que acontecerá com a mesma futuramente, fornecendo informação sobre o movimento.

O princípio fundamental da dinâmica é uma equação diferencial de segunda ordem e pode estar em função da posição, da velocidade e do tempo; $\mathbf{F}(x, \dot{x}, t)$. Interessante notar que, no mundo real existem diversas implicações, tais como forças de retardo, que modificam a forma de tratamento e também as equações de movimento, porém por enquanto basta tratar de sistemas ideais. Segue-se alguns exemplos a respeito da mecânica de Newton.

Exemplo 1: Considere uma partícula de massa m que cai sob o efeito da gravidade. Desprezando as força resistivas, determine a equação de movimento e a velocidade da partícula, conforme a imagem ilustrativa a seguir:

Figura 2 – Queda livre de uma partícula



Fonte: Autoria própria.

Para obter-se a equação de movimento, utiliza-se a segunda lei de Newton, verificando as forças envolvidas no movimento da partícula da imagem (2), tem-se que a única força atuante no movimento é, $F = -mg$, disposta na direção de y e no sentido negativo de y , ou seja indo no sentido do solo, tem-se que;

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \quad (3.38)$$

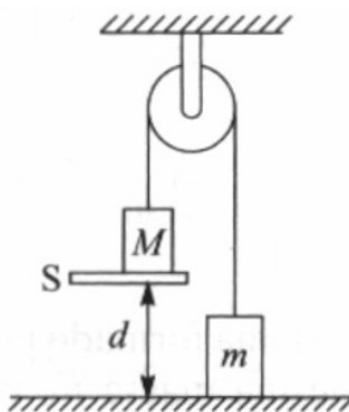
Para a velocidade, basta integrar os dois lados da equação acima, como se segue:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g \\ \int dv &= \int -g dt \\ v &= -gt \end{aligned} \quad (3.39)$$

Sendo essa a equação da velocidade para uma partícula em queda livre para um meio conservativo, ou seja, sem que forças dissipativas interajam com o corpo. O lançamento vertical é o problema modelo deste trabalho, porém, terá sua discussão no momento apropriado, e com outras ferramentas de cálculo.

Exemplo 2: No sistema da figura, $M = 3Kg$, $m = 1Kg$ e $d = 2m$ o suporte S é retirado num dado instante. Usando as leis de Newton, ache com que velocidade M chega ao chão.

Figura 3 – Máquina de Atwood



Fonte: H. Moysés Nussenzveig [20].

De início, tem-se que o comprimento do fio é constante, $l_m + l_M = constante$, pode-se inferir também que, a aceleração do sistema é uma constante; $a_m = -a_M = a$. Assim, conforme a segunda lei de Newton teremos para a massa m :

$$F = ma$$

$$T - mg = ma, \quad (3.40)$$

onde T é a tensão no fio, que é uma força agindo a favor do movimento de m .

Para a massa M vem que:

$$F = Ma$$

$$T - Mg = -Ma, \quad (3.41)$$

sendo novamente T a tensão no fio, porém, indo contra o movimento de M .

Então, substituindo (3.40) em(3.41) obtém-se;

$$ma + mg - Mg = -Ma$$

$$mg - Mg = -Ma - ma$$

$$(M - m)g = (M + m)a$$

$$a = \frac{(M - m)g}{(M + m)}. \quad (3.42)$$

Então, encontrou-se a aceleração do sistema, mas, o que se pede é a velocidade, o que se resolve de maneira bastante simplista com a conhecida equação de Torricelli; $v^2 = v_0^2 + 2ad$, substituindo-se nesta equação a aceleração (3.42), resulta que:

$$v^2 = 2 \left(\frac{(M - m)g}{(M + m)} \right) d$$

$$v = \sqrt{2 \left(\frac{(M - m)g}{(M + m)} \right) d} \quad (3.43)$$

3.2 Dinâmica de Lagrange

Newton desenvolveu sua dinâmica embasado nas forças, o que certamente resolve uma infinidade de questões físicas. No entanto, em sistemas relativamente mais complicados sujeitos à restrições em seu movimento, a segunda lei de Newton traz muitas complicações para se desenvolver as equações de movimento. É a partir destas problemáticas que surge as equações de Lagrange através do princípio do trabalho virtual, conceito desenvolvido a priori por Sir. Johann Bernoulli (1667-1748) e aprimorado por Jean LeRond D'Alembert (1717-1783), uma vez reformulado a dinâmica newtoniana, as equações de Lagrange tem o poder simplista de reduzir redundâncias e exageros de variáveis na solução dos problemas. Salienta-se ainda que existem duas maneiras de desenvolver-es estas equações, a primeira que já foi descrita, e, a segunda forma por meio do princípio variacional de Hamilton, que também terá seu devido desenvolvimento neste capítulo.

3.2.1 Vínculos

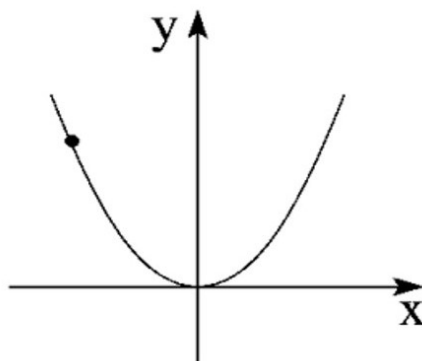
Vínculos são restrições, limitações impostas à certas configurações, estados, posições e velocidades de uma partícula em seu devido sistema físico. Importante destacar que os vínculos são de natureza cinemática, e portanto, antecede a dinâmica e necessariamente precisa estar incluso nas equações de movimento. Isto significa que, restrições de natureza dinâmica, impostas pelas equações de movimento não são considerados vínculos. Pode-se ainda classificar os vínculos em duas classes:

Vínculos Holônomos : Se as restrições impostas pelos vínculos puder estabelecer uma relação de funcionalidade entre as coordenadas da configuração do sistema e possivelmente do tempo de forma explícita, então esses vínculos são descritos pela seguinte equação:

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad (3.44)$$

assim, os vínculos holônomos definem quais são as configurações possíveis, onde elimina-se coordenadas que se tornariam redundantes dificultando cálculos. Um exemplo de vínculo Holônomo bastante simples é o movimento de uma partícula movendo-se ao longo de uma curva como na figura 4, se esta curva aproximar-se de uma parábola, então a partícula terá restrição segundo a seguinte equação de vínculo: $y - ax^2 - bx - c = 0$

Figura 4 – Partícula movendo-se ao longo de uma curva parabólica



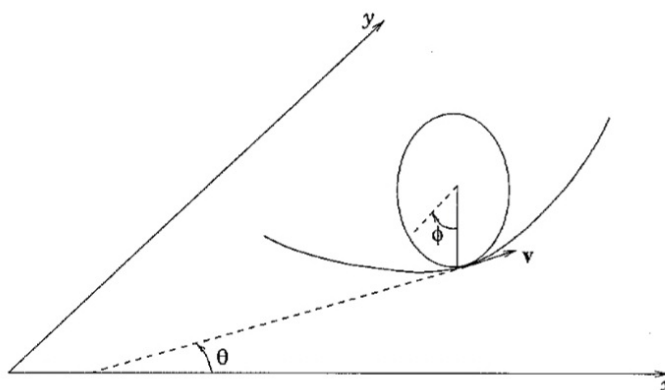
Fonte: Salviano A. Leão [6].

Vínculos Não Holônomos : Vínculos não-holônomos são todos os que não estão de acordo com a equação (3.44), em geral estes são descritos por desigualdades, ou seja inequações. Encontra-se dificuldades ainda quando os vínculos são equações que envolvem velocidades na sua estrutura, ou seja equações diferenciais da forma:

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, t) = 0, \quad (3.45)$$

estes vínculos restringem os deslocamentos possíveis de um sistema, no entanto, não impõem nenhuma restrição às configurações deste sistema. A exemplo considere um cilindro deslizando sem deslizar sobre uma reta, como na figura 5:

Figura 5 – Cilindro rolando em um plano horizontal



Fonte: Lemos [4].

Considerando x a posição do centro de massa do cilindro e ϕ é o ângulo de rotação do centro de massa, a condição de não deslizamento é dada por:

$$\dot{x} = R\dot{\phi},$$

que é da forma 3.45.

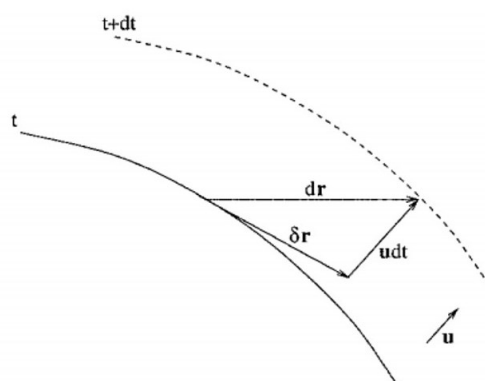
3.2.2 Princípio de d'Alembert

As configurações dos sistemas físicos são descritas pelas posições das partículas, que, sujeitas a vínculos elevam estas configurações a uma série infinita de possibilidades, desde que, compatíveis com os vínculos.

Deslocamentos Virtuais

Deslocamentos infinitesimais e a tempo fixo, é o que se conhece como deslocamento virtual, nota-se que este não é o deslocamento real visto que não depende da variação do tempo. Na figura 6 ficará mais claro tais afirmações:

Figura 6 – Deslocamento virtual e real de uma partícula em superfície movendo-se



Fonte: Lemos [4].

Pode-se verificar ao analisar a figura que o deslocamento virtual ($\delta\mathbf{r}$) é tangente à superfície diferindo do deslocamento real ($d\mathbf{r}$) que em geral não é. Nota-se ainda, que, o termo virtual não significa um deslocamento real devido o tempo manter-se fixo na superfície, assim, o vínculo também não é violado, pois o ponto \mathbf{r} e o deslocamento $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$, estão na mesma superfície. Logo tem-se três características que definem os deslocamentos virtuais, i) são infinitesimais; ii) o deslocamento é a tempo fixo; iii) não violam os vínculos.

Trabalhos Virtuais

Em uma superfície idealmente lisa tem-se unicamente atuante a força normal à superfície, enquanto que o trabalho virtual das forças de vínculo são nulas em virtude do deslocamento virtual, mesmo que tal superfície esteja em movimento. Define-se, portanto,

que vínculos com forças não realizantes de trabalho, são vínculos ideais. Nos desenvolvimentos subsequentes deste capítulo, serão abordados sistemas com vínculos ideais. Já deixou-se aqui explícito algumas dificuldades ao utilizar o formalismo de Newton com imposição de vínculos, onde se multiplicam o uso de coordenadas para descrever a configuração de um sistema físico em cada instante futuro. Este impasse é evidente também para vínculos holônomos (holonômico), onde as coordenadas das posições $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ não são independentes e seria desejável que fossem, facilitando imensamente a análise de sistemas, o que será resolvido com a dinâmica de Lagrange.

Então consideremos um sistema de partículas em equilíbrio estático, ou seja $\mathbf{F}_i = 0$, estendendo-se para qualquer que seja o deslocamento virtual $\delta\mathbf{r}_i$, assim tem-se;

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0, \quad (3.46)$$

ou seja, a soma dos trabalhos virtuais de cada partícula é zero. A força resultante sobre a partícula i pode ser decomposta segundo a seguinte forma:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i, \quad (3.47)$$

onde $\mathbf{F}_i^{(a)}$ são as forças aplicadas e \mathbf{f}_i são as forças de vínculo, então, substituindo-se a (3.47) na (3.46), tem-se:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0. \quad (3.48)$$

Considerando que o trabalho realizado pelas forças de vínculo seja zero, vem que:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0. \quad (3.49)$$

A equação (3.49) é o chamado princípio do trabalho virtual, e, servirá de base para o desenvolvimento do princípio de D'Alembert, como veremos a seguir.

Princípio de D'Alembert

Como o princípio dos trabalhos virtuais é válido somente para a estática, é necessário agora estender-se para encontrar um princípio geral para o movimento geral do sistema físico e que ao mesmo tempo não envolva as forças de vínculo de forma explícita. Assim, D'Alembert escreveu a segunda lei de Newton como:

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0, \quad (3.50)$$

com isso a equação (3.46) passa a ser agora:

$$\delta W = \sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0. \quad (3.51)$$

Utilizando novamente a decomposição (3.47); $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i$ na equação (3.51), obtêm-se:

$$\begin{aligned}\delta W &= \sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \\ \delta W &= \sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{f}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \\ &= \sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0,\end{aligned}$$

sendo o trabalho das forças de vínculos nulas, chega-se ao conhecido princípio de D'Alembert da seguinte forma:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (3.52)$$

que é uma extensão dos trabalhos virtuais.

3.2.3 Coordenadas Generalizadas e Equações de Lagrange

O princípio de D'Alembert ainda não é a forma mais conveniente de se trabalhar, pois, ainda utiliza mais coordenadas do que é necessário para o sistema e também os deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{r}_i$, ainda não são independentes, bem como as posições \mathbf{r}_i não o são. Ver-se-á seguidamente como se contorna estes impasses, e, conseqüentemente uma mecânica mais elegante e concisa.

Coordenadas Generalizadas

Os vários tipos de sistemas de coordenadas utilizados, como por exemplo; coordenadas cartesianas, coordenadas polares e coordenadas cilíndricas serão agora englobados em um conjunto mais amplo, as coordenadas generalizadas. Um sistema de coordenadas generalizadas é aquele em que as posições das partículas pode ser especificada, onde, pode-se escrever primeiramente as equações de movimento de Newton em termos das coordenadas cartesianas e após, fazer a transição para coordenadas generalizadas. Para tratar de algum sistema holônomo por meio de coordenadas generalizadas, usualmente utiliza-se a letra q para cada coordenada com um índice ou seja, q_1, q_2, \dots, q_n .

A configuração de qualquer sistema de N partículas pode ser descrita genericamente pelas suas $3N$ coordenadas cartesianas, $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$ ou por qualquer outro conjunto de $3N$ coordenadas, q_1, q_2, \dots, q_{3N} . Então havendo um sistema de coordenadas especificado pelas funções q_k , diz-se que as q_k são **coordenadas generalizadas** do sistema se forem da seguinte forma:

$$q_k = q_k(x_1, x_2, \dots, x_{3N}; t) = q_k(\mathbf{r}_i; t), \quad k = 1, 2, \dots, 3N \quad (3.53)$$

Também é possível expressar as coordenadas cartesianas em termos das coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t) = \mathbf{r}_i(q_k; t), \quad k = 1, 2, \dots, 3N \quad (3.54)$$

Notoriamente todas as q_k serão em função da posição e possivelmente do tempo no caso de sistemas de coordenadas em movimento.

Uma vez determinadas as coordenadas generalizadas da forma (3.54), então, pode-se agora escrever os deslocamentos virtuais como:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (3.55)$$

Por outro lado, para obter-se a **velocidade generalizada**, deriva-se uma coordenada q_k qualquer em relação ao tempo, ou seja; \dot{q}_k , ora, assim como obteve-se os vetores \mathbf{r}_i em termos das coordenadas generalizadas, também pode-se obter o vetor velocidade \mathbf{v}_i em termos das **velocidades generalizadas**, fazendo uso das regras de diferenciação de funções implícitas, da maneira como se segue:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_k^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (3.56)$$

Considerando que no princípio de D'Alembert as forças de vínculos não mostram-se, tratara-se a força aplicada \mathbf{F}_i^a como sendo unicamente \mathbf{F}_i . De acordo com a (3.55), o princípio dos trabalhos virtuais agora pode ser repostado como se segue:

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i^N \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \equiv \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k, \quad (3.57)$$

onde:

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}. \quad (3.58)$$

O termo Q_k é definido como **força generalizada** e depende das forças aplicadas as partículas de um sistema físico, depende também das coordenadas q_k e pode depender do tempo. Importante destacar que as coordenadas não precisam ter necessariamente dimensões de comprimento, e, Q_k não precisa ter dimensão de força, mas, $Q_k \delta q_k$ deve ter grandeza de trabalho.

Passemos agora para outro termo do princípio de D'Alembert, como esta logo abaixo:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (3.59)$$

Considerando a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) &= \sum_{i=1}^N \left[m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} + m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \right] \\ \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.60)$$

O ultimo termo da (3.60) pode ser manipulado obtendo-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_k}, \quad (3.61)$$

onde utilizou-se a equação (3.56), de onde também obtêm-se:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}, \quad (3.62)$$

Assim, pode-se agora escrever a equação (3.60) de uma outra maneira, como a seguir:

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_k} \right].$$

Como o produto escalar $m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} \right)$, bem como $m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} \right)$, tem-se então:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} \right) \right] \\ \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

onde

$$T = \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} \quad (3.64)$$

é a energia cinética resultante do sistema.

A partir das transformações feitas acima, pode-se então reescrever o princípio de D'Alembert (3.52) através das equações; (3.57), (3.59) e (3.63), segue que:

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta q_k = 0. \quad (3.65)$$

Como os δq_k são independentes, tem-se portanto as n equações:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.66)$$

Obeve-se assim, uma primeira forma das equações de Lagrange, que depende unicamente da energia cinética e da força generalizada.

Equações de Lagrange

Se as forças \mathbf{F}_i derivarem de uma energia potencial escalar $V(r_1, \dots, r_N, t)$, assim tem-se:

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V, \quad (3.67)$$

escreve-se agora a força generalizada como:

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k}. \quad (3.68)$$

Substituindo a equação (3.68) na equação (3.66) pode-se escrever:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0, \quad (3.69)$$

sendo que $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$.

Defini-se então, que a função de Lagrange L ou, simplificada, lagrangiana é dada como:

$$L = T - V \quad (3.70)$$

Portanto, as equações de movimento serão dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (3.71)$$

esta é comumente chamada de equações de Lagrange, onde $L = L(q_k, \dot{q}_k; t)$.

As equações (3.71), constituem um conjunto com n equações de segunda ordem, que permitem determinar as coordenadas $q_k(t)$, sendo necessário unicamente determinar $2n$ condições iniciais, $q_1(t_0), \dots, q_n(t_0)$ e $\dot{q}_1(t_0), \dots, \dot{q}_n(t_0)$. Determinadas as coordenadas generalizadas pode-se então obter a posição de uma partícula ou, de um conjunto de partículas utilizando a equação (3.54).

As equações de Lagrange tem ainda a grande vantagem de trabalhar com um número reduzido de coordenadas, facilitando assim, a construção das equações de movimento, também não se tem quaisquer ligação com os vínculos uma vez que o potencial V embasa-se somente nas forças aplicadas.

3.2.4 Princípio de Hamilton e Equações de Lagrange

Far-se-á neste tópico uma abordagem à respeito das equações de Lagrange, porém, por meio de uma abordagem mais ampla que é o princípio de Hamilton, este tem seu valor aumentado, visto que, unificou diversas teorias em um único postulado básico, o que torna o princípio de Hamilton extremamente mais fundamental e elegante que as equações de Newton.

Alguns Princípios Básicos do cálculo das variações

O cálculo das variações busca determinar extremos (máximos e mínimos) de funcionais. Funcional é uma função real cujo domínio é um espaço de funções, ou seja é uma função de infinitas variáveis. O problema fundamental do cálculo das variações consiste em encontrar a função $y(x)$ de maneira que o funcional:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), \dot{y}(x); x) dx, \quad (3.72)$$

seja um máximo ou mínimo (extremo). Vale ressaltar que a notação $\dot{y}(x) = \frac{dy(x)}{dx}$ empregada na (3.72), é a derivada primeira de $y(x)$.

Objetivando encontrar a curva que extremiza J , e sabendo que $y(x)$ é a função extremante de J , tomemos uma curva $\bar{y}(x)$ infinitesimalmente próxima:

$$\bar{y}(x) = y(x) + \epsilon \eta(x), \quad (3.73)$$

onde ϵ é um parâmetro real arbitrário e $\eta(x)$ é uma função de x , com derivadas de primeira ordem contínuas, que se anulam nos pontos, $x = x_1$ e $x = x_2$ ou seja:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (3.74)$$

A afirmativa acima é necessária para que $\bar{y}(x)$ e $y(x)$ seja iguais nos pontos iniciais e finais, ou seja, os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . Substituindo-se então a (3.73) na (3.72), tem-se uma função dependente de ϵ :

$$\phi(\epsilon) \equiv J[\bar{y}] = \int_{x_1}^{x_2} f(\bar{y}(x), \dot{\bar{y}}(x); x) dx. \quad (3.75)$$

A condição para que J assumo um valor extremo mediante $y(x)$ é :

$$\left(\frac{d\phi}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\bar{y}}} \frac{\partial \dot{\bar{y}}}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} dx = 0, \quad (3.76)$$

de (3.73) pode-se obter ainda:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \epsilon} = \eta \quad , \quad \frac{\partial \dot{\bar{y}}}{\partial \epsilon} = \dot{\eta}, \quad (3.77)$$

de posse destes dados, e, como para $\epsilon = 0$ tem-se $\bar{y} = y$, rescreve-se a equação (3.76) de maneira mais compacta, como segue:

$$\left(\frac{d\phi}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\dot{\eta}\right) dx = 0, \quad (3.78)$$

integrando por partes o último termo da equação acima, pode-se eliminar $\dot{\eta}$ e também η considerando já colocadas anteriormente, segue que:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

tomando;

$$u = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \quad ; \quad du = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) dx,$$

e;

$$dv = \dot{\eta} dx \quad , \quad v = \eta,$$

assim, considerando as condições de contorno $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ tem-se que:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{\eta} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \eta \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) dx,$$

onde o primeiro termo da integral por partes se cancela devido as condições iniciais estabelecidas.

substituindo este resultado na equação (3.78), pode-se reduzi-la à:

$$\left(\frac{d\phi}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) \eta dx = 0, \quad (3.79)$$

considerando a condição de estabilidade para todo η , onde $\left(\frac{d\phi}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} = 0$, obterá-se a partir daí:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0. \quad (3.80)$$

A equação (3.80) é a conhecida equação de Euler, e possui y e \dot{y} funções independentes de ϵ e condiciona y para J assumir valores extremos.

Notação Variacional δ

Com frequência utiliza-se uma notação simplificada como representação variacional. Considera-se então a representação δy que é definido como $\delta y = \epsilon \eta$, desse modo a equação (3.73) escreve-se como:

$$\bar{y} = y + \delta y. \quad (3.81)$$

De maneira similar a equação (3.78) reescreve-se com base na nova notação da seguinte forma:

$$\delta J = \epsilon \left(\frac{d\phi}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y}\right) dx = 0, \quad (3.82)$$

onde utilizou-se também:

$$\eta = \frac{\delta y}{\epsilon} \quad , \quad \dot{\eta} = \frac{\delta \dot{y}}{\epsilon}. \quad (3.83)$$

De outra forma, tem-se que:

$$\delta \dot{y} = \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta y), \quad (3.84)$$

te tal maneira que a (3.82) fica:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{d}{dx} (\delta y) \right) dx = 0, \quad (3.85)$$

o segundo termo pode ser integrado, como já foi feito na (3.78), vem que:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right) \delta y dx \quad (3.86)$$

tendo a variação δy como arbitrária, então a condição do extremo requer que a integração desapareça, resultando na equação de Euler.

Princípio de Hamilton e equações de Lagrange

Até aqui, dissertou-se a respeito do cálculo de variações, entretanto, é preciso notar que o objeto principal está no estabelecimento da analogia que a equação de Euler e as equações de Lagrange apresentam, o que indica uma extremização na trajetória de uma partícula.

Note que, da mesma forma como na equação de Euler se utilizou o integrando de um funcional para torná-la estacionária, para encontrar a função que a extremiza, a lagrangiana também deve partir deste mesmo princípio, sendo de maneira similar à equação de Euler. Então, esta deverá ser o integrando de um funcional integral que a natureza busca maximizar ou minimizar, o que denomina-se de ação. Assim, S é denominado de ação tal como:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k; t) dt, \quad (3.87)$$

infere-se ainda que;

$$\bar{q}_k(t) = q_k(t) + \delta q_k(t), \quad (3.88)$$

como as variações δq_k são independentes e sujeitas a condições previamente colocadas (arbitrárias), exceto nas condições de contorno; $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0, \quad \forall k$. Cada variação de coordenadas generalizadas exerce influência de forma independente na lagrangiana, com isso tem-se que a variação da ação $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$, de acordo com a (3.82) é como se segue:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt, \quad (3.89)$$

uma integração por partes no segundo membro desta equação resulta em:

$$u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad ; \quad du = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) dt$$

$$dv = \delta \dot{q}_k dt \quad ; \quad v = \delta q_k,$$

assim,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k dt = \sum_k \left[\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) dt \right] = - \sum_k \int_{t_1}^{t_2} \delta q_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) dt,$$

em que as condições de contorno $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$ tornam o primeiro termo nulo.

Substituindo este resultado na equação (3.89), e, impondo que $\delta S = 0$ resulta em:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k dt = 0. \quad (3.90)$$

Como δq_k é arbitrário, então δq_k é identicamente nulo nos pontos t_1 e t_2 , então a equação (3.90) torna-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (3.91)$$

que é a equação de Lagrange, concluindo assim a abordagem lagrangiana, feita desta vez através do cálculo variacional. No entanto, ainda é preciso explicitar o importantíssimo princípio de Hamilton, que de forma implícita já foi colocado.

Princípio de Hamilton

Segue-se que o princípio de Hamilton tem por definição que a evolução de um sistema físico holônomo de um instante t_1 a t_2 , é dado pela ação definida na (3.87), a qual tem para a lagrangiana $L(q_k, \dot{q}_k; t)$ um valor estacionário na trajetória de um sistema físico.

Concluimos então o formalismo lagrangiano, por meio de suas duas abordagens, o princípio de D'Alembert com deslocamentos virtuais e o princípio de Hamilton com cálculo variacional. O segundo com maior relevância por ser mais abrangente e formal além de unificar outros princípios que descrevem suas configurações por meio da minimização da trajetória.

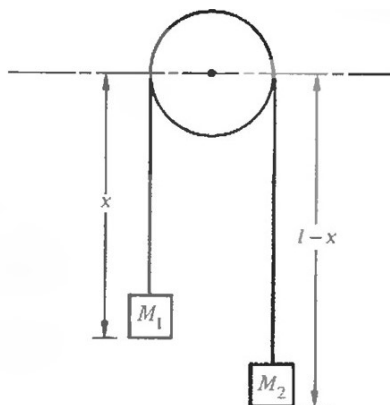
3.2.5 Aplicação das Equações de Lagrange

Em vista de adquirir melhor entendimento da funcionalidade das equações de Lagrange, aplica-se-á tais equações em prolemas físicos elementares.

Exemplo 3: Refaremos novamente o exemplo da máquina de Atwood, porém agora encontra-se-á a equação de movimento do sistema.

Considere a imagem seguinte:

Figura 7 – Máquina de Atwood



Fonte: Goldstein Poole & Safko [10].

Contudo, $x + x_1 = l$ é o vínculo envolvido no sistema descrito na imagem, onde $x_1 = l - x$, considere ainda que $\dot{x} = -\dot{x}_1$. Então, a energia cinética do sistema será:

$$T = \frac{1}{2}M_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x}^2,$$

e a energia potencial é dada por:

$$V = M_1gx + M_2g(l - x),$$

então a função lagrangiana torna-se:

$$L = T - V = \frac{1}{2}M_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x}^2 - M_1gx - M_2g(l - x),$$

utilizando x como coordenada generalizada e lembrando ainda que para obter as equações de movimento se usa a (3.71) tem-se que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = (M_1 + M_2)\ddot{x},$$

e:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = M_2g - M_1g = (M_2 - M_1)g,$$

de posse destes dados teremos agora que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} - (M_2 - M_1)g = 0$$

$$\ddot{x} = \frac{(M_2 - M_1)}{(M_1 + M_2)}g.$$

Basta agora resolver a equação acima para se obter a equação de movimento do sistema, para isso, integra-se a equação da forma abaixo:

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}) = \frac{(M_2 - M_1)}{(M_1 + M_2)}g$$

$$\int_{t_0}^t d(\dot{x}) = \int_{t_0}^t \frac{(M_2 - M_1)}{(M_1 + M_2)} g dt$$

$$\dot{x} = \frac{(M_2 - M_1)}{(M_1 + M_2)} gt,$$

integrando novamente e observando que $t_0 = 0$ tem-se:

$$\frac{d}{dt}(x) = \frac{(M_2 - M_1)}{(M_1 + M_2)} gt$$

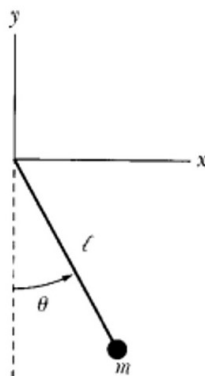
$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t \frac{(M_2 - M_1)}{(M_1 + M_2)} gt dt$$

finalmente chegando-se à equação do movimento da máquina de Atwood;

$$x = x_0 + \frac{(M_2 - M_1)}{(M_1 + M_2)} gt^2$$

Exemplo 4: Neste exemplo, aplica-se-á o formalismo lagrangiano para obter as equações de movimento de um pêndulo simples. Para isso, considere a ilustração abaixo:

Figura 8 – Pêndulo Simples



Fonte: Stephen T. Thornton e Jerry B. Marion [2].

Nesse sistema físico, (x, y) são as coordenadas cartesianas da massa m , e, considerando os ângulos θ como sendo a coordenada generalizada, teremos que:

$$x = l \sin \theta \quad , \quad y = l \cos \theta$$

$$\dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta \quad , \quad \dot{y} = -l \dot{\theta} \sin \theta,$$

tem-se então, que a energia cinética do sistema será:

$$T = \frac{m}{2} \left[(l \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (-l \dot{\theta} \sin \theta)^2 \right]$$

$$T = \frac{m}{2} \left[l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \right] = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2},$$

e considerando o ponto em que a corda está presa, tem-se que a energia potencial é:

$$V = -mgy = -mgl \cos \theta,$$

assim, a função lagrangiana do problema é:

$$L = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl \cos \theta.$$

A equação de movimento é obtida pelas equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

A partir da função lagrangiana obtida, tira-se que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta,$$

obtêm-se finalmente a equação para o movimento do pêndulo;

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} \right) \sin \theta = 0.$$

Considerando pequenas oscilações, tem-se $\sin \theta \approx \theta$, logo reescreve-se a equação de movimento como:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} \right) \theta = 0,$$

que é a equação do oscilador harmônico simples.

3.3 Dinâmica de Hamilton

A dinâmica de Hamilton não constitui um modelo mais fácil de descrever a mecânica, mas sim em um outro modelo mais completo, que permite inclusive estudar sistemas bastantes complexos com maior riqueza de detalhes e de informações, como ocorre na mecânica quântica, onde a sua base é constituída por esse formalismo.

3.3.1 Equações Canônicas de Hamilton

As equações de Lagrange constituem um sistema de n equações de segunda ordem no tempo para as coordenadas generalizadas $q_1(t), \dots, q_k(t)$ e pode ser representado geometricamente por uma curva no espaço de configuração (todas as posições das partículas estão definidas). Em contrapartida, as equações de Hamilton são notabilizadas por $2n$ equações de primeiras ordem e $2n$ variáveis independentes no tempo, sua evolução pode ser representada por uma curva no espaço de fase (posições e as velocidades das partículas em um determinado ponto em um dado momento).

Então, vera-se-á frente que um sistema poderia também ser determinado conhecendo as posições generalizadas q_k e os momentos p_k , vejamos como sucede.

Momentos Canônicos e Equações de Hamilton

Hamilton mostrou em seu trabalho que a duplicação simétrica do número de variáveis de coordenadas independentes é conseguida graças às coordenadas generalizadas q_k e os momentos canônicos conjugados p_k . O momento conjugado é da forma a seguir:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, \dots, f \quad (3.92)$$

A hamiltoniana descreve as equações de movimento não mais através das variáveis (q_k, \dot{q}_k) , mas agora, pelas coordenadas q_k e pelos momentos p_k . Segue-se deste modo, que, utilizando a equação (3.92) em consonância com a (3.71) ou mesmo a (3.91), visto serem as mesmas, em diferentes abordagens, teremos:

$$\begin{aligned} dL &= \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ dL &= \sum_{k=1}^f (p_k d\dot{q}_k + \dot{p}_k dq_k) + \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned} \quad (3.93)$$

onde $\dot{p}_k = \frac{d}{dt} p_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}$.

Com efeito, define-se agora uma função $H(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f; t)$, pela relação seguinte:

$$H = \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - L. \quad (3.94)$$

A função H definida na (3.94) é a função hamiltoniana, sendo obtida através de uma transformada de Legendre, aqui sendo unicamente a substituição das velocidades generalizadas pelos momentos canônicos. Com isso, veja-se como ocorre a transformação de Legendre em busca das equações de Hamilton; em primeiro lugar toma-se a diferencial da (3.94):

$$dH = \sum_{k=1}^f (d\dot{q}_k p_k + \dot{q}_k dp_k) - dL,$$

utilizando o resultado (3.93) e a definição de momento canônico daquela diferencial, tem-se:

$$dH = \sum_{k=1}^f (d\dot{q}_k p_k + \dot{q}_k dp_k - p_k d\dot{q}_k + \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

cancelando os termos semelhantes e rearranjando-os obtêm-se:

$$dH = \sum_{k=1}^f (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (3.95)$$

Por outro lado, a diferencial da função $H(q_k, p_k; t)$ é:

$$dH = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (3.96)$$

Agora basta comparar as equações (3.95) e (3.96), e, finalmente tem-se as equações de Hamilton para o movimento:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad k = 1, \dots, f, \quad (3.97)$$

tendo-se ainda o termo,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.98)$$

As formas matemáticas (3.97) são as renomadas equações canônicas de Hamilton, as quais são compostas por $2n$ equações diferenciais de primeira ordem no tempo, que definem a configuração dos sistema, essas também equivalem as n equações de segunda ordem de Lagrange, onde substituiu-se as variáveis dinâmicas (q_k, \dot{q}_k) por (q_k, p_k) .

3.3.2 Hamiltoniana e Energia total

A lagrangiana usual é dada por, $L = T - V$. Incorre-se que, se T é função puramente quadrática das velocidades e se V não depende das velocidades, então têm-se que:

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T, \quad (3.99)$$

este resultado importante advém de um caso especial do teorema de Euler, o qual diz que se $f(y_k)$ é uma função homogênea de y_k que é de grau n tendo deste modo; $\sum_k y_k \frac{\partial f}{\partial y_k} = n f$, que foi o procedimento realizado com a lagrangiana. Consequentemente obtém-se:

$$H = \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L$$

$$H = \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - T + V,$$

onde substitui-se a equação (3.99), assim:

$$H = 2T - T + V,$$

resultando em:

$$H = T + V, \quad (3.100)$$

ou seja, a hamiltoniana é a energia total em termos das coordenadas e dos momentos.

3.3.3 Aplicações da Dinâmica de Hamilton

Agora vamos à algumas aplicações básicas sobre dinâmica hamiltoniana.

Exemplo 5: Considere o exemplo do pêndulo simples, encontrando, porém, a hamiltoniana do sistema e seguidamente a equação do movimento. A lagrangiana do sistema é:

$$L = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl \cos \theta,$$

e seu momento conjugado é:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \quad \longrightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2},$$

deste modo utiliza-se a equação (3.94), obtendo-se:

$$H = \frac{p_\theta}{ml^2}p_\theta - L$$

$$H = \frac{p_\theta^2}{ml^2} - \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl \cos \theta,$$

que é a hamiltoniana. De posse desta equação e observando a equação canônica $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$, ressaltando que está-se usando θ como coordenada generalizada, assim:

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p_\theta^2}{ml^2} - \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl \cos \theta \right) = -mgl \sin \theta,$$

utilizando-se a seguinte equação canônica de Hamilton $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, então vem que:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial}{\partial p_\theta} \left(\frac{p_\theta^2}{ml^2} - \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl \cos \theta \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_\theta} \left(\frac{p_\theta^2}{ml^2} - \frac{ml^2}{2} \frac{p_\theta^2}{ml^4} - mgl \cos \theta \right) \\ &= \frac{2p_\theta}{ml^2} - \frac{p_\theta}{ml^2} = \frac{p_\theta}{ml^2}, \end{aligned}$$

rearrumando os termos tem-se:

$$p_\theta = \dot{\theta}ml^2,$$

derivando esta equação em relação ao tempo; $\dot{p}_\theta = \ddot{\theta}ml^2$, e, igualando à $\dot{p}_\theta = -mgl \sin \theta$, vem que:

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta,$$

manipulando os termos e admitindo que $\sin \theta \approx \theta$, obtêm-se finalmente a equação de movimento;

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} \right) \theta = 0.$$

Exemplo 6: Novamente iremos usar o exemplo 3 da máquina atwood, utilizando desta vez o formalismo hamiltoniano, veja-se como se encontram as equações para este sistema físico.

Se a lagrangiana é:

$$L = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) \dot{x}^2 + (M_2 - M_1) gx - M_2 gl,$$

obtemos a velocidade definida como:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad \longrightarrow \quad \dot{x} = \frac{p_x}{(M_1 + M_2)},$$

e, a hamiltoniana é do seguinte modo:

$$H = p_x \dot{x} - L = \frac{p_x^2}{2(M_1 + M_2)} - (M_2 - M_1) gx + M_2 gl.$$

com isso obtemos as equações canônicas de movimento:

$$\dot{x} = \frac{p_x}{M_1 + M_2}$$

$$\dot{p}_x = (M_2 - M_1) g,$$

derivando a primeira em relação ao tempo e substituindo na segunda, obtêm-se a equação para a máquina de atwood:

$$\ddot{x}(M_1 + M_2) = (M_2 - M_1) g$$

$$\ddot{x} = \frac{(M_2 - M_1)}{(M_1 + M_2)} g.$$

3.3.4 Considerações Sobre a Lagrangiana e a Hamiltoniana

Nos tópicos antecedentes foram discutidas duas novas ferramentas poderosíssimas, a dinâmica de Lagrange e a de Hamilton. A primeira constituída não de significância física, mas sim, de uma modelagem analítica, uma construção matemática muito forte, com a introdução de um sistema de coordenadas mais geral que a renomada mecânica newtoniana, possibilitando enorme vantagem por não se tratar de uma análise geométrica, vetorial, mas sim, escalar. Quanto a segunda ferramenta, esta não introduz um mecanismo mais fácil, sendo unicamente mais completa por levar significância física, sendo esta a energia do sistema que se analisa, para além, ainda permite investigar a física contida nas partículas atômicas. Assim, os dois formalismos são formidáveis, e tem em comum a eficácia na determinação da equação de movimento das partículas, em princípio para sistemas conservativos, sem a dissipação de energia, não as tornando de nenhuma maneira diminutas.

Daremos seguimento fazendo uma pequena análise de cálculo fracionário afim de viabilizar o desenvolvimento de nossa busca, como o leitor perceberá no decorrer do trabalho.

4 CÁLCULO FRACIONÁRIO

As bases literárias que seram utilizadas em todo este capítulo são: [11], [12], [13], [14] e [15].

O cálculo fracionário segundo [11] é a designação para a teoria das derivadas e integrais de ordem arbitrária, até mesmo fracionária servindo para unificar e generalizar as noções do cálculo diferencial de ordem inteira. Trata-se de um ramo do cálculo já bastante antigo, desenvolvido primordialmente pelo pressuposto básico do que seria o valor de uma variação de ordem meia, ou seja, $d^{\frac{1}{2}}x$, que segundo especulações de l'Hopital e Leibniz seria $x\sqrt{dx} : x$.

Houveram diversos matemáticos responsáveis por construir o cálculo fracionário, entre os mais notórios destacam-se; Euler, Laplace, Grunwald, Letnikov, Riemann. Esse cálculo vem sendo amplamente utilizado somente nas ultimas décadas, com aplicações expressivas na física e na engenharia.

Existem diversas definições para o cálculo fracionário, onde iremos por conveniência discorrer neste capítulo sobre as duas formas mais utilizadas pelos matemáticos, por serem mais adequadas ao cálculo analítico que são; a definição de Riemann- Liouville, e, a definição de Caputo. A primeira é dada por:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - u)^{n-\alpha-1} f(u) du \quad (4.1)$$

onde, $\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}$ é uma função gama, $\frac{d^n}{dt^n}$ é a definição usual de derivada e α é um número real positivo. Essa definição apresenta ainda limitações, tais quais a derivada de uma constante não ser zero e não possuir definição física direta. Já a definição de Caputo busca uma forma mais apropriada para a aplicação direta. Caputo unicamente inverteu a ordem de integração e a ordem da derivada feitas na determinação (4.1), assim, obteve-se:

$${}_a^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t f^n(u) (t - u)^{n-1-\alpha} du, \quad n - 1 < \alpha \leq n, \quad (4.2)$$

sendo, $f^n = \frac{d^n f(t)}{du^n}$.

Ressalta-se ainda, que, tanto a derivada de Riemann-Liouville quanto a de Caputo possuem derivadas à direita e à esquerda, como ficará claro mais adiante.

Assim, neste capítulo estas duas formas serão maior aprofundadas na medida da necessidade para a realização dos objetivos deste trabalho.

4.1 Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville

Será-se desenvolvido nesta seção as principais definições das derivadas e integrais de Riemann- Liouville.

4.1.1 Integrais Fracionárias de Riemann-Liouville

Defini-se a integral fracionária de Riemann-Liouville à esquerda e a direita, respectivamente como sendo:

$${}_a J_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-u)^{\alpha-1} f(u) du; \quad \text{para } t \geq a, \quad (4.3)$$

$${}_t J_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (u-t)^{\alpha-1} f(u) du; \quad \text{para } t \leq b, \quad (4.4)$$

onde $\Gamma(\alpha)$ é uma função gama.

Tem-se ainda que para $\alpha = \text{inteiro}$ as definições (4.3) e (4.4) tornam-se as integrais repetidas usuais.

Propriedades da Integrais Fracionárias

Importante observar duas propriedades principais das integrais fracionárias, sejam; a propriedade de semigrupo e a propriedade comutativa.

A primeira, ocorre do seguinte modo:

$${}_a J_t^\alpha {}_a J_t^\beta = {}_a J_t^{\alpha+\beta}, \quad \text{para } \alpha, \beta \geq 0, \quad (4.5)$$

$${}_t J_b^\alpha {}_t J_b^\beta = {}_t J_b^{\alpha+\beta}, \quad \text{para } \alpha, \beta \geq 0. \quad (4.6)$$

Já a propriedade comutativa, decorre da exposta acima, obtendo-se assim:

$${}_a J_t^\alpha {}_a J_t^\beta f(t) = {}_a J_t^\beta {}_a J_t^\alpha f(t), \quad \text{para } \alpha, \beta \geq 0, \quad (4.7)$$

$${}_b J_t^\alpha {}_b J_t^\beta f(t) = {}_b J_t^\beta {}_b J_t^\alpha f(t), \quad \text{para } \alpha, \beta \geq 0. \quad (4.8)$$

De maneira geral estas definições são as de maior relevância do ponto de vista operacional deste trabalho.

4.1.2 Derivadas Fracionárias de Riemann-Liouville

Iniciou-se este capítulo com a definição de integral fracionária devido esta ser a base da construção das derivadas fracionárias. Considere então a definição seguinte do calculo usual:

$$D_t^m f(t) = D_t^n J_t^{n-m} f(t), \quad (4.9)$$

onde, D_t^n é a derivada usual de ordem inteira n ou seja; $D_t^n = \frac{d^n}{dt^n}$, e, $m < n$ são inteiros positivos. Assim, define-se a derivada de Riemann-Liouville à esquerda e à direita como:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = D_t^n {}_a J_t^{n-\alpha} f(t), \quad (4.10)$$

$${}_t D_b^\alpha f(t) = (-1)^n D_t^n {}_t J_b^{n-\alpha} f(t), \quad (4.11)$$

tomando $\alpha > 0$ e $n - 1 \leq \alpha < n$.

Uma forma mais clara das derivadas se obtêm substituindo as equações (4.3) e (4.4) nas (4.10) e (4.11) respectivamente, obtendo-se desta forma:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-u)^{n-\alpha-1} f(u) du, \quad (4.12)$$

$${}_t D_b^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (u-t)^{n-\alpha-1} f(u) du. \quad (4.13)$$

4.1.3 Relações entre Integrais e Derivadas de Riemann-Liouville

A derivada de Riemann-Liouville é o operador inverso à esquerda da integral fracionária:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha {}_a J_t^\alpha f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} {}_a J_t^{n-\alpha} {}_a J_t^\alpha f(t), \\ {}_a D_t^\alpha {}_a J_t^\alpha f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} {}_a J_t^n f(t) = f(t), \end{aligned}$$

portanto obtêm-se;

$${}_a D_t^\alpha {}_a J_t^\alpha f(t) = f(t). \quad (4.14)$$

Analogamente, a derivada de Riemann-Liouville é o operador à esquerda da integral fracionária, como segue:

$${}_t D_b^\alpha {}_t J_b^\alpha f(t) = f(t). \quad (4.15)$$

Embora isso, a integral fracionária não é o inverso da derivada fracionária, unicamente se obtêm em um caso particular, para tal, considera-se :

$${}_a J_t^1 {}_a D_t^1 f(t), \quad (4.16)$$

onde usualmente o teorema fundamental do calculo aplicado à (4.16) apresenta-se:

$${}_a J_t^1 {}_a D_t^1 f(t) = \int_a^t \frac{df(t)}{dt} dt = f(t) - f(a) \quad (4.17)$$

ressaltando-se que para α inteiro têm-se a derivada e a integral usuais.

4.2 Cálculo Fracionário de Caputo

Nas derivadas fracionárias de Riemann-Liouville condições de contorno, condições iniciais não podem ser aplicadas. Assim, Caputo propôs uma pequena mudança, criando uma nova derivada fracionária. Ele inverteu a ordem entre a derivada e a integral de Riemann-Liouville.

A derivada de Caputo tanto a esquerda quanto a direita é definida respectivamente como:

$${}_a^c D_t^\alpha f(t) = {}_a J_t^{n-\alpha} D_t^n f(t), \quad (4.18)$$

$${}_t^c D_b^\alpha f(t) = (-1)_t^n J_b^{n-\alpha} D_t^n f(t), \quad (4.19)$$

onde $n - 1 < \alpha \leq n$ e $\alpha > 0$.

De uma outra maneira mais explícita as derivadas de Caputo tornam-se da seguinte forma;

$${}_a^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t f^n(u)(t-u)^{n-1-\alpha} du, \quad n-1 < \alpha \leq n \quad (4.20)$$

$${}_t^c D_b^\alpha f(t) = (-1) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^b f^n(u)(t-u)^{n-1-\alpha} du, \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad (4.21)$$

sendo $f^n = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$ para $n = \text{inteiro}$

Uma outra propriedade muito importante e que será usada mais à frente é;

$${}_a D_t^{\frac{1}{2}} D_t^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{d}{dt} {}_a J_t^{\frac{1}{2}} {}_a J_t^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt} {}_a J_t \frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \quad (4.22)$$

Outrossim, o calculo fracionário é bastante extenso, então, buscou-se definir somente as definições mais importantes para este trabalho.

5 FORMULAÇÃO LAGRANGIANA E HAMILTONIANA PARA SISTEMAS DISSIPATIVOS, APLICADO AO CASO DO MOVIMENTO VERTICAL DE UMA ESFERA

Neste capítulo inicia-se o desenvolvimento e as discussões a respeito do movimento vertical de uma pequena esfera. Será utilizado como fundamento as seguintes referências; [1], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27]. Reitera-se que será utilizado o desenvolvimento matemático visando as equações de movimento produzidas pelas expressões de Lagrange e Hamilton para sistema dissipativo.

Para melhor fluidez do conteúdo, dividiu-se este capítulo em cinco seções, onde a primeira conterà uma discussão a respeito da dissipação linear e quadrática; a segunda, a generalização da função de Rayleigh; a terceira, o desenvolvimento da função lagrangiana para o movimento dissipativo da esfera a partir do conceito de lagrangiana equivalente e a quarta será a abordagem da equação de Lagrange e Hamilton para o movimento do objeto em análise, utilizando o cálculo fracionário.

5.1 Força de Resistência nos Fluidos

Neste tópico far-se-á uma abordagem da função de dissipação de Rayleigh e em seguida a sua generalização para o caso de uma força dissipativa proporcional ao quadrado da velocidade. Será usado como base teórica; [14].

No movimento unidimensional podem existir naturalmente forças de retardo dependentes da velocidade, tais quais de deslizamento e rolamento em uma superfície de contato. Por exemplo, em um meio viscoso como o ar, um gás, o óleo etc, estes são sistemas que podemos obter essa situação. A dependência das forças de resistência, devido ao meio viscoso, é muito mais complicada [1] e salienta-se que em muitos casos o valor de tal dependência só é obtido através de dados experimentais tabelados.

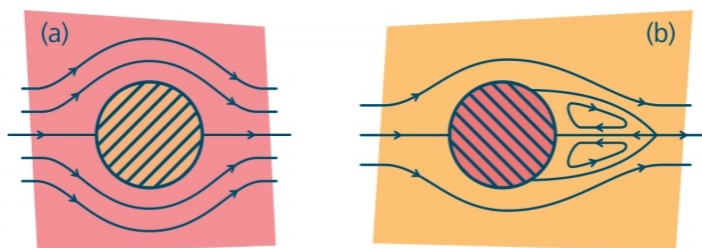
Devido a essas dificuldades no tratamento físico, comumente ignora-se as forças resistivas do fluido (geralmente o ar), visto a sua pequenez diante de outras, por sua vez, em um sistema como o lançamento vertical, não se pode desprezar estas forças. Em certas condições, a força resistiva é proporcional a algumas potencias de velocidade e é nesses casos que concentra-se-á nosso estudo.

Assim, as formas de força resistiva mais importantes são a linear e quadrática, estas ocorrem respectivamente devido à viscosidade do fluido e a diferença de pressão entre a parte dianteira do objeto e a traseira. Ressaltando-se ainda que, deste ponto em

diante, utilizar-se-á o modelo base de estudo deste trabalho, ou seja, o lançamento vertical de uma esfera.

A seguir seguem as duas formas de resistividade em um meio fluido, como citado no paragrafo anterior.

Figura 9 – Em (a) tem-se a força resistiva devido a viscosidade do fluido e em (b) tem-se a força resistiva devido a diferença de pressão



Fonte: CTISM [27].

Resistência devido à viscosidade do fluido: Conforme a figura (a) e utilizando a esfera como referência, tem-se que em seu movimento através do fluido, a resistência é linear em consequência da viscosidade do meio. Assim, na medida em que a esfera se movimenta, uma camada do fluido permanece junto à superfície de contato, esta camada gera atrito com outras mais afastadas, traduzindo-se desta maneira em força contrária ao movimento e proporcional à velocidade.

Resistência devido à diferença de pressão entre os extremos da esfera: No caso da figura (b) a força resistiva é devida a diferença de pressão entre a parte frontal de contato da esfera com o fluido (na direção do deslocamento) e a parte oposta ao contato com o fluido. Mas o que causa essa diferença de pressão? Ocorre que para o aumento da velocidade bastante elevado, surgem esteiras de vórtices no lado oposto ao de contato com o fluido, assim, na parte dianteira à um ponto de paralisação, fazendo a pressão dinâmica ser elevada à um limite proporcional a velocidade ao quadrado. Define-se segundo [20], que pressão dinâmica é o aumento de pressão no ponto de estagnação de um objeto, no caso a esfera, devido o freamento do fluido naquele local.

Tornou-se notório que existe uma dependência explícita entre a viscosidade e a velocidade, haja vista as mudanças ocorridas nos dois casos acima. De maneira geral o processo físico ocorrido é bem definido, porém, precisa-se de um parâmetro para distinguir qual dos casos está presente, e o número de Reynolds é o mecanismo que permite avaliar qual dos mecanismos é mais importante. Antes de iniciar-se com esse desenvolvimento, é muito importante expor a equação de Navier-Stokes, visto dela surgir as formas particulares do arrasto linear e quadrático. Ressalta-se também que não far-se-á aqui uma discussão aprofundada do tema, mas somente uma breve explanação [16]. Stokes utilizou em sua descrição fluidos incompressíveis, no entanto, pode-se com boa aproximação tratar de

fluidos compressíveis, tal como o ar. Assim, temos a seguinte expressão:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} \right] = -\text{grad } p + \eta \Delta \mathbf{u} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \text{grad } \text{div} \mathbf{u}, \quad (5.1)$$

onde esta é conhecida como equação de Navier-Stokes [16].

Contudo, para um fluido incompressível o $\text{div} \mathbf{u} = 0$ e a (5.1) fica simplificada como abaixo:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} = \frac{-1}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{u}, \quad (5.2)$$

em que \mathbf{u} é a velocidade do fluido, ρ é a densidade do fluido. Sendo η a viscosidade dinâmica, e $\frac{\eta}{\rho}$ a viscosidade cinemática, aquela é a característica dos fluidos que permite balancear dinamicamente forças tangenciais externas quando os fluidos estão em movimento, enquanto que esta caracteriza-se pelo fato dessa quantidade física não envolver força, mas somente comprimento e tempo [17].

Posto isso, segue-se para a interpretação de Reynolds. Para um objeto com forma definida passando através de um fluido estacionário, é satisfatório determinar qualquer uma de suas dimensões (raio de uma esfera ou de um cilindro por exemplo). Uma vez determinada, as características geométricas são estipuladas por uma dimensão linear denotada l (no caso da esfera é seu diâmetro), sendo a velocidade principal igual à u . Além disso, dos parâmetros de caracterização do próprio fluido, apenas a viscosidade cinemática (ν) aparece nas equações de Navier-stokes. Assim, para especificar qualquer fluxo basta três componentes; ν , u e l . Desse modo, o número de Reynolds é definido como:

$$N_R = \frac{\rho}{\eta} ul = \frac{ul}{\nu}, \quad (5.3)$$

onde obteve-se esta através de uma adimensionalização na equação (5.2), em que tal número não tem unidade de medida, caracterizando o tipo de escoamento do fluido.

Stokes então demonstrou uma aproximação, um caso particular para fluxos constantes com número de Reynolds pequeno, desse modo, a equação (5.1) fica ainda mais simplificada, logo:

$$(\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} = \frac{-1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{u}, \quad (5.4)$$

em que vai-se considerar uma esfera se deslocando através de um fluido incompressível viscoso.

Na (5.4) o termo $\mathbf{u} \cdot \text{grad} \mathbf{u}$ pode ser descartado levando em consideração o números de Reynolds pequenos, transformando a equação de movimento em linear;

$$\eta \Delta \mathbf{u} - \text{grad } p = 0. \quad (5.5)$$

A partir daí, tem-se duas situações, a primeira trata-se do fluido passando pela esfera e a segunda, a esfera passando pelo fluido, os quais são identicamente correspondentes.

O que interessa-nos aqui é a segunda condição, porém, é necessário fazer a relação do segundo com o primeiro para definir que a velocidade da esfera é igual à $-\mathbf{u}$ visto a velocidade do fluxo principal ser \mathbf{u} . Então fazendo-se algumas modificações matemáticas obtêm-se a seguinte equação para a pressão:

$$p = p_0 - \left(\frac{e\eta}{2R}\right) u \cos \theta, \quad (5.6)$$

onde ela pode atingir pontos máximos e mínimos dependendo dos locais de estagnação do fluido, ou seja, em frente à corrente livre e no lado oposto temos como referência a esfera passando no meio. Desse modo, pode-se obter a força resistiva na esfera, em que utiliza-se coordenadas polares esféricas com eixo paralelo a \mathbf{u} e todas as coordenadas são funções de \mathbf{r} e do ângulo polar θ . Então, chega-se a expressão para o arrasto linear desenvolvida por Stokes para uma pequena esfera viajando lentamente em meio ao fluido :

$$F_{lin} = 6\pi\eta Ru, \quad (5.7)$$

onde R é o raio da esfera, sendo então o arrasto proporcional à velocidade e dependente das dimensões do corpo. É preciso observar ainda, que, o sentido da força é sempre de oposição à velocidade, seja qual for a configuração. Desse modo, se o eixo y estiver orientado para cima, então $v > 0$ e $F_r < 0$, ou seja a (5.2) tem sinal negativo por ser contrária ao movimento; caso contrário $v < 0$ e $F_r > 0$, novamente a força vai em sentido inverso à velocidade.

A solução de Stoks para a esfera não era válida para distâncias muito longas a partir da mesma, visto o número de Reynolds ser elevado acabando por predominar as forças viscosas. Assim, Oseen em 1910 desenvolveu uma aproximação mais precisa para o arrasto da esfera, que inclui o segundo termo do cálculo aproximado por potências de Reynolds. Tem-se então como resultado obtido de Oseen a seguinte relação:

$$F = \eta\pi u R \left(1 + 3u \frac{R}{8\nu}\right),$$

distribuindo os termos vem que:

$$F = 6\pi\eta Ru + \frac{9}{4}\pi\rho R^2 u^2, \quad (5.8)$$

ou ainda:

$$F = bu + cu^2, \quad (5.9)$$

onde cu^2 denomina-se a força de arrasto quadrático (F_{quad}) e obviamente se tem que os termos $b = 6\pi\eta R$ e $c = \frac{9}{4}\pi\rho R^2$ são constantes. Vale ressaltar certos pontos importantes à respeito da (5.9), primeiramente, existe um vinculo entre a velocidade, o número de Reynolds e a aproximação de Oseen, e, para velocidades pequenas o número de Reynolds se torna muito baixo a tal ponto de desconsidera-se o segundo termo da equação citada, visto que para um número de Reynolds muito pequeno elevado ao quadrado torna-se ainda

menor, portanto, pode-se desprezar o segundo termo. A recíproca também é válida, ou seja, se o número de Reynolds é elevado (acima de um) o segundo termo da equação (5.9) fica muito maior, deste modo, pode-se desprezar o termo linear. Importa destacar que estamos considerando objetos cujo as forças laterais são zero ou desprezíveis [18], ou seja:

$$\mathbf{F} = f(u)\hat{\mathbf{u}}, \quad (5.10)$$

com $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{u}$ denotando um vetor unitário na direção de \mathbf{u} , e $F(v)$ a magnitude de \mathbf{f} .

Então, o número de Reynolds é um parâmetro para definir qual das forças é preponderantes. Porém, existe uma outra maneira de verificar se o tipo de arrasto dominante é o de forma ou de pressão, este método consiste em simplesmente comparar as magnitudes dos termos da equação (5.9) [18], logo tem-se:

$$\frac{F_{quad}}{F_{lin}} = \frac{cu^2}{bu} = \frac{\gamma}{\beta}lu = (1,6 \cdot 10^3 s/m^2) lu, \quad (5.11)$$

em que γ e β são coeficientes dependentes do meio ao qual o corpo está inserido e, para um projétil esférico em condições normais de temperatura e pressão os valores assumidos por eles respectivamente são $0,25 N \cdot s/m^4$ e $1,6 \cdot 10^{-4} N \cdot s/m^2$, importa ainda lembrar que l é o diâmetro do objeto.

Assim, para ampliar-se a compreensão sobre a predominância do tipo de arrasto na expressão (5.9), vejamos alguns exemplos práticos;

Exemplo 1: Uma bola de beisebol e algumas gotas de líquido

Calcule a importância relativa aos arrastos, linear e quadrático, sobre uma bola de beisebol de diâmetro $l = 7cm$, movendo-se a uma modesta velocidade de $v = 5m/s$. Faça o mesmo para uma gota de chuva ($l = 1mm$ e $v = 0,6m/s$) e para uma gotícula de óleo usada no experimento de Millikan ($l = 1,5\mu m$ e $v = 5 \cdot 10^{-5}m/s$)

Primeiramente, substitui-se os dados da bola de beisebol na (5.10), não esquecendo-se de transformar o diâmetro para metros, teremos então:

$$\frac{F_{quad}}{F_{lin}} = (1,6 \cdot 10^3) 7 \cdot 10^{-2} \approx 600. \quad (5.12)$$

Para esta bola de beisebol pode-se inferir que o termo linear é desprezível, tornando-se necessário considerar apenas a parte quadrática do arrasto. Para mais, se a bola estiver com velocidade consideravelmente grande, a $\frac{F_{quad}}{F_{lin}}$ é ainda maior, ao contrário, se o corpo tem baixa variação de espaço a razão é um pouco menor e, se continuarmos a diminuir a velocidade de tal forma que a parte linear seja equiparável à parte quadrática, ambas seriam tão pequenas a ponto de desprezar-se as duas. Portanto, para esse corpo e objetos similares, é sempre melhor desprezar a F_{lin} e se ter a força de arrasto como:

$$\mathbf{F} = -cu^2\hat{\mathbf{u}}. \quad (5.13)$$

Passando agora para a gota de chuva, as substituições resultam:

$$\frac{F_{quad}}{F_{lin}} \approx 1. \quad (5.14)$$

Conclui-se, portanto, que nenhuma das forças pode ser desprezada, pois os termos são comparáveis e desse modo o problema fica ainda mais difícil. Se a gota de chuva for ligeiramente maior ou estiver se movendo mais rapidamente a parte linear pode ser abandonada. Em oposição, se a gota for muito pequena ou com velocidade bastante baixa o termo quadrático pode ser desprezível. De maneira geral, para a gota de chuva ou corpos parecidos será considerado tanto F_{lin} e F_{quad} .

Para a gota de óleo do experimento de Millikan teremos:

$$\frac{F_{quad}}{F_{lin}} \approx 10^{-7}, \quad (5.15)$$

como percebe-se, o termo quadrático é insignificante diante do linear, assim tem-se:

$$\mathbf{F} = -bu\hat{\mathbf{u}} = -bu \quad (5.16)$$

5.1.1 Relação Entre Coeficiente de Arrasto e Número de Reynolds.

Como já foi abordado anteriormente, a força de arrasto total é a soma das forças de arrasto de forma e arrasto de pressão (5.9), não existindo uma sem a outra, muito embora se possa desprezar uma das duas em determinados casos. De qualquer maneira, vamos considerar:

$$F = C_a \frac{\rho u^2}{2} A, \quad (5.17)$$

em que C_a é o coeficiente de arrasto, A é a área projetada num plano normal ao escoamento e u e ρ são a velocidade e a densidade do fluido, respectivamente. Define-se coeficiente de arrasto, então, como um número adimensional igual à força de arrasto dividida por $\frac{1}{2}\rho u^2 \pi A$, obtendo-se assim:

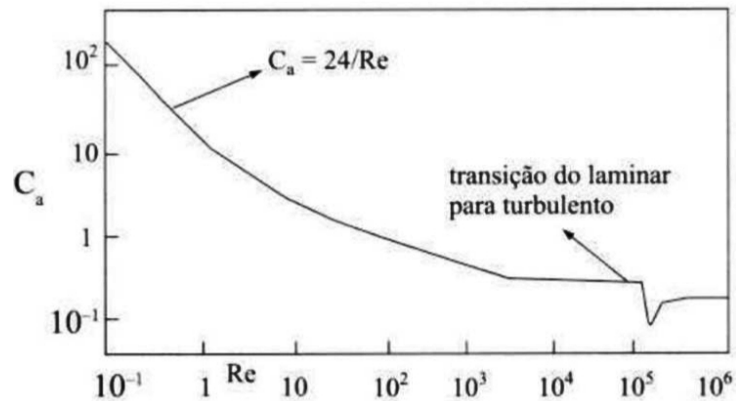
$$C_a = \frac{F_a}{\frac{1}{2}\rho u^2 A}. \quad (5.18)$$

Existem alguns casos de interesse de como ocorre a dependência entre o coeficiente de arrasto C_a e o número de Reynolds N_R para uma pequena esfera lisa [17], para tal considere a Figura 9;

Caso I: Conforme a Figura 9, para $N_R < 1$ o escoamento por onde a esfera passa é lento, e o coeficiente de arrasto (C_a), em um gráfico dilogarítmico, varia de forma linear com o número de Reynolds. Dessa forma, verifica-se que:

$$C_a = \frac{24}{N_R}, \quad (5.19)$$

Figura 10 – Relação de variação entre o coeficiente de arrasto C_a e o número de Reynolds N_R para uma pequena esfera



Fonte: BRUNETTI [17].

nesse ponto, o arrasto ocorre quase que totalmente devido às tensões de cisalhamento ou seja, tensões tangenciais ao objeto, descrita pela lei da viscosidade de Newton, então:

$$F = \frac{24}{N_R} \rho \frac{u^2}{2} A$$

$$F = \frac{24\nu}{uR} \rho \frac{u^2}{2} \frac{\pi R^2}{4}$$

$$F = 3\pi\nu uR, \tag{5.20}$$

considerando $A = \frac{\pi R^2}{4}$, que é a área projetada da esfera.

Caso II: Para $N_R > 1$, a camada de fluido limite passa a se desligar da parte traseira da esfera, e conseqüentemente aumenta a predominância da força de arrasto quadrática (arrasto de forma), ou seja, torna-se proporcional a u^2 . Aumentando o N_R o movimento vai se concentrando na parte dianteira do corpo esférico, até que em $N_R \cong 1000$ o ponto de separação estagna-se a aproximadamente 80° .

Caso III: Agora considerando $10^3 > N_R < 3,5 \cdot 10^5$, ocorre que o ponto de deslocamento permanece aproximadamente estático e o coeficiente de arrasto ficará constante, tendo valor aproximado de 0,45

Caso IV: Neste ultimo caso, tem-se que quando $N_R \cong 3,5 \cdot 10^5$ ocorre uma queda acentuada do C_a . Isso ocorre devido a passagem da camada limite de laminar para turbulenta, há uma mudança brusca do ponto de deslocamento da dianteira para a traseira da esfera, sendo que o ponto de estagnação encontra-se próximo dos 115° .

Vale ressaltar que estamos tomando a esfera como sendo lisa, sem rugosidades. Mas, se caso fosse aplicado à um corpo como uma bola de tênis, que não é lisa, os efeitos disso seriam a diminuição do C_a , aumento do arrasto de superfície e conseqüentemente a diminuição do arrasto de forma.

5.2 Generalização da Função de Reyleigh para o caso quadrático.

No capítulo um, desenvolveu-se o formalismo lagrangiano, o qual trouxe inúmeras vantagens matemáticas em relação à dinâmica de Newton. Acontece que todo seu desenvolvimento ocorreu para sistemas conservativos, ou seja, em problemas ideais e isolados de agentes capazes de modificar a descrição dos sistemas físicos como é o caso das forças de arrasto discutidas na seção anterior.

Neste tópico far-se-á uma abordagem da função de dissipação de Rayleigh e em seguida a sua generalização para o caso de uma força dissipativa proporcional ao quadrado da velocidade. Será usado como base teórica [4].

5.2.1 Função de dissipação de Rayleigh.

Se as forças sobre um sistema dinâmico dependem das velocidades generalizadas, então é possível ser descritas por uma função $U(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_n, t)$, tal que:

$$Q_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k}, \quad (5.21)$$

sendo a função lagrangiana desse sistema $L = T - U$, em que T é a energia cinética e U o potencial dependente da velocidade.

É notório que uma simples substituição da (5.21) na (3.91) leva às equações de Lagrange da forma usual, além de V ser um caso particular de U quando essa não tem dependência explícita da velocidade generalizada.

Contudo, se a força generalizada for da forma:

$$Q_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} + Q'_k, \quad (5.22)$$

na qual, Q'_k não decorre de nenhum potencial generalizado.

Empregando a equação acima na (3.66) do capítulo um obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} + Q'_k, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} &= Q'_k. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Um caso importante a destacar, é aquele em que Q'_k representa a força de atrito viscoso proporcional a velocidade dos corpos. Essa situação é exatamente o que foi discutido na seção anterior, onde a discussão se firmou em torno de uma pequena esfera se deslocando pelo fluido. A função de dissipação está descrita na (5.7) e no caso geral na (5.9) onde o caso linear é predominante. Desse modo, tem-se as seguintes expressões em coordenadas cartesianas:

$$F_{ix} = -b_{ix}u_{ix}, F_{iy} = -b_{iy}u_{iy}, F_{iz} = -b_{iz}u_{iz}, \quad (5.24)$$

onde \mathbf{F}_i é a força sobre a i ésima partícula e b_{ix}, b_{iy}, b_{iz} são constantes positivas. Então, Rayleigh procurando um tratamento mais completo para essa situação, estabeleceu a conhecida função de dissipação, determinada como a seguir:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} (b_{ix}u_{ix}^2 + b_{iy}u_{iy}^2 + b_{iz}u_{iz}^2), \quad (5.25)$$

de maneira que:

$$F_{ix} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{ix}}, F_{iy} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{iy}}, F_{iz} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{iz}}. \quad (5.26)$$

Agora se tem que as forças generalizadas podem ser expressas da seguinte forma:

$$Q'_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \dot{q}_k} = -\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{ix}} \frac{\partial u_{ix}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{iy}} \frac{\partial u_{iy}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{iz}} \frac{\partial u_{iz}}{\partial \dot{q}_k} \right) = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} \quad (5.27)$$

em que foi utilizado a (3.62) junto com a regra da cadeia da diferenciação. Resulta-se que a equação de Lagrange ampliada para sistema dissipativo é:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = 0. \quad (5.28)$$

Pode-se inferir ainda um significado físico para a função de Rayleigh levando em consideração o trabalho realizado:

$$dW' = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}'_i \cdot u_i dt = \frac{dW'}{dt} = -\sum_{i=1}^N (b_{ix}u_{ix}^2 + b_{iy}u_{iy}^2 + b_{iz}u_{iz}^2) = -2\mathcal{F},$$

ou seja, tem-se que o sentido da função é a taxa de dissipação da energia do sistema.

A grande vantagem de utilizar essa denominação matemática é a possibilidade de escrever a equação anterior para qualquer sistema de coordenada generalizada.

Agora vamos passar para a parte mais específica deste trabalho, onde através da função de Rayleigh será encontrada as equações de movimento para uma pequena esfera lisa e sem rotação em um sistema de lançamento vertical. Vejamos os casos a seguir.

- **Função de dissipação de Rayleigh para o caso linear:**

Considerando que o lançamento vertical é unidimensional, então, apenas a componente y será necessária para a descrição do problema. Desse modo tem-se que para a **esfera em queda livre** a equação do movimento é obtida considerando a expressão (5.28), assim, considerando as coordenadas generalizadas respectivamente como $q_k = y$, $\dot{q}_k = \dot{y}$, vem que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} = 0. \quad (5.29)$$

Lembrando ainda que a lagrangiana do sistema é dada pela diferença entre a energia potencial e cinética; $L = T - U$ ou seja:

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy, \quad (5.30)$$

onde U foi considerado nulo na origem do eixo y e obviamente positivo para valores acima desse ponto. Prosseguindo, vamos calcular as componentes da (5.29):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg.$$

Para calcular o próximo passo é preciso salientar que o sinal é escolhido de maneira arbitrária para que sempre se oponha a velocidade da esfera, temos que:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = b\dot{y},$$

em que $F = \frac{1}{2}b\dot{y}^2$. Assim, substituindo esses valores na (5.29) teremos:

$$m\ddot{y} + mg + b\dot{y} = 0 \longrightarrow m\ddot{y} = -mg - b\dot{y}, \quad (5.31)$$

que é a equação do movimento para este caso.

Agora considerando o **movimento vertical para cima**, a única mudança a ocorrer será no sinal da função de dissipação, que agora será; $F = -\frac{1}{2}b\dot{y}^2$. Desso modo, obtêm-se:

$$m\ddot{y} + mg - b\dot{y} = 0 \longrightarrow m\ddot{y} = -mg + b\dot{y}. \quad (5.32)$$

• **Generalização da função de dissipação de Rayleigh:**

Será feito a seguir a generalização da função de dissipação linear para o caso com atrito viscoso proporcional ao quadrado da velocidade. Por estar-se aplicando essa função no caso de movimento vertical que é unidimensional, então será feito os cálculos com base unicamente na componente y . Prosseguindo, é preciso encontrar uma função que satisfaz:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} = c\dot{y}^2. \quad (5.33)$$

É intuitivo, então, supor a expressão:

$$\mathcal{F} = \pm \frac{1}{3}c\dot{y}^3, \quad (5.34)$$

de tal modo que ao derivada resulte na função de dissipação proporcional ao quadrado da velocidade. Considerando a lagrangiana(L) como:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy, \quad (5.35)$$

calculando os termos necessários, teremos que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y}, \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg, \quad (5.37)$$

utilizando \mathcal{F} resulta que:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(\frac{1}{3} c\dot{y}^3 \right) = c\dot{y}^2. \quad (5.38)$$

Diante desses resultados, podemos montar as equações de movimento de subida e descida da esfera. Para isso, deve-se considerar o eixo y positivo orientado para cima, além do ponto nulo de energia potencial na origem da coordenada, sendo então sempre positivo para qualquer altura do corpo estudado.

Para o **movimento de queda**, substitui-se os termos (5.36), (5.37), (5.38) em:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} = 0, \quad (5.39)$$

obtendo-se;

$$m\ddot{y} + mg - c\dot{y}^2 = 0 \longrightarrow m\ddot{y} = c\dot{y}^2 - mg, \quad (5.40)$$

lembrando que o sinal da função de dissipação é escolhido de forma a ir sempre contra o movimento do corpo, e no presente desenvolvimento é positivo.

Já para o caso do **lançamento vertical para cima** o sinal da força tem que ser negativo e a construção da equação de movimento segue os mesmos moldes da anterior, desse modo teremos:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(-\frac{1}{3} c\dot{y}^3 \right) = -c\dot{y}^2, \quad (5.41)$$

portanto a equação para o movimento da esfera na subida é dado substituindo os termos (5.36), (5.37), (5.38) e (5.41) na equação (5.39):

$$m\ddot{y} + mg + c\dot{y}^2 = 0 \longrightarrow m\ddot{y} = -c\dot{y}^2 - mg = 0. \quad (5.42)$$

- **Função de Dissipação de Lur'e:**

Todas as funções anteriores foram desenvolvidas de forma empírica, e a generalização de Rayleigh de forma independente, porém, existe um método geral para funções de dissipação de qualquer ordem, desenvolvido por Lur'e, o qual formulou primeiramente a função de amortecimento, essa determinada como se segue:

$$f_j = k_j(x_1, x_2, \dots, x_N)g_j(\dot{x}_i), \quad (5.43)$$

em que k_j é uma constante positiva e q_j é uma função a ser definida. Desse modo, a função de dissipação de Lur'e [21] é determinada como:

$$\mathcal{F}^L = \sum_{j=1}^N K_j(x_1, x_2, \dots, x_N) \int_0^{\dot{x}_j} g_j(y) dy. \quad (5.44)$$

Se por exemplo considerar-se $g_j(\dot{y}) = \dot{y}_j^2$, então de acordo com a (5.44) teremos:

$$\mathcal{F}^L = k_j \int_0^{\dot{y}_j} \dot{y}_j^2 d\dot{y}_j = \frac{1}{3} k_j \dot{y}_j^3, \quad (5.45)$$

que é exatamente a função generalizada de Rayleigh que havia-se determinado.

5.3 Lagrangiana Equivalente

A lagrangiana, respeitando as suas especificidades, é única, ou seja, ela descreve um único sistema físico. Porém, podem existir funções que produzam as mesmas equações de movimento, embora não sejam propriamente a lagrangiana usual, a chamada lagrangiana equivalente, onde as primeiras referências constam a partir de 1931 nos trabalhos: [22], [23], [24].

Tem-se, portanto, que para duas funções L e \tilde{L} , diz-se que L é equivalente a \tilde{L} se ambas produzem a mesma equação de movimento via (3.91).

Diante disso, podemos também supor que exista uma lagrangiana equivalente para casos dissipativos. Obviamente teremos por base nosso modelo de lançamento vertical como aplicação direta. Vamos aos dois casos de interesse.

- **Lagrangiana Equivalente para o Arrasto Linear, Queda da Esfera:**

Para este caso, suponha-se para o **movimento de queda** a seguinte função:

$$L = \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy \right) e^{\frac{bt}{m}}, \quad (5.46)$$

onde $\frac{1}{2} m \dot{y}^2$ é a energia cinética(T) do sistema e mgy é a energia potencial, que recai mais uma vez como sendo positiva, visto estar-se considerando valores positivos acima da origem do eixo y .

Calculando as componentes da equação de Lagrange (3.91) para as coordenadas generalizadas $q_k = y$ $\dot{q}_k = \dot{y}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{d}{dt} \left(m \dot{y} e^{\frac{bt}{m}} \right) = m \ddot{y} e^{\frac{bt}{m}} + \dot{y} b e^{\frac{bt}{m}}. \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -m g e^{\frac{bt}{m}}. \quad (5.48)$$

Assim, juntando os termos obtêm-se:

$$(m\ddot{y} + b\dot{y} + mg)e^{\frac{bt}{m}} = 0$$

e finalmente:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + mg = 0 \longrightarrow m\ddot{y} = -b\dot{y} - mg. \quad (5.49)$$

que é a equação do movimento pra uma esfera em queda livre com arrasto linear com a velocidade, comprovando que L é uma função equivalente.

- **Lagrangiana Equivalente para o Arrasto Linear, Lançamento Vertical para Cima:**

Para o **lançamento vertical para cima** a lagrangiana proposta é:

$$L = e^{-\frac{bt}{m}} \left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy \right), \quad (5.50)$$

novamente calcula-se as componentes da equação de Lagrange, vem que:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{d}{dt} \left(m\dot{y}e^{-\frac{bt}{m}} \right) = m\ddot{y}e^{-\frac{bt}{m}} - b\dot{y}e^{-\frac{bt}{m}}. \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mge^{-\frac{bt}{m}}, \quad (5.52)$$

reunindo os termos em (3.91):

$$(m\ddot{y} - b\dot{y} + mg)e^{-\frac{bt}{m}} = 0,$$

$$(m\ddot{y} - b\dot{y} + mg) = 0 \longrightarrow m\ddot{y} = b\dot{y} - mg. \quad (5.53)$$

Assim, essa lagrangiana também obedeceu a regra, reproduzindo a equação de movimento para o caso dissipativo linear.

- **Lagrangiana Equivalente para o Arrasto Quadrático, Queda da Esfera:**

A outra forma de dissipação muito importante é o conhecido arrasto de pressão, por isso supõe-se também sua lagrangiana e a hamiltoniana correspondente. Primeiro para a queda da esfera, suporemos que a lagrangiana equivalente seja dada por:

$$L = e^{-\frac{2cy}{m}} \left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2 - U(y) \right) + f(y), \quad (5.54)$$

com isso pode-se calcular as componentes da equação de Lagrange (3.91), vem que:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{d}{dt} \left(m\dot{y}e^{-\frac{2cy}{m}} \right) = e^{-\frac{2cy}{m}} (m\ddot{y} - 2c\dot{y}^2), \quad (5.55)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -c\dot{y}^2 e^{-\frac{2c}{m}} - \frac{\partial U(y)}{\partial y} e^{-\frac{2cy}{m}} + U(y) e^{-\frac{2cy}{m}} \frac{2c}{m} + \frac{\partial f(y)}{\partial y}, \quad (5.56)$$

é preciso definir $f(y)$ de tal maneira que sua derivada em relação a y anule o termo $U(y) e^{-\frac{2cy}{m}} \frac{2c}{m}$. Para isso, utiliza-se simplesmente uma integral, como se segue:

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} = \frac{df(y)}{dy} = -U(y) \frac{2c}{m} e^{-\frac{2c}{m}}, \quad (5.57)$$

manipulando os termos teremos:

$$df(y) = -mgy \frac{2c}{m} e^{-\frac{2c}{m}} dy,$$

integrando nos dois lados, tem-se:

$$f(y) = -2cg \int y e^{-\frac{2cy}{m}} dy = -2cg \left(-\frac{my}{2c} e^{-\frac{2cy}{m}} - \frac{m^2}{4c^2} e^{-\frac{2cy}{m}} \right),$$

assim, $f(y)$ torna-se:

$$f(y) = mgy e^{-\frac{2cy}{m}} + \frac{m^2 g}{2c} e^{-\frac{2cy}{m}}, \quad (5.58)$$

de posse desses dados, pode-se juntar os termos na equação de Lagrange, o que resulta em:

$$e^{-\frac{2cy}{m}} (m\ddot{y} + 2c\dot{y}^2 + mg) = 0$$

como $e^{-\frac{2cy}{m}}$ não se anula, então finalmente chega-se a equação de movimento para a esfera em movimento vertical de queda da esfera:

$$m\ddot{y} - 2c\dot{y}^2 + c\dot{y}^2 + mg = 0 \longrightarrow m\ddot{y} = c\dot{y}^2 - mg. \quad (5.59)$$

- **Lagrangiana Eequivalente para o Arrasto Quadrático, Lançamento Vertical para Cima:**

Para o **lançamento vertical para cima**, tem-se a seguinte lagrangiana equivalente:

$$L = e^{\frac{2by}{m}} \left(\frac{1}{2} m\dot{y}^2 - U(y) \right) + f(y), \quad (5.60)$$

com isso pode-se calcular as componentes da equação de Lagrange (3.91) e seguir de maneira análoga o problema anterior, teremos então:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{d}{dt} \left(m\dot{y} e^{\frac{2by}{m}} \right) = e^{\frac{2by}{m}} (m\ddot{y} + 2b\dot{y}^2), \quad (5.61)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial y} = c\dot{y}^2 e^{\frac{2c}{m}} - \frac{\partial U(y)}{\partial y} e^{\frac{2cy}{m}} - U(y) e^{\frac{2cy}{m}} \frac{2c}{m} + \frac{\partial f(y)}{\partial y}, \quad (5.62)$$

neste caso também é preciso definir $f(y)$ de tal maneira que sua derivada em relação a y anule o termo $U(y) e^{\frac{2c}{m}}$. Para isso, utiliza-se novamente uma integral, como se segue:

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} = \frac{df(y)}{dy} = U(y) \frac{2c}{m} e^{\frac{2c}{m}}, \quad (5.63)$$

manipulando os termos teremos:

$$df(y) = mgy \frac{2c}{m} e^{\frac{2c}{m}} dy,$$

integrando nos dois lados, tem-se:

$$f(y) = 2cg \int e^{\frac{2cy}{m}} dy = 2cg \left(\frac{my}{2c} e^{\frac{2cy}{m}} - \frac{m^2}{4c} e^{\frac{2cy}{m}} \right),$$

assim, $f(y)$ torna-se:

$$f(y) = mgy e^{\frac{2cy}{m}} - \frac{m^2 g}{2c} e^{\frac{2cy}{m}}, \quad (5.64)$$

de posse desses dados, pode-se juntar os termos na equação de Lagrange, o que resulta em:

$$e^{\frac{2cy}{m}} (m\ddot{y} + 2c\dot{y}^2 + mg) = 0$$

como $e^{\frac{2cy}{m}}$ não se anula, então, finalmente teremos a equação de movimento para a esfera em movimento vertical de subida:

$$m\ddot{y} + 2c\dot{y}^2 - c\dot{y} + mg = 0 \longrightarrow m\ddot{y} = -c\dot{y}^2 - mg. \quad (5.65)$$

É importante explicitar que podem haver outras lagrangianas equivalente que levem às mesmas equações de movimento. É certo também que muitas vezes uma função desse tipo pode não corresponder a tudo que se espera, como por exemplo não ter uma hamiltoniana. Nesse sentido, será desenvolvido mais uma função para este caso dissipativo quadrático, cuja as razões ficarão explicadas no desenvolvimento das equações e Hamilton aplicados às lagrangianas que acabamos de desenvolver.

- **Lagrangiana Equivalente para o Arrasto Quadrático, Queda da Esfera:**

Para a **queda da esfera** de certa altura teremos também a seguinte expressão geradora da equação de movimento:

$$L = \left(\frac{1}{2} m\dot{y}^2 - mgy \right) - \int \frac{1}{3} c\dot{y}^3 dt, \quad (5.66)$$

com base nessa equação, pode-se calcular os termos da equação de Lagrange (3.91)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0:$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{d}{dt} \left(m\dot{y} - \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \int \frac{1}{3} c\dot{y}^3 \right) dt = m\ddot{y} - c\dot{y}^2, \quad (5.67)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg \quad (5.68)$$

reunindo os termos calculados na (3.91) tem-se:

$$m\ddot{y} - c\dot{y}^2 + mg = 0 \longrightarrow m\ddot{y} = c\dot{y}^2 - mg. \quad (5.69)$$

- **Lagrangiana Eequivalente para o Arrasto Quadrático, Lançamento Vertical para Cima:**

A lagrangiana para o **lançamento vertical** é dada por:

$$L = \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy \right) + \int \frac{1}{3} c \dot{y}^3 dt, \quad (5.70)$$

com base nessa equação, pode-se calcular os termos da (3.91) semelhantemente à anterior. assim:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{d}{dt} \left(m \dot{y} + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \int \frac{1}{3} c \dot{y}^3 \right) dt = m \ddot{y} + c \dot{y}^2, \quad (5.71)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg, \quad (5.72)$$

substituindo na (3.91) tem-se finalmente:

$$m \ddot{y} + c \dot{y}^2 + mg = 0 \longrightarrow m \ddot{y} = -c \dot{y}^2 - mg. \quad (5.73)$$

Portanto, as equações de movimento encontradas nesta seção são as mesmas obtidas com a função de dissipação de Rayleigh, também os cálculos obtidos até aqui não são encontrados nos livros usuais de cálculo e de física apesar de ser muito importante buscar sempre formalismos mais gerais e completos para a solução de situações físicas mais próximas da realidade.

- **Hamiltoniana a partir de lagrangiana equivalente:**

Se possuímos a lagrangiana, então é também possível formular as equações de movimento através de uma hamiltoniana. No capítulo 2 foi estudado a dinâmica hamiltoniana, e foram definidos, o momento conjugado (3.92), a definição e as equações de Hamilton (3.97), assim, será calculado respectivamente cada uma destas, primeiro para L do movimento de queda e depois para o de subida de todas uma das funções desenvolvidas anteriormente.

- **Hamiltoniana a partir das lagrangianas equivalente (5.46) e (5.50)**

Nesse sentido vamos considerar primeiro a função (5.46):

$$L = e^{\frac{bt}{m}} \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy \right),$$

determinando o momento conjugado como se segue:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \quad (5.74)$$

com $\dot{q}_k = y$. Resolvendo teremos:

$$p_y = m\dot{y}e^{\frac{bt}{m}}, \quad (5.75)$$

aproveitando esse resultado determina-se \dot{P} :

$$\dot{P}_y = (m\ddot{y} + b\dot{y})e^{\frac{bt}{m}}. \quad (5.76)$$

determinando H , tem-se:

$$H = \dot{y}P_y - L \quad (5.77)$$

$$H = m\dot{y}^2e^{\frac{bt}{m}} - \frac{1}{2}m\dot{y}^2e^{\frac{bt}{m}} + mgye^{\frac{bt}{m}}$$

$$H = \left(\frac{m\dot{y}^2}{2} + mgy \right) e^{\frac{bt}{m}}, \quad (5.78)$$

agora usando a (5.76) e (5.78) aplicado a $\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}$, que é uma das equações de Hamilton, vem que:

$$(m\ddot{y} + b\dot{y})e^{-\frac{bt}{m}} = -mge^{-\frac{bt}{m}}$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} = -mg \longrightarrow m\ddot{y} = -mg - b\dot{y}, \quad (5.79)$$

essa é a equação para o movimento de queda da esfera com resistência linear. Pode-se utilizar a seguinte equação de Hamilton $\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial P_y}$ para verificar a consistência da equação $\frac{\partial H}{\partial P_y}$. Então, admita-se a (5.46) e também a (5.75), na qual se isola \dot{y} obtendo-se:

$$\dot{y} = \frac{P_y}{me^{\frac{bt}{m}}}, \quad (5.80)$$

calculando a variação em torno de p_y , vem que:

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial P_y} = \frac{1}{me^{\frac{bt}{m}}}. \quad (5.81)$$

Como $H = \dot{y}p_y - L$, logo:

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} \quad (5.82)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y} p_y + \dot{y} - \frac{\partial L}{\partial p_y}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y} p_y + \dot{y} - \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y} P_y + \dot{y} - p_y \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y},$$

e finalmente:

$$\dot{y} = \dot{y}, \quad (5.83)$$

confirmando a autenticidade desta equação de Hamilton.

Para o lançamento vertical para cima, a equação de movimento através de Hamilton é obtida de maneira similar as operações anteriores. Considere a expressão (5.50):

$$L = \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy \right) e^{-\frac{bt}{m}}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y} e^{-\frac{bt}{m}}, \quad (5.84)$$

e

$$\dot{P} = (m \ddot{y} - b \dot{y}) e^{-\frac{bt}{m}}, \quad (5.85)$$

então, H é:

$$\begin{aligned} H &= \dot{y} p_y - L \\ H &= m \dot{y}^2 e^{-\frac{bt}{m}} - \frac{1}{2} m \dot{y}^2 e^{-\frac{bt}{m}} + mgy e^{-\frac{bt}{m}} \\ H &= \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 + mgy \right) e^{-\frac{bt}{m}}, \end{aligned} \quad (5.86)$$

assim, substituindo (5.85) e (5.86) em $\dot{p}_y = \frac{\partial H}{\partial y}$, tem-se finalmente:

$$(m \ddot{y} - b \dot{y}) e^{-\frac{bt}{m}} = -mge^{-\frac{bt}{m}}$$

$$m \dot{y} = -mg + b \dot{y}. \quad (5.87)$$

Utilizando $\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y}$ teremos para a função Lagrangiana (5.50) a identidade $\dot{y} = \dot{y}$ da mesma forma como foi desenvolvido para a (5.46), com única diferença no sinal negativo da exponencial, o que não interfere no desenvolvimento, visto não haver para esta equação de Hamilton derivadas em função de t .

- **Hamiltoniana a partir das lagrangianas equivalente (5.54), (5.60), (5.66) e (5.70):**

A partir da função (5.54), pode-se encontrar o momento conjugado como a seguir:

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left[e^{-\frac{2cy}{m}} \left(\frac{1}{2} m \dot{y} - U(y) \right) + f(y) \right] = m \dot{y} e^{-\frac{2cy}{m}}, \quad (5.88)$$

e \dot{p}_y é:

$$\dot{p}_y = m \ddot{y} e^{-\frac{2cy}{m}} - 2c \dot{y}^2 e^{-\frac{2cy}{m}}, \quad (5.89)$$

determinando H , vem que:

$$H = m \dot{y}^2 e^{-\frac{2cy}{m}} - \frac{1}{2} m \dot{y}^2 e^{-\frac{2cy}{m}} + mgy e^{-\frac{2cy}{m}} - mgy e^{-\frac{2cy}{m}} - \frac{m^2 g}{2c} e^{-\frac{2cy}{m}}, \quad (5.90)$$

aplicando esses resultados nas equações de Hamilton, tem-se:

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

$$(m\ddot{y} - 2c\dot{y}^2)e^{-\frac{2cy}{m}} = c\dot{y}^2 - mg$$

$$m\ddot{y} = 3c\dot{y}^2 - mg \longrightarrow m\ddot{y} = \bar{c}\dot{y}^2 - mg, \quad (5.91)$$

com $\bar{c} = 3c$. como se pode perceber existe um fator 3 multiplicando o termo dissipativo, ou seja, através dessa equação de Hamilton não é possível chegar a equação de movimento de queda da esfera de forma satisfatória. Veja-se agora a autenticidade de H , assim, utilizando a (5.88) e isolando a velocidade teremos:

$$\dot{y} = \frac{p_y}{me^{-\frac{2cy}{m}}}, \quad (5.92)$$

diferenciando em relação a P_y :

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y} = \frac{1}{me^{-\frac{2cy}{y}}}, \quad (5.93)$$

e como:

$$H = \dot{y}p_y - L,$$

basta aplicar na seguinte equação de Hamilton:

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \dot{y}, \quad (5.94)$$

obtendo assim a identidade.

Considerando a função (5.60), os cálculos são de forma semelhante aos da (5.54). Assim, momento conjugado vem a ser:

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left[e^{\frac{2cy}{m}} \left(\frac{1}{2}m\dot{y} - U(y) \right) + f(y) \right] = m\dot{y}e^{\frac{2cy}{m}}, \quad (5.95)$$

e

$$\dot{p}_y = \left(m\ddot{y} + 2c\dot{y}^2 \right) e^{\frac{2cy}{m}}, \quad (5.96)$$

sendo que:

$$H = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 e^{\frac{2cy}{m}} + \frac{m^2g}{2c}e^{\frac{2cy}{m}}, \quad (5.97)$$

e de acordo com as equações de Hamilton tem -se:

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

$$(m\ddot{y} + 2c\dot{y}^2)e^{\frac{2cy}{m}} = c\dot{y}^2 - mg$$

$$m\ddot{y} = -3c\dot{y}^2 - mg \longrightarrow m\ddot{y} = -\bar{c}\dot{y}^2 - mg, \quad (5.98)$$

veja-se que não se chegou a equação de movimento de maneira adequada, pois $3c = \bar{c}$, o que viria a alterar a função de dissipação já que c depende das dimensões do corpo, da densidade do fluido o que possui uma expressão determinada.

Verificando a autenticidade da função, vem que a única mudança está na equação (5.92) e (5.93), onde há a mudança de sinal da exponencial, ficando:

$$\dot{y} = \frac{p_y}{me^{\frac{2cy}{m}}}, \quad (5.99)$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{p_y} = \frac{1}{me^{\frac{2cy}{m}}}, \quad (5.100)$$

obtendo o mesmo resultado que em 5.94, ou seja:

$$\dot{y} = \dot{y}. \quad (5.101)$$

Continuando a calcular, considere desta vez a (5.66). O seu momento conjugado será da forma:

$$p_y = \frac{L}{\dot{y}} = m\dot{y} - \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \int \frac{1}{3}cy^3, \quad (5.102)$$

derivando em relação a t :

$$\dot{p}_y = m\ddot{y} - cy^2, \quad (5.103)$$

sua variação em relação a t é:

$$m\ddot{y} - cy^2, \quad (5.104)$$

calculando H vem que:

$$H = \dot{y}p_y - L$$

$$H = m\dot{y}^2 - \dot{y} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \int \frac{1}{3}cy^3 dt - \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy + \int \frac{1}{3}cy^3 dt, \quad (5.105)$$

assim, pondo esses valores na equação de Hamilton, ocorre que:

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial z}$$

$$m\ddot{y} - cy^2 = -mg \longrightarrow m\ddot{y} = -mg + cy^2. \quad (5.106)$$

Desse modo, é possível obter uma hamiltoniana a partir da lagrangiana equivalente que gere satisfatoriamente a equação de movimento para a esfera em queda. Prosseguindo, far-se-á a verificação da identidade de H . Assim, o momento canônico é:

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} - \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \int \frac{1}{3}cy^3 \quad (5.107)$$

isolando \dot{y} , vem que:

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m} + \frac{1}{m} \int cy^2 dt, \quad (5.108)$$

diferenciando:

$$\frac{\dot{y}}{\partial p_y} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \int 2c \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y} dt, \quad (5.109)$$

como $H = \dot{y}p_y - L$, então:

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y} + \dot{y} - \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y} p_y = \dot{y}. \quad (5.110)$$

Por último, temos a equação (5.70), a qual vamos utilizar para também obter a hamiltoniana. De maneira análoga aos cálculos anteriores, o momento conjugado é:

$$p_y = \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \int \frac{1}{3} c\dot{y}^3 dt, \quad (5.111)$$

a sua derivada em relação a t é:

$$\dot{p}_y = m\ddot{y} + c\dot{y}^2. \quad (5.112)$$

A função H é:

$$H = m\dot{y}^2 + \dot{y} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \int \frac{1}{3} c\dot{y}^3 dt - \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + mgy - \int \frac{1}{3} c\dot{y}^3 dt.$$

Substituindo na função de Hamilton $\dot{p}_y = \frac{\partial H}{\partial y}$, teremos:

$$m\ddot{y} + c\dot{y}^2 = -mg \longrightarrow m\ddot{y} = -c\dot{y}^2 - mg, \quad (5.113)$$

que é a equação de movimento do lançamento vertical para cima de uma pequena esfera.

Novamente vamos verificar a autenticidade de H , tendo:

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m} - \frac{1}{m} \int c\dot{y}^2 dt, \quad (5.114)$$

diferenciando em relação a t ;

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \int 2c \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y}, \quad (5.115)$$

como $H = \dot{y}p_y - L$, então:

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y} + \dot{y} - \frac{\partial \dot{y}}{\partial p_y} p_y = \dot{y}. \quad (5.116)$$

Portanto, encontramos uma função lagrangiana e uma hamiltoniana que leva às equações de movimento do lançamento vertical de uma pequena esfera.

- **Método Geral de obtenção de Lagrangiana Equivalente para Forças Dissipativas Dependentes da velocidade:**

Existe uma fórmula geral que leva as lagrangianas equivalente, essa expressa-se determinando uma função $G(x, \dot{x})$ e aplicando à expressão geral, resultando na construção da lagrangiana equivalente.

Inicialmente, considere a equação de movimento:

$$m\ddot{x} = f(x, \dot{x}). \quad (5.117)$$

O lagrangiano para esse movimento é dado por:

$$L(x, \dot{x}) = \dot{x} \int^{\dot{x}} \frac{1}{v^2} G(v, x) dv, \quad (5.118)$$

em que $G(v, x)$ é uma função a ser determinada. Substituindo L na equação de Lagrange, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} \left(\frac{\partial G(\dot{x}, x)}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial G(\dot{x}, x)}{\partial x} = m\ddot{x} - f(\dot{x}, x), \quad (5.119)$$

como $\dot{x} = \frac{f(\dot{x}, x)}{m}$, vem que:

$$\frac{1}{m\dot{x}} f(\dot{x}, x) \frac{\partial}{\partial \dot{x}} G(\dot{x}, x) = - \frac{\partial}{\partial x} G(\dot{x}, x), \quad (5.120)$$

essa expressão permite obter a função $G(\dot{x}, x)$, necessária para encontrar a lagrangiana equivalente, enquanto que é preciso determinar qual a força $f(\dot{x}, x)$ que está sobre o sistema.

5.4 Equação de Lagrange Generalizada para Derivadas de Ordem Superior

Por último, far-se-á o tratamento do lançamento vertical através do cálculo fracionário, objetivando encontrar as equações de movimento tanto para o caso linear quanto para o quadrático.

Riewe foi o primeiro a propor que o princípio da mínima ação poderia ser generalizado para sistemas dissipativos através de lagrangiana incluindo derivadas de ordem meia[13]. Na sua propositura, a equação de movimento é obtida por:

$$S = \int_a^b L(x, \dot{x}, {}_b D_x^{\frac{1}{2}}), \quad (5.121)$$

onde toma-se o limite $a \rightarrow b$, o qual será decisivo mais a frente, porém, esse proposto por Riewe apresenta muitas inconsistências, não tem uma definição acertada. Então, [13] e [25] generalizaram a equação de Lagrange para derivadas de ordem superior e resolveram a inconsistência matemática do limite. Assim, a ação S é dada por:

$$S = \int_a^b L \left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}, {}_a D_t^{\alpha_0} x, {}_a D_t^{\alpha_1} \frac{dx}{dt}, \dots, {}_a D_t^{\alpha_n} \frac{d^n x}{dt^n}, {}_t D_b^{\alpha_0} x, {}_t D_b^{\alpha_1} \frac{dx}{dt}, \dots, {}_t D_b^{\alpha_n} \frac{d^n x}{dt^n}, t \right) dt, \quad (5.122)$$

onde a partir desta, [13] e [25] determinaram a equação de Lagrange generalizada para derivadas de ordem superior como:

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{d^j x}{dt^j} \right)} \right] + \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \left[{}_t D_b^{\alpha_j} \frac{\partial L}{\partial ({}_a^C D_t^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j})} + {}_a D_t^{\alpha_j} \frac{\partial L}{\partial ({}_t^C D_b^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j})} \right] = 0. \quad (5.123)$$

Com esta equação calcular-se-á a equação de movimento para o movimento vertical de uma pequena esfera tanto em queda quanto no lançamento vertical para cima.

5.4.1 Lagrangiana para Sistema dissipativo.

Iremos calcular nesta subseção a equação de movimento para o lançamento vertical com dissipação proporcional a velocidade e proporcional a velocidade ao quadrado.

Como mencionado anteriormente, o limite $a \rightarrow b$ proposto por Riewe apresentava inconsistências mais especificamente ao tentar aproximar as derivadas a esquerda e a direita de Riemann-Liouville, chegando em termos não definidos. Porém, ao utilizar as derivadas de Caputo, [13] e [25] obtiveram de forma satisfatória que no $\lim_{a \rightarrow b}$ com t sendo o ponto médio do intervalo $[a, b]$, então, tem-se:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) \approx -{}_t^C D_b^\alpha f(t). \quad (5.124)$$

Prosseguindo, vamos as aplicações.

- **Queda de uma esfera com atrito linear:**

Em primeiro lugar, vamos calcular a equação de movimento para uma esfera lisa em queda. Assim, considere a lagrangiana dependente de derivada fracionária [13], [25] :

$$L(y, \dot{y}, {}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} y, t) = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy + \frac{b}{2} \left({}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} y \right)^2, \quad (5.125)$$

essa lagrangiana leva em consideração somente derivadas a direita, e, verificando a (5.123), o primeiro somatório possui $j = 1$, o segundo $j = 0$ e $\alpha_j = \frac{1}{2}$. Como só existe derivada à direita, então a equação de Lagrange torna-se:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) + {}_a D_t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial L}{\partial ({}_t^C D_b^{\frac{1}{2}} y)} = 0, \quad (5.126)$$

calculando as partes dessa equação:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg,$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y},$$

$$\frac{\partial L}{\partial({}^C D_b^{\frac{1}{2}} y)} = {}^C D_b^{\frac{1}{2}} y,$$

juntando os termos acima na (5.126), vem que:

$$-m\ddot{y} - mg + b_a D_t^{\frac{1}{2}} {}^C D_b^{\frac{1}{2}} y = 0, \quad (5.127)$$

Pode-se observar que a (5.127) possui derivadas de Riemann-Liouville e Caputo, como exposto anteriormente. Tomando o limite $a \rightarrow b$ é possível fazer a aproximação (5.124). Logo;

$${}^C D_b^{\frac{1}{2}} y \approx -{}_a D_t^{\frac{1}{2}} y. \quad (5.128)$$

A (5.127) torna-se:

$$-m\ddot{y} - mg - b_a D_t^{\frac{1}{2}} {}^C D_a^{\frac{1}{2}} y = 0 \quad (5.129)$$

para manipular o terceiro termo far-se-á uso da (4.22), teremos que:

$${}_a D_t^{\frac{1}{2}} {}^C D_a^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{d}{dt} {}_a J_t^{\frac{1}{2}} {}_a J_t^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} y = \frac{d}{dt} {}_a J_t^1 \frac{d}{dt} y = \frac{d}{dt} y, \quad (5.130)$$

então, a equação de movimento para a queda de uma esfera é dada por:

$$-m\ddot{y} - mg - b \frac{d}{dt} y = 0 \longrightarrow m\ddot{y} = -mg - b\dot{y}. \quad (5.131)$$

- **Lançamento Vertical para Cima com Dissipação Linear:**

Temos ainda o caso de **lançamento vertical para cima**, o qual tem sua lagrangiana dependente de derivada fracionária igual a:

$$L(y, \dot{y}, {}^C D_b^{\frac{1}{2}} y, t) = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy - \frac{b}{2} \left({}^C D_b^{\frac{1}{2}} y \right)^2, \quad (5.132)$$

sendo a única diferença do caso anterior, o sinal negativo do terceiro termo. Assim, sem perda de generalidade, seguindo os mesmos passos da equação de queda, teremos que:

$$m\ddot{y} = -mb + b\dot{y}. \quad (5.133)$$

Seguindo em frente, será abordado os casos de dissipação proporcional ao quadrado da velocidade.

- **Queda de uma esfera com dissipação proporcional ao quadrado da velocidade:**

Este caso não está descrito na literatura, sendo pois, inédito, contudo, tivemos a colaboração do Professor Matheus J. Lazo, da Universidade Federal do Rio Grande (FURG). Com isso, a lagrangiana dependente de derivada fracionária é dada por:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy + L_1, \quad (5.134)$$

onde o termo é dado por:

$$L_1 = c[({}_a^C D_t^\alpha h(y))({}_a^C D_t^\alpha f(\dot{y}))]. \quad (5.135)$$

A equação de Euler-Lagrange para a coordenada y é:

$$\frac{\partial L}{\partial y} + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{\partial L}{\partial (\frac{d^n y}{dt^n})} \right] + \frac{dh}{dy} {}_t D_b^\alpha \frac{\partial L}{\partial ({}_a^C D_t^\alpha h)} + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{df}{d(\frac{d^n y}{dt^n})} {}_t D_b^\alpha \frac{\partial L}{\partial ({}_a^C D_t^\alpha f)} \right] = 0. \quad (5.136)$$

Considerando $h^n = \frac{d^n h}{dy^n}$, $f^n = \frac{d^n f}{d\dot{y}^n}$, e substituindo (5.135) em (5.136), com $n = 1$, tem-se:

$$h'({}_t^C D_b^{\alpha C} D_t^\alpha f) - \frac{d}{dt}(f' {}_t^C D_b^{\alpha C} D_t^\alpha h) = 0, \quad (5.137)$$

onde $h' = \frac{dh}{dy}$, $f' = \frac{df}{d\dot{y}}$. Assim, com $\alpha = \frac{1}{2}$ e tomando o $\lim_{a \rightarrow b}$, teremos:

$$h' \frac{df}{dt} - \frac{d}{dt} \left(f' \frac{dh}{dt} \right) = 0, \quad (5.138)$$

aplicando a regra da cadeia, vem que:

$$h' \frac{df}{d\dot{y}} \ddot{y} - \frac{d}{dt} \left(f' \frac{dh}{dy} \dot{y} \right) = h' f' \ddot{y} - \frac{d}{dt} (f' h' \dot{y}), \quad (5.139)$$

calculando as derivadas em t , tem-se como resultado:

$$h' f' \ddot{y} - (f'' h' \dot{y} \ddot{y} + f' h'' \dot{y}^2 + f' h' \ddot{y}) = -f'' h' \dot{y} \ddot{y} - f' h'' \dot{y}^2 = 0, \quad (5.140)$$

sendo $h'' = \frac{d^2 h}{dy^2}$ e $f'' = \frac{d^2 f}{d\dot{y}^2}$. Importante notar que estamos utilizando o índice linha (') para designar derivadas que não são em relação ao tempo, onde já se definiu as quantidades com esse subscrito. Por esse motivo não se padronizou todos os termos derivados para a notação de ponto ($\dot{\cdot}$) que é para derivadas em relação a (t).

Continuando, queremos um termo que resulte na velocidades ao quadrado, assim, vamos impor que $f'' h' = 0$ e $f' h'' = \text{constante}$. Desse modo, é necessário que $f(\dot{y}) = \dot{y}$ e $h(y) = y^2$, tornando o ultimo termo de L como segue:

$$L_1 = \frac{c}{2} [({}_a^C D_t^{\frac{1}{2}} y^2)({}_a^C D_t^{\frac{1}{2}} \dot{y})], \quad (5.141)$$

substituindo este termo na (5.134) teremos:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2) - mgy + \frac{c}{2} [({}_a^C D_t^{\frac{1}{2}} y^2)({}_a^C D_t^{\frac{1}{2}} \dot{y})]. \quad (5.142)$$

Aplicando a (5.142) na (5.136), com $n = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, resulta:

$$-m\ddot{y} - mg + cy \left({}_t D_{b^{\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}} C D_t^{\frac{1}{2}} \dot{x} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{c}{2} {}_t D_{b^{\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}} C D_t^{\frac{1}{2}} y^2 \right) = 0. \quad (5.143)$$

No limite de $a \rightarrow b$, obtemos:

$$-m\ddot{y} - mg - cy \left({}_t D_{b^{\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}} C D_b^{\frac{1}{2}} \dot{y} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{c}{2} {}_t D_{b^{\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}} C D_b^{\frac{1}{2}} y^2 \right) = 0, \quad (5.144)$$

tem-se como resultado:

$$-m\ddot{y} - mg - cy \frac{d}{dt}(\dot{y}) + \frac{c}{2} \frac{d^2}{dt^2}(y^2) = -m\ddot{x} - mg - cy\dot{y} + cy\dot{y} + c\dot{y}^2, \quad (5.145)$$

manipulando os termos, temos que:

$$m\ddot{y} = -mg + c\dot{y}^2. \quad (5.146)$$

- **Lançamento Vertical para Cima com dissipação proporcional ao quadrado da velocidade:**

Para o lançamento vertical para cima, o processo de obtenção da equação de movimento é análogo ao anterior. Assim, a lagrangiana para este problema é:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy - L_1, \quad (5.147)$$

seguindo os mesmos passos do caso anterior, obtêm-se a equação de movimento:

$$m\ddot{y} = -mg - c\dot{y}^2. \quad (5.148)$$

Portanto, através desse método apresentado aqui, com a ajuda do cálculo fracionário foi possível construir as equações de movimento do lançamento vertical com dissipação proporcional a velocidade ao quadrado. Vale destacar ainda que o cálculo utilizado não é usual, porém é perfeitamente aplicável ao problema desenvolvido. A seguir verifica-se se as equações de Hamilton são consistentes para gerar as equações para o movimento a partir das lagrangianas já desenvolvidas.

- **Hamiltoniana para o Arrasto Linear a partir da Lagrangiana Dependente da Derivada fracionária:**

Para prosseguir-se, considera-se a lagrangiana (5.125) e as variáveis canônicas; $p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$ e $p_{\frac{1}{2}}$. É necessário a inclusão do momento de ordem meia, devido as derivadas fracionárias incluídas na função lagrangiana.

Como o hamiltoniano é em função dos momentos, então vamos modificar a (5.125) para que fique em função dessas variáveis, assim temos que:

$$p_y = m\dot{y}, \quad (5.149)$$

isolando-se \dot{y} , vem que:

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m}, \quad (5.150)$$

e elevando ao quadrado ambos os termos, então:

$$\dot{y}^2 = \frac{p_y^2}{m^2}. \quad (5.151)$$

De outro modo, considere que $y_{\frac{1}{2}} = {}^C D_b^{\frac{1}{2}}$, possibilitando então calcular $p_{y_{\frac{1}{2}}}$, tem-se que:

$$p_{y_{\frac{1}{2}}} = \frac{\partial L}{\partial {}^C D_b^{\frac{1}{2}}} = b {}^C D_b^{\frac{1}{2}}. \quad (5.152)$$

Substituindo \dot{y}^2 e ${}^C D_b^{\frac{1}{2}}$ na (5.125), obtêm-se a função de Lagrange em função do momento:

$$L = \frac{1}{2m} p_y^2 - mgy + \frac{b}{2} (y_{\frac{1}{2}})^2. \quad (5.153)$$

A hamiltoniana é dada por:

$$H = yp_y + y_{\frac{1}{2}} p_{y_{\frac{1}{2}}} - L, \quad (5.154)$$

agora substituindo a (5.153) na (5.154) teremos:

$$H = yp_y + y_{\frac{1}{2}} p_{y_{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2m} p_y^2 + mgy - \frac{b}{2} (y_{\frac{1}{2}})^2, \quad (5.155)$$

ou ainda:

$$H = \frac{p_y}{2m} + mgy + \frac{p_{y_{\frac{1}{2}}}^2}{2b}. \quad (5.156)$$

Prosseguindo, as equações de Hamilton para x são:

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad (5.157)$$

também é preciso considerar a seguinte equação canônica para $y_{\frac{1}{2}}$. Assim:

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{\partial H}{\partial p_{y_{\frac{1}{2}}}}. \quad (5.158)$$

Considere ainda a proposta de [26]:

$${}^C D_b^{\frac{1}{2}} p_{y_{\frac{1}{2}}} = -\frac{\partial H}{\partial y_{\frac{1}{2}}}. \quad (5.159)$$

Portanto, vamos determinar respectivamente as variáveis canônicas (5.157), substituindo nelas a (5.156), assim:

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \dot{y}, \quad (5.160)$$

e

$$\dot{p}_y = -mg. \quad (5.161)$$

Para $y_{\frac{1}{2}}$ obtêm-se:

$$y_{\frac{1}{2}} = \frac{\partial H}{\partial p_{y_{\frac{1}{2}}}} = y_{\frac{1}{2}}. \quad (5.162)$$

Por fim para a proposição de [26] (5.159) tem-se como resultado:

$${}^C D_b^{\frac{1}{2}} p_{y_{\frac{1}{2}}} = -\frac{\partial H}{\partial y_{\frac{1}{2}}} = -by_{\frac{1}{2}}. \quad (5.163)$$

Analisando o que foi obtido com esse método, é notório que a formulação hamiltoniana dependente de um termo de derivada fracionária apresentou inconsistências, haja vista que não geraram a equação de movimento objetivada. Se para o caso linear não foi possível chegar à equação do movimento, então conjectura-se que para o caso dissipativo quadrático com a velocidade a formulação também seja inconsistente. Será exposto com mais precisão nas conclusões deste trabalho.

6 CONCLUSÃO

Portanto, iremos elencar as conclusões de acordo com os meios para alcançar nosso objetivo geral. Assim:

1. Função de dissipação de Rayleigh

Essa função foi a precursora desse trabalho, pois ela é a primeira a tratar da questão por meio das equações de Lagrange, mesmo que ela não seja uma função L que leve diretamente às equações de movimento.

Com essa função obteve-se as equações de movimento para o caso linear com a velocidade, porém para o caso quadrático não havia um modelo definido na literatura, então, generalizamos a função de Rayleigh, encontrando de forma satisfatória uma expressão que possibilita encontrar as equações de movimento do lançamento vertical de uma esfera sujeita a força de retardado proporcional a velocidade ao quadrado, como o leitor pode perceber na subseção (5.2.1).

2. Lagrangiana equivalente

Por meio do princípio de lagrangiana equivalente criou-se funções lagrangianas primeiro para o caso linear, onde inseriu-se um termo exponencial que se cancela ao calcular os termos das equações de Lagrange como pode observar nas (5.46) e (5.50), assim, conseguimos chegar a equação de movimento desejada. Para o caso dissipativo quadrático com a velocidade encontramos primeiramente duas lagrangianas equivalentes as (5.54) e (5.60), para os casos de queda e lançamento vertical para cima respectivamente, e, elas produziram corretamente as equações de movimento. Encontrou-se ainda mais duas funções de Lagrange equivalentes, desta vez inserindo um termo integral como se confere nas (5.66) e (5.70), que também gerou as equações de movimento. Ao obter duas funções lagrangianas equivalentes notou-se que podem existir várias funções para um mesmo problema, ou seja, a lagrangiana equivalente para o lançamento vertical não é única.

Como conseguiu-se obter as lagrangianas, então, também é possível encontrar as funções hamiltonianas e através das equações de Hamilton chegar nas equações de movimento do lançamento vertical. Desse modo, utilizando as (5.46) e (5.50) obteve-se adequadamente as equações para o caso linear. Adiante, ao utilizar as (5.54) e (5.60) para encontrar a função de Hamilton e aplicar nas suas equações, ocorreu uma inconsistência matemática, um termo multiplicando a parte dissipativa da equação de movimento, não produzindo desse modo a expressão procurada. Valendo-se dessa vez das (5.66) e (5.70) pode-se encontrar a função de Hamilton que trabalhadas chegaram nas expressões de nosso objetivo geral. Portanto, ao realizar o estudo e aplicação das

lagrangianas equivalentes, todas alcançaram o objetivo, porém, ao utilizar a dinâmica de Hamilton apenas nas (5.54) e (5.60) identificou-se uma incoerência matemática.

3. Equação de Lagrange Generalizada para Derivadas de Ordem Superior.

Seguindo nossa perspectiva, foi inserido as definições do cálculo fracionário para generalizar as equações de Lagrange, onde este processo é definido nas literaturas [13] e [25], elas também desenvolvem as lagrangianas dependentes de derivada fracionária para o caso dissipativo proporcional à velocidade, que fornecem as equações de movimento tanto para a que da esfera quanto para o lançamento vertical para cima. Embora isso, não havia uma função lagrangiana com dependência de derivada fracionária para o caso dissipativo quadrático, desse modo criou-se pela primeira vez essa função, onde utilizou-se derivadas a esquerda e a direita de Caputo. Obtivemos sucesso nessa formulação, em que as equações de movimento foram alcançadas com a ajuda do professor Matheus J. Lazo da (FURG).

Quanto a função hamiltoniana, os cálculos não renderam os resultados esperados, haja vista que ao desenvolver as equações para o caso dissipativo linear, chegou-se em expressões que não descrevem o movimento da esfera, assim, presume-se que para as forças dissipativas proporcionais ao quadrado da velocidade também os resultados são inconsistentes, não levando à descrição correta do problema.

Assim, este trabalho apresentou diferentes formas de abordagem do lançamento vertical de uma pequena esfera sujeita a força resistiva do ar. Embora se tenha utilizado o ar como fluido de referência, pode-se muito bem estudar outro, guardadas as especificidades do problema. Ademais, ao utilizar variadas ferramentas matemáticas, o trabalho acaba por mostrar que existem muitas maneiras de estudar a natureza, sempre seguindo na retórica de unificar cada vez mais os modelos clássicos e matemáticos. Futuramente pretende-se aprofundar nos temas de cálculo fracionário, buscando solucionar problemas mais complexos, tais quais nos modelos quânticos ou relativísticos.

Referências

- [1] WATARI, Kazunori. **Mecânica Clássica, volume 1**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2^a edição, 2001.
- [2] THORNTON, Stephen T.; MARION, Jerry B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. Tradução: All Tasks: 5^a edição. São Paulo: Cengage Learning, 2012.
- [3] CASEMIRO, A. A. **Queda dos corpos e Equações Diferenciais num primeiro curso de Cálculo**. Universidade Federal de Minas Gerais, 2011.
- [4] LEMOS, Nivaldo A. **Mecânica Analítica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2^a edição, 2007.
- [5] SANTOS, Adriano Francisco Monteiro dos. **Modelagem lagrangiana e simulações de sistemas mecânicos constituídos por massa-mola e pêndulos**. 2018. 79 f. Dissertação (Mestrado em Matemática aplicada e computacional),- Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Campinas. 2018.
- [6] LEÃO, Salviano A. **Tópicos de mecânica clássica**. Goiás: Universidade Federal de Goiás- Instituto de Física.
- [7] SYMON, Keith R. **Mecânica**. Tradução de Gilson Brand Batista. Rio de Janeiro: Campus, 1996.
- [8] CHABU, Victor Bernardo. **Introdução à Mecânica Lagrangiana**. 2011.
- [9] DE AGUIAR, Marcus A. M. **Tópicos de Mecânica Clássica**. Rio de Janeiro: Livraria da Física, 2011.
- [10] GOLDSTEIN, Herbert.; POOPLE, Charles.; SAFKO, John. **Classical Mechanics**. 5 ed. Addison Wesley, 2011.
- [11] PODLUBNY, Igor. **Fractional Differential Equations**. 198. ed. Technical University kosice: Slovak Republic, 1999.
- [12] KAI, Diethelm. **The Analysis of Fractional Differential Equations**. 2010. ed. New York: Springer, 2004.
- [13] KRUMREICH, Cesar Eduardo, **Formulação Lagrangiana para Sistemas Dissipativos Através do Cálculo Fracionário**. 2013. 69 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra na Área de Física),- Universidade Federal do Rio Grande. Rio Grande. 2013.

-
- [14] SANKO, Stefan G.; KILBAS, Anatoly A.; MARICHEV, Oleg I. **Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications**. 1. ed. Amsterdam :Gordon and Breach Science Publishers S.A., 1993.
- [15] SANTOS, Jessica. **Aplicação do cálculo Fracionário na Modelagem da Memória e da Aprendizagem** . 2018. 40 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática)- Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2018.
- [16] LANDAU, L; LIFCHITZ, E. **Fluid Mechanics**. Moscow: Pergamo Press, 2 edition, 1987.
- [17] BRUNETTI, Franco. **Mecânica dos Fluidos**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2ª edição, 2013.
- [18] TAYLOR, John R. **Classical mechanics**. California: University Science Books, 2005.
- [19] KUNDU, P. K.; COHEN, I. M. **Fluid Mechanics**. Burlington: Elsevier Academic Press, 2008.
- [20] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica, volume 1**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 4ª edição, 2002.
- [21] RAZAVY, M. **Classical And Quantum Dissipative Systems**. Alberta: Imperial College Press, 2005.
- [22] BATEMAN, H. **On Dissipative Systems and Related Variational Principles**. Physical Review. California, volume 38, 815, 1931.
- [23] CARDIROLA, P. **Forze Non Conservative Nella Meccanica Quantistica**. Nuovo Cimento. Volume 18, 393, 1941.
- [24] HAVAS, P. **The Range of Application of the Lagrange Formalism**. Nuovo Cimento. Bethlehem, volume 5, 363, 1957.
- [25] LAZO, M. J.; KRUMREICH, C. E. **Lagrangian Formulation for open and dissipative systems with higher-order derivate**. Journal of Mathematical physics. Volume 55, 122902, 2014.
- [26] RIEWE, F. **Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics**. Physical Review E. Volume 53, 1996.
- [27] VILANOVA, Luciano Caldeira. **Mecânica dos Fluidos**. Colégio Técnico Industrial de Santa Maria. 3ª edição, 2010.