



Universidade federal do Pará
Serviço Público Federal
Campus Universitário de Abaetetuba
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias
Curso de Licenciatura Plena em Matemática

Francenildo Pinheiro Gomes

A HISTORIA DA GEOMETRIA E A IMPORTÂNCIA DE ARQUIMEDES

Abaetetuba – PA

2018

Francenildo Pinheiro Gomes

A HISTORIA DA GEOMETRIA E A IMPORTÂNCIA DE ARQUIMEDES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciatura em matemática sob a orientação do Prof. Dr. Osvaldo Barros.

Abaetetuba – PA

2018

Francenildo Pinheiro Gomes

A HISTORIA DA GEOMETRIA E A IMPORTÂNCIA DE ARQUIMEDES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciatura em matemática sob a orientação do Prof. Dr. Osvaldo Barros.

BANCA EXAMINADORA

Prof Dr Osvaldo dos Santos Barros – orientador

Prof Dr José Francisco da Silva Costa – examinador

Prof Dr Manuel dos Santos Costa - examinador

Abaetetuba – PA

2018

DEDICATÓRIA

Dedicado a meus pais Maria do Carmo Pinheiro e Francisco da Silva, a meus irmãos, a meus amigos da juventude missionaria e ao Izaque Pantoja e o Jhonata Gonçalvez vocês são minha força.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente eu gostaria de agradecer a DEUS por ter me concedido o privilegio de esta concluindo este curso o qual eu tanto almejei e por me proporcionar muitos momentos inesquecíveis dentro do campus.

Aos meus pais Francisco da silva e Maria do Carmo pinheiro por terem me incentivado a prosseguir nos meus estudos apesar de todas as dificuldades financeiras

A meus irmãos que me deram muito apoio tanto financeiro quanto moral para não desistir, por que a vida é um ciclo e o que define o seu futuro são os seus atos.

A meus colegas de curso principalmente Izaque Portugal e Jhonata Gonçalves que apesar de todas as brincadeiras eles estavam sempre prontos a me ajudar além de incentivarem a superar as dificuldades do curso.

Agradecer ao meu orientado que me auxiliou nesse trabalho e que mostrou ser um excelente profissional dos qual é uma honrar ser orientando. Ele proporcionou-me um novo olhar para o ensino da matemática onde não depende somente do calculo mas sim da sua relação com o aluno e seus métodos de ensino.

A prisão não são as grades, e a liberdade não é aruá; existem homens presos na rua e livres na prisão. É uma questão de consciência.

Mahatma Gandhi

RESUMO

Neste trabalho será abordado a história da matemática com ênfase na geometria até o período de Arquimedes (século III a.C.) focalizando Arquimedes, “o gênio de Siracusa”, e dois de seus principais trabalhos; o método da exaustão e a quadratura da parábola. A metodologia utilizada foi somente de caráter bibliográfico, tendo como objetivo mostrar um pouco da história da matemática. Onde e como ela se desenvolveu e conhecer sobre as obras de Arquimedes um dos maiores matemático de todos os tempos, principalmente sobre o método da exaustão e a quadratura da parábola que apresentam uma complexidade semelhante ao cálculo integral estudado hoje. Os estudos abordados sobre o método da exaustão e a quadratura da parábola mostram a grandeza do “gênio de Siracusa” que acredita se que serviu de base para o cálculo integral e as definições de infinitos que conhecemos hoje, usados nas disciplinas de cálculo nos cursos de matemática, física, engenharia e outros.

PALAVRAS-CHAVE: História da geometria. Arquimedes quadratura da parábola. Ensino de Geometria.

LISTA DE FIGURAS/ILUSTRAÇÕES

Figura 1 Triângulo retângulo de Pitágoras	5
Figura 2: Arquimedes de Siracusa.....	7
Figura 3: Triângulo quaisquer atribuído a Arquimedes.	9
Figura 4: Método de exaustão para aproximar a área do círculo.	11
Figura 5: Grandezas a e b	15
Figura 6: Grandezas a e nb	15
Figura 7: Grandezas a_1 e c	16
Figura 8: Grandezas a_2 e c_1	16
Figura 9: Grandezas a_3 e b	16
Figura 10	19
Figura 11	20
Figura 12	20
Figura 13	21
Figura 14	21
Figura 15	22
Figura 16	22
Figura 17	23
Figura 18	23
Figura 19	24

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	1
1 - MATEMÁTICA DEDUTIVA.....	4
2- VIDA E TRABALHOS DE ARQUIMEDES.....	6
CAPITULO I.....	13
MÉTODO DE EXAUSTÃO.....	13
1 - AXIOMAS DE ARQUIMEDES	13
CAPITULO II.....	18
1 - QUADRATURA DA PARÁBOLA	18
2- MÉTODO DA DUPLA REDUÇÃO AO ABSURDO.	25
CONCLUSÃO	29
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	30

INTRODUÇÃO

A matemática vem sendo desenvolvida ao longo do tempo e foi organizada em três grandes ramos; aritmética, álgebra e geometria. Segundo (BOYER, 1996) no século vinte os matemáticos desenvolviam uma matemática muito complexa da qual é difícil definir, no entanto, grande parte do que chamamos de matemática hoje deriva de ideias que eram centradas nos conceitos de números, grandezas e formas. A princípio estes conceitos estavam ligados mais com contrastes do que com semelhança. Serão apresentadas algumas características desses ramos a serem desenvolvidos na matemática: aritmética, álgebra e geometria, dando foco à geometria.

ARITMÉTICA

A palavra aritmética vem do grego Arithmos que significa números. O que nos transmite que a aritmética é o estudo dos números. A operação aritmética fundamental no Egito era a adição e nossas operações de multiplicação e divisão eram efetuadas no tempo de Ahmes (1650 a.C.) por sucessivas “duplações”. Mas quando se trata de números nos dias de hoje existe uma grande complexidade. No entanto, na Antiguidade eles utilizavam basicamente com os números inteiros.

Segundo Eves (2004, P 25) o conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se antes dos primeiros registros históricos e que a maneira como esse desenvolvimento ocorreu foi conjectural. Ele afirma que artefatos encontrados trazem registros de que o homem era capaz de contar a aproximadamente 50.000 anos atrás.

Boyer (1996) descreve que os povos antigos contavam apenas até dois e que qualquer conjunto além desse nível era tido como “muitos” e ainda hoje povos primitivos contam objetos em grupos de dois. “Com a evolução, o homem passou a utilizar os dedos de uma mão para indicar um conjunto de dois, três, quatro ou cinco objetos”, já quando sentiu a necessidade que contar quantidades maiores desenvolveram o um sistema de base dez o que temos até os dias de hoje.

O conceito de número inteiro é mais antigo na matemática e sua origem se perde nas nevas da antiguidade pré-histórica. A noção de fração racional, porém, surgiu relativamente tarde e em geral não estava relacionada de perto com os sistemas para inteiros. (BOYER, 1996, P 10)

No decorrer do tempo foram sendo criados novos tipos de números como os racionais, irracionais e complexos. Segundo Boyer, (1996) os racionais surgiram durante a idade do bronze com a necessidade de dividir as áreas de terra, eles possuem a forma $\frac{p}{q}$ com $q \neq 0$, Os números irracionais surgiram de um problema onde existiam números na reta numérica que não podem ser escritos da forma $\frac{p}{q}$, segundo Eves (2004) os pitagóricos provaram a existência desses números que formam o conjunto que ficou conhecido como “números irracionais”. Já os números complexos surgiram lentamente com a necessidade da resolução das equações quadráticas de raiz de número negativo e equações cúbicas, EVES (2004) menciona que por volta de 1535, Tartaglia (século XVI d.C.) anunciou ter descoberto uma solução algébrica para equações cúbicas. Os irracionais são representados pela fórmula $z = a + bi$.

ÁLGEBRA

A álgebra é a área da matemática que busca generalizar cálculos aritméticos ou abstratos utilizando números e letras ou apenas letras. Ela foi desenvolvida a partir da aritmética. Segundo Eves (2004) por volta do ano 2000 a.C., a aritmética evoluiu para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Já Boyer (1996) descreve que no papiro de Rhind existem problemas algébricos que não expressavam objetos concretos. No entanto, estes problemas apresentados no papiro de Rhind assemelham-se com as equações lineares da forma $a + ax = b$ ou $a + ax + bx = c$. Onde b e c são desconhecidas. A resolução desses problemas dava-se por um método que ficou conhecido como método da “falsa posição”.

Nesse período foram introduzidos outros instrumentos na álgebra como as equações quadráticas. BOYER (1996) menciona que a solução da quadrática era de difícil entendimento para os egípcios. Mas os babilônicos pareciam ter uma familiaridade maior com ela. Pois eles tinham conhecimento de uma álgebra flexível onde podiam transportar termos somando quantidades iguais em ambos os

membros ou multiplicar por quantidades iguais para remover frações indesejadas. Estratégia que utilizamos nos dias de hoje no curso de cálculo.

Hoje a álgebra tem vários ramos como: Universal, Linear, Elementar, Abstrata e Computacional. Entretanto não abordaremos estas áreas, pois vamos nos centrar no tema, o método de exaustão e a quadratura da parábola.

GEOMETRIA

A geometria é o ramo da matemática que estuda as medidas, os espaços e as figuras que podem ocupa-los. Ela pode ser observada em diferentes ambientes, formas e objetos; nas folhas, nas flores, na casa, nos animais, no espaço, enfim, em todo lugar que você olhar irá se deparar com alguma forma geométrica.

O significado da palavra geometria vem do grego, onde GEO = terra e METRIA = medida. O que nos remete ao raciocínio de dizer que geometria é a “medida da terra”. No entanto, qualquer afirmação sobre a origem da geometria é muito conturbada. BOYER (1996) menciona que; “afirmações sobre a origem da matemática, seja aritmética ou geometria são muito arriscadas, pois os primórdios são mais antigos do que a arte de escrever”.

As divergências sobre a origem da geometria são tão imprecisas que Heródoto (século V a.C.) e Aristóteles (século IV a.C.) não se arriscaram em colocar origens tão antigas. Mas Heródoto defendia que a geometria surgiu no Egito com a necessidade prática da divisão de terra após cada inundação do vale do Nilo. Já Aristóteles defendia que uma classe sacerdotal tinha conduzido os primeiros registros da geometria. Podemos notar a desconcordância do pensamento dos dois matemáticos já que um defende que ela surgiu pela necessidade prática e o outro defende que ela surgiu pelo lazer.

Com a invenção da escrita por volta do século XX a.C. facilitou os registros matemáticos. Mas apenas os escribas obtinham conhecimento da escrita o que levou a estes serem os primeiros a registrar cálculos geométricos. Entretanto, eram os arquitetos que os colocavam em prática.

A invenção da escrita, em meados do quarto milênio a.C., deu grande impulso à matemática e deve ser ressaltado que os escribas, restrita classe de funcionários que detinham o privilegiado conhecimento da arte de grafar, foram os primeiros a adquirir conhecimento sobre os números, até porque era a eles que as pessoas certamente recorriam sempre que enfrentavam

algum problema mais difícil. Por sua vez, foram os arquitetos e construtores primitivos os pioneiros na solução das questões básicas da geometria. (GARBI, 2006, P 13)

É importante ressaltar que as soluções das questões geométricas dessa época eram feitas de maneira prática sem um embasamento teórico. No Egito os geômetras eram chamados de “estiradores de cordas”, pois eles utilizavam as cordas como uma das principais ferramentas de estudo, tanto para traçar as bases de templos como para demarcação de terra. Já na babilônia de acordo com BOYER (1996), Os babilônicos desenvolviam a geometria de maneira mensurável no período de 2000 a.C. a 1600 a.C.. Há registros que apontam os babilônicos como conhecedores das áreas de triângulos retângulos e isósceles, área do trapézio retangular e volume de um paralelepípedo reto-retângulo. No entanto, o conhecimento deste povo também era de cunho prático sem uma demonstração dedutiva.

1 - MATEMÁTICA DEDUTIVA

A matemática dedutiva é o princípio onde partimos de um raciocínio lógico para obter uma conclusão. A conclusão torna evidente a veracidade ou a falsidade da hipótese. Segundo Eves (2004, p.94) numa esfera de racionalismo crescente a visão empírica do oriente antigo sobre as coisas tornou-se insuficiente para explicar as coisas. Surgiram questionamentos como: “Por que os ângulos da base de um triângulo são iguais?” e “Por que o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?”. Estes questionamentos foram respondidos pela matemática dedutiva, assim no sentido moderno da palavra, surgiu nessa esfera de racionalismo.

A matemática dedutiva teve grande destaque com os matemáticos; Tales de Mileto (primeira metade do século VI a.C.), Pitágoras de Samos (segunda metade do século VI a.C.), Platão (século V a.C.), Eudoxo de Cnido (século V a.C.), Aristóteles (século IV a.C.), Euclides (século IV a.C.) e Arquimedes de Siracusa (século III a.C.). Porém, abordaremos a penas as contribuições deles para a geometria.

Eves (2004) relata que, as primeiras demonstrações dedutivas foram feitas pelos gregos, em especial por Tales de Mileto (640 a.C.) onde; ele calculou a altura da pirâmide egípcia além de demonstrar vários outros problemas como: todo ângulo inscrito em um semicírculo é reto e conseqüentemente todo triângulo formado pelo

diâmetro e um ponto do semicírculo também é reto; dois ângulos opostos pelo vértice são iguais; qualquer diâmetro divide o círculo em duas partes iguais; em um triângulo isósceles os ângulos da base são iguais; dois triângulos que tenham um lado e os ângulos a eles adjacentes respectivamente iguais são iguais; em triângulos semelhantes os lados homólogos são proporcionais.

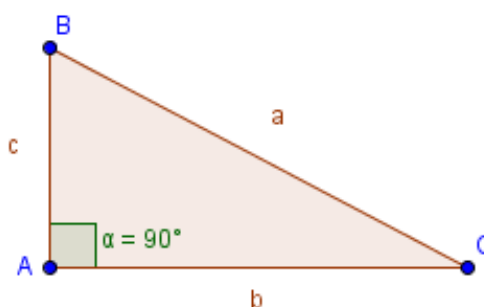
A matemática continuou evoluindo com Pitágoras de Samos (século VI a.C.) que, embora não possa ser comprovado que Pitágoras foi discípulo de Tales (século VI a.C.) ou que possa ter existido qualquer encontro pessoal entre eles. BOYER (1996) relata que há fortes indícios que ele recebeu influências dos trabalhos de matemática feito pelo gênio de Mileto. No entanto, Pitágoras (século VI a.C.) foi mais além e fundou uma sociedade secreta (os pitagóricos) onde os intelectuais se reuniam para tratar assuntos da matemática. Essa sociedade deu continuidade nos trabalhos de Tales onde eles diziam que “a matemática se relacionava mais com o amor e a sabedoria do que com as exigências da vida prática”.

Pitágoras (século VI a.C.) contribuiu para a matemática com muitos trabalhos como: a teoria das proporcionais; a construção de figuras cósmicas; o pentagrama; as noções geométricas de que um ponto gera uma dimensão; dois pontos determinam uma reta de dimensão um; três pontos não alinhados formam um triângulo com área de dimensão dois; quatro pontos não coplanares formam um tetraedro com volume de dimensão três e principal deles que é o teorema de Pitágoras que descreve que o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo pode ser calculado pela fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Veja a figura a seguir onde mostra a o triângulo de Pitágoras.

Figura 1 : Triângulo retângulo de Pitágoras



Fonte: produção do próprio autor.

Platão (século V a.C.) não teve grande influência com descobertas na matemática geométrica. Mas na poderíamos deixar de lembrar-se do fundador de uma das maiores escolas matemáticas da antiguidade. Segundo EVES (2004) tinha como lema de entrada: “que aqui não adentrem aqueles não-versados em geometria”. Da escola platônica saíram grandes matemáticos e um deles foi Eudoxo de Cnido que descobriu a teoria das proporções. BOYER (1996) diz que o conceito de razão de Eudoxo exclui o zero, pois esclarece as grandezas de mesma espécie.

No segmento da história da geometria surge outra personagem um matemático cuja sua naturalidade fora desconhecida; mas de grande importância e sem dúvida um dos maiores geométricos de todos os tempos. Para EVES (2004) Euclides foi chamado por Ptolomeu para trabalhar na biblioteca de Alexandria no departamento de matemática onde foi indagado pelo próprio Ptolomeu sobre um caminho mais curto para o conhecimento geométrico, sua resposta foi deslumbrante “não há estradas reais na geometria”. Entretanto Euclides ficou conhecido por seu celebre trabalho “os elementos”.

“Os elementos” foram tão importantes para a matemática que “nenhum trabalho foi tão largamente estudado como ele, exceto a Bíblia”, por mais de 2.000 anos ele dominou o ensino da geometria (EVES, 2004). Já para BOYER (1996) fala sobre algumas obras importantes perdidas, onde se destaca o trabalho sobre as cônicas.

O último geométrico que abordaremos neste trabalho é Arquimedes de Siracusa ele considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Ele desenvolveu seus estudos a base de régua e compasso. Porém, deste falaremos um pouco mais detalhado devido sua importância no método de exaustão e na quadratura da parábola.

2- VIDA E TRABALHOS DE ARQUIMEDES

Nesse tópico vamos conhecer mais sobre Arquimedes, dando ênfase para sua vida e seus trabalhos em diferentes ramos da matemática da Antiguidade.

Arquimedes nasceu na cidade de Siracusa (Grécia). Por volta de 287 a.C. e morreu golpeado pela espada de um soldado romano durante um dos ataques liderados pelo general Marcelo, a cidade de Siracusa em 212 a.C. Ele é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos, e sem dúvida o maior de toda a

antiguidade. Há relatos de que Arquimedes esteve no Egito, possivelmente na biblioteca de Alexandria (“centro do conhecimento da época”), pois contava com amigos naquele lugar.

Figura 2: Arquimedes de Siracusa



Fonte: produção do próprio autor, adaptado do livro do Eves,(2004)

Arquimedes ficou conhecido na área da física por ter descoberto a primeira lei da hidrostática. Esta descoberta deu-se devido à "história da coroa do rei Hierão", onde se desconfiava da existência de prata oculta em meio ao ouro da coroa. Segundo EVES (2004) essa história aconteceu da seguinte maneira.

Pelo que consta esse ourives moldara para o rei, com um dado peso de ouro, uma coroa. Suspeitando de que pudesse haver prata oculta em meio ao ouro e não desejando desmanchar a coroa para tirar a prova, o rei encaminhou a questão a Arquimedes. E este, quando um dia se encontrava nos banhos públicos, deu com a solução, descobrindo a primeira lei da hidrostática – que um corpo, quando mergulhado num fluido, recebe um empuxo de intensidade igual ao peso do volume de água deslocado. Na sua excitação, Arquimedes teria se esquecido de vestir-se e saiu nu pelas ruas correndo para casa gritando, "Eureka, Eureka!" ("Achei, achei!"). Ele colocou a coroa num dos pratos de uma balança e um peso igual de ouro na outra e depois repetiu essa operação sob a água. O prato com a coroa ergueu-se mostrando que ela continha algum material espúrio, menos denso que o ouro. (EVES, 2004, P 193)

Arquimedes era um estudioso da matemática e autor de vários trabalhos, dos quais muitos foram perdidos. Das obras que foram preservadas, destacam-se principalmente estas:

Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas I;
A Quadratura da Parábola;
Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas II;
Sobre a Esfera e o Cilindro;
Sobre as Espirais; Sobre os Cones e os Esferoides;
Sobre os Corpos Flutuantes;
A Medida de um Círculo;
O Contador dos Grãos de Areia.

Segundo alguns historiadores, existem outros textos perdidos ou incompletos dos quais se destacam o Livro dos Lemas e o trabalho sobre a teoria dos espelhos.

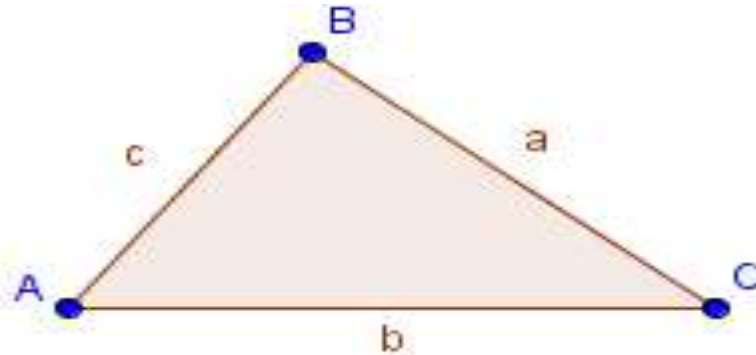
Destacamos alguns dos trabalhos de Arquimedes que se deram em diferentes ramos da matemática, como; na geometria plana, geometria espacial, aritmética, matemática aplicada, além de trabalhos na área da física como o citado anteriormente, entre eles: as Espirais, Aritmética, Matemática Aplicada e Geometria.

ESPIRAIS

No seu trabalho sobre as espirais, Arquimedes dedicou-se as propriedades das curvas hoje conhecida por espiral de Arquimedes, este trabalho é composto de vinte e oito proposições e a equação polar: $r = k\theta$ que de maneira especial, encontra-se a área compreendida pela curva e por dois raios iguais (o que seria hoje um exercício de cálculo). Há possibilidade da existência de outros trabalhos de Arquimedes envolvendo a geometria plana, e motivos para-se acreditar que muitos desses trabalhos foram preservados em uma coleção deixada pelo povo árabe o “*liber assumptorum*”. Onde um erudito árabe al-Biruni reivindicou para Arquimedes a paternidade da fórmula:

$$\text{Área} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Figura 3: Triângulo quaisquer atribuídos a Arquimedes.



Fonte: produção do próprio autor

Que mostra a área de um triângulo através dos seus três lados. Até essa época, a patente da fórmula era atribuída a Hierão de Alexandria.

ARITMÉTICA

Arquimedes escreveu dois livros sobre a aritmética, um deles foi enviado ao Gelão, filho do rei Hierão, o outro se perdeu. O enviado ao Galeão contém um novo sistema de numeração. O objetivo destes era representar números muito grandes e poder calcular o limite superior para o número de grãos de areia. Este trabalho ganhou o nome de “o contador de grãos de areia” e objetivava mostrar que Arquimedes poderia escrever um número tão grande que seria superior ao número de grãos de areia necessário para preencher a terra. Em um trecho do livro de BOYER (1996) relata que:

Arquimedes interpretou o universo de Aristarco como tendo um raio que está para a distância do Sol, como está para o raio da Terra. Com essas hipóteses Arquimedes mostra que o diâmetro do universo ordinária, indo até o Sol, é menor que 10^{16} estádios. Em seguida ele tinha que avaliar o tamanho de um grão de areia; para maior segurança, ele assumiu que 10 000 grãos de areia não são menos que uma semente de papoula, que o diâmetro de uma semente de papoula não é menor que quarenta avos da largura de um dedo, e que o estádio por sua vez é menor que 10 000 larguras de dedos. Reunindo todas essas desigualdades, Arquimedes concluiu que o número de grão de areia necessário para encher a esfera do universo então geralmente aceito é menor que um número que nós escrevíamos como 10^{51} . Para o universo de Aristarco, que está para o universo ordinário como esse está para a terra, Arquimedes mostrou que são necessários não mais que 10^{63} grãos de areia. (BOYER, 1996, P 86).

MATEMÁTICA APLICADA

Há dois trabalhos na área da matemática aplicada; o equilíbrio de figuras planas e sobre os corpos flutuantes. O de equilíbrio de figuras planas está em dois livros contendo vinte e cinco proposições e, trata das propriedades elementares dos centroides e determinam centroides de várias áreas planas. Já, sobre os corpos flutuantes, foi trabalhado em dois livros, com noventa proposições e representa a primeira aplicação da matemática na hidrostática. Trabalho que se baseia em dois postulados onde desenvolve o primeiro as leis da hidrostática que fazem parte do curso de física elementar.

GEOMETRIA

Segundo (EVES, 2004) dois trabalhos na geometria espacial, um sobre a esfera e o cilindro e o outro sobre os cones e esferoides. O primeiro trabalho está dividido em dois livros; O primeiro livro contendo cinquenta e três proposições e teoremas que permitem encontrar as áreas de uma esfera e de uma calota esférica; e o segundo, contem o problema de seccionar uma esfera com plano de modo que obtenha dois segmentos esféricos onde os volumes estejam na mesma razão. Pappus atribuiu a Arquimedes trinta poliedros semirregulares. Só que, a descrição original foi perdida ao longo do tempo. Além disso, foi Pappus quem escreveu sobre a celebre frase de Arquimedes “dei-me uma alavanca e um ponto de empuxo e moverei a terra”.

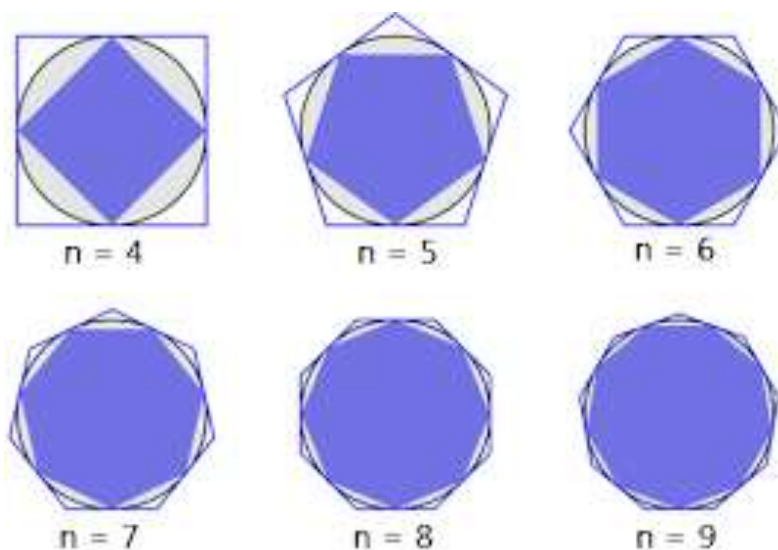
No seu trabalho sobre a circunferência, Arquimedes teve uma grande influência na solução do problema da constante desconhecida na época. A qual nós conhecemos hoje como π . E o livro “A rainha das ciências” deixa bem explicito em um de seus trechos.

Esta descoberta de Arquimedes permitiu concluir que, se o comprimento da circunferência é $2\pi R$, e sua área é πR^2 . Em outras palavras, havia um número misterioso a ser encontrado, por meio do qual tanto o perímetro quanto a área do círculo sejam conhecidos. Para achar tal número, que ainda não fora batizado de π , Arquimedes deduziu geometricamente duas formulas que permitem, conhecidos os perímetros de dois polígonos regulares de n lados, um inscrito e outro circunscrito a um círculo, determinar os perímetros de outros dois, com o dobro do número de lados. Formulas deste tipo são hoje chamadas “fórmulas de recorrência” e Arquimedes foi o primeiro matemático da história a usá-las (a dedução das fórmulas usadas por Arquimedes, em seu tratado ***A Medida de um círculo***

Pode ser encontrada no livro *The Works of Archimedes*, T.L. Heath. Dover Publications). Assim, partindo de dois, hexágonos regulares, um inscrito e outro circunscrito, cujos perímetros são conhecidos, e usando suas formulas de recorrência, ele foi duplicando o número de lados até chegar a 96, quando deu-se por satisfeito ao demonstrar que $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ ou, em decimal $3,1408 \dots < \pi < 3,1428$ (média de 3,1418). Um feito admirável, num dos grandes momentos da história da matemática. (GARBI, 2006, P 68)

Ele começou inserindo um hexágono dentro do círculo e outro fora. Em seguida, foi adicionando mais e mais lados até chegar a 96. Esta ideia era fazer com que os polígonos se aproximassem o máximo possível do perímetro do círculo, o que lhe daria os limites cada vez mais próximos entre os quais deveria estar π . (é importante ressaltar que nesse período não era adotada esta notação (π) para esse numero)

Figura 4: Método de exaustão para aproximar a área do círculo.



Fonte: www.obaricentrodamente.com/2008/12/breve-cronologia-de-pi.html

Ele calculou assim que o valor de π estava entre $310/71$ (aproximadamente 3.1408) e $31/7$ (cerca de 3,1429), uma estimativa que ainda é usada pelos engenheiros até os dias de hoje, e é mais do que suficiente para todos os propósitos práticos.

Na geometria plana Arquimedes desenvolveu um estudo sobre a parábola. Em específico, ele buscava mostrar que é possível calcular a área de um segmento parabólico. No segmento do trabalho vamos tratar esses dois temas específicos

desenvolvidos por Arquimedes que estão interligados: o método de exaustão e a quadratura da parábola.

Segundo EVES (2004) Arquimedes complementou o método da exaustão de Eudoxo e utilizou para solução de diversos problemas e um deles foi a quadratura da parábola que mostraremos no capítulo II. Estas foram duas das grandes contribuições de Arquimedes na área da geometria e um marco para a história da matemática por apresenta um conhecimento muito avançado para a época. No entanto, vamos primeiramente mostrar o que é o método de exaustão e como ele se desenvolveu, e em seguida a quadratura da parábola. veja os capítulos a seguir.

CAPITULO I

MÉTODO DE EXAUSTÃO

O método de exaustão é também conhecido como “*princípio de Eudoxo-Arquimedes*” por ter na sua base a teoria das proporções apresentada por Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) e por Arquimedes de Siracusa que foi o matemático que deu maior visibilidade ao método.

A teoria das proposições de Eudoxo apresentava um modo de ultrapassar as limitações na matemática grega evidenciadas com a descoberta dos incomensuráveis. Segundo BOYER (1996) o método de exaustão é um método equivalente ao método grego do cálculo integral.

1 - AXIOMA DE ARQUIMEDES

Dadas duas grandezas que tem uma razão pode-se encontrar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra. De modo que essas grandezas sejam não nulas.

Este axioma foi o qual serviu de base para o método de exaustão.

O método de exaustão é o fundamento de um dos processos essenciais do cálculo infinitesimal. No entanto, enquanto no cálculo se soma um número infinito de parcelas, Arquimedes nunca considerou que as somas tivessem uma infinidade de termos. Para poder definir uma soma de uma serie infinita seria necessário desenvolver o conceito de número real que os gregos não possuíam. Não é correto falar do método de exaustão como um processo geométrico de passagem para a limite. Pois a noção de limite pressupõe a consideração do infinito que esteve sempre excluída da matemática grega. No entanto, o seu trabalho foi o mais forte incentivo para o desenvolvimento posterior da ideia de limite e de infinito no século XIX. De fato, os trabalhos de Arquimedes constituíram a principal fonte de inspiração para a geometria no século XVII que desempenhou um papel importante no desenvolvimento do cálculo infinitesimal. (BOYER, 1974, P 67)

Dadas quatro grandezas, a , b , c , e d , e suas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, temos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, dados m e n inteiros, para toda fração $\frac{m}{n}$, acontece um dos seguintes casos:

- $\frac{m}{n} < \frac{a}{b}$ e $\frac{m}{n} < \frac{c}{d}$, ou seja, a fração é menor que as duas.
- $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ e $\frac{m}{n} = \frac{c}{d}$, ou seja, a fração é igual às duas.

➤ $\frac{m}{n} > \frac{a}{b}$ e $\frac{m}{n} > \frac{c}{d}$, ou seja, a fração é maior que as duas.

Isso implica que, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ não podemos ter uma fração que esteja entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ pois se isso ocorrer ela será igual a ambas as frações.

Observação;

Note que, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e dados dois inteiros m e n , as seguintes proposições são validas:

- Se $ma < nb$, então $mc < nd$;
- Se $ma = nb$, então $mc = nd$;
- Se $ma > nb$, então $mc > nd$;

Usando estes conhecimentos e o fato de que o conjunto dos números naturais não é limitado superiormente, podemos concluir dois resultados expressos em teoremas:

1. **TEOREMA 1.** Dado um número real $a > 0$ existe um inteiro $n_0 > 0$ tal que $\frac{1}{n_0} < a$.
2. **TEOREMA 2.** Dados dois números reais positivos a e b existe um número natural inteiro n tal que $na > b$.

DEMONSTRAÇÕES DOS TEOREMAS 1 E 2 RESPECTIVAMENTE.

- Dado um $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos por absurdo, que exista um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} > a$ para todo n inteiro positivo. Isso implica que $n < \frac{1}{a}: \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, o conjunto dos naturais é limitado superiormente o que é um absurdo, então existe um n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < a$.
- Dado um número $\frac{a}{b}$, pelo teorema demonstrado acima, existe um numero $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{a}{b}$ multiplicando por bn ambos os membros obteremos $\frac{bn}{n} < \frac{bna}{b}$ o que implica que $b < na$.

O princípio de Arquimedes mostra que quando duas grandezas são diferentes, é possível encontrar um múltiplo de qualquer uma delas que seja maior que a outra. Esta ideia era a base para a demonstração do método de exaustão a seguir apresentaremos um teorema que evidencia esta ideia.

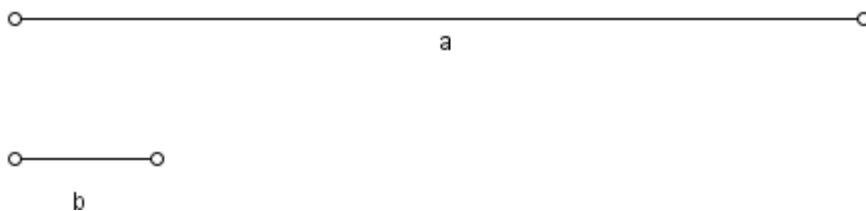
TEOREMA 3.

Dadas duas grandezas distintas, se a maior se subtrai mais que a sua metade, e do restante mais que sua metade, e assim por diante, acabara sobrando uma grandeza menor do que a menor das grandezas dadas.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.

Tome duas grandezas de mesma natureza, e suponha que $a > b$. De acordo com o teorema (acima) existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $nb > a$.

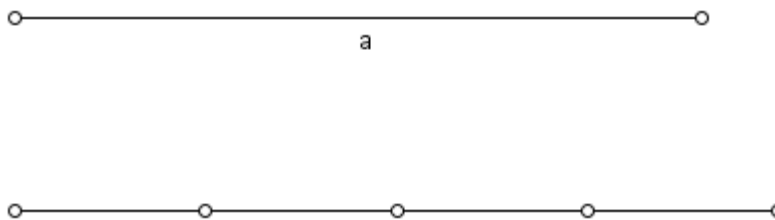
Figura 5: Grandezas a e b



Fonte: produção do próprio autor

De acordo com o teorema (acima) existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $nb > a$.

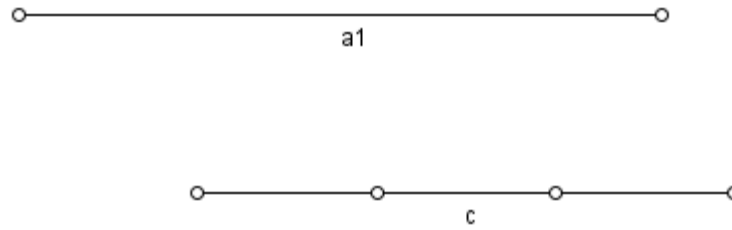
Figura 6: Grandezas a e nb



Fonte: produção do próprio autor

Observe que se tirarmos mais que a metade de a e de nb retirarmos b . Restam-nos duas grandezas $a_1 < \frac{1}{2}a$ e $(n - 1)b > a_1$. Chamaremos $(n - 1)b$ de c

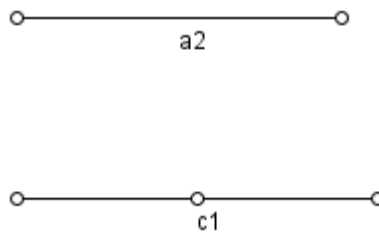
1Figura 7: Grandezas a1 e c



Fonte: produção do próprio autor

Por um processo semelhante ao anterior. Retiremos mais que a metade de a_1 e de $(n - 1)b$ retirar b , ficaremos com duas grandezas $a_2 < \frac{1}{2}a_1$ e $(n - 2)b$, tais que $(n - 2)b > a_2$. Chamaremos $(n - 2)b$ de c_1

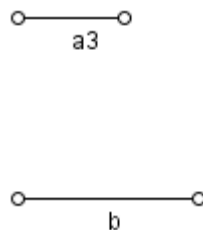
Figura 8: Grandezas a2 e c1



Fonte: produção do próprio autor

Assim obteremos uma grandeza a_{n-2} . Tal que $2b > a_{n-2}$. Se retirarmos mais que a metade de a_{n-2} e de $2b$ retirar b , restará uma grandeza a_{n-1} tal que $b > a_{n-1}$. Note que a_{n-1} é menor que b , que era a menor das grandezas dadas inicialmente. Portanto o princípio de Eudoxo Arquimedes é verdadeiro. Chamaremos a_{n-1} de a_3

Figura 9: Grandezas a3 e b



Fonte: produção do próprio autor

Como mencionado anteriormente para esclarecer o método de exaustão, vamos desenvolvê-lo na demonstração da quadratura da parábola. Feita por

Arquimedes em um de seus célebres trabalhos. Esta aplicação geométrica é tratada como um dos trabalhos mais difícil da Antiguidade. Observe-a no capítulo a seguir.

CAPITULO II

1 - QUADRATURA DA PARÁBOLA

Arquimedes demonstrou a quadratura da parábola usando apenas régua e compasso além de algumas proposições sobre proporções feitas por Eudoxo. Aqui mostraremos como funciona esta demonstração.

Utilizaremos as seguintes proposições:

PROPOSIÇÃO I

Se por um ponto P de uma parábola traçamos uma reta PV que é uma corda paralela a tangente a parábola ou é paralela a esse eixo, e se AB é uma corda paralela à tangente a parábola em P e que corta PV em V, então: $AV = VB$ reciprocamente, se $AV = VB$ a corda será paralela á tangente em P.

PROPOSIÇÃO II

Se por um ponto da parábola traçamos uma reta que é o eixo ou é paralela ao eixo da parábola como PV, e se por dois outros pontos da parábola Q e R traçamos retas paralelas á tangente a parábola por P e que cortam PV respectivamente em V e W, então

$$PV : PW :: (QV)^2 : (RW)^2$$

PROPOSIÇÃO III

Seja P o vértice e Q um ponto qualquer sobre a parábola e R o ponto no segmento parabólico no qual a tangente é paralela a PQ. Seja M o ponto em que a paralela ao eixo da parábola por R corta AB. Uma paralela á tangente em P. então.

$$PV = \left(\frac{4}{3}\right)RM$$

PROPOSIÇÃO IV

Seja AB a base e P o vértice de um segmento parabólico PAB, seja R o ponto no segmento parabólico no qual a tangente é paralela a PA; então: $PAB = 8\Delta PRA$

PROPOSIÇÃO V

Dada uma sucessão finita de áreas A,B,C,D, ... ,Y,Z, das quais A é a maior e cada uma é quatro vezes sua sucessora, então

$$A + B + C + D + \dots + Y + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A$$

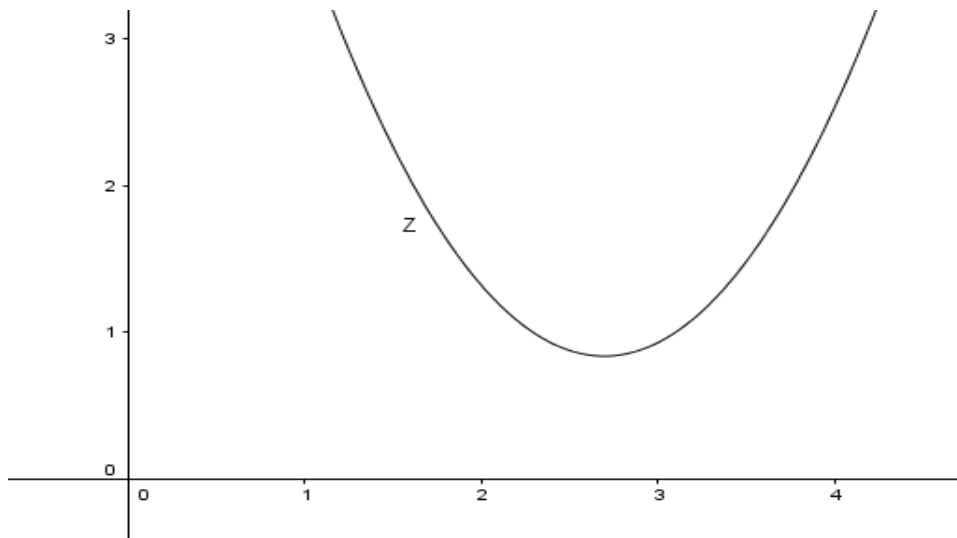
PROPOSIÇÃO VI

Qualquer segmento limitado por uma parábola e uma corda é igual a quatro terços do triângulo que tem a mesma base que o segmento e mesma altura que ele.

DEMONSTRAÇÃO (quadratura da parábola)

Tomemos uma parábola Z

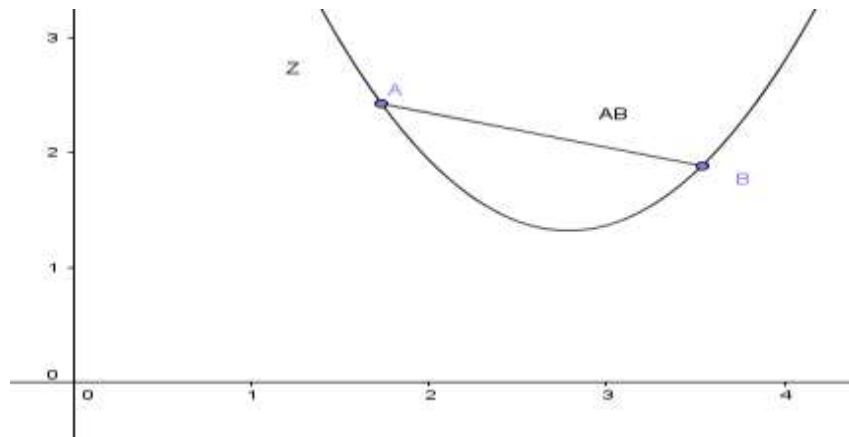
Figura 10



Fonte: produção do próprio autor

Tomemos dois pontos distintos A e B sobre a parábola, e tracemos um segmento de reta AB

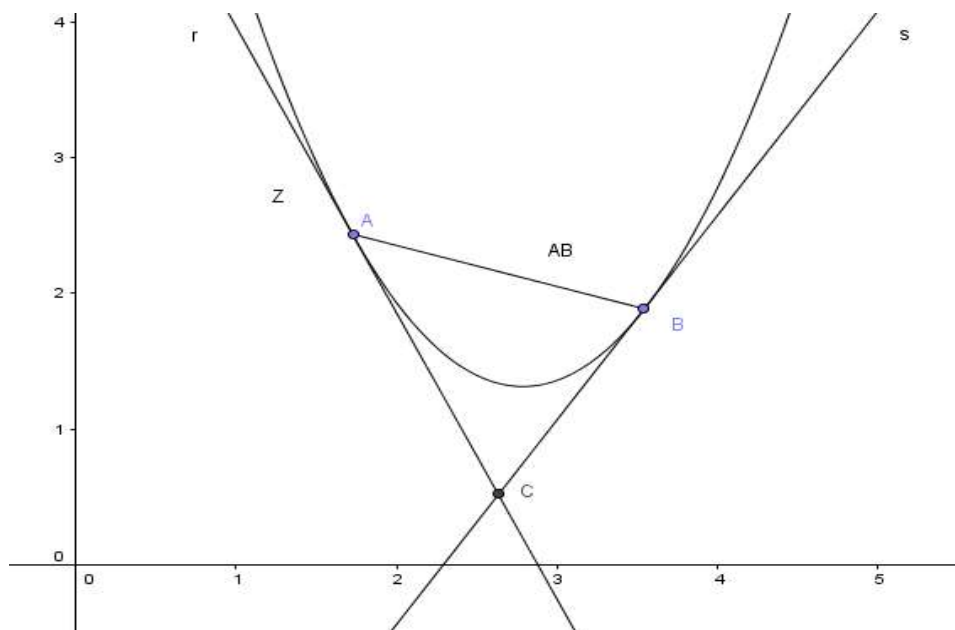
Figura 11



Fonte: produção do próprio autor

Tracemos uma reta r tangente a parábola Z e passando pelo ponto A . seguida tracemos uma reta t tangente a parábola Z e passando pelo ponto B . As retas r e s se interceptam no ponto C .

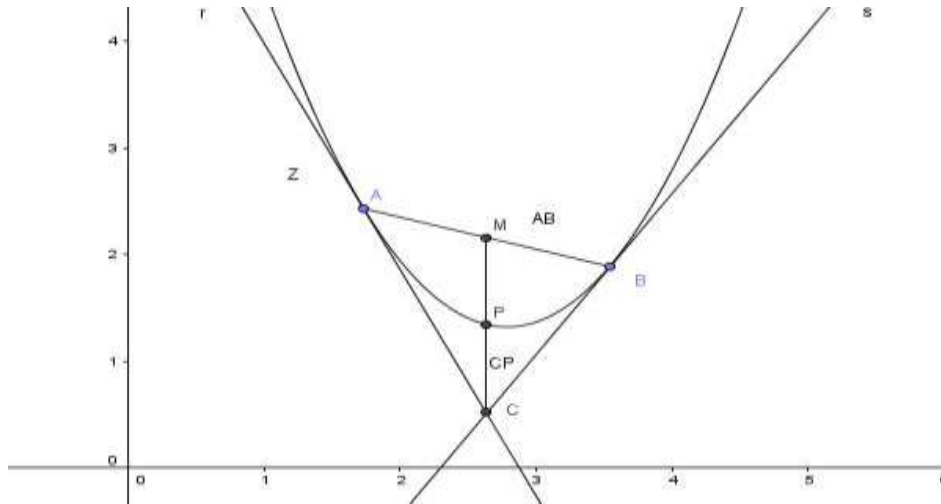
Figura 12



Fonte: produção do próprio autor

A partir de C trace uma paralela ao eixo da parábola Z que cortara a parábola no ponto P , pela proposição I, ela cortara o segmento AB em seu ponto médio M .

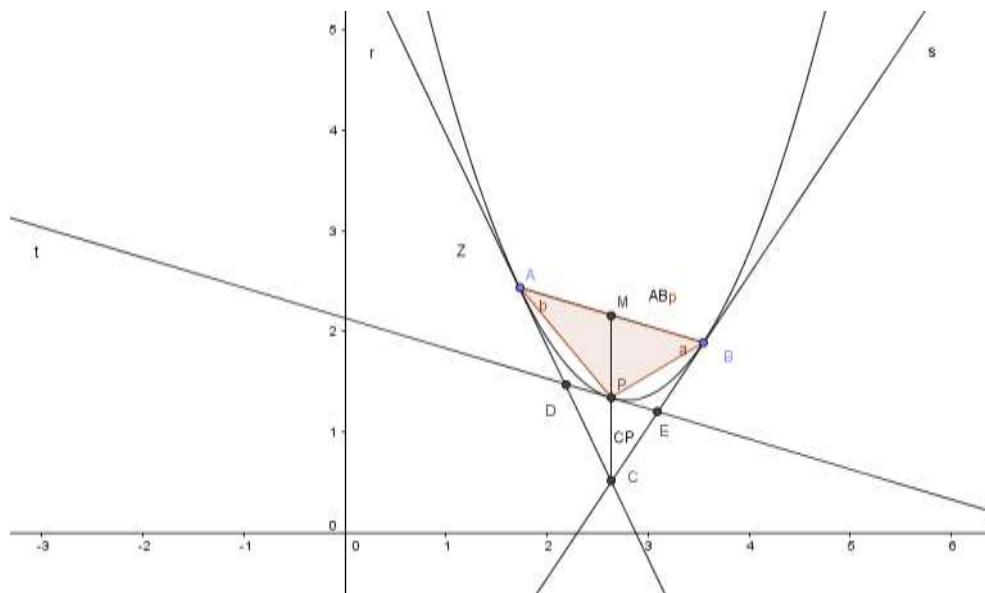
Figura 13



Fonte: produção do próprio autor

Tracemos uma reta t tangente à parábola, passando pelo ponto P e sejam D e E os pontos em que t corta as retas r e s . em D e E respectivamente, em seguida trace o triângulo ΔAPB .

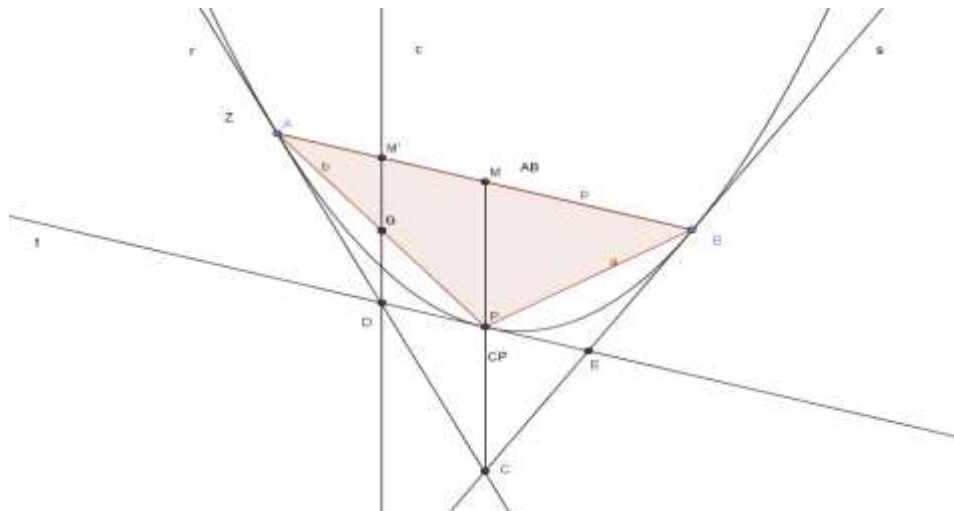
Figura 14



Fonte: produção do próprio autor

Tracemos por D uma paralela ao eixo da parábola que pelo teorema preliminar cortara o segmento AP em seu ponto médio G , note que a paralela que passa pelo ponto médio de AP passa também pelo ponto médio de AM , então M' é ponto médio de AM .

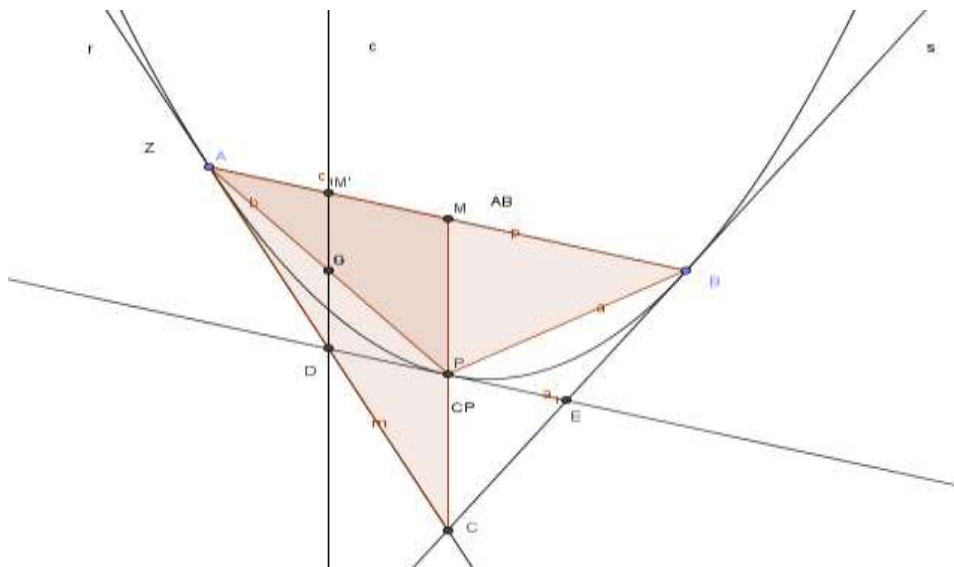
Figura 15



Fonte: produção do próprio autor

Se DM' é paralelo a base do triângulo ΔACM e passa por M' , que é ponto médio de AM , então ela passa pelo ponto médio de AC , conseqüentemente D é ponto médio de AC .

Figura 16

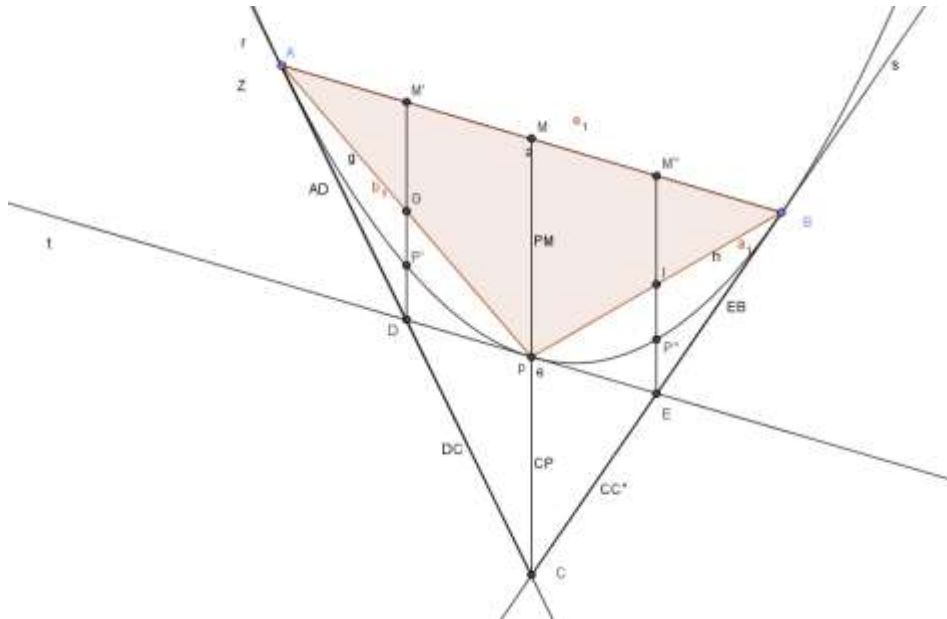


Fonte: produção do próprio autor

Se fizermos de modo análogo para o outro lado da parábola obteremos que E é o ponto médio de BC . Ou seja, t é paralela a AB e passa pelos pontos médios

de AC e BC , logo t divide o triângulo ΔACB na metade, conseqüentemente P é ponto médio de CM , então, $CP = PM$, $DG = GM'$, $EI = EM''$.

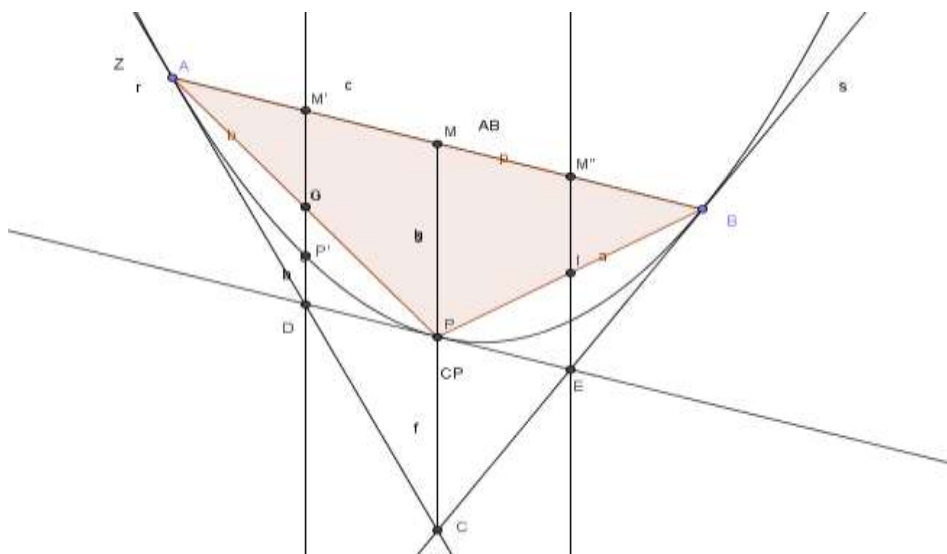
Figura 17



Fonte: produção do próprio autor

Seja P' um ponto em DM' que corta a parábola. De mesmo modo que $CP = PM$, $DP' = P'G$. Como $DG = GM'$, então $P'G = \frac{1}{4}GM'$. De modo análogo, fizemos os mesmos passos para o outro lado da parábola encontraremos algo semelhante.

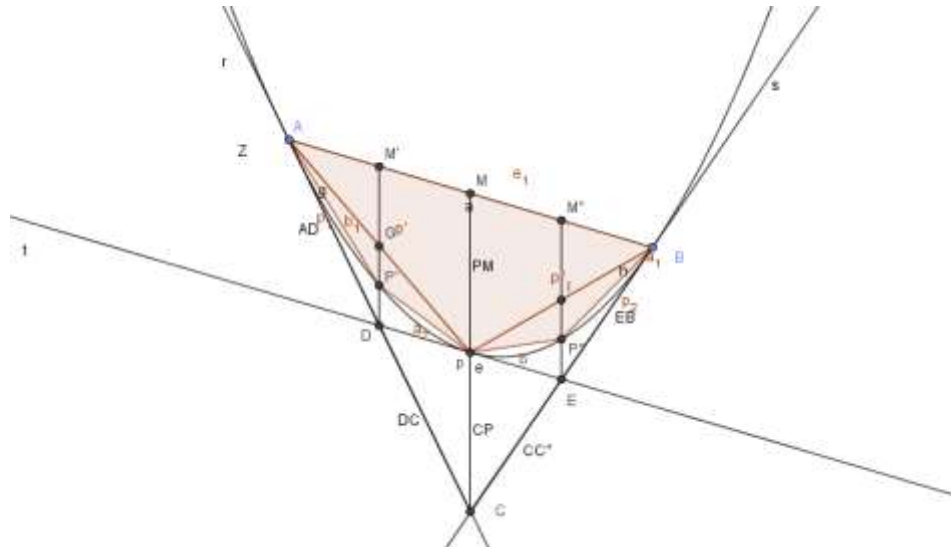
Figura 18



Fonte: produção do próprio autor

Traçando dois triângulos $\Delta AP'P$ e $\Delta PP''B$ respectivamente temos: (ver a imagem)

Figura 19



Fonte: produção do próprio autor

Note que o seguimento parabólico AP é de mesma natureza que o seguimento parabólico AB , e que o triângulo $\Delta AP'P$ também é de mesma natureza que o triângulo ΔAPB . O que implica que se fizermos os mesmos passos vai aparecer um novo triângulo de mesma natureza, ou seja esse processo pode ser repetido infinitas vezes.

Adotando a área do triângulo ΔAPB como S . Temos que a área do triângulo ΔAPM é a metade da área do triângulo ΔAPB . Logo a área de ΔAPM é $\frac{1}{2}S$. O $\Delta AP'G$ é a $\frac{1}{8}\Delta APM$ pois sua base é $\frac{1}{4}MB$ e sua altura $\frac{1}{2}AM$. Mas, note que os triângulos $\Delta AP'G$ e $\Delta PP'G$ tem a mesma base e mesma altura, logo suas áreas são iguais. E o triângulo $\Delta AP'P$ é igual a soma dos triângulos $\Delta AP'G$ e $\Delta PP'G$. Logo a área de $\Delta AP'P$ é igual a $\frac{1}{4}\Delta APM$ e como ΔAPM é metade de S então o $\Delta AP'P$ é igual a $\frac{1}{8}S$. De modo análogo no outro lado da parábola obteremos um triângulo $PP''B$ que tem área igual a $\frac{1}{8}S$. Juntos esses dois triângulos correspondem a $\frac{1}{4}S$. Como enunciado anteriormente, podemos repetir esse método infinitas vezes, e a área somada será $\frac{1}{4}$ da área da etapa anterior. Assim obtemos:

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}S\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}S\right)\right) + \dots$$

Organizando

$$S + \frac{S}{4} + \frac{S}{4^2} + \frac{S}{4^3} + \frac{S}{4^4} + \dots$$

Tirando S em evidencia $S(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n})$

Note que, usando $S = \frac{4S}{4} = \frac{3S}{4} + \frac{S}{4}$ podemos rescrever esta sequência da seguinte maneira:

$$S + \frac{S}{4} + \frac{S}{4^2} + \frac{S}{4^3} + \frac{S}{4^4} + \dots + \frac{S}{4^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Hoje nos conhecemos essa sequência como uma progressão geométrica. No entanto, vamos provar ao estilo de Arquimedes com o método da dupla redução ao absurdo, o qual era utilizado na época.

2- MÉTODO DA DUPLA REDUÇÃO AO ABSURDO.

A prova da quadratura pela dupla redução ao absurdo será aplicada de duas maneiras. A primeira será de que a área do seguimento parabólico não pode ser menor que $\frac{4}{3}S$ e a segunda mostra que a área do seguimento não pode exceder $\frac{4}{3}S$ ou seja a área do seguimento parabólico não pode ser maior que $\frac{4}{3}$ da área do triângulo ΔAPB inscrito no seguimento parabólico. Ver figura.

Tome $1 = \frac{4}{4}$ que é verdadeiro. Em seguida desenvolva as seguintes igualdades.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{4}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{4}{4}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} + \frac{4}{4^2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4}\left(\frac{1}{4^2}\right) = \\ &= \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{1}{4^3} = \dots \end{aligned}$$

Note que, se continuarmos este raciocínio obteremos.

$$1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{3}{4^n} + \frac{1}{4^n}$$

Somando 3 em ambos os membros e multiplicando S o resultado, obtém-se:

$$\begin{aligned} 3 + 1 &= 3 + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{3}{4^n} + \frac{1}{4^n} \right) \\ 4S &= 3S + \left(\frac{3S}{4} + \frac{3S}{4^2} + \frac{3S}{4^3} + \dots + \frac{3S}{4^n} + \frac{S}{4^n} \right) \end{aligned}$$

Tirando 3 em evidencia no segundo membro tem-se;

$$4S = 3S + 3 \left(\frac{S}{4} + \frac{S}{4^2} + \frac{S}{4^3} + \dots + \frac{S}{4^n} + \frac{S}{3 * 4^n} \right)$$

Dividindo tudo por 3;

$$\frac{4S}{3} = S + \frac{S}{4} + \frac{S}{4^2} + \frac{S}{4^3} + \dots + \frac{S}{4^n} + \frac{S}{3 * 4^n}$$

Note que no caso dos triângulos de Arquimedes acontecia algo semelhante. Cada triângulo possuía a área igual a $\frac{1}{4}$ da área do encontrado anteriormente o que resultaria na seguinte estrutura.

$$S = \frac{4S}{4} = \frac{3S}{4} + \frac{S}{4}$$

Adotaremos a área do seguimento parabólico como W, então $W < \frac{4}{3}S$

HIPÓTESE 1

Suponhamos por absurdo que $W < \frac{4}{3}S$. Sendo assim se subtraindo W em ambos os lados,

$$W - W < \frac{4}{3}S - W$$

Logo,

$$0 < \frac{4}{3}S - W$$

Pelo teorema3 existe um n tal que,

$$3 * 4^n \left(\frac{4}{3} S - W \right) > S$$

Portanto,

$$\frac{4}{3} S - W > \frac{S}{3 * 4^n}$$

O que implica que,

$$\frac{4}{3} S - \frac{S}{3 * 4^n} > W$$

Ou seja,

$$S + \frac{S}{4} + \frac{S}{4^2} + \frac{S}{4^3} + \frac{S}{4^4} + \dots + \frac{S}{4^n} > W$$

O que é um absurdo, pois contradiz o teorema.

Para provar a segunda maneira utilizaremos o seguinte.

HIPÓTESE 2

Suponhamos novamente por absurdo que $W > \frac{4}{3} S$ pelo teorema3(pagina) e propriedade III (pagina) existe um natural que

$$W - \left(S + \frac{S}{4} + \frac{S}{4^2} + \frac{S}{4^3} + \dots + \frac{S}{4^n} \right) < W - \frac{4}{3} S$$

Portanto,

$$W - \left(S + \frac{S}{4} + \frac{S}{4^2} + \frac{S}{4^3} + \dots + \frac{S}{4^n} \right) < W - \left(S + \frac{S}{4} + \frac{S}{4^2} + \frac{S}{4^3} + \dots + \frac{S}{4^n} + \frac{S}{3 * 4^2} \right)$$

Isso implica que,

$$\left(S + \frac{S}{4} + \frac{S}{4^2} + \frac{S}{4^3} + \dots + \frac{S}{4^n} \right) > \left(S + \frac{S}{4} + \frac{S}{4^2} + \frac{S}{4^3} + \dots + \frac{S}{4^n} + \frac{S}{3 * 4^2} \right)$$

Mas observe que,

$$\left(S + \frac{S}{4} + \frac{S}{4^2} + \frac{S}{4^3} + \dots + \frac{S}{4^n} \right) = \left(S + \frac{S}{4} + \frac{S}{4^2} + \frac{S}{4^3} + \dots + \frac{S}{4^n} \right)$$

Então, $\left(S + \frac{S}{4} + \frac{S}{4^2} + \frac{S}{4^3} + \dots + \frac{S}{4^n} \right) > \left(S + \frac{S}{4} + \frac{S}{4^2} + \frac{S}{4^3} + \dots + \frac{S}{4^n} \right) + \frac{S}{3 * 4^2}$ é um absurdo.

Como vimos nas duas demonstrações que a área do seguimento parabólico não pode ser maior nem menor que $\frac{4}{3}S$. Logo ele será igual $W = \frac{4}{3}S$.

CONCLUSÃO

Neste trabalho tivemos a oportunidade de estudar um pouco da história da geometria e a importância de Arquimedes. No qual, retrata as contribuições de vários matemáticos da Antiguidade destacando-se Arquimedes de Siracusa o qual foi abordado um pouco de sua história.

O seu desenvolvimento foi de grande importância para a minha formação quanto professor, pois desenvolver esse trabalho foi desafiador uma vez que não tive a oportunidade de estudar esse assunto na graduação e como na maioria dos trabalhos apresentei dificuldades, mas estas me ajudaram a amadurecer e perceber que o trabalho além de desafiador também pode ser prazeroso e por esse motivo fez-me adquirir experiência.

Compreendo que o conhecimento da história da matemática e do desenvolvimento das suas estruturas conceituais é essencial à atuação do professor, principalmente para ter fundamentos históricos para eventuais situações onde alunos perguntam sobre a origem da geometria, como: o que é? De onde vem? Como começou? e por que estudar? Além disso, pode servir de motivação para professores que almejem seguir carreira de pesquisadores na área de história da matemática e mostrar que a geometria está presente em diversas formas.

A partir da leitura do trabalho podemos observar que a geometria se destacou com diferentes autores. No entanto, Arquimedes foi o um dos maiores da época e contribuiu com diversos trabalhos dos quais a partir do capítulo II foram especificados e que estão diretamente ligados.

O método de exaustão e a quadratura da parábola, no capítulo dois falamos de um dos trabalhos de Arquimedes que é o método de exaustão e demonstramos algumas de suas propriedades referenciando que ele é a base a ser usada na quadratura da parábola.

No terceiro capítulo nos aplicamos o método de exaustão na quadratura da parábola com o objetivo de mostrar que podemos calcular a área de um segmento parabólico.

Espera-se poder contribuir, a partir desse trabalho, com outras pessoas que tenham o desejo de estudar sobre a história da geometria e aprofundar pesquisas sobre sua importância sem esquecer dos grandes matemáticos que a iniciaram.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, C. B. (1996). *Historia da Matematica*. São Paulo: Edgard Blücher.

EVES, H. (2004). *Introdução à Historia da Matematica*. São paulo: Unicamp.

GARBI, G. G. (2006). *A Rainha das Ciências*. São Paulo: Livraria da Fisica.

KILHIAN, K. (s.d.). Uma breve cronologia de PI. disponível em O Baricentro da Mente: <https://www.obaricentrodamente.com/com/2008/12/breve-cronologia-de-pi.html> Acesso em 04 de 07 de 20018.

SANTOS, J. M. **Quadratura da Parábola: Uma Abordagem Possível para o Ensino de Somas Infinitas.** *Dissertação de Mestrado*. Matemática em rede Nacional PROFMAT - CCET/Natal-RN, Brasil. (2014).

História da Matemática para professores, v.6 – Arquimedes.
<https://www.google.com.br/url?sa=t&source=web&rct=jiurl=https://m.youtube.com/> -
acesso em 04 de 07 de 2018.