



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
FACULDADE DE GEOFÍSICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

LEONARDO DOS REIS OLIVEIRA

**PROCEDIMENTO DE OTIMIZAÇÃO COMPUTACIONAL NA SOLUÇÃO DA
INVERSÃO NÃO LINEAR COM PROCEDIMENTOS DE INVERSÃO LINEAR**

BELÉM – PARÁ

2015

LEONARDO DOS REIS OLIVEIRA

**PROCEDIMENTO DE OTIMIZAÇÃO COMPUTACIONAL NA SOLUÇÃO DA
INVERSÃO NÃO LINEAR COM PROCEDIMENTOS DE INVERSÃO LINEAR**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará – UFPA em cumprimento às exigências para a obtenção do título de bacharel em Geofísica.

Área de concentração: Métodos Potenciais

Orientador: Prof^o. Dr^o. Cristiano Mendel Martins

BELÉM – PARÁ

2015

Dados Internacionais de Catalogação de Publicação (CIP)
Biblioteca do Instituto de Geociências/UFPA

Oliveira, Leonardo dos Reis, 1984-

Procedimento de otimização computacional na solução da
inversão não linear com procedimentos de inversão linear /
Leonardo dos Reis Oliveira. – 2015.

43 f : il. ; 30 cm

Inclui bibliografias

Orientador: Cristiano Mendel Martins

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade
Federal do Pará, Instituto de Geociências, Faculdade de Geofísica,
Belém, 2015.

1. Gravidade (Física) - Medição. 2. Inversão (Geofísica). I.
Título.

CDD 22 ed. 526.7

LEONARDO DOS REIS OLIVEIRA

PROCEDIMENTO DE OTIMIZAÇÃO COMPUTACIONAL NA SOLUÇÃO DA INVERSÃO
NÃO LINEAR COM PROCEDIMENTO DE INVERSÃO LINEAR

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Faculdade de Geofísica do
Instituto de Geociências da Universidade
Federal do Pará, como requisito parcial à
obtenção de grau de Bacharel em
Geofísica.

Data da defesa: 13 de março de 2015.

Conceito: Boa

Banca Examinadora:



Prof. Cristiano Mendel Martins - Orientador
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará



Profª Darcicléa Ferreira Santos - Membro
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará



Prof. Raphael Di Carlo Silva dos Santos - Membro
Mestre em Geofísica
Universidade Federal do Oeste do Pará

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por tudo;

Aos meus pais, Jorge Pinto de Oliveira e Yara dos Reis Oliveira, que sempre me apoiaram e me motivaram;

À minha segunda família, Regina Almeida do Amaral e Lúcia de Fátima Almeida, pelo apoio, amizade e paciência;

Aos meus irmãos, Gustavo e Gisele, por toda ajuda;

Ao professor Cristiano, por se empenhar dando todo suporte necessário para o término deste trabalho;

E aos meus amigos da graduação.

RESUMO

Apresentamos uma otimização ao procedimento de Inversão Gravimétrica regularizada proposta por RAMOS em 2013, para obtermos estimativas do relevo do embasamento de bacia sedimentares ainda mais eficientes computacionalmente. Este procedimento realiza a Inversão não linear utilizando formulação semelhante ao da inversão linear a cada iteração. Neste procedimento é utilizada uma matriz semelhante à matriz sensibilidade em nossa otimização computacional consiste em simplesmente não avaliar os elementos desta matriz que receberiam valores próximos de zero, atribuindo valor zero a estes elementos, dispensando assim dispendiosos cálculos. Mostramos em testes numéricos que a influência significativa da anomalia gravitacional somente é gerada pela massa de prova se esta se localiza a certa distância do ponto de observação. A partir dos valores da observação numérica estabelecemos quais elementos da matriz utilizada devem ser avaliados e quais simplesmente podem ser negligenciados recebendo valor zero. Com esta matriz construída, avaliamos em testes sintéticos a efetividade da estimação em recuperar o relevo verdadeiro. Comparamos o tempo computacional para a estimação do relevo do embasamento de modelos sintéticos entre o procedimento original proposto por RAMOS e o procedimento otimizado que propomos. Os resultados evidenciaram a economia de tempo computacional, embora sutil se o número de parâmetros for pequeno, demonstrando a eficiência da proposta.

Palavras-chave: Gravimetria. Inversão Gravimétrica. Matriz Sensibilidade.

ABSTRACT

We present an optimization to Regularized Gravimetric Inversion, proposed by Ramos (2013), to obtain estimates of the basement relief of sedimentary basin computationally more efficient. This procedure proposed performs nonlinear inversion using similar formulation to the linear inversion at each iteration. In this procedure is used a similar matrix to sensitivity matrix and our computational optimization simply consist in not evaluate the elements of this matrix that would receive value close to zero, assigning zero value to these elements, thus eliminating costly calculations. We show in numerical tests that the significant influence of the gravitational anomaly is only generated by the proof mass if it is located in some distance from the observation point. This numerical observation allowed us to establish which elements of the matrix used should be evaluated and which can simply receive zero value. With this built matrix, we evaluated in synthetic tests the effectiveness of the estimation in recovering the true relief. We compare the computational time to estimate the basement relief of synthetic models between the original procedure proposed by Ramos (2013) and the optimized procedure that we proposed. The results showed computational time savings, although if the number of parameters is small, demonstrating the efficiency of the proposal.

Key-words: Gravimetry. Gravimetric Inversion. Sensitivity Matrix.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Representação esquemática do modelo do pacote sedimentar, onde cada ponto na superfície representa a posição em que são medidas as componentes dos dados gravimétricos, relativos aos prismas de dimensões dx , dy e p_j	13
Figura 2: Representação esquemática de uma bacia discretizada por 8 prismas, vista em planta.....	23
Figura 3: Visualização em perfil do modelo de bacia sedimentar representada por M prismas verticais e pelo volume $2\Delta p$ na base destes, mostrando como se dá a disposição dos blocos de volume $2\Delta p$ que contabilizam os valores dos elementos da matriz sensibilidade.	26
Figura 4: Visualização da bacia em perfil, indicando a profundidade do plano dos volumes utilizados para a medição da anomalia gravimétrica, incluindo a distância r que vai do ponto de observação ao prisma que limita a região para o cálculo dos elementos da matriz W	27
Figura 5: Mapa da distribuição do valor do sinal gravimétrico gerado por um prisma de dimensões horizontais x e y iguais a 1 km, e vertical z igual a 1,2 km, posicionado ao longo da direção x e z , intervalo vermelho.	29
Figura 6: Mapa de profundidade do relevo da bacia simples e rasa.	30
Figura 7: Mapa da anomalia gravimétrica produzida pela bacia simulada com relevo do embasamento simples e raso.....	31
Figura 8: Mapa de profundidade do relevo simples estimado com o procedimento de inversão sem otimização.	32
Figura 9: Mapa da anomalia gravimétrica ajustada (curvas de contorno em linhas cinza contínuas) pelo procedimento de inversão sem otimização e o mapa da anomalia gravimétrica calculada (curvas de contorno em linhas tracejadas azuis).	32
Figura 10: Mapa de profundidade do relevo simples estimado com o procedimento de inversão com otimização.	33

Figura 11: Mapa da anomalia gravimétrica ajustada pelo procedimento de inversão com otimização.	34
Figura 12: Gráfico da função ajuste (mGal) pelo número de iterações.	35
Figura 13: Mapa de profundidade do relevo complexo da bacia profunda.	36
Figura 14: Mapa da anomalia gravimétrica produzida pela bacia simulada com relevo do embasamento complexo e profundo.	37
Figura 15: Mapa de profundidade do relevo complexo estimado com o procedimento de inversão sem otimização.	38
Figura 16: Mapa da anomalia gravimétrica ajustada pelo procedimento de inversão sem otimização	38
Figura 17: Mapa de profundidade do relevo complexo estimado com o procedimento de inversão com otimização.	39
Figura 18: Mapa da anomalia gravimétrica ajustada pelo procedimento de inversão com otimização.	40
Figura 19: Tempo gasto versus número de parâmetros utilizados em ambos os procedimentos de inversão.	41

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	METODOLOGIA	12
2.1	PROBLEMA DIRETO	12
2.2	PROBLEMA INVERSO.....	14
2.2.1	Problema Inverso Linear	17
2.2.2	Problema Inverso não Linear.....	18
2.2.3	Regularização	20
2.2.4	Regularizador de Tikonov de ordem 1 (Suavidade Global)	22
2.2.5	Metodologia utilizada por RAMOS	24
2.2.6	Entendendo melhor o significado da matriz sensibilidade de forma prática.....	25
2.2.7	Matriz W	26
2.2.8	Critério de Parada.....	27
3	RESULTADOS.....	28
3.1	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO SINAL GRAVIMÉTRICO.....	28
3.2	APLICAÇÃO DA INVERSÃO EM DADOS SINTÉTICOS	29
3.2.1	Relevo simples e raso	29
3.2.1.1	Modelo direto.....	30
3.2.1.2	Problema inverso	31
3.2.2	Relevo complexo e profundo.....	36
3.2.2.1	Modelo direto.....	36
3.2.2.2	Problema inverso	37
3.2.2.2	Eficiência	41
4	CONCLUSÃO.....	42
	REFERÊNCIAS.....	43

1 INTRODUÇÃO

A prospecção geofísica em bacias sedimentares pode ser uma tarefa complexa, exigindo utilizar-se de inúmeras técnicas para identificar se há margem favorável de incidência do material procurado no local de estudo. Dentre os métodos geofísicos, a Gravimetria mostra-se como um método econômico que pode ser efetivo (TELFORD, 1976), sendo amplamente utilizado em levantamentos geofísicos de bacias sedimentares. A fim de se obter resposta viável com estes levantamentos a quantidade de dados adquiridos pode ser enorme. Como as bacias podem se estender por grandes regiões, e os levantamentos podem cobrir várias bacias, e estão constantemente sendo readquiridos, este grande e crescente volume de dados apresenta demanda por processamento e interpretação cada vez maior.

As ferramentas computacionais são muito úteis em nossa área para executar cálculos de forma rápida, porém, como a quantidade de dados e os procedimentos computacionais de processamento e interpretação exigem muito do desempenho computacional, algoritmos otimizados são cada vez mais necessários. O tempo de resposta pode ser um fator muito importante no processamento, portanto encontrar uma maneira de se chegar ao resultado efetivo com maior eficiência necessariamente significa menor custo, mas pode também significar tornar exequível um procedimento.

Neste trabalho otimizamos ainda mais o procedimento de inversão gravimétrica para estimação do relevo do embasamento de bacias sedimentares apresentado na dissertação de RAMOS (2013), porém sem perda de eficácia na resposta obtida. Neste procedimento de inversão a fim de garantir estabilidade à solução é introduzido o regularizador de Tikhonov de primeira ordem (TIKONOV e ARSENIN, 1977). Este problema inverso é formulado com procedimento que se assemelha a inversão linear para resolver iterativamente um problema não linear. Neste procedimento é utilizada no lugar da matriz sensibilidade uma matriz diferente em que o valor de cada elemento desta matriz é calculado pelo sinal gravimétrico de um prisma devidamente posicionado no modelo. Assim como a matriz sensibilidade também nesta matriz utilizada muitos dos elementos recebem valores numericamente muito próximos de zero (NASCIMENTO, 2013). Para obtermos otimização do tempo computacional simplesmente avaliamos quais os elementos receberiam valor próximo de zero, após

devidamente calculadas as contribuições gravimétricas, e atribuímos valor zero a estes elementos, dispensando assim estes dispendiosos cálculos.

Avaliamos o decaimento do valor da anomalia gravimétrica produzida por um pequeno prisma em relação variação da distância deste ao ponto de observação, e verificamos que a partir de certa distância este valor tende assintoticamente a zero (NASCIMENTO, 2013).

Avaliamos a efetividade e a eficiência do procedimento que propomos aplicando-o a dois conjuntos de dados sintéticos, um modelo que simula uma bacia rasa e de relevo simples e com poucos parâmetros de profundidade para descrevê-la, e outro modelo que simula uma bacia profunda e complexa e com muitos parâmetros de profundidade para descrevê-la. Obtivemos uma economia de tempo de mais de cinco por cento para o primeiro modelo e de mais de quinze por cento para o segundo.

2 METODOLOGIA

2.1 PROBLEMA DIRETO

Seja um pacote sedimentar homogêneo representado por M prismas retangulares tridimensionais verticais horizontalmente justapostos e de dimensões dx , dy e p_j ($j = 1, \dots, M$). As dimensões horizontais dx e dy estão dispostas nas direções dos eixos ortogonais x e y , respectivamente, e as espessuras p_j no eixo vertical z , positivo no sentido do aumento de profundidade. O topo de cada prisma situa-se no nível $z = 0$ e as espessuras dos prismas coincidem com a profundidade do embasamento em M pontos. Presumimos constante o contraste de densidade $\Delta\rho$ entre o embasamento e o sedimento e, portanto, igual em todos os prismas. A componente vertical da anomalia gravimétrica teórica g_i avaliada na i -ésima posição de observação (x_i, y_i, z_i) produzida pelos M prismas que compõe a discretização do pacote sedimentar é:

$$g_i(x_i, y_i, z_i) = \sum_{j=1}^M f_i(p_j). \quad (1)$$

A função não linear $f_i(p_j) \equiv f_i(x_i, y_i, z_i)$ quantifica a contribuição gravitacional na i -ésima posição de observação do j -ésimo prisma com centro localizado em (x_j, y_j, z_j) e é estabelecida por

$$f_i(x_i, y_i, z_i) = \gamma \Delta\rho \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z_i - z'_j}{\left[(x_i - x'_j)^2 + (y_i - y'_j)^2 + (z_i - z'_j)^2 \right]^{3/2}} dx'_j dy'_j dz'_j \quad (2)$$

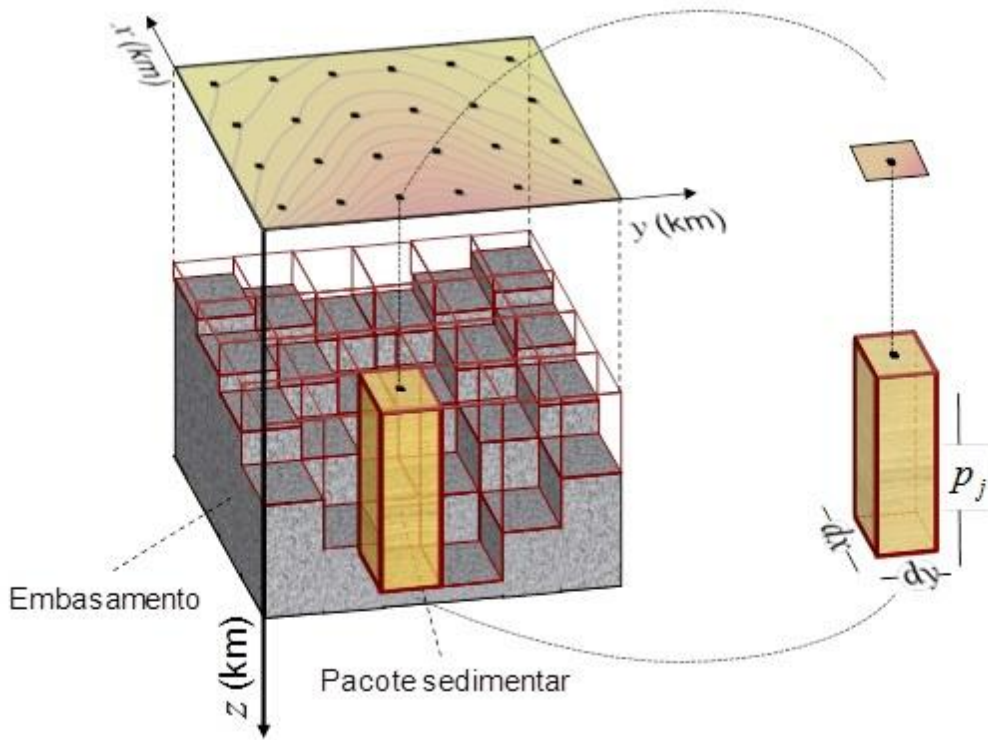
sendo γ a constante gravitacional de Newton, e os limites de integração x_1 , x_2 , y_1 , y_2 , z_1 e z_2 definidos respectivamente por $x - \frac{dx}{2}$, $x + \frac{dx}{2}$, $y - \frac{dy}{2}$, $y + \frac{dy}{2}$, 0 e p_j , em que $x = x_i - x_j$ e $y = y_i - y_j$.

O algoritmo utilizado para o cálculo desta equação foi desenvolvido por Plouff (1976), sendo o seguinte:

$$f_i(x_i, y_i, z_i) = \gamma \Delta \rho \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \mu_{klm} \left[z_m \arctan \frac{x_k y_l}{z_m R_{klm}} - x_k \log(R_{klm} + y_l) - y_l \log(R_{klm} + x_k) \right] \quad (3)$$

Sendo $R_{klm} = \sqrt{x_k^2 + y_l^2 + z_m^2}$, $\mu_{klm} = (-1)^k (-1)^l (-1)^m$, $x_1 = (x_i - x_j) - dx/2$, $x_2 = (x_i - x_j) - dx/2$, $y_1 = (y_i - y_j) - dy/2$, $y_2 = (y_i - y_j) - dy/2$, $z_1 = 0$, $z_2 = p_j$ para $z_i = 0$.

Figura 1: Representação esquemática do modelo do pacote sedimentar, onde cada ponto na superfície representa a posição em que são medidas as componentes dos dados gravimétricos, relativos aos prismas de dimensões dx , dy e p_j .



Fonte: MARTINS, 2009.

2.2 PROBLEMA INVERSO

Seja o vetor dos dados observados $\bar{\mathbf{d}}^o$ definido pelo conjunto de N observações

$$\bar{\mathbf{d}}^o = \begin{bmatrix} d_1^o \\ d_2^o \\ \vdots \\ d_N^o \end{bmatrix}, \quad (4)$$

sendo $d_i^o (i = 1, 2, \dots, N)$ o i -ésimo dado observado.

Seja o vetor dos dados preditos $\bar{\mathbf{d}}^p$ definido por

$$\bar{\mathbf{d}}^p = \begin{bmatrix} d_1^p \\ d_2^p \\ \vdots \\ d_N^p \end{bmatrix}, \quad (5)$$

sendo $d_i^p (i = 1, 2, \dots, N)$ o i -ésimo dado observado.

Seja o vetor de parâmetros $\bar{\mathbf{p}}$ definidos por

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_M \end{bmatrix}, \quad (6)$$

sendo $p_j (j = 1, 2, \dots, M)$ o j -ésimo parâmetro.

Por definição os dados preditos são estabelecidos por uma função dos parâmetros

$$d_i^p = f_i(\bar{\mathbf{p}}) \quad (7)$$

logo

$$\bar{\mathbf{d}}^p = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{bmatrix} f_1(\bar{\mathbf{p}}) \\ f_2(\bar{\mathbf{p}}) \\ \vdots \\ f_N(\bar{\mathbf{p}}) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

O problema inverso consiste em estimar um vetor de parâmetros $\bar{p}$ que produza um vetor de dados preditos $\bar{d}^p$ mais próximo possível do vetor de dados observados $\bar{d}^o$, ou em outras palavras, que produza diferença mínima entre os valores dos vetores de dados preditos e de dados observados. O resultado dessa diferença é expresso pelo vetor de resíduos

$$\bar{r} = \bar{d}^o - \bar{f}(\bar{p}). \quad (9)$$

Essa diferença normalmente é quantificada utilizando-se a norma euclidiana

$$\|\bar{r}\|_2^2 = \sum_{i=1}^N [d_i^o - f_i(\bar{p})]^2. \quad (10)$$

Esta função é definida como função do ajuste $\phi(\bar{p})$, em que

$$\phi(\bar{p}) = \|\bar{r}\|_2^2 = \sum_{i=1}^N [d_i^o - f_i(\bar{p})]^2. \quad (11)$$

Como

$$\|\bar{r}\|_2^2 = \bar{r}^T \cdot \bar{r} = r_1 \cdot r_1 + r_2 \cdot r_2 + \dots + r_N \cdot r_N \quad (12)$$

também pode ser escrito como

$$\bar{r}^T \cdot \bar{r} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_N] \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}, \quad (13)$$

a função do ajuste pode ser escrita

$$\phi(\bar{p}) = \bar{r}^T \cdot \bar{r} = [\bar{d}^o - \bar{f}(\bar{p})]^T \cdot [\bar{d}^o - \bar{f}(\bar{p})] \quad (14)$$

Assim, para a determinação do vetor de parâmetros $\bar{p}$ minimizamos a função do ajuste $\phi(\bar{p})$ minimizando a distância entre os dados observados d_i^o e os preditos d_i^p , ($i = 1, \dots, N$). Para a obtenção do mínimo aplicamos o gradiente à função do ajuste $\phi(\bar{p})$ e igualamos o resultado ao vetor nulo, especificamente:

$$\bar{\nabla}\phi(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_1} \\ \frac{\partial\phi(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial\phi(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_M} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Substituindo (14) em (15), a generalização da expressão fica:

$$\frac{\partial\phi(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ \left[\bar{\mathbf{d}}^o - \bar{f}(\bar{\mathbf{p}}) \right]^T \cdot \left[\bar{\mathbf{d}}^o - \bar{f}(\bar{\mathbf{p}}) \right] \right\} \quad (16)$$

$$= \left\{ \frac{-\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}})^T}{\partial p_i} \cdot \left[\bar{\mathbf{d}}^o - \bar{f}(\bar{\mathbf{p}}) \right] \right\} + \left\{ - \left[\bar{\mathbf{d}}^o - \bar{f}(\bar{\mathbf{p}}) \right]^T \cdot \frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_i} \right\}. \quad (17)$$

Como o transposto de um escalar é igual a ele mesmo, então

$$\frac{\partial\phi(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_i} = -2 \frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}})^T}{\partial p_i} \cdot \left[\bar{\mathbf{d}}^o - \bar{f}(\bar{\mathbf{p}}) \right]. \quad (18)$$

Substituindo (18) em (15):

$$= -2 \begin{bmatrix} \frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}})^T}{\partial p_1} \\ \frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}})^T}{\partial p_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}})^T}{\partial p_M} \end{bmatrix} \cdot \left[\bar{\mathbf{d}}^o - \bar{f}(\bar{\mathbf{p}}) \right], \quad (19)$$

portanto

$$\bar{\nabla}\phi(\bar{\mathbf{p}}) = -2\bar{\bar{\mathbf{G}}}(\bar{\mathbf{p}})^T \cdot \left[\bar{\mathbf{d}}^o - \bar{f}(\bar{\mathbf{p}}) \right], \quad (20)$$

sendo $\bar{\bar{\mathbf{G}}}(\bar{\mathbf{p}})$ denominada Matriz Sensibilidade e expressa por:

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_M} \\ \frac{\partial f_2(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_1} & \frac{\partial f_2(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_1} & \frac{\partial f_N(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial f_N(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_M} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

A Matriz Sensibilidade estabelece uma relação entre os valores dos parâmetros e os valores dos dados preditos, de forma que cada elemento da matriz indica a sensibilidade do i -ésimo dado predito em relação ao j -ésimo parâmetro.

2.2.1 Problema Inverso Linear

Se a função que relaciona o vetor de parâmetros ao i -ésimo dado predito puder ser representada por uma equação do tipo:

$$f_i(\bar{\mathbf{p}}) = g_{i1} p_1 + g_{i2} p_2 + \cdots + g_{iM} p_M + b_i \quad (22)$$

em que $g_{ij} (j = 1, \dots, M)$ e b_i sejam constantes, então

$$\frac{\partial f_i(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_j} = g_{ij} \quad (23)$$

e portanto o gradiente da função $f_i(\bar{\mathbf{p}})$ não depende dos parâmetros $\bar{\mathbf{p}}$ e a relação entre $f_i(\bar{\mathbf{p}})$ e $\bar{\mathbf{p}}$ é linear.

Assim, o vetor que representa todas as funções $f_i(\bar{\mathbf{p}})$ é dado por

$$\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{p}}) = \bar{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{p}}) + \bar{\mathbf{b}} \quad (24)$$

em que $\bar{\mathbf{G}}$ é a matriz de sensibilidade e $\bar{\mathbf{b}}$ é um vetor constante.

Substituindo (24) em (20) temos:

$$\bar{\nabla}\phi(\bar{\mathbf{p}}) = -2\bar{\mathbf{G}}^T (\bar{\mathbf{d}}^o - \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{b}}) \quad (25)$$

Minimizando a função $\phi(\bar{\mathbf{p}})$ em relação a $\bar{\mathbf{p}}$, o gradiente da função de ajuste será um vetor nulo, igualando a expressão (25) ao vetor nulo obtemos o estimador de mínimos quadrados definido por:

$$\tilde{\mathbf{p}} = (\bar{\mathbf{G}}^T \bar{\mathbf{G}})^{-1} \bar{\mathbf{G}}^T (\bar{\mathbf{d}}^o - \bar{\mathbf{b}}). \quad (26)$$

Portanto a obtenção do vetor $\tilde{\mathbf{p}}$ a partir de $\bar{\mathbf{d}}^o$ envolve inversão linear.

2.2.2 Problema Inverso não Linear

Neste tipo de inversão, a função dos parâmetros não é obtida com base na disposição linear destes, conseqüentemente a derivada dessa função também será uma função dos parâmetros. Com isso, o gradiente da função do ajuste $\phi(\bar{\mathbf{p}})$ pode assumir o valor nulo para mais de um valor de $\bar{\mathbf{p}}$, portanto pode-se concluir que neste caso a função do ajuste pode apresentar valores de mínimos locais além do valor em que essa função tenha resultado mínimo.

O método utilizado dentre vários para se determinar o vetor $\tilde{\mathbf{p}}$, o qual minimiza a função ajuste, é o de Gauss-Newton. Este trabalha de forma iterativa utilizando-se a expansão em série de Taylor. A aproximação obtida com a expansão é feita até segunda ordem, pois da terceira em diante a variação é ínfima.

A expansão em série de Taylor é feita em torno do vetor inicial $\bar{\mathbf{p}}_o$.

$$\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}_o + \Delta\bar{\mathbf{p}} \quad (27)$$

sabe-se que

$$\phi(\bar{\mathbf{p}}_o + \Delta\bar{\mathbf{p}}) \cong \phi(\bar{\mathbf{p}}_o) + \bar{\nabla}\phi(\bar{\mathbf{p}}_o)^T \Delta\bar{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \Delta\bar{\mathbf{p}}^T \bar{\nabla}^2\phi(\bar{\mathbf{p}}_o) \Delta\bar{\mathbf{p}} = \psi(\bar{\mathbf{p}}) \quad (28)$$

em que $\bar{\nabla}\phi(\bar{\mathbf{p}}_o)$: vetor gradiente de $\phi(\bar{\mathbf{p}}_o)$; e $\bar{\nabla}^2\phi(\bar{\mathbf{p}}_o)$: matriz hessiana de $\phi(\bar{\mathbf{p}}_o)$.

Para encontrar-se $\hat{\mathbf{p}}$ que minimiza a função, faz-se o gradiente de $\Psi(\bar{\mathbf{p}})$ igual ao vetor nulo, logo:

$$\therefore \bar{\nabla}\phi(\bar{\mathbf{p}}_o)\Delta\bar{\mathbf{p}} = -\bar{\nabla}\phi(\bar{\mathbf{p}}_o) \quad (29)$$

Foi visto anteriormente em (15) e (18) que

$$\bar{\nabla}\phi(\bar{\mathbf{p}}_o) = \frac{\partial\phi(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_j} \quad (30)$$

portanto a Hessiana é

$$\left(-2\frac{\partial^2\bar{f}(\bar{\mathbf{p}})^T}{\partial p_j\partial p_i}[\bar{\mathbf{d}}^o - \bar{f}(\bar{\mathbf{p}})]\right) + \left(2\frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}})^T}{\partial p_i}\frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_j}\right) \quad (31)$$

No método de Gauss-Newton, a segunda derivada é negligenciada. Logo:

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial\phi(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_i}\right) \approx 2\frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}})^T}{\partial p_i}\frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}})}{\partial p_j} \quad (32)$$

esta matriz é representada da seguinte forma:

$$\bar{\nabla}\phi(\bar{\mathbf{p}}_o) \approx 2 \begin{bmatrix} \frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_o)^T}{\partial p_1}\frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_o)}{\partial p_1} & \frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_o)^T}{\partial p_1}\frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_o)}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_o)^T}{\partial p_1}\frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_o)}{\partial p_M} \\ \frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_o)^T}{\partial p_2}\frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_o)}{\partial p_1} & \frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_o)^T}{\partial p_2}\frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_o)}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_o)^T}{\partial p_2}\frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_o)}{\partial p_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_o)^T}{\partial p_M}\frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_o)}{\partial p_1} & \frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_o)^T}{\partial p_M}\frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_o)}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_o)^T}{\partial p_M}\frac{\partial\bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_o)}{\partial p_M} \end{bmatrix} \quad (33)$$

ou

$$\bar{\nabla} \phi(\bar{\mathbf{p}}_0) \approx 2 \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_0)^T}{\partial p_1} \\ \frac{\partial \bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_0)^T}{\partial p_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_0)^T}{\partial p_M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_0)}{\partial p_1} & \frac{\partial \bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_0)}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_0)}{\partial p_M} \end{bmatrix} = 2 \bar{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{p}}_0)^T \bar{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{p}}_0) \quad (34)$$

Com base nas equações (20), (29) e (34), tem-se

$$\bar{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{p}}_0)^T \bar{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{p}}_0) \Delta \bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{p}}_0)^T [\bar{\mathbf{d}}^o - \bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_0)]. \quad (35)$$

Como o método atualiza a estimativa dos parâmetros de forma iterativa, o processo se repete após o cálculo da correção $\Delta \bar{\mathbf{p}}$, a qual será usada para se obter o valor do vetor $\bar{\mathbf{p}}_1$, que será utilizado como aproximação inicial para se obter o vetor $\bar{\mathbf{p}}_2$, e assim por diante até os cálculos chegarem a um valor $\hat{\mathbf{p}}$ que seja o mais próximo possível do vetor $\tilde{\mathbf{p}}$.

2.2.3 Regularização

O resultado da inversão obtido com os algoritmos já citados para o caso linear e não-linear é avaliado de forma que haja coerência com o campo de estudo.

Fazendo uma análise matemática da situação, tem-se que todos os dados preditos e obtidos descrevem a natureza do estudo por meio de sistemas de equações, que são representadas em matrizes. Desta forma obtêm-se resultados exatos quando esta matriz possui posto completo, ou seja, não apresenta nenhuma linha nula quando escalonada, o que equivale dizer que as equações possuem independência linear. Porém numa aplicação prática, raramente observa-se essa exatidão, pois há uma grande diferença entre o número de incógnitas e a quantidade de equações.

Na Geofísica, em muitos casos os parâmetros (incógnitas) estão em maiores quantidades quando comparados com as informações, indicando que a matriz para o sistema de equações possui determinante igual ou próximo a zero. Isto caracteriza um problema mal-posto.

Logo é necessário um método que permita o cálculo destes parâmetros, e isto pode ser feito com o acréscimo de informação a priori, que podem ser de natureza geológica ou matemática, por meio do método de regularização na inversão. O qual é obtido pela função objetivo

$$\Omega(\bar{\mathbf{p}}) = \phi(\bar{\mathbf{p}}) + \mu\theta(\bar{\mathbf{p}}) \quad (36)$$

em que $\phi(\bar{\mathbf{p}})$ é a função do ajuste; $\theta(\bar{\mathbf{p}})$ é a função regularizadora; μ é o parâmetro de regularização.

O processo de inversão para o problema regularizado seguirá o mesmo procedimento da inversão não-linear, visto que esta é a formulação geral para o processo de inversão.

Expandindo a função objetivo em série de Taylor até segunda ordem

$$\Omega(\bar{\mathbf{p}}_0 + \Delta\bar{\mathbf{p}}) \approx \Omega(\bar{\mathbf{p}}_0) + \bar{\nabla}\Omega(\bar{\mathbf{p}}_0)^T \Delta\bar{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \Delta\bar{\mathbf{p}}^T \bar{\bar{\nabla}}\Omega(\bar{\mathbf{p}}_0) \Delta\bar{\mathbf{p}}, \quad (37)$$

em que o vetor gradiente e a matriz hessiana de $\Omega(\bar{\mathbf{p}})$ são dados, respectivamente, por

$$\bar{\nabla}\Omega(\bar{\mathbf{p}}_0) = \bar{\nabla}\phi(\bar{\mathbf{p}}_0) + \mu\bar{\nabla}\theta(\bar{\mathbf{p}}_0) \quad (38)$$

e

$$\bar{\bar{\nabla}}\Omega(\bar{\mathbf{p}}_0) = \bar{\bar{\nabla}}\phi(\bar{\mathbf{p}}_0) + \mu\bar{\bar{\nabla}}\theta(\bar{\mathbf{p}}_0). \quad (39)$$

Utilizando-se o mesmo procedimento empregado na obtenção da equação para o problema inverso não-linear temos que

$$\bar{\bar{\nabla}}\Omega(\bar{\mathbf{p}}_0) \Delta\bar{\mathbf{p}} = -\bar{\nabla}\Omega(\bar{\mathbf{p}}_0). \quad (40)$$

Substituindo as equações (36) em (40):

$$\bar{\bar{\nabla}}[\phi(\bar{\mathbf{p}}_0) + \mu\theta(\bar{\mathbf{p}}_0)] \Delta\bar{\mathbf{p}} = -\bar{\nabla}[\phi(\bar{\mathbf{p}}_0) + \mu\theta(\bar{\mathbf{p}}_0)] \quad (41)$$

logo

$$\left[\bar{\bar{\nabla}}\phi(\bar{\mathbf{p}}_0) + \mu \bar{\bar{\nabla}}\theta(\bar{\mathbf{p}}_0) \right] \Delta \bar{\mathbf{p}} = - \left[\bar{\nabla}\phi(\bar{\mathbf{p}}_0) + \mu \bar{\nabla}\theta(\bar{\mathbf{p}}_0) \right] \quad (42)$$

Substituindo (20) e (34) em (42):

$$\left[2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\bar{\mathbf{p}}_0)^T \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\bar{\mathbf{p}}_0) + \mu \bar{\bar{\nabla}}\theta(\bar{\mathbf{p}}_0) \right] \Delta \bar{\mathbf{p}} = -2 \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\bar{\mathbf{p}}_0)^T \left[\bar{\mathbf{d}}^o - \bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_0) \right] + \mu \bar{\nabla}\theta(\bar{\mathbf{p}}_0) \quad (43)$$

2.2.4 Regularizador de Tikonov de ordem 1 (Suavidade Global)

Esta função regularizadora é utilizada para o caso em que se quer uma variação suave entre os parâmetros adjacentes. Ela é representada pela equação

$$\theta^{sv}(\bar{\mathbf{p}}) = \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{v}} \quad (44)$$

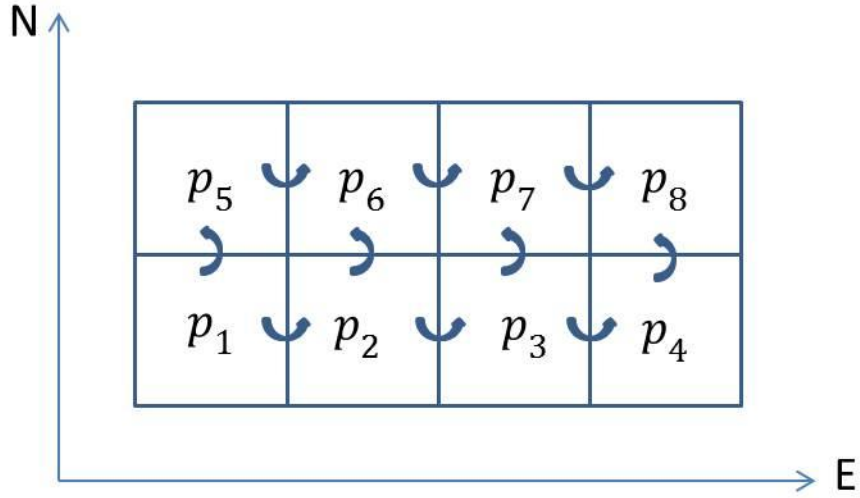
O vetor $\mathbf{v}$ é uma aproximação de diferenças finitas para a derivada espacial dos parâmetros e pode ser escrito como

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\bar{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{p}} \quad (45)$$

em que $\bar{\bar{\mathbf{R}}}$ é uma matriz de diferenças finitas.

Supomos como exemplo uma bacia discretizada representada por 8 prismas de forma que os prismas encontrem-se na seguinte disposição:

Figura 2: Representação esquemática de uma bacia discretizada por 8 prismas, vista em planta.



Fonte: do autor.

Então a equação (45) é representada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} p_1 - p_2 \\ p_2 - p_3 \\ p_3 - p_4 \\ p_5 - p_6 \\ p_6 - p_7 \\ p_7 - p_8 \\ p_1 - p_5 \\ p_2 - p_6 \\ p_3 - p_7 \\ p_4 - p_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \end{bmatrix}$$

$$\theta^{SV}(\bar{\mathbf{p}}) = \bar{\mathbf{p}}^T \bar{\bar{\mathbf{R}}}^T \bar{\bar{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{p}}. \quad (46)$$

O vetor gradiente e a matriz Hessiana são respectivamente:

$$\bar{\nabla} \theta^{SV}(\bar{\mathbf{p}}) = 2 \bar{\bar{\mathbf{R}}}^T \bar{\bar{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{p}} \quad (47)$$

$$\bar{\bar{\nabla}} \theta^{SV}(\bar{\mathbf{p}}) = 2 \bar{\bar{\mathbf{R}}}^T \bar{\bar{\mathbf{R}}}. \quad (48)$$

Para o caso em que a função $f_i(\bar{\mathbf{p}})$ seja linear, a equação para o problema inverso linear regularizado será:

$$\left(\bar{\bar{G}}^T \bar{\bar{G}} + \mu \bar{\bar{R}}^T \bar{\bar{R}}\right) \tilde{\mathbf{p}} = \bar{\bar{G}}^T (\bar{\mathbf{d}}^o - \bar{\mathbf{b}}) \quad (49)$$

e para o caso de $f_i(\bar{\mathbf{p}})$ ser uma função não linear, o problema inverso não-linear regularizado é:

$$\left[\bar{\bar{G}}(\bar{\mathbf{p}}_0)^T \bar{\bar{G}}(\bar{\mathbf{p}}_0) + \mu \bar{\bar{R}}^T \bar{\bar{R}}\right] \Delta \bar{\mathbf{p}} = \bar{\bar{G}}(\bar{\mathbf{p}}_0)^T [\bar{\mathbf{d}}^o - \bar{f}(\bar{\mathbf{p}}_0)] - \mu \bar{\bar{R}}^T \bar{\bar{R}} \bar{\mathbf{p}}_0 \quad (50)$$

2.2.5 Metodologia utilizada por RAMOS

O algoritmo computacional utilizado por RAMOS (2013) trata um problema de inversão não linear com uma formulação aproximada de um problema inverso linear a cada iteração, e utiliza o método de regularização de Tikonov de primeira ordem. Como já foi citado anteriormente, o problema inverso linear é um caso particular do problema não linear, logo a equação (48) ficará reduzida a

$$\left[\bar{\bar{G}}(\bar{\mathbf{p}}_0)^T \bar{\bar{G}}(\bar{\mathbf{p}}_0) + \mu \bar{\bar{R}}^T \bar{\bar{R}}\right] \Delta \bar{\mathbf{p}} = \bar{\bar{G}}(\bar{\mathbf{p}}_0)^T [\bar{\mathbf{d}}^o - \bar{\mathbf{b}}]. \quad (51)$$

Como é baseada em iterações, temos

$$\Delta \bar{\mathbf{p}}_k = \bar{\mathbf{p}}_k - \bar{\mathbf{p}}_{k-1}. \quad (52)$$

e

$$[\bar{\mathbf{d}}^o - \bar{\mathbf{b}}] = \Delta \mathbf{y}_k \quad (53)$$

então

$$\bar{\mathbf{p}}_k = \bar{\mathbf{p}}_{k-1} + \left[\bar{\bar{G}}_k^T \bar{\bar{G}}_k + \mu \bar{\bar{R}}^T \bar{\bar{R}}\right]^{-1} \bar{\bar{G}}_k^T \Delta \mathbf{y}_k \quad (54)$$

O algoritmo computacional utilizado por RAMOS (2013) tem como base esta equação (54), diferenciando-se apenas com a substituição da matriz sensibilidade pela matriz $\bar{W}$, assim:

$$\bar{\mathbf{p}}_k = \bar{\mathbf{p}}_{k-1} + \left[\bar{\bar{W}}^T \bar{\bar{W}} + \mu \bar{\bar{R}}^T \bar{\bar{R}}\right]^{-1} \bar{\bar{W}}^T \mathbf{y}^o \quad (55)$$

Cada ij -ésimo elemento da matriz é calculado como a componente vertical do sinal gravimétrico produzido no i -ésimo ponto de observação por um pequeno prisma posicionado nas mesmas coordenadas horizontais do centro do j -ésimo prisma do modelo interpretativo, com profundidade do topo definida pelo i -ésimo ponto de observação. Nos cálculos dos valores dos ij -ésimos elementos da matriz W em uma mesma i -ésima linha, todos os pequenos prismas são posicionados a uma mesma profundidade. Apresentaremos posteriormente tópico descrevendo mais detalhes da construção da matriz W .

Para a aproximação inicial ($k=1$), temos:

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_0 + \left[\bar{W}_1^T \bar{W}_1 + \mu \bar{R}^T \bar{R} \right]^{-1} \bar{W}_1^T y^0 \quad (56)$$

Pela formulação da equação (25), $\bar{p}_k$ é substituído em cada iteração, algoritmicamente $\bar{p}_k$ recebe $\bar{p}_k + CP$, sendo CP um fator de correção da k -ésima iteração definido por

$$CP = \frac{g^o}{g^c}. \quad (57)$$

2.2.6 Entendendo melhor o significado da matriz sensibilidade de forma prática

Vamos partir primeiramente da equação matemática que rege cada elemento da matriz sensibilidade, como visto na equação (23)

$$\frac{\partial f_i(\bar{p})}{\partial p_j} = g_{ij},$$

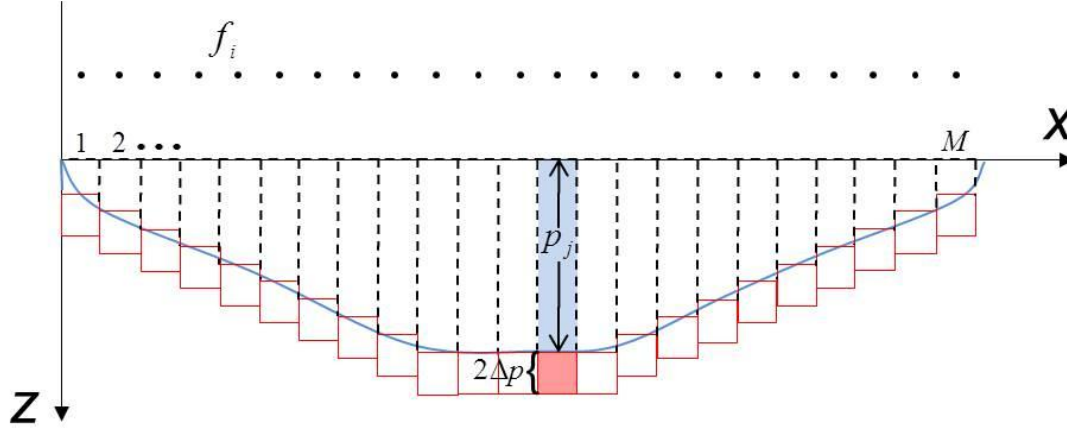
sabemos que

$$\frac{\partial f_i(\bar{p})}{\partial p_j} = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{f_i(\bar{p} + \Delta p) - f_i(\bar{p} - \Delta p)}{2\Delta p}, \quad (58)$$

sendo p_j a espessura para o j -ésimo prisma, e Δp uma variação dessa espessura que tende a um valor muito pequeno, e a função $f_i(\bar{p})$ é o cálculo da gravidade na i -ésima posição de observação referente ao volume $2\Delta p$ para cada j -ésimo prisma, obtendo-se assim o elemento g_{ij} desta matriz (Figura 3). Podemos avaliar que este limite indica de quanto do valor correspondente à taxa da contribuição gravitacional de um prisma varia

em relação aos prismas adjacentes. A matriz sensibilidade apresenta estas taxas conforme a profundidade do contato pacote sedimentar / embasamento.

Figura 3: Visualização em perfil do modelo de bacia sedimentar representada por M prismas verticais e pelo volume $2\Delta p$ na base destes, mostrando como se dá a disposição dos blocos de volume $2\Delta p$ que contabilizam os valores dos elementos da matriz sensibilidade.



Fonte: do autor.

2.2.7 Matriz W

Esta matriz apresenta similaridades com a matriz sensibilidade, diferenciando-se nos seguintes aspectos: a profundidade do volume que contribui para o sinal da gravidade no i -ésimo ponto de observação é igual para todos os prismas. Esta profundidade é avaliada baseando-se na profundidade do prisma localizado nas mesmas coordenadas horizontais do ponto onde é feita a i -ésima observação. Obtém-se os sinais gravimétricos dos volumes dos prismas localizados na mesma profundidade que o do prisma abaixo do ponto de observação; e a espessura Δp é um valor que foi determinado numericamente com base nos melhores resultados da estimação do relevo do embasamento de bacia sedimentares, e ficou definido como 1,2 Km.

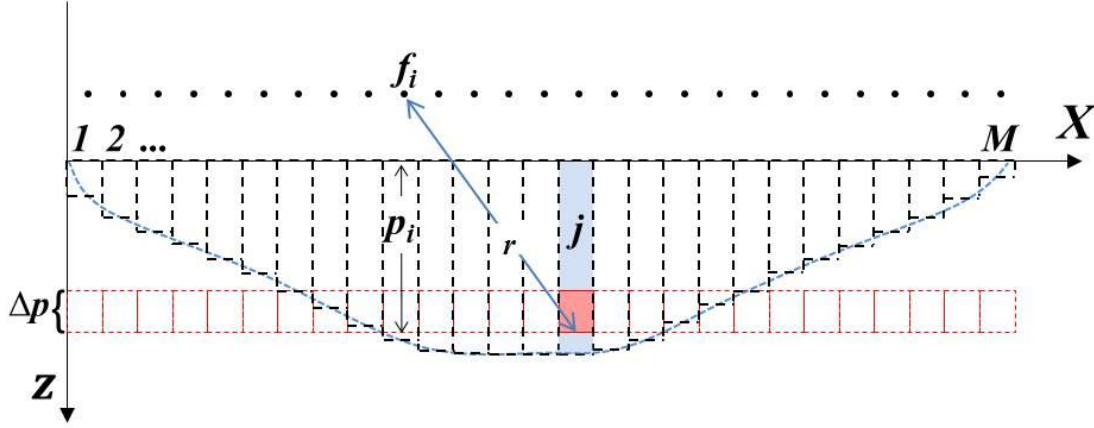
A matriz W é representada da seguinte forma:

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1m} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nm} \end{bmatrix}$$

em que w_{ij} indica o sinal gravimétrico obtido no i -ésimo ponto de observação referente ao volume do j -ésimo prisma.

Neste trabalho, a fim de obtermos economia computacional estabelecemos um critério de exclusão no cálculo da anomalia gravimétrica baseado na distância entre os prismas e o ponto de observação, atribuindo o valor zero para os elementos na matriz W com distância maior que a estabelecida, como ilustrado na Figura 4.

Figura 4: Visualização da bacia em perfil, indicando a profundidade do plano dos volumes utilizados para a medição da anomalia gravimétrica, incluindo a distância r que vai do ponto de observação ao prisma que limita a região para o cálculo dos elementos da matriz W .



Fonte: do autor.

2.2.8 Critério de Parada

O algoritmo de inversão é interrompido quando não há mais significativa variação da função-objeto $\Omega_S(\bar{p})$. Na prática a convergência ocorre quando, em uma k -ésima iteração, a seguinte inequação é satisfeita:

$$\left| \frac{\Omega_S(\bar{p}_k) - \Omega_S(\bar{p}_{k-1})}{\Omega_S(\bar{p}_{k-1})} \right| \leq \varepsilon, \quad (59)$$

sendo ε um pequeno escalar definido para cada inversão não linear $\Omega_S(\mathbf{p})$.

3 RESULTADOS

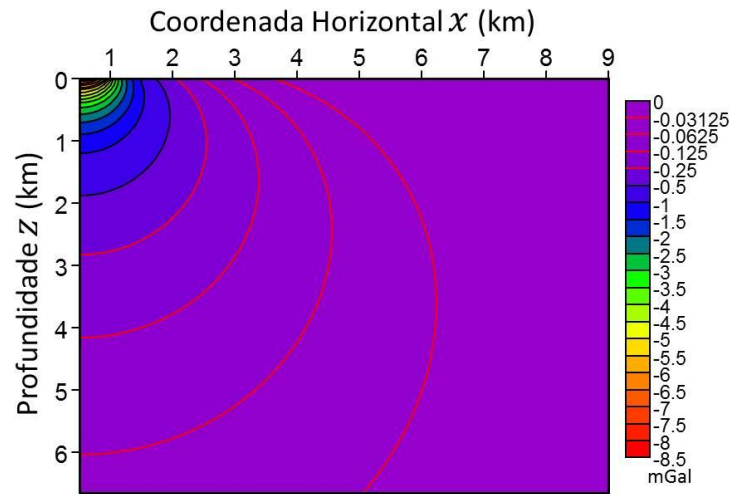
3.1 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO SINAL GRAVIMÉTRICO

O valor do sinal gravimétrico obtido em cada ponto de observação está relacionado à soma da contribuição gravimétrica referente às massas e às distâncias em relação a cada prisma do modelo da bacia mencionado na metodologia. Ao analisarmos esses valores, podemos perceber que a contribuição gravimétrica provocada pelas massas que se localizam a grandes distâncias do ponto de observação é praticamente irrisória.

Avaliamos como varia com a distância a contribuição gravimétrica em um ponto de observação fixo (nas coordenadas x , y e z iguais a 0 km) produzida por um prisma de dimensões 1 km nas direções horizontais x e y , e 1,2 km na direção vertical z , preenchido com distribuição de densidade homogênea. As dimensões deste prisma são mantidas constantes, mas sua posição é deslocada no espaço tanto na vertical como na horizontal. Variamos discretamente a posição deste prisma ao longo das direções x e z e para cada posição calculamos o sinal gravimétrico produzido pelo prisma conforme o descrito no modelo direto (equação 3). Assim produzimos um mapa com a variação do sinal gravimétrico em relação a variação da posição deste prisma. A Figura 5 mostra o mapa de variação do sinal gravimétrico para o prisma posicionado entre 0 e 9 km ao longo do eixo x , e entre 0 e 7 km ao longo do eixo z .

Note que a superfície mostrada em curvas de valores na Figura 5 tem proeminente pico na origem (posição mais próxima da observação gravimétrica sintética) e um grande vale de valores próximos de zero, se aproximando assintoticamente de zero. Este vale está sendo destacado pelas curvas vermelhas. Note que o intervalo entre essas curvas vermelhas é menor que o intervalo entre as curvas pretas.

Figura 5: Mapa da distribuição do valor do sinal gravimétrico gerado por um prisma de dimensões horizontais x e y iguais a 1 km, e vertical z igual a 1,2 km, posicionado ao longo da direção x e z , intervalo vermelho.



Fonte: do autor.

Este resultado é relevante por mostrar que uma grande parte dos os elementos da matriz W (equação 53) não precisam ser calculados, por serem numericamente iguais a zero, bastando simplesmente atribuir a este elementos o valor zero, a depender da distancia fonte (j -ésimo prisma) sensor (i -ésima observação).

3.2 APLICAÇÃO DA INVERSÃO EM DADOS SINTÉTICOS

Realizamos os testes do algoritmo de inversão com dois conjuntos de dados sintéticos que chamaremos de relevo simples e raso e relevo complexo e profundo.

3.2.1 Relevo simples e raso

Discretizamos um pacote sedimentar modelado, depositado sobre um relevo do embasamento simples (Figura 6), por uma pequena quantidade de prismas e correspondentes observações, a fim de obter uma resposta computacionalmente rápida pelo algoritmo de inversão.

Esta bacia é composta de 15 x 16 prismas, de contraste de densidade constante e igual a -0.4 g/cm^3 , dimensões iguais a 1 km nas direções horizontais x e y , de topo

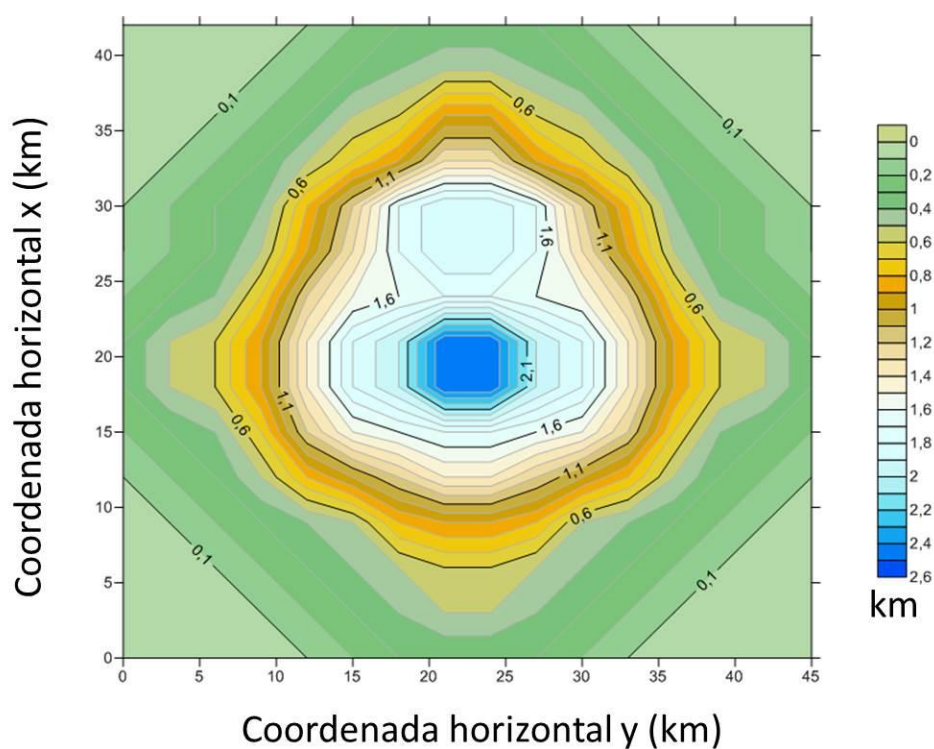
plano e coincidente com a coordenada vertical $z = 0$. No total são 240 prismas, portanto 240 pontos de observação.

Aplicamos a este modelo simples os procedimentos de inversão sem e com otimização a fim de demonstrar que a otimização pelo não cálculo de todos os elementos da matriz W não compromete a efetividade da estimativa do relevo da inversão gravimétrica.

3.2.1.1 Modelo direto

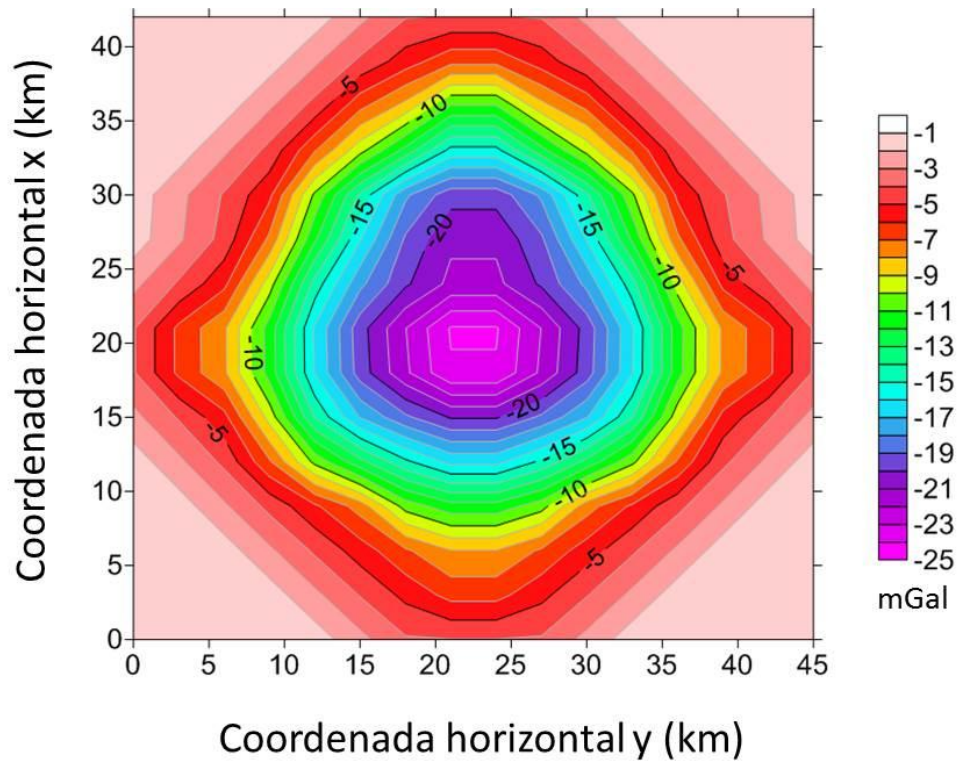
Com base nos dados de entrada desta bacia, valores de profundidade do relevo (Figura 6) e contraste de densidade, calculamos o valor da anomalia gravimétrica pelo algoritmo do modelo direto, obtendo assim o mapa mostrado na Figura 7.

Figura 6: Mapa de profundidade do relevo da bacia simples e rasa.



Fonte: do autor.

Figura 7: Mapa da anomalia gravimétrica produzida pela bacia simulada com relevo do embasamento simples e raso.

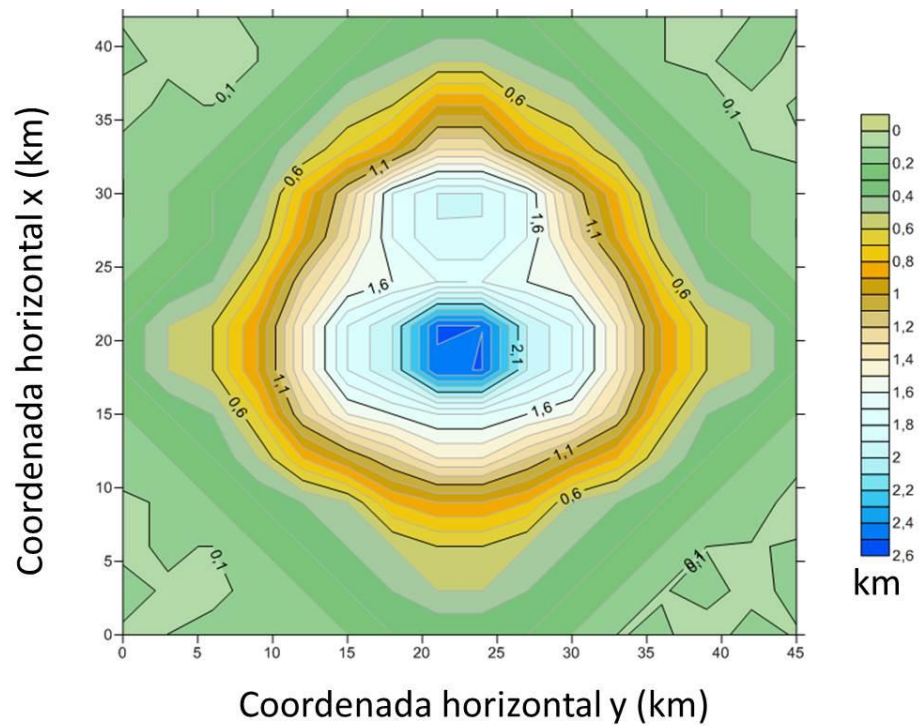


Fonte: do autor.

3.2.1.2 Problema inverso

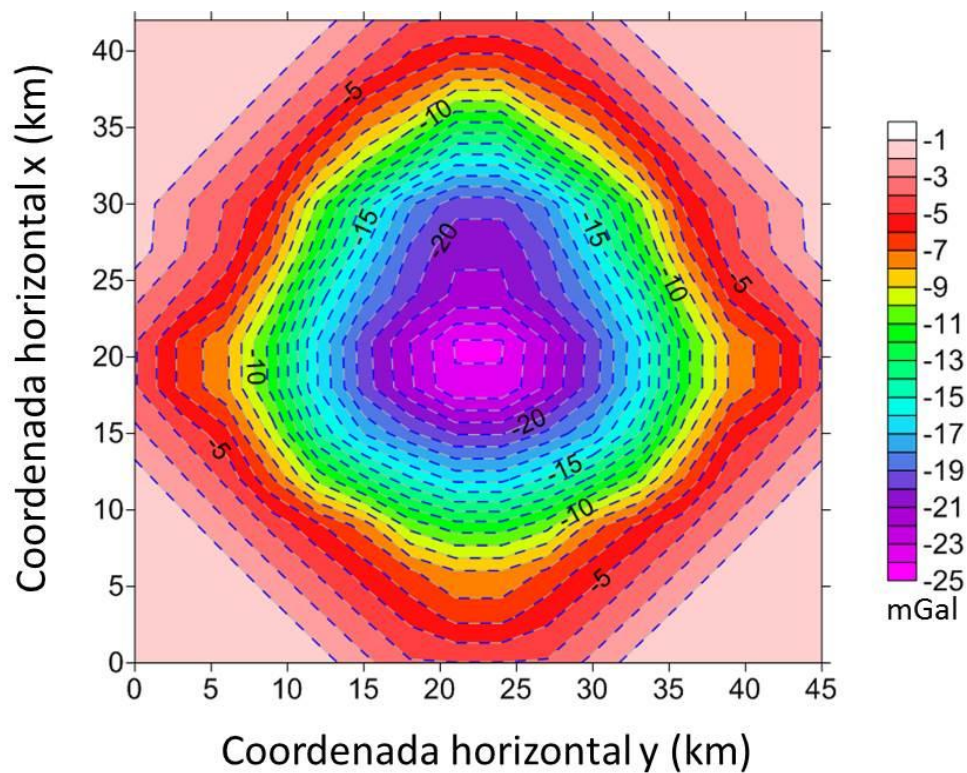
Como dado de entrada utilizamos o sinal gravimétrico calculado (Figura 7) e o valor do contraste de densidade verdadeiro no algoritmo de inversão sem procedimento de otimização para obtermos a estimativa do relevo do embasamento (Figura 8) e a correspondente anomalia ajustada. Utilizamos como valor do parâmetro de regularização (μ) do funcional regularizador de suavidade 1.10^{-3} . Na Figura 7 sobrepomos às curvas de contorno da anomalia ajustada (Figura 9), com o objetivo de verificar as possíveis discrepâncias. No entanto podemos notar a coincidência dos sinais de ambas.

Figura 8: Mapa de profundidade do relevo simples estimado com o procedimento de inversão sem otimização.



Fonte: do autor.

Figura 9: Mapa da anomalia gravimétrica ajustada (curvas de contorno em linhas cinza contínuas) pelo procedimento de inversão sem otimização e o mapa da anomalia gravimétrica calculada (curvas de contorno em linhas tracejadas azuis).

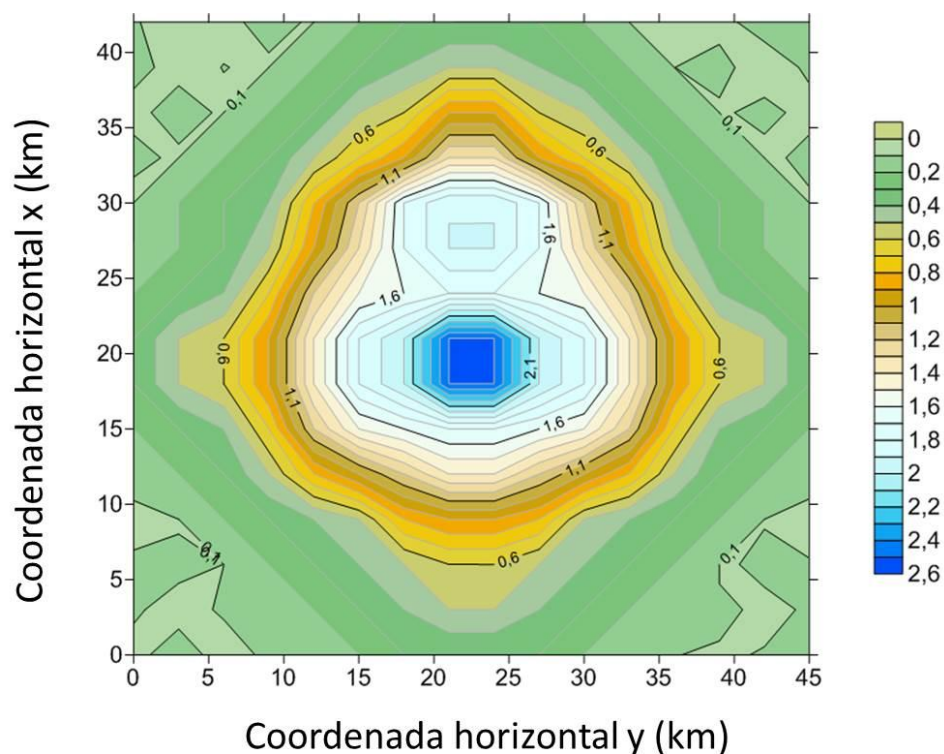


Fonte: do autor.

Comparando os mapas de relevo verdadeiro (Figura 6) estimado (Figura 8), verificamos que as imagens apresentam grande semelhança, havendo pequenas distorções nas bordas da bacia, que não são significativas.

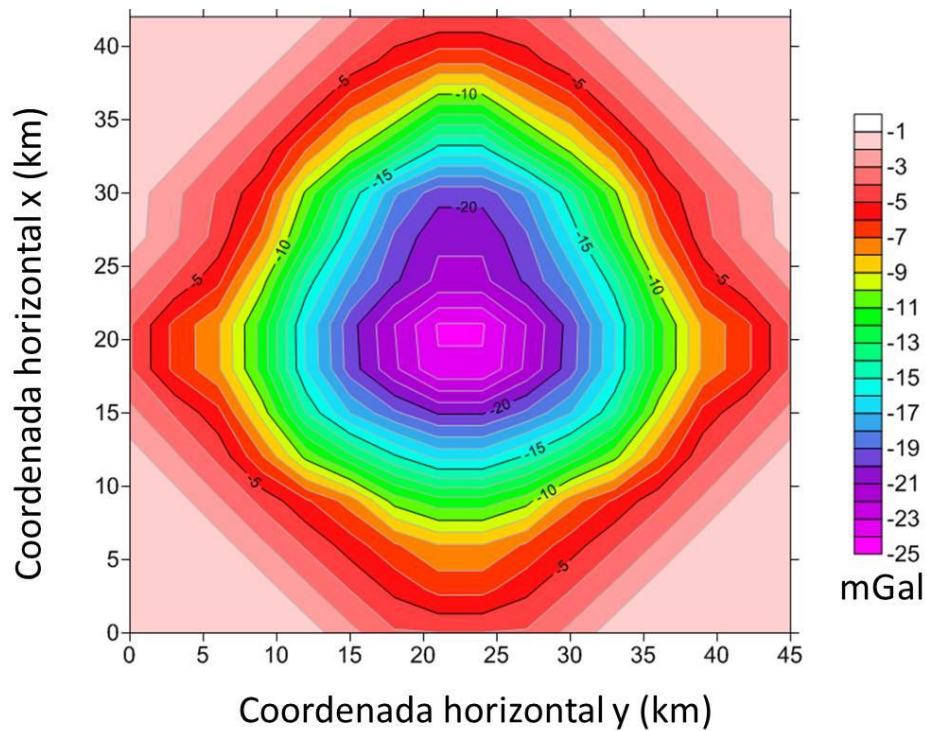
Realizamos os testes para os mesmos dados, mas aplicando o procedimento de otimização do tempo computacional, impondo que o alcance limite para a computação do cálculo da anomalia gravimétrica comece com 10 km e reduza de 1 km a cada iteração até o mínimo de 6 km, permanecendo essa distância ao longo do processamento restante. Novamente utilizamos como valor do parâmetro de regularização (μ) do funcional regularizador de suavidade 1.10^{-3} . Nas ultimas iterações o número de elementos não calculados na matriz W ultrapassa os 90%. Os resultados que obtemos com esse procedimento de inversão do relevo estimado e da anomalia gravimétrica ajustada estão indicados nas Figuras 10 e 11 respectivamente.

Figura 10: Mapa de profundidade do relevo simples estimado com o procedimento de inversão com otimização.



Fonte: do autor.

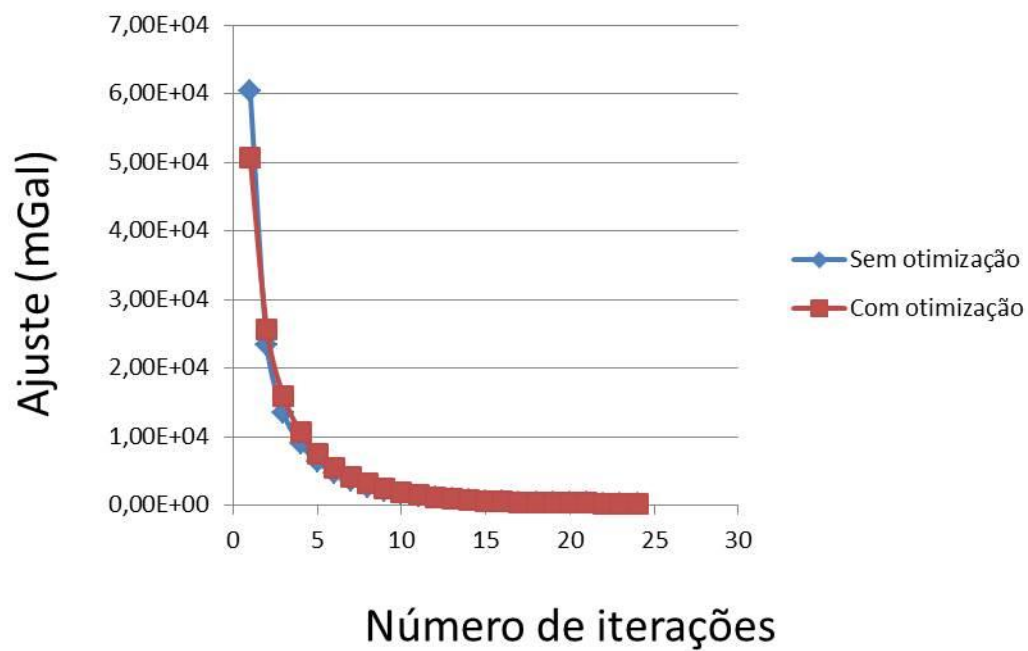
Figura 11: Mapa da anomalia gravimétrica ajustada pelo procedimento de inversão com otimização.



Fonte: do autor.

O procedimento de inversão para a anomalia gravimétrica realizado com otimização para a matriz W completa, teve um tempo de 19,8 segundos, com 24 iterações. A realização do mesmo procedimento para a anomalia gravimétrica agora com a matriz W otimizada transcorreu por um tempo de 18,8 segundos, com as mesmas 24 iterações. A Figura 12 mostra a evolução do ajuste com as iterações em ambos os procedimentos de inversão. Note que o funcional do ajuste avaliado chega a atingir valores bem próximos de zero em ambos os casos.

Figura 12: Gráfico da função ajuste (mGal) pelo número de iterações.



Fonte: do autor.

Com estes testes verificamos que o processo de inversão com otimização é capaz de produzir virtualmente idêntica ao do processo de inversão sem otimização. Notamos também que ambas as inversões são igualmente muito eficazes para estimar o relevo deste modelo simples.

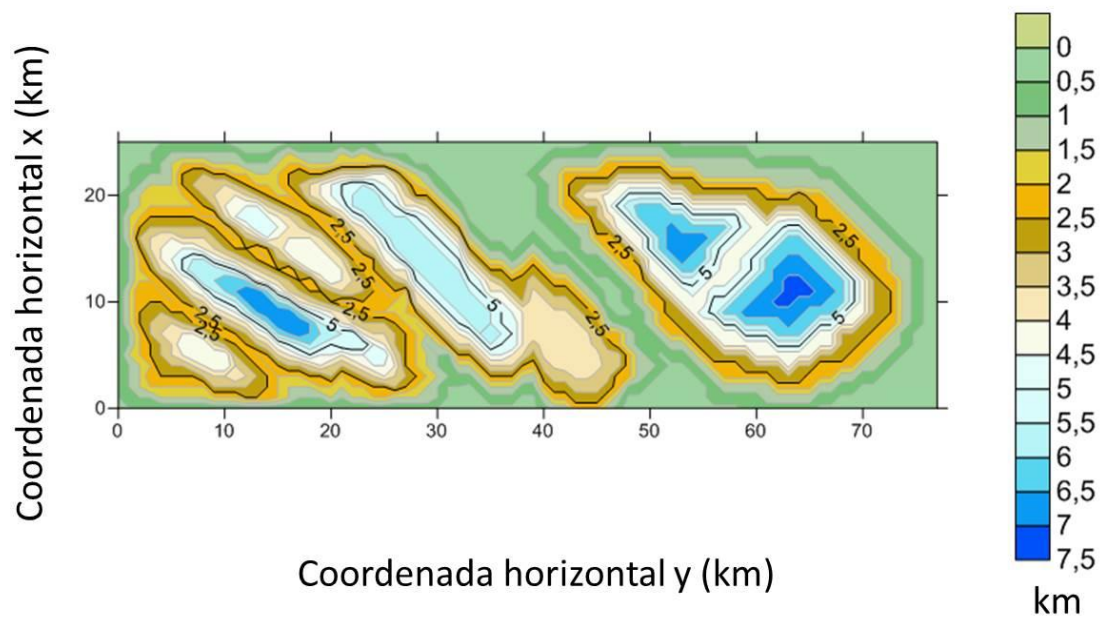
3.2.2 Relevo complexo e profundo

Este relevo é caracterizado como complexo por apresentar uma sequência de baixos e altos. Este modelo contém 26×78 prismas e possui 2028 pontos de observações igualmente espaçados, e contraste de densidade -0.4 g/cm^3 .

3.2.2.1 Modelo direto

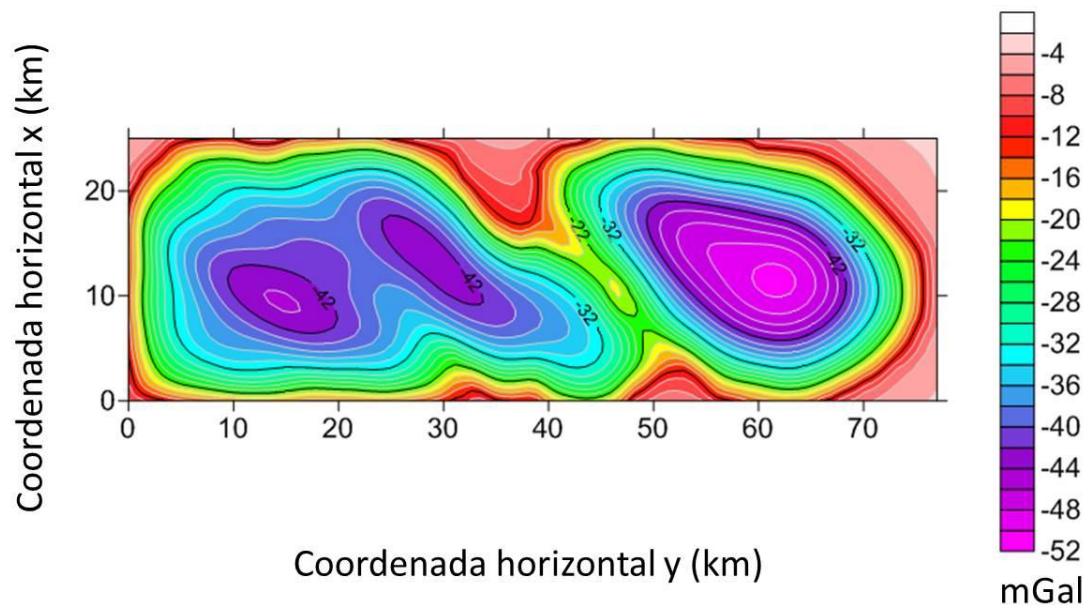
Os testes foram realizados de maneira similar aos do relevo simples. Primeiramente, com valores de profundidade do relevo (Figura 13) e contraste de densidade, obtemos o mapa da anomalia gravimétrica (Figura 14).

Figura 13: Mapa de profundidade do relevo complexo da bacia profunda.



Fonte: do autor.

Figura 14: Mapa da anomalia gravimétrica produzida pela bacia simulada com relevo do embasamento complexo e profundo.

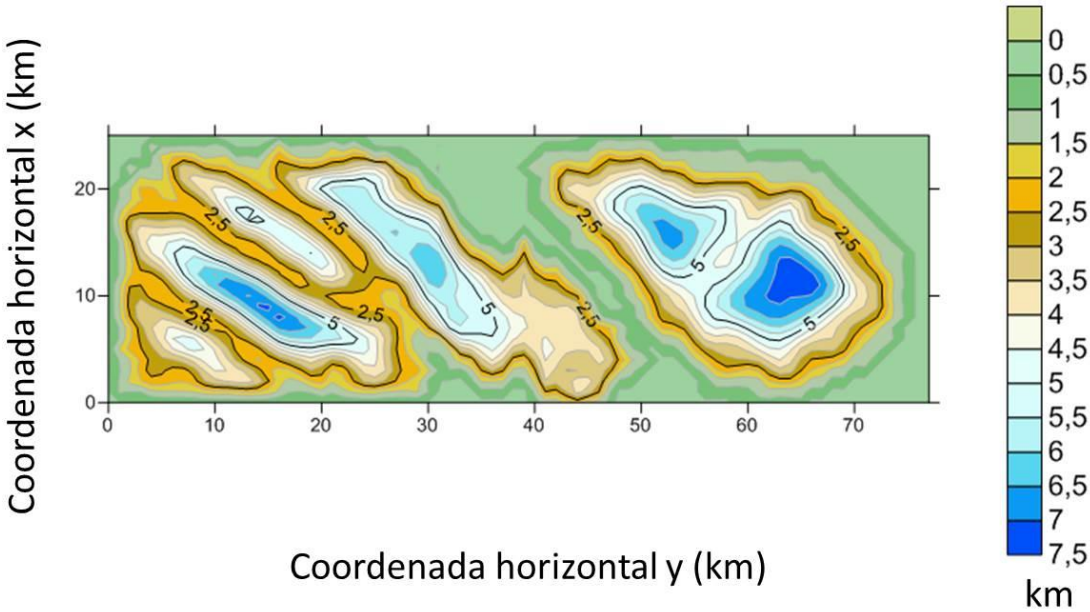


Fonte: do autor.

3.2.2.2 Problema inverso

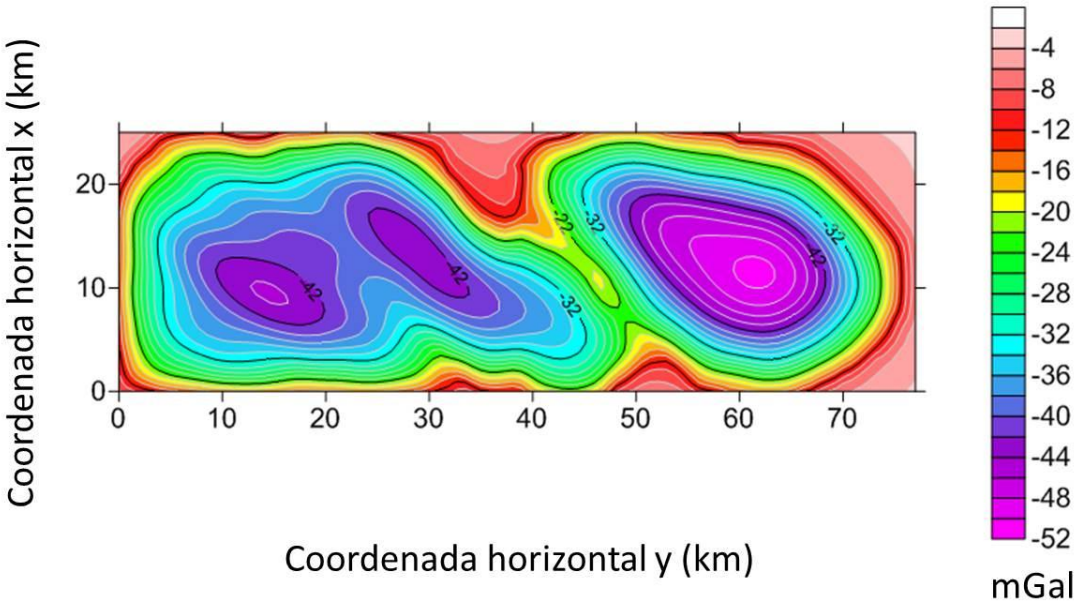
Utilizamos o sinal gravimétrico calculado (Figura 14) no algoritmo de inversão com o valor do contraste de densidade verdadeiro sem procedimento de otimização, e assim obtemos a estimativa do relevo do embasamento (Figura 15) e a anomalia ajustada (Figura 16). Novamente utilizamos como valor do parâmetro de regularização (μ) do funcional regularizador de suavidade 1.10^{-3}

Figura 15: Mapa de profundidade do relevo complexo estimado com o procedimento de inversão sem otimização.



Fonte: do autor.

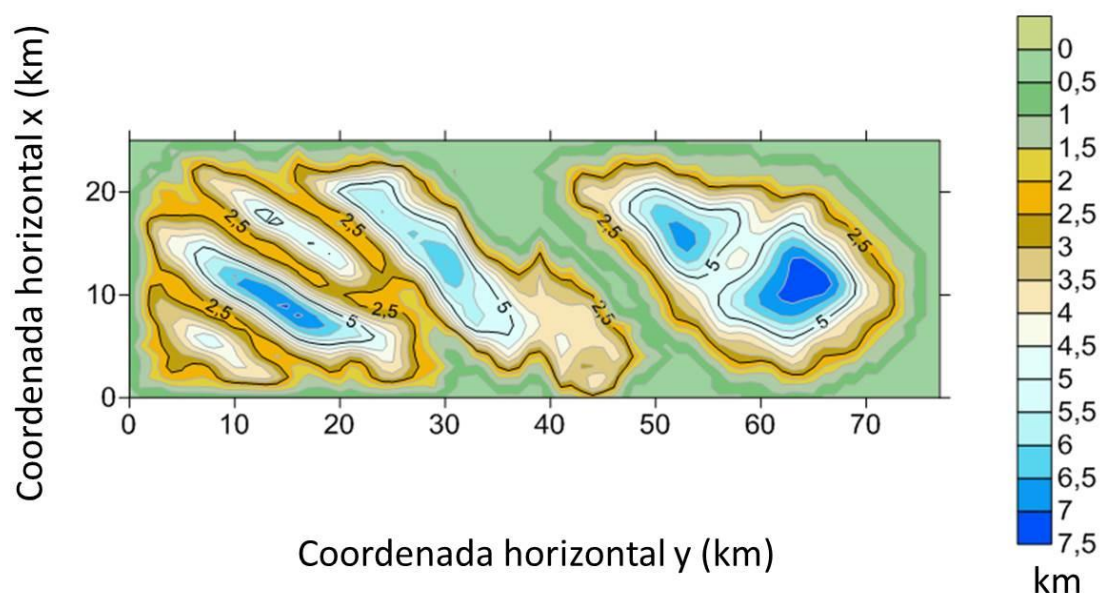
Figura 16: Mapa da anomalia gravimétrica ajustada pelo procedimento de inversão sem



Fonte: do autor.

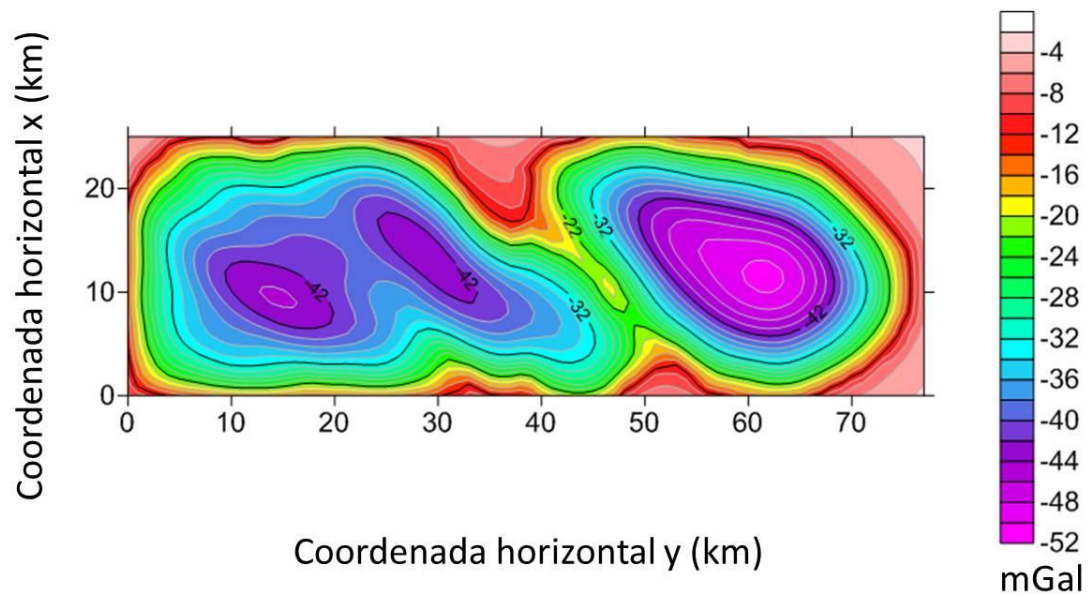
Aplicamos o procedimento com otimização do tempo computacional, impondo que o cálculo computacional dos elementos da matriz W inicie em 20 km de alcance máximo, reduzindo em 1 km a cada iteração com o mínimo de 10 km e prosseguindo com esse valor até o fim do processamento. Novamente utilizamos como valor do parâmetro de regularização (μ) do funcional regularizador de suavidade 1.10^{-3} . Nas ultimas iterações o número de elementos não calculados na matriz W ultrapassa os 90%. Obtemos o relevo estimado (Figura 17) e a anomalia gravimétrica ajustada (Figura 18).

Figura 17: Mapa de profundidade do relevo complexo estimado com o procedimento de inversão com otimização.



Fonte: do autor.

Figura 18: Mapa da anomalia gravimétrica ajustada pelo procedimento de inversão com otimização.

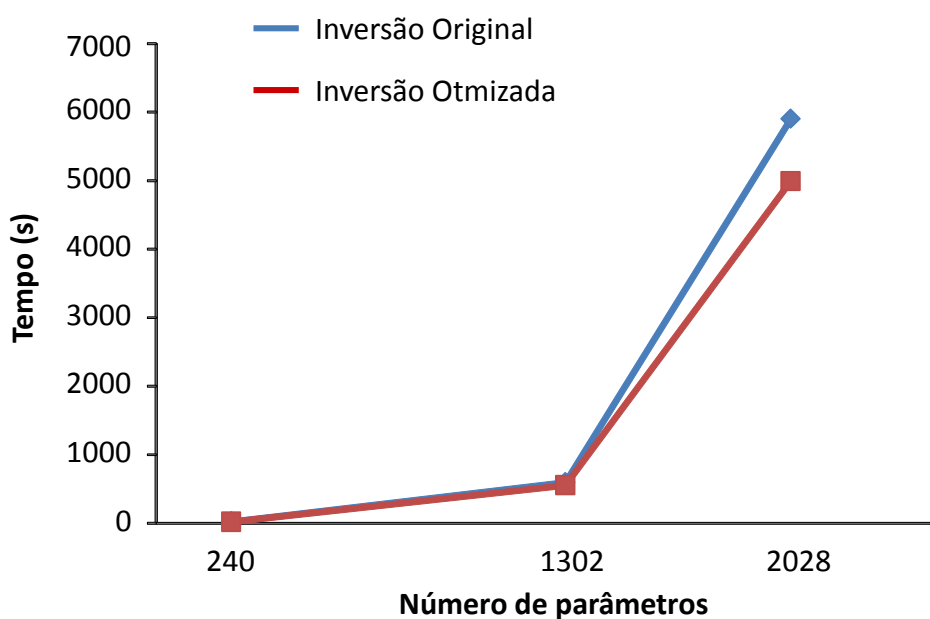


Fonte: do autor.

3.2.2.3 Eficiência

Estabelecida a eficácia de ambos os métodos com os resultados apresentados anteriormente, avaliamos a eficiência do procedimento de otimização. A figura 19 mostra como o tempo computacional foi diminuído para se chegar ao mesmo resultado aplicando-se o procedimento de inversão com otimização.

Figura 19: Tempo gasto versus número de parâmetros utilizados em ambos os procedimentos de inversão.



Fonte: do autor.

A Tabela 1 apresenta detalhes numéricos desta otimização.

Tabela 1 – Detalhes numéricos dos procedimentos de Inversão

Número de Parâmetros	Número de iterações	Tempo (s) Inversão Original	Tempo (s) Inversão Otimizada	Percentual de economia
240	24	19.8	18.8	5.2
1302	21	592.3	553.2	6.6
2028	22	5897.9	4987.6	15.4

4 CONCLUSÃO

Ao avaliarmos o comportamento dos valores do sinal da anomalia gravimétrica produzida por um prisma de prova, que é situado em posições discretizadas ao longo das direções horizontal e vertical, obtemos como resposta um gráfico com uma superfície de tendência assintótica ao valor zero a partir de uma pequena distância do ponto de observação. Com isso aplicamos a condição de que o cálculo dos elementos de uma matriz utilizada na inversão somente é executado para os elementos que se encontram na região limitada por uma distância mínima, e os elementos que a ultrapassam assumem o valor nulo.

Realizamos testes com o algoritmo sem mudanças (original) e com o algoritmo otimizado para dois modelos de bacias sintéticas a fim de verificar a eficácia e a eficiência do procedimento proposto. No modelo de bacia rasa de relevo simples as discrepâncias entre os relevos estimados é praticamente nulo e ambos os tempos foram de poucos segundos, sendo pequena a diferença entre eles. Com o modelo de bacia profunda de relevo complexo há uma ligeira diferença entre os relevos estimados, mas ambos são inteiramente concorrentes. Neste caso, como o número de parâmetros é maior, a diminuição do tempo gasto foi considerável. Comprovamos com os testes em bacias sintéticas que a nova matriz modificada pelo procedimento de otimização confere à inversão efetividade e eficiência, mesmo com a pequena diferença no resultado final para o relevo complexo.

A fim de validar esta metodologia, sugerimos que como próximo objetivo sejam realizados testes com dados reais de bacias sedimentares, e a comparação com a inversão sem otimização do método de RAMOS (2013) para avaliar o resultado.

REFERÊNCIAS

- OLIVEIRA JUNIOR V. C.; UIEDA L. **Tópicos de inversão em geofísica**. São Paulo: Escola de Verão de Geofísica IAG USP, 2011.
- MARTINS, C. M. **Inversão gravimétrica do relevo 3D de bacias sedimentares e da variação da densidade usando informação a priori sobre o ambiente geológico**. 2009. 129f. Tese (Doutorado em Geofísica) – Observatório Nacional, Rio de Janeiro, 2009.
- NASCIMENTO, I. R. **Análise numérica do sinal gravimétrico e do gradiente e aplicação à inversão**. 2013. 35f. Trabalho de Conclusão de curso (Graduação em Geofísica) - Instituto de Geociências, Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.
- PLOUFF, D. Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections. **Geophysics**, v.41, p.727-41, 1976.
- RAMOS, L. C. **Procedimentos lineares de inversão gravimétrica para estimar o relevo 3D do embasamento de bacias sedimentares**. 2013. 47f. Dissertação (Mestrado em Geofísica) - Instituto de Geociências, Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.
- TELFORD, W. M.; GELDART, L. P.; SHERIFF, R. E. **Applied geophysics**. 2nd. ed. [S.l. : s.n.], 1990.
- TIKHONOV, A. N.; ARSENIN, V. Y. **Solutions of ill-posed problems**. [S.l.]: W. H. Winston & Sons, 1977.