



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA

JOHN WESLEY DOS SANTOS GOMES  
PEDRO AUGUSTO DE FREITAS RODRIGUES

**ANÁLISE COMBINATÓRIA E APLICAÇÕES NO EXCEL**

BRAGANÇA  
2023

JOHN WESLEY DOS SANTOS GOMES  
PEDRO AUGUSTO DE FREITAS RODRIGUES

**ANÁLISE COMBINATÓRIA E APLICAÇÕES NO EXCEL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Bragança, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): MSc. Nelson Ned Nascimento Lacerda

BRAGANÇA  
2023

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

D278a de Freitas Rodrigues, Pedro Augusto.  
Análise Combinatória e Aplicações no Excel / Pedro  
Augusto de Freitas Rodrigues, John Wesley dos Santos  
Gomes . — 2023.  
45 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Me. Nelson Ned Nascimento  
Lacerda

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -  
Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de  
Bragança, Faculdade de Matemática, Bragança, 2023.

1. Análise Combinatória. 2. Letramento Matemático.  
3. Excel. I. Título.

**CDD 511.6**

---

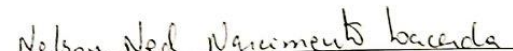
JOHN WESLEY DOS SANTOS GOMES  
PEDRO AUGUSTO DE FREITAS RODRIGUES

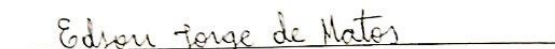
**ANÁLISE COMBINATÓRIA E APLICAÇÕES NO EXCEL**

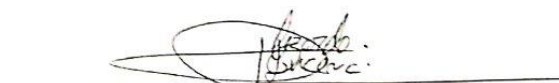
Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado à Faculdade de Matemática,  
do Campus Universitário de Bragança, da  
Universidade Federal do Pará, como  
requisito parcial para obtenção do título  
de Licenciado em Matemática.

Bragança, 19 de Abril de 2023

**BANCA EXAMINADORA**

  
Prof. MSc. Nelson Ned Nascimento Lacerda  
Orientador- UFPA

  
Prof. Dr. Edson Jorge de Matos  
Examinador Interno- UFPA

  
Prof. Dr. Elizardo Fabricio Lima Lucena  
Examinador Interno- UFPA

Dedicamos essa monografia aos componentes José Rodrigues e Lucineia Gomes, que são exemplos de ser-humanos, e a todas as pessoas que deram apoio em momentos cruciais.

## **AGRADECIMENTOS**

Queremos agradecer primeiramente a Deus, aos nossos familiares e amigos da faculdade em especial os componentes: Ana Paula, Gilberto Gil, que foi um grande colaborador para superar os percalços da faculdade, por conseguinte, Irlan Ivirsson, João Victor, Lucas Xavier e Luiza de Jesus. Por tornar o período da faculdade não somente estudos e sim de inúmeras gargalhadas e peripécias ao decorrer do curso. Por fim, uma enorme gratidão ao nosso orientador e querido professor Ms Nelson Lacerda, por ser um excelente profissional e inspirar futuros docentes.

“Descarte o bom senso e torne o impossível em possível.”

(RODRIGUES,2023)

## **RESUMO**

Este trabalho de caráter qualitativo, estuda os conceitos sobre a Teoria da Probabilidade, a qual o foco é a Análise Combinatória, que no decorrer do trabalho percebe-se que tal assunto é um divisor de água, pois o alunado possui grandes dificuldades na análise e interpretação do problema, assim foi abordado a fragmentação de solução para conseguir melhores resultados no ensino, haja vista que foi preciso abordar o Letramento Matemático para que o aluno possa ter maiores conceitos e aplicações matemáticas em sua realidade, outrossim, para uma aplicação desse conteúdo foi escolhido a planilha eletrônica (Excel), para que possam desenvolver problemas de largas escala usando a tecnologia ao seu favor.

**Palavra-Chave:** Análise Combinatória, Excel, Letramento Matemático

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- diagrama dos modos .....	24
Figura 2- diagrama das etapas .....	24
Figura 3- Diagrama das viagens .....	25
Figura 4- Resolução exemplo1 .....	26
Figura 5- Bandeiras .....	27
Figura 6- Etapa da bandeira.....	28
Figura 7- Aplicação no Excel .....	28
Figura 8- Casos particulares .....	29
Figura 9-Analise da problemática.....	29
Figura 10- Etapas dos Algarismos .....	30
Figura 11- Resolução do Exemplo 3 pelo Excel .....	31
Figura 12- Casos particulares .....	31
Figura 13- Resolução do Exemplo 4 no Excel .....	32
Figura 14- Anagramas da palavra.....	33
Figura 15- Aplicação no Excel do Exemplo 5.....	33
Figura 16- Casos particulares de anagramas da palavra ENEM .....	34
Figura 17- Anagrama.....	34
Figura 18- Falsos anagramas .....	35
Figura 19- Aplicação no Excel .....	35
Figura 20- Aplicação no Excel do Exemplo 7.....	37
Figura 21- Aplicação no Excel do Exemplo 8.....	38
Figura 22- Aplicação no Excel do Exemplo 9.....	39
Figura 23- Aplicação no Excel do Exemplo 10.....	40
Figura 24- Aplicação no Excel do Exemplo 11.....	41
Figura 25- Aplicação no Excel do Exemplo 13.....	42
Figura 26- Aplicação no Excel .....	43

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
<b>1 HISTÓRIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA .....</b>	<b>12</b>
1.1 Um conceito básico de Teoria da Probabilidade .....	12
<b>2 LETRAMENTO MATEMÁTICO.....</b>	<b>15</b>
2.1 <b>O desenvolvimento dessa metodologia .....</b>	<b>15</b>
<b>3 DESAFIOS DO ENSINO DA MATEMÁTICA COM A TECNOLOGIA.....</b>	<b>18</b>
3.1 Formação, Conceitos Sociais e Econômicos .....	18
<b>4 METODOLOGIA .....</b>	<b>21</b>
<b>5 ANÁLISE COMBINATÓRIA E USO NO EXCEL .....</b>	<b>22</b>
5.1 Processo de fragmentação de problema de análise combinatória.....	22
5.2 Desenvolvimento do processo de fragmentação .....	23
5.3 Conceitos, Exemplos e Soluções de Análise Combinatória .....	23
5.3.1 Método dos Princípios da Contagem – MPC .....	23
5.3.2 Permutação .....	31
5.3.2 Permutação com repetições .....	35
5.3.3 Combinação simples.....	39
5.3.4 Combinação com repetição .....	41
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>44</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>45</b>

## INTRODUÇÃO

Este trabalho tem o objetivo de mostrar a evolução do estudo da Teoria da Probabilidade, a qual vamos dar enfoque na Análise Combinatória que será trabalhada com o uso do letramento matemático e a sua aplicação na planilha eletrônica (Excel), visto que o assunto foi abordado por inúmeros teóricos, a qual corroboraram com tratados e assim o estudo da Análise Combinatória foi moldando-se com o passar do tempo.

Outrossim, se os principais teóricos foram Jerônimo Cardano, um hábil jogador de jogos de azar, a qual sua paixão por tais jogatinas o levou a escrever a obra *De Ludo Aleae* cujo foi um dos primeiros autores a iniciar o estudo da Teoria da Probabilidade, despertando assim o interesse na sociedade matemática. Ademais, ilustre nomes da época auxiliaram com informações significativas, todavia, o primeiro tratado a ser considerado de fato sobre a Teoria da Probabilidade foi do teórico Christiaan Huygens, publicado em 1657 apresentando de esperança matemática.

O trabalho está distribuído no capítulo 1, que aborda o conceito sobre a História da Matemática, por conseguinte no capítulo 2 o Letramento Matemático, no capítulo 3 Desafios do Ensino na Matemática com a Tecnologia, ademais, no capítulo 4 apresentará a abordagem que utilizamos no trabalho que será desenvolvida no capítulo seguinte, que é o capítulo 5 Análise Combinatória e o uso no Excel.

## 1 HISTÓRIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Neste capítulo vamos abordar o surgimento gradativo do estudo da análise combinatória, a qual cada etapa que foi se desenvolvendo sobre o assunto e os principais teóricos que corroboraram para tais estudos, assim o conhecimento da Teoria da Probabilidade tendo um maior impulso na matemática.

### 1.1 Um conceito básico de Teoria da Probabilidade

Se indagarmos o alunado em relação aos seus conhecimentos de combinatória, grande parte resumira no estudo de arranjos, permutações e combinações. A qual não é surpresa, pois no ensino de nível básico o conteúdo limita-se ao estudo dessas três formas de contagem. Ademais, não se trata apenas de tais tipos de contagem, tendo em vista que Morgado (2006) afirma que trata-se de múltiplos problemas e dispõe de várias outras abordagens como, o princípio da inclusão-exclusão e o princípio das gavetas de Dirichlet. Outrossim, o assunto de análise combinatória foi feito de maneira “mecânica”, ou seja, padronizando as questões sem o intuito de estimular o discente a fazer uma análise e interpretação do problema, o aluno apenas verá o conteúdo de análise combinatória como um embaralhado de fórmulas.

Em síntese, para Morgado (2006), podemos dizer que a análise combinatória é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas, a qual aparece na maioria das vezes dois tipos de problemas. O primeiro seria demonstrar a existência de um subconjunto de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas restrições, tendo em vista o segundo problema seria contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem condições dadas.

Para entender como iniciou, na história da matemática, o gosto pelo estudo de Análise Combinatória, precisamos lembrar uma antiga paixão humana, os jogos de azar. Os homens sempre se encantaram com o fato de ter a possibilidade de ganhar mais dinheiro lançando sua sorte em dados, moedas, roletas, baralho entre outras coisas. A parte elementar da Teoria da Probabilidade, teria início nos jogos de azar, pois o homem na maioria das vezes procura maneiras seguras de apostar em um jogo de azar, porém, possuindo a probabilidade a seu favor, tendo em vista isso não é de se espantar que muito cedo problemas relativos a jogos de cartas e de dados tenham atraídos a atenção de pessoas com a mente mais especulativa, a fim de obter lucro por meios de tais jogos de azar.

Para Morgado (2006) sendo assim, a primeira obra conhecida em que se estuda as probabilidades é o livro *De Ludo Aleae* (Sobre Jogos de Azar) o italiano Jerônimo Cardano (1501-1576) grande apostador e fascinado pelos jogos de azar, assim sua obra foi publicada em 1663. É bem possível que o interesse que Cardano tinha pelo assunto, teria como base a sua paixão por jogos de azar. Segundo Isac Todhunter, em sua história da Teoria Matemática da Probabilidade, o autor explica que seria uma espécie de manual para jogadores, haja vista que em alguns trechos do livro *De ludo Aleae*, ensina o leitor a se defender de adversários que usariam trapaças para ganhar o jogo, além disso explica melhores maneiras de ganhar um jogo, no quesito à probabilidade é uma parte pequena de seu tratado que foi dedicada a Teoria da Probabilidade.

Dessa forma, em relação a probabilidade Cardano mostra, entre outras coisas, de quantas maneiras podemos obter um número lançando dois dados simultaneamente. Por exemplo o número oito pode ser obtido de duas maneiras, entre outras formas, o primeiro e o segundo sendo iguais, ou seja, obtendo o número quatro em ambos e a segunda forma é o primeiro dado o número seis e o segundo dado sendo dois. Não só Cardano obteve algumas informações sobre o assunto probabilidade, o alemão Johannes Kepler (1571-1630) fez algumas anotações em um livro publicado no ano 1606 *De Stella nova in pede*, na qual examina as diferentes opiniões sobre o aparecimento de uma estrela brilhante no ano 1604.

De acordo com Boyer (2008) um grande pesquisador corroborou com o crescimento do estudo de probabilidade, sendo ele Galileu (1564-1642) a qual teve ênfase examinando jogos de dados, tendo em vista para responder a pergunta de um amigo: “com três dados, o número nove e o número dez podem ser obtidos de seis maneiras distintas, cada um deles. No entanto, realizando a experiência obtém-se que o número dez é obtido mais frequente que o número nove. Como explica isso?” Analisando a pergunta de seu amigo, Galileu, estudou atenciosamente as probabilidades envolvidas e comprova corretamente que, de 216 casos possíveis, 27 são favoráveis ao aparecimento do número dez e 25 são favoráveis ao aparecimento do número nove.

Com isso, a Teoria da Probabilidade, inicia-se o desenvolvimento a partir dos estudos de Pascal, aplicando-se seus estudos aos jogos de cartas.

Há muitas relações envolvendo os números do triângulo aritmético, várias delas envolvidas por Pascal. Pascal não foi o primeiro a mostrar o triângulo aritmético-vários séculos antes esses arranjos numéricos foram antecipados por escritores chineses. Como Pascal foi por longo tempo (até 1935) o primeiro a descobrir desse triângulo, este tornou-se

conhecido como triângulo de Pascal. Uma das manifestações mais antigas aceitáveis do princípio de indução matemática aparece no tratado de Pascal sobre o triângulo (EVES,2008,p.365)

Em relação ao triângulo de Pascal, teve de suma importância para resultados e contribuições para o estudo da combinação, pois ficou como comprovação para resultados futuros. Porém, o primeiro tratado de Teoria da Probabilidade foi de Christiaan Huygens (1629-1695) publicando o primeiro tratado em 1657 o *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, visto que estudou e apresentou o conceito de esperança matemática, ferramenta importante para o cálculo de probabilidade e estatística, porém, apenas na década de 1930 que surgiu um conceito mais rigoroso para a probabilidade. (EVENS,2008,p 395)

Outrossim, segundo Pascal- Fermat (2008) a Teoria da Probabilidade não despertou de início o interesse dos matemáticos na época, devido ao grande fascínio pelo cálculo, criado por Newton e Leibnitz. Todavia, percebeu-se que o estudo sobre a probabilidade examina situações como taxa de mortalidade, prêmios de seguros, economia, variação da população, entre outros. Assim, atraindo inúmeros matemáticos devido ser um estudo direcionado a situações “problemas” e possui grandes nomes da época aprofundando seus estudos na Teoria da Probabilidade.

Com o decorrer do prestígio de estudos sobre a probabilidade, Jaime Bernoulli, em sua obra *Ars Cnjutandi*, cita um teorema de suma importância para os estudos e resultados de probabilidade, conhecido como Teorema de Bernoulli, também denominado Leis dos Grandes Números, a qual foi descrita pelo francês Siméar Poisson (1781-1840) cujo teorema reflete na primeira tentativa de deduzir medidas estatísticas a partir da probabilidade, pois afirma que se dois eventos são igualmente prováveis, após um grande número de experimentos eles terão sido obtidos aproximadamente o mesmo número de vezes. A Lei dos Grandes Números deu início a discussões conceituais ou filosóficas sobre o conceito de probabilidade.

Outro matemático que dedicou-se à Teoria da Probabilidade e que provavelmente, só perca para Laplace (1749-1827) em estudos/contribuições aos assunto, foi Abraham De Moivre, um matemático versátil, ou seja, inúmeros trabalhos importantes em vários campos, a qual foi reconhecido até mesmo por Newton. Em sua obra *Doutrina do Acaso*, De Moivre, desenvolve a teoria das sucessões recorrentes, e a usa para resolver vários problemas de probabilidade.

## 2 LETRAMENTO MATEMÁTICO

Neste capítulo iremos apresentar a importância e o conceito sobre o letramento matemático, haja vista que demonstraremos o conceito e as teses que os autores corroboram para o estudo do saber pensar do aluno, a análise e interpretação das questões, tendo em vista que a compreensão de tal assunto é de suma importância, pois com isso oferece ao alunado uma visão mais ampla do conceito de forma prática e aplicada à realidade.

### 2.1 O desenvolvimento dessa metodologia

Segundo Bigge (1977) na época em que a escola foi criada, ensinar deixou de ser um repasse de informações, visto que as matérias ensinadas nas instituições de ensino eram diferentes dos assuntos aprendidos na sociedade, ou seja, o discente não conseguia aplicar o conteúdo ensinado em sala de aula em sua realidade. Sendo assim, o ensino visto de forma desnecessária para a economia e na política. Em meados do século XXI, o ensino muitas vezes é visto desta maneira, o estudante não consegue encontrar um significado ao que lhe é ensinado, tendo em vista esse grande fator, os estudos de atualmente se moldam a tornar os discentes críticos e reflexivos, a qual o professor não é mais o foco e sim um orientador/mediador no ensino e aprendizagem, contextualizando problemas reais aos seus alunos.

No que se refere a educação matemática, a área busca sempre melhores formas de atender seus assuntos. Todavia, enfrenta desafios em relação a disciplina, haja vista que a sociedade fixou o estereótipo que a matéria é complexa/abstrata e pouco se absorvesse dessa temática, seja no ensino básico ao superior. Outrossim, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) preza que o educando “desenvolva a capacidade de identificar oportunidades de utilização da Matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter as soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações”, sintetizando o pensamento que a BNCC, refere-se ao letramento matemático e sua grande importância no ensino.

O surgimento dessa metodologia foi por volta de 1980, a qual originou-se da palavra portuguesa *literaci* ou *literacy* de origem americana, cujo significado é alfabetizar no sentido de uma leitura e escrita mais avançada/complexa em respeito às práticas de simples leituras e escrita que são resultantes de apenas uma alfabetização.

A Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO) propôs aplicar o conceito de *literacy*, dando a sugestão as avaliações em larga escala internacionais, para que avaliassem de maneira mais avançada as capacidades do aluno, não sendo apenas o simples ato de ler e escrever (SOARES,2004), ou seja, há a diferença entre alfabetizado e letrado, porém o conceito causa confusão na maioria das vezes, pois está no fato que o indivíduo que consegue utilizar a leitura em contextos sociais, psíquicos, políticos é definido como letrado o que somente usa do artifício básico e não ultrapassa essa margem é apenas considerado alfabetizado.

Ademais, a UNESCO propôs o letramento matemático através do Programa Internacional de Avaliação de Estudante (PISA), busca-se diferenciar os letrados de iletrados, a qual enfatiza que é “fundamental ter um discernimento sobre o grau em que os jovens egressos das escolas estão e se estão preparados para aplicar a Matemática na compreensão dos assuntos e na solução de problemas significativos” o que seria o retorno na vida adulta e como está a análise e compreensão dos dados.

[...] a capacidade de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma série de contextos, o que inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e prever fenômenos. Isso ajuda os indivíduos a reconhecer o papel que a Matemática desempenha no mundo e faz com que o cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer bem fundamentados e tomar as decisões necessários (BRASIL,2016,p.138).

Por conseguinte, o autor faz-se a síntese do que seria a aplicação do letramento matemático, pois as vezes é confundido por apenas ser o ato de ensinar a matemática básica, haja vista que foi mostrado em parágrafos anteriores que é muito mais do que isso, visto que trata-se da compreensão e raciocínio mais complexo, ou seja, conseguir interpretar e colocar em práticas os conceitos matemáticos que são vistos em sala de aula, assim o discente estará “dando um passo a mais” em seu aprendizado e independência para novos estímulos de ensino e aprendizado.

A ideia de tornar o ensino da matemática mais específico e relevante para a vida cotidiana fazia parte dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sob o nome de Alfabetização Matemática antes de passar a fazer parte das diretrizes da BNCC. Ou seja, são dois nomes diferentes para coisas muito parecidas: o foco do estudo em usar o conhecimento como forma de desenvolver o pensamento crítico e o uso da matemática para analisar fatos e informações do cotidiano. Assim como há diferença entre

alfabetização e letramento na língua portuguesa, há diferença entre conhecer os dados e procedimentos da matemática e letramento matemático.

Essa diferença está justamente relacionada à capacidade de ir além do conhecimento teórico e à capacidade de realizar operações matemáticas. O letramento matemático é a capacidade de compreender e aplicar conceitos matemáticos de forma prática no mundo moderno, visando atender às necessidades individuais e resolver problemas da vida real. O letramento matemático serve como uma ferramenta para os alunos compreenderem o papel específico da matemática no mundo em que vivem, e como uma ferramenta e linguagem para a compreensão crítica e lógica do papel da matemática na sociedade. O letramento matemático também serve como uma motivação para aprender e um desejo de aprender mais, traduzindo conceitos matemáticos inicialmente abstratos em conhecimento que é significativo na vida cotidiana e que podem ser usados para resolver tais problemas.

Sendo assim, a análise, divide-se em estruturas (problemas e soluções), a qual a estruturação do problema define-se em: saber a tarefa, ou seja, conhecer o que o problema pede, pois na maioria das vezes os problemas envolvendo contagem se resumem em uma contagem que seria denominado tarefa a ser realizada, visto que em problemas mais elaborados o mesmo pode-se escrita de maneira restrita, que seria as condições para ser realizada.

### **3 DESAFIOS DO ENSINO DA MATEMÁTICA COM A TECNOLOGIA**

Neste capítulo apresentaremos sobre os empecilhos na aplicação da educação com a tecnologia, haja vista que a população brasileira não se resume em uma única realidade, tendo em vista esse grande fator, mostraremos as principais dificuldades que os docentes sofrem ao dar a iniciativa para um ensino com a tecnologia, seja ela na formação profissional, estrutura não suficiente em ambientes escolar e a divergência entre redes públicas e privadas.

#### **3.1 Formação, Conceitos Sociais e Econômicos**

Segundo o IBGE(2020), o surgimento e popularização da Internet, globalização, surgimento e melhorias contínuas em novas tecnologias impulsionam a mudança social sobre maneiras de pensar, se comportar e na organização social e interação pessoal. Pode-se dizer que a educação também busca adapte-se à nova realidade. No entanto, repensar o papel do sistema educacional e as instituições de ensino são um empreendimento extremamente difícil e complexo, mas necessário.

Em países em desenvolvimento com altos níveis de desigualdade, como o Brasil, socioeconomicamente, a tarefa é ainda mais desafiadora porque o acesso à tecnologia varia. Impressionantemente, no século XXI ainda temos grande parte da população que se quer tem acesso à Internet e aos recursos tecnológicos básicos.

Embora seja notavelmente crescente, muito por causa da pandemia do COVID 19, o uso de tecnologias nos ambientes escolares, muitos são os desafios e barreiras enfrentadas para que haja uma relação de harmonia entre educação e tecnologia, e para que isso se torne uma realidade cada vez mais comum. Grande parte disso se dá por conta das más condições estruturais das escolas, falta de manutenção e atualização dos aparelhos e mau uso das ferramentas por parte dos alunos.

Muitas escolas que recebem os aparelhos tecnológicos não têm estrutura para a utilização dos mesmos, em muitos casos acabam improvisando salas sem nenhuma infraestrutura física e elétrica que possa contribuir para a integridade dos aparelhos, e outras escolas se quer tem aparelhos eletrônicos.

Além da disponibilidade de infraestrutura e recursos básicos, o preparo dos professores é também indispensável. Quanto ao papel do professor com relação ao uso dos recursos tecnológicos, é possível considerar haver muitos desafios e obstáculos que

precisam ser superados. Dentre eles, uma formação inicial que contemple o uso das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem; e a capacitação dos profissionais que já atuam na rede de ensino.

De acordo com Prado e Rocha (2018), falta de conhecimento dos professores sobre como usar as ferramentas digitais é um dos principais desafios do uso da tecnologia na educação. Muitas escolas ainda não alinham seus processos para integrar a tecnologia de forma prática, capacitando os professores para que eles possam se familiarizar e entender as possibilidades dos novos recursos. Como a realidade profissional de cada professor é diferente, ainda mais em um país grande como o Brasil, os próprios profissionais se empenham em adquirir conhecimento. Na última pesquisa TIC Educação (2019), 93% dos professores afirmaram se manter atualizados sobre o uso das tecnologias por conta própria.

O custo de aquisição e manutenção é um dos desafios do uso da tecnologia na educação que mais impactam as instituições de ensino. Adquirir licenças, equipamentos e ter um profissional de TI para monitorar a rede da escola geram a necessidade de se investir. As soluções e ferramentas mudam e evoluem bastante em uma velocidade que não é fácil e nem barato de acompanhar. Tendo em isso em vista, é notório que embora a escola tenha uma infraestrutura adequada para a utilização de recursos tecnológicos, é indispensável a presença de um profissional qualificado para que haja manutenção e atualização desses recursos.

Um dos grandes desafios do uso da tecnologia na educação é o mau uso das ferramentas pelos alunos. Para alunos ver os computadores e smartphones como meios de aprendizado e não de entretenimento é um desafio comum nos momentos iniciais de introdução da tecnologia. Isso se dá muito por conta da realidade econômica enfrentada por cada aluno. Moreira e Kramer (2007) afirmam que é necessário refletir sobre as relações entre escola e tecnologia, levando-se em conta a realidade em que os alunos estão imersos, em especial os que estudam na Educação Básica. Tendo em vista a importância dos avanços tecnológicos e dos impactos na vida das pessoas, assim como a desigualdade de condições de acesso, é preciso refletir e levar tudo isso em conta.

Dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), coletados pela Pesquisa Nacional por Amostras de Domicílios Contínua (PENAD Contínua) referente ao quarto trimestre de 2018, mostram o percentual de acesso dos domicílios brasileiros à TIC. Embora que, de 2017 para 2018, o percentual de utilização da internet nos domicílios subiu de 74,9% para 79,1%, evidencia-se que em mais de 20,0% dos domicílios não havia

acesso. No meio rural a situação era ainda mais crítica, no mesmo período, o índice passou de 41,0% para 49,2%. De acordo com a pesquisa, o rendimento médio per capita, dos moradores que utilizavam internet era quase o dobro do rendimento dos que não utilizavam (IBGE, 2020<sup>a</sup>).

A PNAD Contínua apontou que celular foi o equipamento mais utilizado para acessar a rede, encontrado em 99,2% dos domicílios com o serviço; o segundo foi o microcomputador, usado em 48,1% dessas residências. Entre 2017 e 2018, o percentual de pessoas que tinham celular subiu de 78,2% para 79,3%, chegando a 82,9% nas áreas urbanas e a 57,3% nas rurais. Nos domicílios em que não havia internet, os três motivos que mais se destacaram foram: falta de interesse (34,7%); serviço de acesso caro (25,4%); nenhum morador sabia usar (24,3%). Em 7,5% das residências, os moradores disseram que não havia disponibilidade de rede na área do domicílio e 4,7% justificaram como motivo, o alto custo do equipamento para conexão (IBGE, 2020<sup>a</sup>)

Diante do que foi exposto, nota-se que inúmeros são os desafios para uma educação mais tecnológica. Obstáculos que começam na desigualdade e falta de acesso aos meios tecnológicos, perduram na insuficiência de equipamentos e na infraestrutura das escolas e se consolidam nas carências de uma formação inicial que prepare para o uso pedagógico e aplicação dessas ferramentas.

#### 4 METODOLOGIA

Segundo Minayo (2016) a metodologia é o caminho percorrido para a elaboração de uma pesquisa científica, é a prática exercida na compreensão de fatos da realidade. Portanto, é um conjunto de ferramentas, em que se inclui o método de análise, as técnicas de pesquisa e a criatividade do autor na seleção de dados e na elaboração do texto científico, e sua capacidade crítica. De modo que, a metodologia a ser utilizada em um trabalho possui enorme importância uma vez que determina os passos a serem seguidos para a realização do trabalho.

O presente trabalho caminhou primeiramente no estudo de artigos, livros, *sites* e trabalhos sobre Análise Combinatória. A abordagem sobre o conteúdo de análise combinatória, e o uso da tecnologia no âmbito escolar e a compreensão do discente em relação ao conteúdo (problema). Dessa forma a abordagem de nossa metodologia, será a fragmentação e análise das questões por partes, visando que o alunado possa desenvolver a maturidade na compreensão de problemas de análise combinatória. A próxima etapa foi utilizada a planilha eletrônica Excel (versão 2019, sistema operativo Microsoft Windows e Mac OS X), de modo a mostrar o uso da tecnologia na resolução de problemas matemáticos e em especial a análise combinatória. Nesse sentido será preservado a qualidade do ensino e não o quantitativo.

## 5 ANÁLISE COMBINATÓRIA E USO NO EXCEL

Nota-se que o ensino da Teoria da Probabilidade (análise combinatória), requer uma análise e compreensão de seus leitores para a resolução dos problemas. Desse modo, observa-se que grande parte do alunado possui diferentes graus de dificuldades no aprendizado da matemática, haja vista que os discentes “carregam” desde os anos anteriores tal empecilho na compreensão da disciplina. Sendo assim, mostramos capítulo 2 a importância do letramento matemático, visto que preza por um ensino qualitativo e não um ensino quantitativo, assim no decorrer da apresentação do conteúdo de análise combinatória, será apresentado de forma a ter melhor entendimento para o aluno, afim de compreender e aplicar o assunto em sua realidade.

O uso da ferramenta Excel (Lapponi, 2005) corrobora com as aplicações no ensino, haja vista que com a planilha eletrônica trouxe contribuições significativas no processo de aprendizagem dos conceitos primários da estatística e muitas outras áreas de ensino, por exemplo o conceito básico de análise combinatória na disciplina de matemática., que neste caso será o enfoque dessa aplicação.

Neste contexto as atividades vêm ao encontro da demanda de um aluno crítico, capaz de analisar informações proveniente de pesquisas que são encontradas na televisão, em jornais ou revistas pois em capítulos anteriores frisamos a importância do letramento matemático no ensino e aprendizagem, tendo em vista que o saber “pensar” do aluno é reforçado por tal metodologia.

### 5.1 Processo de fragmentação de problema de análise combinatória

Esse processo visa resolver problemas de análise combinatória, no qual o objetivo é a separação da fórmula usual que aprende-se nas escolas  $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ , sendo que na maioria das vezes o aluno não consegue resolver uma questão devido a dois principais fatores: a interpretação do problema, ou seja, o que o problema exige do aluno e por conseguinte o uso da fórmula, pois muitas das vezes estão saturados de informações de várias disciplinas.

Assim esse processo pretende facilitar o entendimento dos problemas de análise combinatória, na qual o aluno vai conseguir distinguir o que o problema exige dele e como pode resolver essa problemática. Tendo em vista esse cenário o recurso que pode-

se utilizar para a diminuição desse problema é o uso do letramento matemático, estudado no capítulo 2.

## 5.2 Desenvolvimento do processo de fragmentação

O processo de fragmentação, na estrutura de soluções, é dividido em três partes:

(1) identificação da tarefa do problema, que será um modo para a facilitação da resolução, pois ficará mais fácil saber o que o problema está se resumindo, visto que faz-se a observação na ação do problema, tendo em vista isso o aluno deve identificar os verbos que fazem indicação de ação (definição de verbo de ação)

(2) define-se uma estratégia para a realização do problema, na qual faz-se observação em primeira pessoa do problema, e imaginando como o indivíduo em primeira pessoa resolveria tal problemático passo a passo, respeitando as condições imposta pelo problema, e para a finalização

(3) a aplicação dos resultados da contagem conforme a (2) estratégia, a qual para essa etapa precisasse verificar a quantidade de possibilidades de cada etapa, assim aplicar os resultados da contagem, entretanto, nessa aplicação o alunado deve ter uma tenuidade para os desdobramentos de futuras situações problemas (condições), na escolha do princípio aditivo ou multiplicativo, que mais para frente será explicado de forma paulatinamente.

## 5.3 Conceitos, Exemplos e Soluções de Análise Combinatória

Nas próximas subseções serão mostrados os conceitos de Análise Combinatória, assim como três exemplos, sua solução de forma fragmentada e também a solução no Excel.

### 5.3.1 Método dos Princípios da Contagem – MPC

O Método do Princípio de Contagem será dividido a priori em dois, aditivo e multiplicativo. A princípio, define-se o princípio aditivo em:

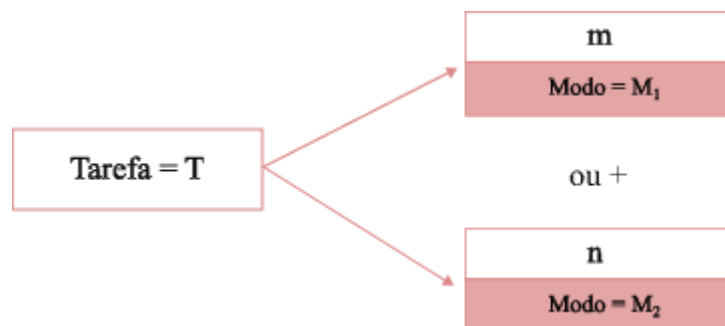
Nomeando tarefa = T e modos em siglas  $M_1$  e  $M_2$ , temos que a uma tarefa T que deve ser realizada e há dois modos  $M_1$  e  $M_2$  para a realização dessa tarefa, tal que:

- I.  $M_1$  e  $M_2$  são mutuamente excludentes;

- II. Há  $m$  maneiras distintas de realizar a tarefa usando o modo  $M_1$ ;
- III. Há  $n$  maneiras diferentes para a realização da tarefa usando o modo  $M_2$ ;

Portanto, analisando a problemática, existe  $m + n$ , para a realização da tarefa, assim exibido na figura 1:

Figura 1- Diagrama dos modos



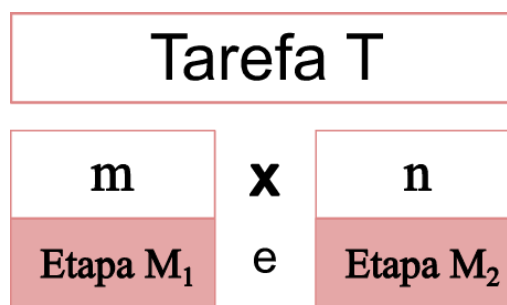
Fonte: Própria do autor, (2023)

Denotar que modos são mutuamente excludentes, significa que um modo anula o outro modo, ou seja, escolhe-se apenas o  $M_1$  ou  $M_2$ , para que seja realizada a tarefa, nota-se que para esse método o discente precisa observar o conectivo alternativo “ou”, um determinante importante para o princípio aditivo.

Por conseguinte, o princípio multiplicativo denotamos que: se uma tarefa  $T$  pode ser realizada em etapas consecutivas, ou seja,  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_n$ , tal que:

- I. A etapa  $E_1$  pode ser feita de  $m$  maneiras distintas;
- II. Para cada maneira de realizar a etapa  $E_1$ , há  $n$  formas de realizar a etapa  $E_2$ , ou seja, o número de maneiras para a realização da tarefa é  $m \cdot n$ .

Figura 2- diagrama das etapas



Fonte: Próprio autor (2023)

A figura 2 mostra o diagrama do princípio multiplicativo em síntese, observa-se que tal princípio é marcado pelo conectivo de adição “e”, visto que a tarefa pode ser

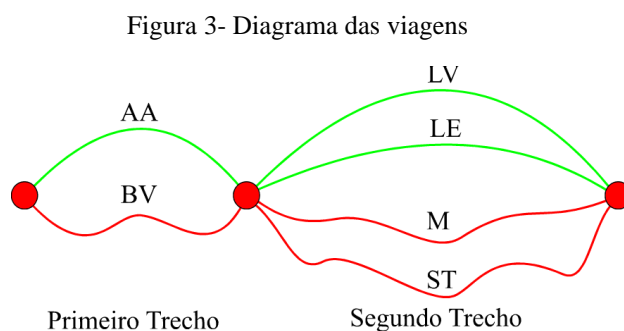
dividida em  $n$  maneiras de etapas, assim o princípio multiplicativo segue uma ordem de várias etapas não interruptas, visto que os princípios aditivo e multiplicativo podem ser escrito de forma generalizada para um número finito de qualquer modos ou etapas.

**Exemplo 1:** Carla precisa fazer uma viagem que terá dois trechos. Na primeira parte ela possui uma (1) opção de voo e uma (1) opções de ônibus. Já no segundo trecho, Carla tem duas (2) opções de voo e (2) de ônibus. Caso ela decida pegar um voo, só poderá usar este recurso em um dos trechos. De quantas formas diferentes Carla pode fazer esta viagem?

**Solução:** Para que possamos resolver o problema de forma mais trivial, e por consequência o alunado possa ter maior entendimento sobre problemas de tais tipo de contagem, separa-se a solução em três etapas:

- I- Tarefa: nessa etapa, o leitor seja ele o professor ou discente, identifica qual o problema (tarefa) que o enunciado propõe. Na situação problema do exemplo Carla quer fazer uma viagem, dito isso a tarefa se resume a fazer uma viagem.
- II- Estratégia: Nesse ponto o leitor deve se colocar em primeira pessoa, para que possa analisar da melhor forma o problema do enunciado, vale ressaltar que deve respeitar as condições do problema. Nesse caso, Carla só poderia pegar um voo.

Nomeando os transportes no primeiro trecho da viagem de Carla, tem-se que Arara Azul (AA) o primeiro voo e Boa Viagem (BV) para o primeiro ônibus, por conseguinte temos que, no segundo trecho da viagem possui os ônibus: Linha Veloz (LV) e Linha Expresso (LE), para os voos tem-se: Milhas (M) e Sky Transporte (ST), organizando em um diagrama para que possa ser mais lúdico, temos que:



Fonte: Próprio autor (2023)

Nomeando o primeiro trecho da viagem como “x” e a segunda parte da viagem como “y”, utilizando pares ordenados para indicar o trajeto que Carla utilizou, por exemplo (AA, LE), significa que Carla utilizou o transporte da Arara Azul (voo) e na segunda parte do trecho ela utilizou a Linha Expressa (ônibus). Dessa maneira, descreveremos o conjunto de todas as possibilidades possíveis de viagens, respeitando as condições do enunciado, sendo assim, fazendo um passo a passo do problema, nesse caso a estratégia será viajar o primeiro trecho e depois o segundo, pegando no máximo um voo.

III- Contagem: nessa etapa, aplica-se os princípios de contagem conforme foi estabelecido na etapa anterior (II- estratégia).

Utilizando o recurso mais elementar de todos, ou seja, contar de um a um, todo o conjunto de possibilidades que a tarefa possibilita, dessa forma, obtém-se os seguintes pares ordenados:

$$S = \{(AA,LE), (AA,LV), (BV,M), (BV, ST), (BV,LE), (BV,LV)\}$$

Portanto, totaliza-se seis pares ordenados, que seriam seis formas diferentes que Carla poderia fazer sua viagem. Observe que nesse problema não foi feita a utilização do recurso dos princípios fundamentais (aditivo e multiplicativo), haja vista que existem tais problemáticas que podem ser resolvidas apenas descrevendo o conjunto de possibilidades e contando um por um.

**Solução pelo Excel:** primeiro o sinal de igual em uma célula escolhida, a qual sempre deve ser colocado para que possa ser executado comandos na planilha eletrônica, por conseguinte usamos o comando COMBIN, que seria uma combinação sem repetição e coloca-se (2;1), ademais, utiliza-se a soma e mais uma vez o comando COMBIN, e coloca-se (4;1), que apertando *enter* gera o resultado de 6 maneiras de viajar, a figura 4, mostra a janela da planilha do Excel.

Figura 4- Resolução exemplo1

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3	viagem	=COMBIN(4;1)				
4						

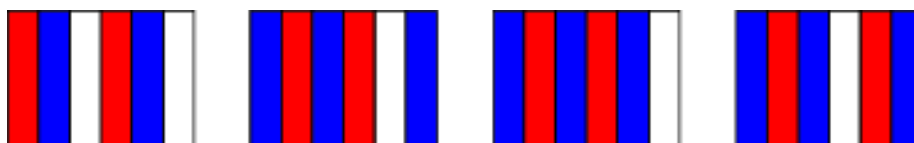
Fonte: Próprio autor (2023)

**Exemplo 2:** Considere uma bandeira formada por 6 listras. Devemos colorir essas listras usando apenas as cores vermelho, azul e branco. Cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos podemos colorir esta bandeira?

**Solução:** Seja, na figura 5 os casos particulares

- I- Tarefa: colorir a bandeira, de modo com que as cores adjacentes não sejam iguais
- II- Estratégia: Alguns casos particulares que podemos formar são:

Figura 5- Bandeiras



Fonte: próprio autor (2023)

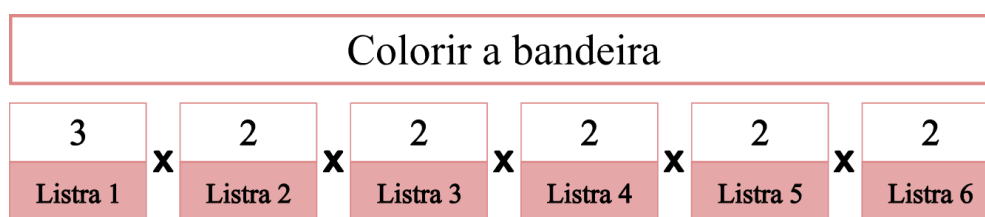
Uma estratégia que podemos utilizar para realizar essa tarefa é pintar uma listra de cada vez, iniciando pela primeira e respeitando as restrições dadas no enunciado do problema.

Começamos pintando a primeira listra. Para pintar a segunda listra, podemos usar qualquer uma das cores disponíveis, excluindo a cor que já foi utilizada na primeira listra. Para pintar a terceira listra, podemos utilizar qual quer cor (inclusive a cor usada na primeira listra), exceto a cor usada na listra que acabamos de pintar. E assim sucessivamente. Abordando essa estratégia, seguimos pintando todas as listras com cores adjacentes sempre distintas.

- III- Contagem. Aplicamos os princípios de contagem.

Temos uma tarefa dividida em 6 etapas consecutivas. Para a primeira listra temos três possibilidades, pois podemos usar qualquer uma das cores disponíveis. Na segunda listra temos duas possibilidades, pois qualquer cor pode ser utilizada, com a exceção da cor usada na primeira listra. Na terceira listra temos também duas possibilidades, pois não podemos usar a cor utilizada na segunda listra. Para a quarta, quinta e sexta listra, temos duas possibilidades, seguindo o mesmo raciocínio anterior. Aplicando o Princípio Multiplicativo temos o diagrama da figura 6:

Figura 6- Etapa da bandeira

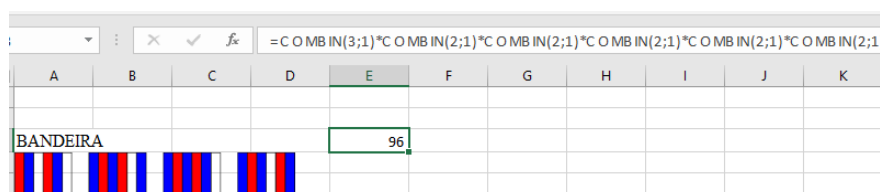


Fonte: Próprio autor (2023)

Dessa forma existem  $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 96$  maneiras diferentes de pintar essa bandeira. Percebe-se que é um problema simples, porém causa confusão no decorrer da solução do problema se não for analisado de maneira mais cautelosa, por isso opta-se para a divisão do problema em: Tarefa, Estratégia e Contagem. Visto que o discente possa ter uma melhor leitura e interpretação, dessa forma, possuindo êxito na solução da questão.

**Solução pelo Excel:** primeiro o sinal de igual em uma célula, a qual sempre deve ser colocado para que possa ser executado comandos na planilha eletrônica, por conseguinte usamos o comando COMBIN, que seria uma combinação sem repetição e coloca-se (3;1), ademais, utiliza-se a multiplicação que é o sinal (\*) e mais uma vez o comando COMBIN, e coloca-se (2;1), por mais cinco vezes devido ser um problema de princípio multiplicativo que apertando *enter* gera o resultado de 96 maneiras de colorir, a figura 7 exhibe a janela com a solução do Excel.

Figura 7- Aplicação no Excel



Fonte: Próprio autor (2023)

**Exemplo 3:** Quantos números de três algarismo distinto existem?

**Solução:** Seja

- I- Tarefa: formar um número de três algarismo.
- II- Estratégia: colocando alguns casos particulares, temos casos particulares do problema na figura 8:

Figura 8- Casos particulares

<b>702</b>	<b>135</b>	<b>804</b>	<b>143</b>
------------	------------	------------	------------

Fonte: Próprio autor (2023)

Para formar números de três algarismos, podemos escolher um algarismo de cada vez. Desse modo, escolhe-se uma estratégia em três etapas: escolher os algarismos da unidade, dezena e centena, respeitando as condições do enunciado.

III- Contagem: Aplicando os princípios de contagem de acordo com a estratégia estabelecida.

O algarismo da unidade possui 10 elementos de possibilidades, visto que pode ser qualquer dígito decimal: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 ou 9. Em seguida, sobram apenas 9 possibilidades para o algarismo da dezena, devido o enunciado pedir que os algarismos sejam distintos. Tendo isso em vista, ocorre um problema no decorrer da solução, pois quantos algarismos distintos podem ser escolhidos na casa da centena, figura 9.

Figura 9-Análise da problema

<b>Formar número de 3 algarismos</b>		
?	<b>x</b>	9
<b>Centenas</b>	e	<b>Dezenas</b>
	<b>x</b>	10
	e	<b>Unidades</b>

Fonte: Próprio autor (2023)

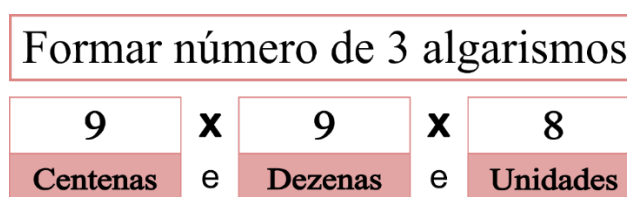
Analisando as possibilidades.

- Primeiro caso: suponha-se que o zero já tenha sido utilizado nas casas de unidade e dezena, por exemplo: ?06, ?80 ou ?09. Por consequência, teremos 8 possibilidades para escolher o dígito das centenas, devido não haver a possibilidade da repetição dos algarismos.
- Segundo caso: Suponha-se que o zero ainda não foi utilizado, como por exemplo: ?39,78,12 e 3. Como resultado, tem-se 7 possibilidades para a casa da centena, visto que podemos utilizar qualquer dígito, desde que não tenha sido utilizado nas duas casas anteriores e exceto o zero, logo que um número de três algarismos não admite zero na centena.

Ou seja, não é possível dizer quantas são as possibilidades para o algarismo das centenas. Esse problema ocorre por que há uma restrição sobre uma das etapas da estratégia: a casa da centena não pode ser zero. Problemas que possuem restrições em algumas de suas etapas a melhor solução é iniciar pela etapa que apresenta tal restrição, utilizando essa abordagem a etapa da estratégia será a priori resolver tais restrições.

Sendo assim, ajustando a estratégia, refaz-se a contagem, inicia-se pela casa das centenas, devido a maior restrição está presente nela. O algarismo das centenas possui 9 possibilidades, visto que as centenas não admitem o zero. Em seguida, sobram 9 possibilidades para a casa da dezena, devido já ter sido utilizado um algarismo na casa da centena, e por fim sobram apenas 8 possibilidades para a casa da unidade, pois não há possibilidade de repetição entre os algarismos. Utilizando o Princípio Multiplicativo, temos que:

Figura 10- Etapas dos algarismos



Fonte: Próprio autor (2023)

Portanto, há  $9 \times 9 \times 8 = 648$  números de três algarismos distintos.

É importante dizer que não existe um método que resolva qualquer problema de combinatória. o que apresentamos foi introduzir os raciocínios gerais para abordar problemas básicos, que são estudados até o ensino médio. Há diversas outras técnicas conhecidas, visto que iremos abordar no decorrer deste trabalho. No entanto, não podemos deixar de comentar que vários problemas costumam ser resolvidos pela análise e compreensão do problema, vale ressaltar que para incógnitas mais elaboradas e com isso uma solução mais engenhosa o aluno precisa ter uma base sólida e dominar o entendimento do Princípio Fundamental da Contagem.

**Solução pelo Excel:** primeiro o sinal de igual em uma célula, a qual sempre deve ser colocado para que possa ser executado comandos na planilha eletrônica, por conseguinte usamos o comando COMBIN, que seria uma combinação sem repetição e coloca-se (9;1), ademais, utiliza-se a multiplicação que é o sinal (\*) e mais uma vez o comando COMBIN, e coloca-se (9;1), por mais uma vez utiliza-se o sinal da multiplicação (\*) e o comando COMBIN, e coloca-se (8;1), apertando *enter* gera ao todo 648 modos de

fazer algorismos com três números distintos, a figura 11 mostra a janela de comando da planilha.

Figura 11- Resolução do Exemplo 3 pelo Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	ALGARISMOS			648			

Fonte: Próprio autor (2023)

### 5.3.2 Permutação

Dados  $n$  objetos distintos, precisamos saber o número de modos de arrumá-los em fila. Cada fila possível é chamada de *permutação simples* dos  $n$  objetos. Representamos por  $P_n$  o número de permutações simples de  $n$  objetos. Segue-se que o número de modos de arrumar em fila  $n$  objetos distintos é

$$P_n = n!$$

**Exemplo 4:** De quantos modos podemos arrumar em fila cinco objetos distintos.

**Solução:** Seja portanto.

- I- Tarefa: arrumar objetos em fila
- II- Estratégia: para a melhor compreensão nomeasse os objetos como: A,B,C,D e E.

Figura 12- Casos particulares

A	B	D	E	C
1°	2°	3°	4°	5°
E	C	B	A	D
1°	2°	3°	4°	5°
B	A	E	C	D
1°	2°	3°	4°	5°

Fonte: Próprio autor (2023)

A estratégia será arrumar um objeto de cada vez.

### III- contagem: aplicação do princípio da contagem

Ao analisar a estratégia, nota-se que o primeiro objeto possui cinco possibilidades, pois pode ficar em qualquer lugar da fila. O segundo objeto possui quatro possibilidades, visto que pode ocupar qualquer lugar exceto o que foi ocupado pelo anterior, assim, seguindo a lógica para os demais objetos são: 3, 2 e 1. Aplicando o princípio multiplicativo temos:  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$  filas distintas.

**Solução pelo Excel:** primeiro o sinal de igual, a qual sempre deve ser colocado para que possa ser executado comandos na planilha eletrônica, por conseguinte usamos o comando COMBIN, que seria uma combinação sem repetição e coloca-se (5;1), ademais, utiliza-se a multiplicação que é o sinal (\*) e mais uma vez o comando COMBIN, e coloca-se (4;1), por mais três vezes, sendo (3;1), (2;1) e (1;1) devido ser um problema de princípio multiplicativo que apertando *enter* gera o resultado de 120 maneiras, a figura 13 mostra a janela de comando da planilha eletrônica.

Figura 13- Resolução do Exemplo 4 no Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	120									

Fonte: Próprio autor (2023)

Problemas como que acabamos de resolver aparece a todo momento. Por esse motivo vale a pena decorar seu resultado. Para isso definimos fatorial. Chamamos de fatorial  $n$  e representamos por  $n!$  o produto de todos os naturais desde 1 até  $n$ .

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \dots \times n$$

Por exemplo:

- $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$
- $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
- $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

**Observação:** Sabe-se que a multiplicação é comutativa, ou seja, a ordem do produto não terá importância. É comum escrever as vezes,  $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ . A notação

fatorial possui grande importância, um exemplo é a compactação da escrita e uma melhor facilitação dos problemas.

**Exemplo 5:** Quantos anagramas podemos formar com a palavra VESTIBULAR?

**Solução:** Primeiro passo sempre fazer a fragmentação da solução;

- I. Tarefa: formar os anagramas
- II. Estratégia: um anagrama de uma palavra é qualquer sequência formada com as letras do mesmo, sem excluir, nem acrescentar letra. Casos particulares do exemplo, estão na figura 14.

Figura 14- Anagramas da palavra

<b>VESTIBULAR</b>	<b>ESTIBUVLAR</b>
<b>RALUBITSEV</b>	<b>SIULRETBVA</b>

Fonte: Próprio autor (2023)

Contando todos os caracteres totaliza-se 10. Analisando a incógnita percebe-se que é uma problemática de permutação simples.

- III. Contagem: Aplicação dos resultados de contagem.

O número de anagramas é  $P_{10} = 10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$

**Solução pelo Excel:** Para iniciar os comandos no Excel, primeiro usa-se o igual para gerar os devidos comandos, por conseguinte usaremos o comando PERMUT, que seria permutação sem repetição, a qual coloca-se (10;10) e gera o resultado 3628800 anagramas possíveis, assim exibido na figura 15 janela de comando.

Figura 15- Aplicação no Excel do Exemplo 5

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3	VESTIBULAR			3628800		

Fonte: Próprio autor (2023)

**Exemplo 6:** Quantos são os anagramas da palavra ENEM?

**Solução:** neste exemplo verificaremos o que seria um falso anagrama;

- I. Tarefa: formar os anagramas da palavra ENEM
- II. Estratégia: casos particulares da palavra ENEM

A figura 16 mostra os casos particulares da palavra ENEM.

Figura 16- Casos particulares de anagramas da palavra ENEM

<b>ENME</b>	<b>NMEE</b>	<b>MNEE</b>	<b>NEME</b>
-------------	-------------	-------------	-------------

Fonte: Próprio autor (2023)

A palavra ENEM possui quatro letras, porém elas não são todas distintas, haja vista que se considerarmos todas as permutações das quatro letras o resultado seria  $P_4 = 4!$ , a qual o resultado é 24, todavia, verifica-se que o resultado correto é 12, veja figura 17.

Figura 17- Anagrama

<b>ENEM</b>	<b>ENME</b>	<b>EENM</b>	<b>EEMN</b>	<b>EMEN</b>	<b>EMNE</b>
<b>NEEM</b>	<b>NEME</b>	<b>NMEE</b>	<b>MENE</b>	<b>MEEN</b>	<b>MNEE</b>

Fonte: Próprio autor (2023)

Nota-se que ao considerarmos todas as letras distintas obtemos o dobro do resultado correto. Nesse sentido, ocorre devido a análise da problemática está relacionada ao contarmos os casos em que a letra “E” troca de posição com a outra, exibido na figura 18. Ou seja, para cada transposição de letra da palavra ENEM é obtido um “falso” anagrama devido a variação das letras “E”.

Figura 18- Falsos anagramas

<b>ENEM</b>	<b>ENME</b>	<b>EENM</b>	<b>EEMN</b>	<b>EMEN</b>	<b>EMNE</b>
ENEM	ENME	EENM	EEMN	EMEN	EMNE
<b>NEEM</b>	<b>NEME</b>	<b>NMEE</b>	<b>MENE</b>	<b>MEEN</b>	<b>MNEE</b>
NEEM	NEME	NMEE	MENE	MEEN	MNEE

Fonte: Próprio autor (2023)

Portanto, para obter o resultado correto, supomos inicialmente que todas as letras são distintas e em seguida dividimos o resultado por 2.

III. Contagem: aplicação dos métodos de contagem.

Supondo todas as letras distintas obtemos  $P_4 = 4!$  Por conta da repetição do caractere E na palavra ENEM, faz-se a razão desse valor por dois.

$$\frac{P_4}{2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{24}{2} = 12$$

**Solução pelo o Excel:** Para iniciar os comandos no Excel, primeiro usa-se o igual para gerar os devidos comandos, por conseguinte usaremos o comando PERMUT, que seria permutação sem repetição, a qual coloca-se (4;4) e usaremos o sinal da divisão (/) que será dividido pelo fatorial de 2, a qual para inserir o comando é FATORIAL (2) e gera o resultado de 12 anagramas, veja figura 19.

Figura 19- Aplicação no Excel

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3	ENEM		12			

Fonte: Próprio autor (2023)

### 5.3.2 Permutação com repetições

Dados  $n$  objetos, entre os quais há

- $n_1$  objetos, repetidos do tipo  $x_1$
- $n_2$  objetos, repetidos do tipo  $x_2$

- $n_3$  objetos, repetidos do tipo  $x_3$
- ....
- $n_k$  objetos, repetidos do tipo  $x_k$

Necessitamos saber o número de maneira de agrupá-lo em fila. Cada fila possível é chamada uma permutação com repetição dos  $n$  objetos. Dessa forma, representa-se o total de permutações desse tipo por  $P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_k)}$ . Visto isso, o número de modos de arrumar em fila  $n$  objetos, considerando as repetições descritas acima é

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Visto desse modo, o enunciado das permutações com repetições pode assustar um pouco, porém seu uso é bastante simples, como será exposto nos exemplos a seguir.

**Exemplo 7:** quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?

**Solução:** Seja,

- Tarefa: formar anagramas utilizando as letras da palavra MATEMÁTICA.
- Estratégia: como visto anteriormente, anagramas são permutações, entretanto temos uma palavra com letras repetidas, dessa maneira, aplicaremos a fórmula das permutações com repetições.
- Contagem: aplicação dos resultados de contagem.

Sondando o problema, podemos ver que a palavra MATEMÁTICA possui 10, sendo 2 M's, 3 A's (desconsideramos o acento em um dos A's) e 2 T's. Dessa forma temos

$$P_{10}^{(2,3,2)} = \frac{10!}{2! 3! 2!} = 151200$$

Anagramas formados a partir da palavra MATEMÁTICA

**Solução pelo Excel:** Para iniciar os comandos no Excel, primeiro usa-se o igual em uma célula para gerar os devidos comandos, por conseguinte usaremos o comando FATORIAL, que seria fatorial, a qual coloca-se (10) e usaremos o sinal da divisão (/) que será dividido pelo fatorial de 2, a qual para inserir o comando é FATORIAL (2), por conseguinte multiplicaremos inserindo o sinal (\*) fatorial de 3 que colocaremos o comando FATORIAL(3) e multiplica-se pôr o fatorial de 2 novamente e inserindo o

comando FATORIAL (2) e gera o resultado de 151200 anagramas, exibido na figura 20 a janela de comando para fazer o exemplo 7.

Figura 20- Aplicação no Excel do Exemplo 7

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3	MATEMÁTICA			151200					

Fonte: Próprio autor (2023)

**Observação:** no exemplo 7, foi necessário calcular  $10! = 3628800$  para chegar ao resultado 151200. Um cálculo que se torna extenso dependendo do fatorial calculado, entretanto há uma forma mais simples de resolver aquela conta sem precisar calcular explicitamente o  $10!$  De acordo com a definição de fatorial, temos por exemplo.

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Observa-se, por exemplo, que  $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ , é claramente uma parte do desenvolvimento de  $7!$ .

$$P_{7!} = 7 \times 6 \times \underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{5!}$$

Dessa forma, podemos escrever o  $7!$  Da seguinte forma:  $7! = 7 \times 6 \times 5!$

Assim, dado qualquer fatorial, podemos desenvolvê-lo até certo ponto que seja conveniente e colocar a exclamação indicando o fatorial.

Visto isso, usaremos esse recurso para simplificar cálculos envolvendo fatorial. Assim podemos desenvolver o numerador de uma fração até simplificar com denominador. Por exemplo, precisamos calcular o valor de  $\frac{7!}{5!2!}$  Utilizando este recurso temos:

$$\frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!2!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = \frac{42}{2} = 21$$

Voltando ao exemplo dos anagramas da palavra MATEMÁTICA, podemos agora calcular assim.

$$P_{10}^{(2,3,2)} = \frac{10!}{2!3!2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2!3!2!} =$$

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{4} = 151200$$

Embora não ter sido muito eficaz neste exemplo, essa técnica ajuda muito nas contas.

**Exemplo 8:** Quantos são os anagramas da palavra combinação?

**Solução:**

- I. Tarefa: formar anagramas
- II. Estratégia.

Temos um problema com letras repetidas, desse modo, usaremos permutação com repetição.

- III. contagem. Aplicação dos resultados de Contagem.

Haja vista que temos 10 letras, sendo 2 C's, 2 A's e 2 O's. Assim temos:

$$P_{10}^{(2,2,2)} = \frac{10!}{2!2!2!} = 453600$$

**Solução pelo Excel:** Para iniciar os comandos no Excel, primeiro usa-se o igual para gerar os devidos comandos, por conseguinte usaremos o comando FATORIAL, que seria fatorial, a qual coloca-se (10) e usaremos o sinal da divisão (/) que será dividido pelo fatorial de 2, a qual para inserir o comando é FATORIAL (2), por conseguinte multiplicaremos inserindo o sinal (\*) fatorial de 3 que colocaremos o comando FATORIAL(2) e multiplica-se pôr o fatorial de 2 novamente e inserindo o comando FATORIAL (2) e gera o resultado de 453600 anagramas, exibido na figura 21 a janela de comandos para a resolução do exemplo 8, via planilha eletrônica.

Figura 21- Aplicação no Excel do Exemplo 8

	A	B	C	D	E
1					
2					
3	COMBINAÇÃO			453600	

Fonte: Próprio autor (2023)

**Exemplo 9:** Quantos anagramas da palavra COMBINADO começam por C e termina por A?

**Solução:** Seja as tarefas

- I. Tarefa: formar anagramas.
- II. Estratégia: temos um problema de permutação. Ao analisar a problemática, nota-se que existe duas restrições, que a primeira letra seja C e a última letra seja A. Assim fixando C e A como exigido no enunciado nos restam 7 letras, sendo 2 O's, para permutar. Com isso, usaremos permutação com repetição.
- III. Contagem: seguindo a estratégia estabelecida obtemos

$$P_7^{(2)} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

anagramas da palavra combinado começando com C e terminando com A.

**Solução pelo Excel:** Para iniciar os comandos no Excel, primeiro usa-se o igual para gerar os devidos comandos, por conseguinte usaremos o comando FATORIAL, que seria fatorial, a qual coloca-se (7) e usaremos o sinal da divisão (/) que será dividido pelo fatorial de 2, a qual para inserir o comando é FATORIAL (2), e gera o resultado de 2520 anagramas, exibido na figura 22 a janela de comandos.

Figura 22- Aplicação no Excel do Exemplo 9

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3	COMBINADO			2520		

Fonte: Próprio autor (2023)

### 5.3.3 Combinação simples

Dado um conjunto A, com n objetos distintos, precisamos saber quantos subconjuntos de p elementos, escolhidos a partir de A, podemos obter. Cada subconjunto formado nessas condições e chamado uma combinação simples de A. Representamos o total de combinações simples de p elementos, escolhidos a partir de n elementos dados por  $C_n^p$ . Dessa forma, o número de subconjuntos com p elementos, escolhidos a partir de um conjunto A com n elementos é

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(p-1)]}{p!}$$

Podemos desenvolver a fórmula acima e apresentá-la de forma simplificada, ao qual é mais usual nos livros didáticos.

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

**Exemplo 10:** Suponha que queremos fazer uma vitamina com 3 frutas diferentes, escolhidas entre 7 que estão à disposição. Quantas vitaminas diferentes podem ser obtidas?

**Solução:** Seja,

- I. Tarefa: Escolher 3 frutas
- II. Estratégia: Precisamos escolher 3 frutas entre 7 disponíveis. Notamos que a ordem de escolha dessas frutas não é relevante para o enunciado. Logo temos um problema de combinações simples.
- III. Contagem: Aplicação dos resultados de contagem.

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 7 \times 5 = 35$$

**Solução pelo o Excel:** Usaremos a priori o sinal de igual para dar início aos comandos, por conseguinte usaremos o comando COMBIN, que seria uma combinação sem repetição cujo seria (7;3) que gera o resultado de 35 combinações de vitaminas, exibido na figura 23 a janela de comandos.

Figura 23- Aplicação no Excel do Exemplo 10

	A	B	C	D	E
1					
2					
3	VITAMINAS		35		

Fonte: Próprio autor (2023)

**Exemplo 11:** Calcule todas as combinações possíveis de 10 elementos tomados de 4 em 4.

**Solução:** Seja,

- I. Tarefa: Fazer as combinações possíveis de 10 elementos tomando 4 em 4.
- II. Estratégia: como a ordem não importa, aplicaremos a fórmula das combinações simples.
- III. Contagem: Aplicação dos resultados de contagem.

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4!6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{5040}{24} = 210$$

**Solução pelo Excel:** Usaremos a priori o sinal de igual para dar início aos comandos, por conseguinte usaremos o comando COMBIN, que seria uma combinação sem repetição cujo seria (10;4) que gera o resultado de 210 combinações, exibido na figura 24, que seria a janela de comandos da planilha.

Figura 24- Aplicação no Excel do Exemplo 11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3	COMBINAÇÕES DE 10 ELEMENTOS TOMADO DE QUATRO EM QUATRO								210

Fonte: Próprio autor (2023)

### 5.3.4 Combinação com repetição

Dado um conjunto com  $n$  elementos, definimos como  $Cr n, p$ , combinação com repetição de  $n$  elementos tomados de  $p$  a  $p$ , todos os agrupamentos não ordenados que podemos formar contendo  $p$  elementos, com repetições, escolhidos entre os  $n$  elementos do conjunto.

$$CP_{n,p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

**Exemplo 13:** Em um restaurante existem 4 opções de sucos feitos da fruta, são eles: abacaxi, laranja, manga e tamarindo. De quantas maneiras distintas um cliente pode pedir dois sucos?

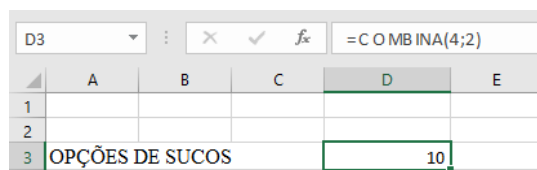
**Solução:** Seja

- I. Tarefa: Mostrar as possibilidades de escolha de dois sucos.
- II. Estratégia: Essa situação é uma combinação com repetição, pois a ordem dos sabores não é importante, ou seja, se o cliente pedir abacaxi e laranja ou laranja e abacaxi, será o mesmo agrupamento. Além disso, são permitidas repetições, ou seja, ele pode pedir dois sucos do mesmo sabor.
- III. Contagem: aplicação dos resultados de contagem.

$$CP_{4,2} = \frac{(4 + 2 - 1)!}{2!(4 - 1)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

**Solução pelo Excel:** Usaremos a priori o sinal de igual para dar início aos comandos, por conseguinte usaremos o comando COMBINA, que seria uma combinação com repetição cujo seria (4;2) que gera o resultado de 10 combinações de sucos, exibido na figura 25.

Figura 25- Aplicação no Excel do Exemplo 13



	A	B	C	D	E
1					
2					
3				OPÇÕES DE SUCOS	10

Fonte: Próprio autor (2023)

**Exemplo 14:** Buscando inovação, a pamonharia da Tia Joana lançou novos sabores de pamonha. São eles: pamonha à moda com pequi, pamonha de doce com chocolate, pamonha de carne moída com bacon, pamonha de calabresa e pamonha de carne seca. Se 3 clientes decidem escolher 1 pamonha cada entre os 5 sabores novos, o número de combinações distintas para o pedido deles é igual a?

**Solução:** Seja

- I. Tarefa: mostrar o número de combinações distintas para o pedido dos clientes.
- II. Estratégia: Há 5 sabores disponíveis, e os clientes escolherão 3 pamonhas, distintas ou não, então, temos um caso de combinação com repetição.
- III. Contagem: Aplicando fórmula de combinação com repetição, temos que.

$$CP_{5,3} = \frac{(5 + 3 - 1)!}{3!(5 - 1)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = \frac{210}{6} = 35$$

**Solução pelo Excel:** Usaremos a priori o sinal de igual para dar início aos comandos, por conseguinte usaremos o comando COMBINA, que seria uma combinação com repetição cujo seria (5;3) que gera o resultado de 35 combinações de pamonhas, exibido na figura 26 a janela de comando da planilha eletrônica.

Figura 26- Aplicação no Excel

	A	B	C	D	E
1					
2					
3	PAMONHA			35	

Fonte: Próprio autor (2023)

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com esse estudo esperamos que o leitor, seja ele um docente ou um aluno, que possa ter assimilado um conhecimento sobre o assunto de análise combinatória, haja vista que o mesmo pode ser aplicado com o auxílio de outras ferramentas, nesse trabalho optou-se pela fragmentação da solução das questões e pelo uso da planilha eletrônica (Excel), auxiliando, o leitor no entendimento dos problemas de análise combinatória.

Além dos exercícios de Análise Combinatória estudado, em trabalhos futuros pode-se acrescentar exercícios com Arranjo. Sugere-se que seja continua o estudo da Teoria da Probabilidade, pois o mesmo possui inúmeras aplicações e estudos de contagens, em vários ramos, entre eles a Engenharia e Ciência Computação.

O letramento matemático, é uma metodologia no qual visa facilitar o entendimento dos problemas; de maneira que possa compreender, utilizar e aplicar em sua realidade, dando um significado ao que é ensinado em conteúdo de sala de aula.

Outras formas de uso de tecnologia para o ensino de análise combinatória são válidas, tais como o uso do Calc do Linux e também o Geogebra.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl B **História da matemática** 2 ed São Paulo: Blucher, 2008

CARVALHO, M. R. V. **Relatos de pesquisa**: perfil do professor da Educação Básica. Brasília:INEP,2018.

D`AMBROSIO, U. Avaliação do alfabetismo matemático: intenções e possibilidades de pesquisa. In: FONSECA, M. **Letramento no Brasil**: Habilidades matemáticas. São Paulo: Global: Ação Educativa Assessoria, 2004, p. 31-46.

EVES, Howard **Introdução à história da matemática**. Campinas, São Paulo: Unicamp, 2008.

IBGE. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **PNAD Contínua TIC 2018**: internet chega a 79,1% dos domicílios do país. 2020<sup>a</sup>. Disponível em:<https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/27515-pnad-continua-tic-2018-internet-chega-a-79-1-dos-domicilios-do-pais>. Acesso: 01 abril 2023.

IBGE.Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Acesso à Internet e à televisão e posse de telefone móvel celular para uso pessoal 2018**. 2020b. Disponível em:[https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101705\\_informativo.pdf](https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101705_informativo.pdf). Acesso: 01 abril 2023.

INEP. Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Censo escolar da educação básica – 2019**: notas estatísticas. Brasília: MEC, 2020.

LAPPONI, Juan Carlos. **Estatística Usando excel**. Quarta Edição Elsevier. Editora Campus, 2005.

MOREIRA, A. F. B.; KRAMER, S. Contemporaneidade, educação e tecnologia. **Educ. Soc.**, Campinas, v. 28, n. 100 – Especial, p. 1037-1057, out. 2007.

MORGADO, Augusto César de Oliveira et al **Análise combinatória e probabilidade**. 9. ed, Rio de Janeiro, SBM, 2006

PRADO, M. E. B. B.; ROCHA, A. K. O. Formação continuada do professor no contexto da Programação computacional. In: VALENTE, J. A.; FREIRE, F. M. P.; ARANTES, F. L. (Orgs.).

TOLEDO, M. Alfabetismo, escolarização e educação matemática: Reflexões de uma professora de matemática. In: FONSECA, M. **Letramento no Brasil**: Habilidades matemáticas. São Paulo: Global: Ação Educativa Assessoria, 2004, p.92-107.