

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

DEFLEXÃO DE VIGAS: MODELAGEM DA EQUAÇÃO E A APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS FUNÇÕES DE SINGULARIDADES

Carlos Wellington Alves Lisboa

BRAGANÇA – PA
2022

DEFLEXÃO DE VIGAS: MODELAGEM DA EQUAÇÃO E A APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS FUNÇÕES DE SINGULARIDADES

Carlos Wellington Alves Lisboa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Licenciado Pleno em Matemática.

Orientadora: Prof. Drª. Marly dos Anjos Nunes

BRAGANÇA – PA

2022

DEFLEXÃO DE VIGAS: MODELAGEM DA EQUAÇÃO E A APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS FUNÇÕES DE SINGULARIDADES

Carlos Wellington Alves Lisboa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Licenciado Pleno em Matemática.

Bragança, 05 de julho de 2022

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Marly dos Anjos Nunes
Orientadora – UFPA

Profa. Dra. Edilene Farias Rozal
Examinador Interno – UFPA

Prof. Me. Oséas Guimarães Ferreira Neto
Examinador Externo – SEDUC-PA

AGRADECIMENTOS

- Primeiramente quero agradecer a Deus, pois é nele que sempre busquei, e sempre buscarei forças para seguir em frente e continuar enfrentando os desafios que a vida nos proporciona. Em segundo, quero agradecer enormemente a minha família, aos meus pais Benedito Lisboa e Rosiane Alves; meus irmãos Robert, Roxanne, Rogerys e Camila por todo amor e apoio, e por sempre acreditarem em mim, por estarem do meu lado nos momentos bons e nos momentos difíceis desta jornada.

- Agradeço a todos os professores da UFPA, pois cada um deles contribuiu de forma significativa para minha formação acadêmica, e em especial quero agradecer de forma profunda a minha professora e orientadora Drª. Marly dos Anjos Nunes por todos os conhecimentos repassados, por todos os ensinamentos e aprendizagens que ela nos proporcionou ao longo do curso, pela dedicação e paciência em me orientar em meu TCC. E a admiro muito pela excelente professora que ela é, sem dúvida ela é e será uma inspiração para mim, além disso, eu a considero um exemplar perfeito do empoderamento feminino, pois é independente, trabalhadora, mãe, amiga e acima de tudo uma pessoa humilde, sem dúvida uma inspiração para todas as suas alunas e mulheres ao seu redor. Sou muito grato por ter sido seu orientando, e claro, por ela ter me aceitado como tal.

- Quero agradecer a Universidade Federal do Pará, por me proporcionar a oportunidade de seguir no ensino superior, e me propiciar as mais diversas experiencias e momentos incríveis que jamais serão esquecidos por mim.

- E por fim, agradecer aos meus amigos de turma, cada um do seu jeito contribuiu comigo de alguma forma, sou grato por tudo, pela parceria, pelas conversas, pelas confraternizações e momentos ímpares que passei ao lado deles, e quero ressaltar que alguns foram muito mais que apenas amigos, foram e são quase como irmãos para mim, e pretendo levar essas amizades para a vida inteira.

"Quando o coração humano supera os seres divinos, o que os deuses vão perdoar e o que eles vão castigar?"(Saint Seiya: O Prólogo do Céu.)

RESUMO

O cálculo de deflexões em vigas é uma atividade muito importante na engenharia estrutural, com base nisso este trabalho apresenta um dos métodos matemáticos que nos permite calcular deflexões em vigas utilizando equações diferenciais e funções de Macaulay. A metodologia utilizada consistiu em revisão bibliográfica, e o estudo se deu através de análise de figuras e gráficos para a modelagem das equações e funções desejadas, na qual a princípio é feita a modelagem da equação diferencial que relaciona a deflexão com o carregamento, em seguida, é feito a modelagem das funções de singularidade através do comportamento de seus gráficos e depois escrevendo-as em termos de funções de Macaulay para assim obtermos a equação que descreve os carregamentos do tipo pontual, distribuído e momento concentrado, utilizando uma única expressão matemática. A fim de observar a praticidade dos cálculos relacionados a esses tipos de carregamentos, foram feitas duas aplicações, uma para obter a deflexão em determinada parte da viga e outra para obter o comprimento máximo do vão livre de uma viga sob uma deflexão máxima pré-estabelecida. Esta pesquisa surgiu pelo interesse do autor em aplicar seus conhecimentos matemáticos na área de engenharia civil, pois o mesmo é técnico em edificações, e buscou utilizar tais conhecimentos para fazer um trabalho que visa contribuir, principalmente para estudantes na área da matemática e na área da engenharia civil, como modelo de aplicação prática de equações diferenciais e funções de Macaulay.

Palavras-chaves: Deflexão; Macaulay; Singularidade; Vigas; Equação Diferencial.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1 Viga Simples . . . 18
2 Viga Engastada . . . 19
3 Viga Bi-Engastada . . . 19
4 Vigas em Balanço nas Extremidades . . . 19
5 Representação de Força (Vetor) . . . 20
6 Representação de Apoio Móvel . . . 20
7 Representação de Apoio Fixo . . . 21
8 Representação de Apoio de Engaste . . . 21
9 Momento Fletor (M) . . . 22
10 A força de Cisalhamento (V) . . . 22
11 Carregamento Distribuído . . . 23
12 Carregamento Pontual . . . 23
13 Momento Concentrado . . . 23
14 Viga sob Carregamento Distribuído . . . 24
15 Diagrama de Corpo Livre de Vigas . . . 25
16 Esforços Internos . . . 26
17 Superfície e Linha Neutra . . . 28
18 Linha Neutra . . . 29
19 Linha Elástica . . . 29
20 Deflexão e Rotação . . . 30
21 Convenção de Sinal para Curvatura . . . 30
22 Seção de Comprimento Infinitesimal dx . . . 31
23 Análise da Seção dx . . . 31
24 Triângulo de Medidas Infinitesimais . . . 33
25 Análise dos Esforços Internos em dx . . . 34
26 Função Sigmóide . . . 38
27 Função de Heaviside . . . 39
28 Representação da Função (33) . . . 40
29 Carregamento Distribuído . . . 40
30 Gráfico das Funções $H(x-a)$ e $H(x-b)$ . . . 41
31 Representação Gráfica da Função (36) . . . 42
32 Carregamento Distribuído . . . 42
33 Função Delta de Dirac . . . 43
34 Representação Gráfica da Função (40) . . . 43
35 Representação Gráfica da Função (42) . . . 44
36 Carregamento Pontual Viga . . . 45
37 Comportamento das Funções (44) e (45) . . . 45
38 Comportamento da Função Dipolo . . . 46
39 Função Dipolo com Descontinuidade em a . . . 46
40 Momento Concentrado . . . 47
41 Gráfico da Função (50) . . . 48
42 Carregamento Distribuído . . . 50
43 Carregamento Distribuído . . . 50
44 Carregamento Pontual . . . 51
45 Momento Concentrado . . . 51
46 Representação Gráfica da Aplicação 6.1 . . . 52

47 Diagrama de Corpo Livre da Aplicação 6.1 52
48 Diagrama de Corpo Livre da Aplicação 6.1 53
49 Representação Gráfica da Aplicação 6.2 55
50 Diagrama de Corpo Livre da Aplicação 6.2 56
51 Deflexão Máxima 57

SUMÁRIO

1 Introdução **10**

2 Equações Diferenciais **12**
2.1 Classificação das Equações Diferenciais 12
2.1.1 Classificação por Tipo 12
2.1.2 Classificação por Ordem 13
2.1.3 Classificação por Linearidade 13
2.2 Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias 13
2.2.1 Solução de EDOs do Tipo $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ 15
2.2.2 Problema de Valor de Contorno 15

3 Resistência dos Materiais **18**
3.1 Vigas 18
3.1.1 Classificação das Vigas 18
3.2 Apoios 20
3.3 Esforços Externos 21
3.4 Tipos de Carregamentos 22
3.5 Equilíbrio Externo das Vigas 24
3.6 Esforços Internos 26

4 Equação Geral de Deflexão em Vigas **28**
4.1 Equação Diferencial da Linha Elástica 29
4.1.1 Relação entre Momento (M) e Curvatura (K) 30
4.2 Relações Diferenciais dos Esforços Interno 34

5 Funções de Singularidades **38**
5.1 Função de Heaviside 39
5.2 Função Delta de Dirac 42
5.3 Função Dipolo 45
5.4 Notação de Macaulay 47
5.4.1 Exemplos da Aplicação das Funções de Macaulay na Análise de Vigas 49

6 Aplicações **52**

7 Considerações Finais **58**

8 Referências **59**

1 Introdução

Na Engenharia estrutural, o estudo de deflexões em vigas é uma vertente de grande relevância, uma vez que no projeto de vigas são estabelecidos valores máximos admissíveis para a deflexão das estruturas. Deflexão é o grau em que um elemento estrutural é deslocado sob um carregamento. Esse estudo é necessário para impedir desalinhamentos em elementos de máquinas, e deflexões excessivas de vigas em prédios na construção civil.

"As vigas são consideradas como um dos elementos estruturais mais importantes, e são elementos que podem ser utilizados para suportar o piso de um edifício, a plataforma de uma ponte ou a asa de um avião. Além disso, o eixo de um automóvel, a lança de um guindaste e até mesmo muitos ossos do corpo humano agem como vigas." (HIBBELER, 2010). Assim, pelo fato de ser de extrema importância, surgiu a proposta de estudar métodos que possibilitassem obter as medidas dos deslocamentos ou deformações ainda nos projetos de vigas, e assim, evitar futuros transtornos em qualquer estrutura a qual as vigas são inseridas.

A ação de forças aplicadas em vigas provoca o deslocamento de seus eixos em relação a sua posição inicial, e para calcular esses deslocamentos são utilizados recursos matemáticos que nos permitem modelar equações para obter os valores das deflexões ocorridas nas vigas. Existem diversos métodos analíticos que nos permitem calcular essas deflexões, como o método da integração, o método da superposição, método dos momentos de área, dentre outros. De modo geral, os métodos utilizados para o cálculo de deflexões são compatíveis com vigas que estão sob influência de um único tipo de carregamento, caso contrário, são necessários cálculos individuais para cada carregamento sobre a viga, em que muitos casos torna o processo de cálculo muito longo e cansativo. No entanto, existe o método das funções de singularidades, que possibilita o cálculo das deflexões em vigas prismáticas, quando estas estão sob carregamentos individuais e/ou de diversos tipos utilizando uma única expressão matemática. Desse modo, o objetivo desta pesquisa é calcular deflexões em vigas utilizando o método das funções de singularidades. Em particular é competência deste trabalho a modelagem da equação da linha elástica, da equação geral das deflexões em vigas e das funções de singularidades (Função de Heaviside, Função Delta de Dirac, Função Dipolo), bem como, expressar as funções de singularidades na notação de Macaulay e a aplicação dos resultados obtidos.

A metodologia utilizada foi de revisão bibliográfica, no qual foi abordado conteúdos matemáticos, tais como equações diferenciais, funções de singularidades, além de noções básicas de mecânica e resistência dos materiais. Além disso, este trabalho está estruturado em 8 capítulos, sendo o capítulo 1 a introdução, no capitulo 2 é apresentado a teoria referente as equações diferenciais, suas classificações e soluções. No capitulo 3, é apresentado alguns conceitos básicos de conteúdos de mecânica dos materiais, como vigas, carregamentos e forças de carregamentos. No capítulo 4, é feita a modelagem da

equação geral da deflexão através das relações matemáticas obtidas através da análise de uma viga deformada. E no capitulo 5, são determinadas as funções de singularidades e usadas em notação de Macaulay para a obtenção da equação de carregamento sobre vigas, no capitulo 6 as aplicações do método. E por fim, os capítulo 7 e 8 são destinados às considerações finais e ao referencial teórico, respectivamente.

2 Equações Diferenciais

Muitos dos princípios físicos, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações que envolvem determinadas variações segundo a qual mudanças ocorrem. As relações expressas em linguagem matemática são denominadas equações, e as variações são derivadas. As equações contendo derivadas são classificadas como equações diferenciais, ou seja, são aquelas equações que apresentam relações entre as taxas que as compõem, essas equações diferenciais geralmente descrevem fenômenos físicos, químicos, biológicos ou sociais e são chamadas ainda de modelo matemático do processo (BOYCE, 2010).

Definicão 2.1. Uma equação que estabelece uma relação entre a variável independente x, a função incógnita $y = f(x)$ e suas derivadas $y'(x), y''(x), ..., y^n(x)$ é chamada de equação diferencial e pode ser escrita na forma

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^n(x)) = 0.$$

São utilizadas diferentes notações para representar uma equação diferencial. As mais comuns são, por exemplo

$$ay'' + by' + c \qquad \text{ou} \qquad a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + c,$$

onde a, b e c são constantes ($a \neq 0$).

2.1 Classificação das Equações Diferenciais

As equações diferenciais são classificadas por tipo, ordem e linearidade.

2.1.1 Classificação por Tipo

As equações diferenciais podem ser ordinárias ou parciais. Se uma equação contiver somente derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente, ela será chamada de Equação Diferencial Ordinária (EDO). Por exemplo,

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 6y = sen(x).$$

E uma equação que contém derivadas de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é denominada de Equação Diferencial Parcial (EDP)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

são exemplos de equações diferenciais parciais.

Neste trabalho, serão estudadas relações nas quais envolvem apenas equações diferenciais ordinárias, portanto, nesta seção as protagonistas serão as EDOs.

2.1.2 Classificação por Ordem

A ordem de uma equação diferencial é a mesma da derivada de maior ordem contida na equação

$$x^2\frac{d^3y}{dx^3} + 2y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 3 = 0,$$

observe que a derivada de maior ordem é $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, assim, este é um exemplo de uma equação ordinária de terceira ordem.

Observação 2.1. O Grau de uma EDO é o maior expoente da derivada de maior ordem. Nesse exemplo, o expoente é 1, sendo assim, uma equação diferencial ordinária de primeiro grau.

2.1.3 Classificação por Linearidade

Dizemos que uma equação diferencial ordinária de ordem n é linear se pode ser escrita na forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + a_1\frac{dy}{dx} + a_0y = g(x).$$

Para que seja linear a equação precisa atender as duas propriedades características, que são, primeiramente, a variável dependente e todas as suas derivadas são funções de primeiro grau. Segundo, cada coeficiente depende no máximo da variável independente x. São exemplos de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira, segunda e terceira ordem, respectivamente

$$xdy + ydy = 0; \quad y'' - 2y' + y = 0 \quad \text{e} \quad x^3\tfrac{d^3y}{dx^3} - x^2\tfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\tfrac{dy}{dx} + 6y = e^{3x}.$$

Uma equação diferencial ordinária que não obedece a tais propriedades, é chamada de não-linear.

$$xy'' + yy' = 0; \quad y'' - 2y^2 + xy = 0 \quad \text{e} \quad x^3(\tfrac{d^5y}{dx^5})^4 + x^2\tfrac{dy}{dx} + 6y = e^{3x}.$$

2.2 Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias

Definição 2.2. Toda função ϕ, definida em um intervalo I que tem pelo menos n derivadas contínuas em I, as quais quando substituídas em uma equação diferencial ordinária de ordem n reduzem a equação a uma identidade, é denominada uma solução da equação diferencial no intervalo. Em outras palavras, a solução de uma EDO é uma função que ao ser derivada e substituída na expressão da equação diferencial mantém a igualdade como verdadeira.

Considere a EDO de ordem n

$$F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0.$$

Seja $\phi(x)$ uma função real definida no intervalo I, derivável até a ordem n para todo $x \in I$. Diz-se que $\phi(x)$ é uma solução explícita ou simplesmente uma solução da equação diferencial no intervalo I, se

(a) $F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), ..., \phi(x)^n(x))$ é definida para todo $x \in I$;

(b) $F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), ..., \phi(x)^n(x)) = 0$ para todo $x \in I$.

Exemplo 2.1. Verifique que $\phi(x) = e^{-2x}$ é uma solução da equação diferencial

$$y' + y + e^{-2x} = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.
Solução: A EDO pode ser escrita na forma

$$F(x, y, y') = y' + y + e^{-2x} = 0.$$

Se $\phi(x) = e^{-2x}$, então a sua derivada é $\phi'(x) = -2e^{-2x}$. Substituindo na equação acima, temos

$$\begin{aligned} F(x, \phi(x), \phi'(x)) &= -2e^{-2x} + e^{-2x} + e^{-2x} \\ F(x, \phi(x), \phi'(x)) &= -2e^{-2x} + 2e^{-2x} \\ F(x, \phi(x), \phi'(x)) &= 0 \end{aligned}$$

isso mostra que a função $\varphi(x) = e^{-2x}$ satisfaz a equação diferencial

$$y' + y + e^{-2x} = 0,$$

Sendo assim uma solução da mesma.

Uma solução também pode aparecer na forma implícita, isto é, como uma função da forma $H(x, y) = 0$. Essa relação é chamada de uma solução da equação

$$F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0$$

se esta relação dá origem a pelo menos uma função de valores reais $\phi(x)$ definida no intervalo I, tal que $\phi(x)$ é uma solução explicita

$$F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0$$

em I.

Exemplo 2.2. Mostre que a relação $x^2 + y^2 + 4 = 0$, é uma solução na forma implícita da equação diferencial $F(x, y, y') = yy' + x = 0$ no intervalo $(-2, 2)$.
Solução: A relação $x^2 + y^2 + 4 = 0$ produz as funções

$$h(x) = y = \sqrt{4 - x^2} \text{ e } k(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

ambas definidas em $(-2, 2)$.
Sabendo que $h'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$, então

$$F(x, h(x), h'(x)) = (\sqrt{4 - x^2}) \left(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \right) + x = 0.$$

Isso mostra que a função $x^2 + y^2 + 4 = 0$ satisfaz a equação diferencial $yy' + x = 0$, sendo assim uma solução implícita da mesma.

2.2.1 Solução de EDOs do Tipo $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$

Lema 2.1. Se uma EDO de ordem n é da forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x),$$

então sua solução geral é obtida de uma maneira direta por integrações (sucessivas).

Exemplo 2.3. Ache a solução da equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 20x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Solução: Seja

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 20x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Integrando, temos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \int (20x^3 - x^{-2}) dx \\ \frac{dy}{dx} &= 5x^4 + x^{-1} + c_1. \end{aligned}$$

E integrando novamente, obtemos

$$y = x^5 + lnx + c_1 x + c_2.$$

Portanto esta é a equação geral solicitada.

Uma equação diferencial pode ter infinitas soluções, e se uma solução envolve uma constante real arbitrária c, então ela é chamada de Solução geral de uma equação diferencial. Se escolhermos ou determinarmos uma constante específica c, encontramos uma solução particular do problema.

2.2.2 Problema de Valor de Contorno

Com o intuito de encontrar respostas para as equações diferenciais de segunda ordem, alguns critérios de extrema relevância devem ser considerados, um desses critérios

é conhecido como problemas de valores de contorno (PVC), e para resolver um problema de valor de contorno precisamos encontrar uma função $y = \phi(x)$ que satisfaça a equação diferencial no intervalo $I = [\alpha, \beta]$ e que tenha valores especificados y_0 e y_1, nos extremos do intervalo. Isto é, resolver uma equação linear de segunda ordem em pontos diferentes, assim temos

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Sujeito as seguintes condições de contorno,

$$y(a) = y_0 \quad \text{e} \quad y(b) = y_1.$$

Exemplo 2.4. Dada a equação $y'' - 4y' + 3y = 0$, calcule o problema de valor de contorno $y(0) = 2$ e $y(\frac{\pi}{\sqrt{2}}) = e^{\frac{4\pi}{\sqrt{2}}}$.

Solução: Temos a equação

$$y'' - 4y' + 3y = 0,$$

sua solução geral é

$$y(x) = e^x\left(C_1 cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 sen\frac{\sqrt{2}}{2}x\right).$$

Assim, temos que resolvê-la para os pontos $y(0) = 2$ e $y\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{4\pi}{\sqrt{2}}}$.
Para $y(0) = 2$, temos

$$\begin{aligned} y(0) &= e^0\left(C_1 cos\frac{\sqrt{2}}{2}(0) + C_2 sen\frac{\sqrt{2}}{2}(0)\right) \\ 2 &= e^0\left(C_1 cos0 + C_2 sen0\right) \\ 2 &= e^0\left(C_1 + C_2(0)\right) \\ C_1 &= 2 \end{aligned}$$

Para $y\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{4\pi}{\sqrt{2}}}$, temos

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) &= e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\left(C_1 cos\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) + C_2 sen\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ e^{\frac{4\pi}{\sqrt{2}}} &= e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\left(C_1 cos\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) + C_2 sen\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ e^{\frac{4\pi}{\sqrt{2}}} &= e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\left(2cos\frac{\pi}{2} + C_2 sen\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{e^{\frac{4\pi}{\sqrt{2}}}}{e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}} &= \left(2cos\frac{\pi}{2} + C_2 sen\frac{\pi}{2}\right) \\ e^{\frac{3\pi}{\sqrt{2}}} &= 2(0) + C_2 \\ C_2 &= e^{\frac{3\pi}{\sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

Substituindo as constantes na solução geral, obtemos

$$y(x) = e^x \left(2cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + e^{\frac{3\pi}{\sqrt{2}}} sen\frac{\sqrt{2}}{2}x \right),$$

que é uma solução particular da equação dada.

3 Resistência dos Materiais

Neste capitulo, serão apresentados os conceitos e definições dos principais componentes e elementos que serão utilizados para alcançarmos o objetivo deste trabalho.

3.1 Vigas

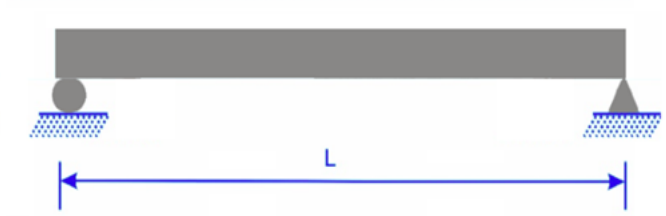
Definicão 3.1. Vigas são elementos delgados que suportam carregamentos aplicados perpendicularmente a seu eixo longitudinal. Em geral, vigas são barras longas e retas com área de seção transversal constante e são classificadas conforme o modo como são apoiadas.

3.1.1 Classificação das Vigas

Neste estudo serão considerados alguns dos tipos mais comuns, que são:

I. Viga Simples: São vigas que possuem dois tipos de apoios diferentes em suas extremidades.

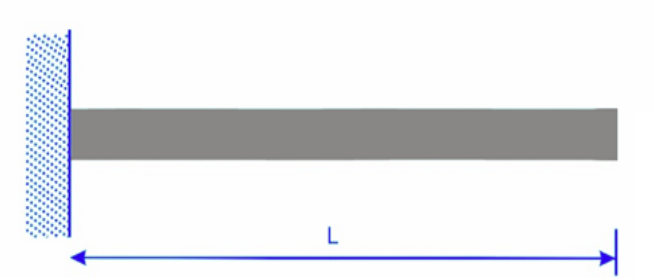
Figura 1: Viga Simples



Fonte: Própria do Autor.

II. Viga Engastada: Também conhecidas como vigas em balanço, são vigas com um só apoio fixo em umas de suas extremidades. Toda a carga recebida é transmitida a um único ponto de fixação.

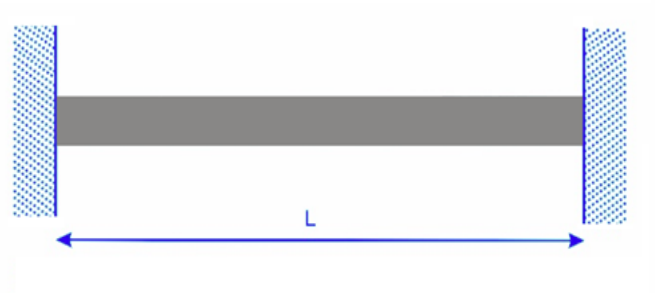
Figura 2: Viga Engastada



Fonte: Própria do Autor.

III. Viga Bi-Engastada: São vigas engastadas nas duas extremidades.

Figura 3: Viga Bi-Engastada



Fonte: Própria do Autor.

IV. Vigas em balanço nas extremidades: São vigas que possuem as extremidades livres de apoio.

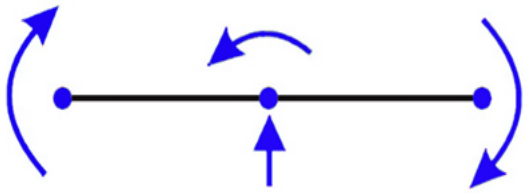
Figura 4: Vigas em Balanço nas Extremidades



Fonte: Própria do Autor.

Definição 3.2. Força é toda a grandeza capaz de provocar movimento, alterar o estado de movimento ou provocar deformação em um corpo, e apresenta módulo (intensidade), direção, sentido e ponto de aplicação, provocando um deslocamento linear (translação), e é representada por um vetor.

Figura 5: Representação de Força (Vetor)



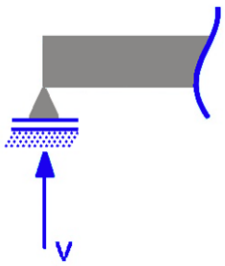
Fonte: Própria do Autor.

3.2 Apoios

Definição 3.3. Apoio ou Vínculo é todo elemento de ligação entre as partes de uma estrutura ou entre a estrutura e o meio externo, cuja finalidade é restringir um ou mais grau de liberdade de um corpo.

V. Apoio móvel: é o tipo de apoio que restringe o movimento na direção vertical, fazendo com que ocorra uma reação no apoio nesta mesma direção.

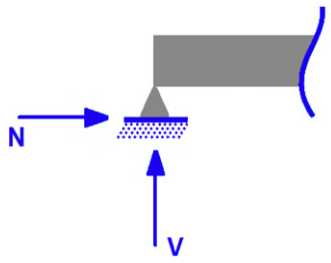
Figura 6: Representação de Apoio Móvel



Fonte: Própria do Autor.

VI. Apoio Fixo: é o tipo que restringe o movimento nas direções vertical e horizontal, sendo assim, haverá uma reação em cada uma dessas direções.

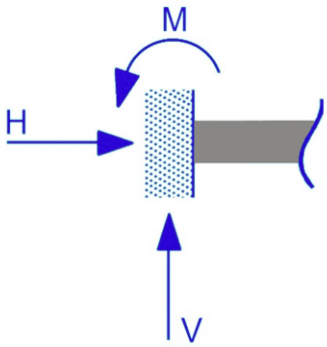
Figura 7: Representação de Apoio Fixo



Fonte: Própria do Autor.

VII. Engastamento: também conhecido como engaste, é o tipo de apoio que restringe os movimentos na horizontal, na vertical e também restringe a rotação do objeto fixado, provocando assim, uma reação de apoio no sentido vertical, uma na horizontal e também provoca um momento fletor.

Figura 8: Representação de Apoio de Engaste



Fonte: Própria do Autor.

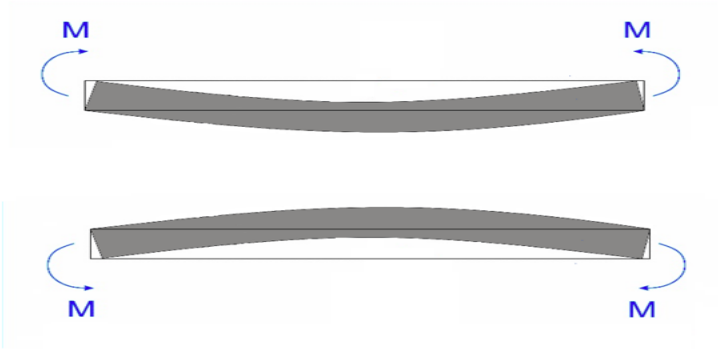
As setas simbolizam as restrições de movimento que cada apoio provoca, essas restrições provocam reações conhecidas como reações de apoio. A convenção de sinal para essas reações é tal que forças horizontais são positivas no sentido de esquerda – direita, as forças verticais são positivas para baixo e momentos são positivos em sentido anti-horário.

3.3 Esforços Externos

Agora, iremos definir as reações resultantes da ação de forças sobre as vigas, estas reações são chamadas de esforços externos, e são Momento Fletor, Força de Cisalhamento e Força Normal, neste trabalho a força normal será desprezada pois não terá utilidade para os processos de cálculo que serão adotados.

Definição 3.4. Momento Fletor (M) é a medida da tendência que uma força tem de produzir giro em um corpo rígido, é uma grandeza vetorial que apresenta módulo (intensidade), direção, sentido e ponto de aplicação, provocando um deslocamento angular (rotação).

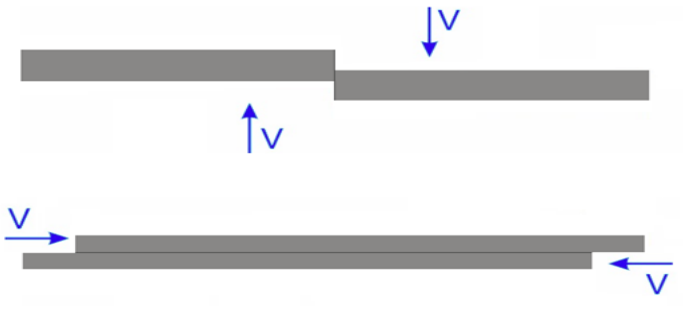
Figura 9: Momento Fletor (M)



Fonte: Própria do Autor.

Definição 3.5. A força de cisalhamento (V) é a força perpendicular à barra, calculada a partir da tensão cisalhante na mesma. O efeito da força de cisalhamento é o de provocar o deslizamento linear, no sentido do esforço, de uma seção sobre a outra infinitamente próxima, acarretando o corte ou cisalhamento da viga.

Figura 10: A força de Cisalhamento (V)

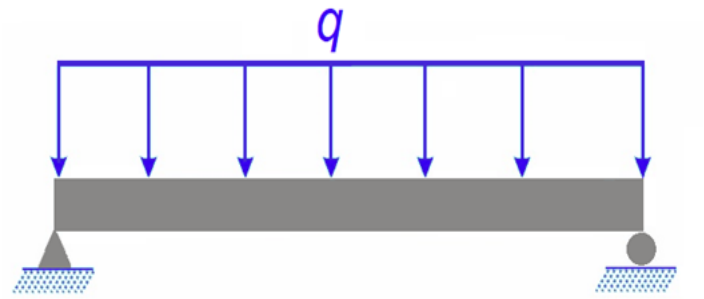


Fonte: Própria do Autor.

3.4 Tipos de Carregamentos

VIII. Carregamento distribuído: São aqueles que atuam em uma área com dimensões na mesma ordem de grandeza da estrutura, elas podem ser uniformes ao longo da viga ou não.

Figura 11: Carregamento Distribuído



Fonte: Próprio do Autor.

IX. Carregamento Pontual: São aqueles que atuam em áreas muito reduzidas em relação às dimensões da estrutura.

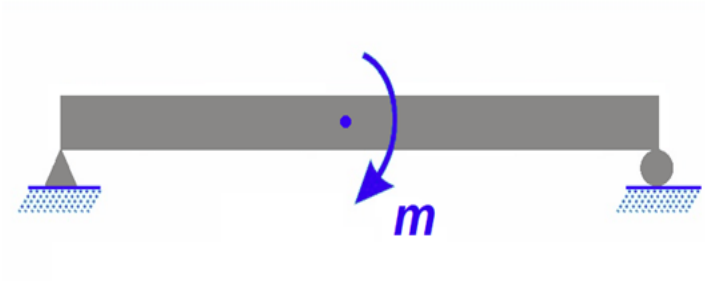
Figura 12: Carregamento Pontual



Fonte: Própria do Autor.

X. Momento Concentrado: São forças resultantes de um binário de forças opostas que tendem a contorcer a viga no ponto onde estas estão atuando.

Figura 13: Momento Concentrado



Fonte: Própria do Autor.

3.5 Equilíbrio Externo das Vigas

Um corpo está em equilíbrio estático quando as forças atuantes formam entre si um sistema equivalente a zero, isto é, sua resultante e o seu momento em relação a qualquer ponto são nulos. A primeira lei de Newton, ou lei da inércia, permite estabelecer que, se a força resultante atuante em um corpo é nula, então é possível encontrar um conjunto de sistemas de referência, denominado sistema inercial, no qual este corpo não possui aceleração.

A Terceira Lei de Newton (Princípio da Ação e Reação) diz que para toda força de ação existe uma força de reação que possui o mesmo módulo e direção, porém em sentidos opostos. Desse modo, a primeira lei de Newton é aplicada a um problema para determinar o equilíbrio em qualquer partícula presente, ou em todo o sistema em equilíbrio, sendo a terceira lei, responsável por garantir este equilíbrio sob condições de ação e reação. Portanto, estes princípios são aplicáveis a todos os corpos que recebem carregamentos, e estejam em equilíbrio.

Nesse caso, para que uma viga se mantenha estável, a soma de seus carregamentos horizontais, verticais e momentos devem ser nulas, isto é,

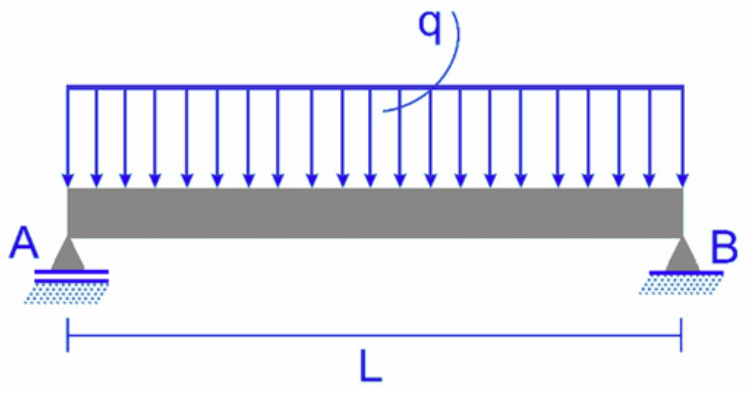
$$\sum Fx = 0 \tag{1}$$

$$\sum Fy = 0 \tag{2}$$

$$\sum Mz = 0. \tag{3}$$

E o equilíbrio das vigas depende do tipo de carregamento e das reações provocadas pelos apoios. Para determinação das reações de apoio, é necessário ter conhecimento sobre as forças de reação que cada apoio é capaz de admitir e seguir a convenção de sinal citada na seção 3.3. Para melhor entendimento, considere a viga sob carregamento distribuído da (figura 14).

Figura 14: Viga sob Carregamento Distribuído

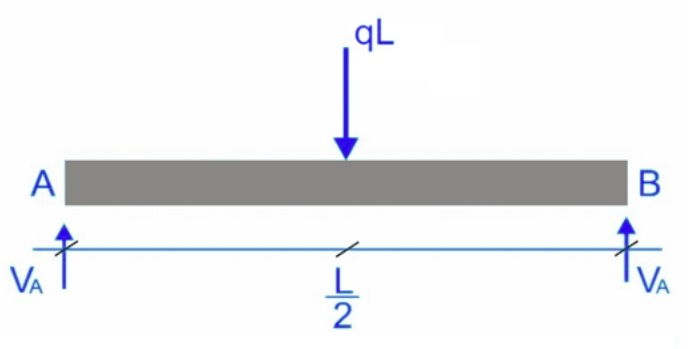


Fonte: Própria do Autor.

Primeiramente, precisamos estabelecer o diagrama de corpo livre desta viga, isto é, substitui-se todos os apoios pelas reações que os mesmos provocam, arbitrando-se um sentido para cada uma. As cargas distribuídas devem ser substituídas por suas respectivas resultantes (este artifício é válido somente para o cálculo das reações externas), temos assim, o diagrama de corpo livre da viga (figura 15).

Vale salientar que neste trabalho não serão consideradas as forças horizontais, uma vez que a somatória das mesmas sempre será nula.

Figura 15: Diagrama de Corpo Livre de Vigas



Fonte: Própria do Autor.

Agora utiliza-se as equações de equilíbrio para determinar os valores das forças provocadas pelas reações dos apoios. Primeiramente, o somatório das forças verticais

$$\sum Fy = 0 \rightarrow -V_A + qL - V_B = 0$$

$$V_A + V_B = qL. \tag{4}$$

Para fazer a somatória dos momentos fletores, é necessário calcular o momento provocado por cada força que está atuando na viga, para isso, multiplica-se a intensidade da força pela distância até o ponto de referência adotado para ser o ponto inicial da viga.

$$\sum M = 0 \rightarrow -V_A \cdot (0) - qL\left(\frac{L}{2}\right) + V_B \cdot (L) = 0$$

$$V_B = \frac{qL}{2}. \tag{5}$$

Substituindo (5) em (4), obtemos

$$V_A + V_B = qL \Rightarrow V_A + \frac{qL}{2} = qL \Rightarrow V_A = \frac{qL}{2}.$$

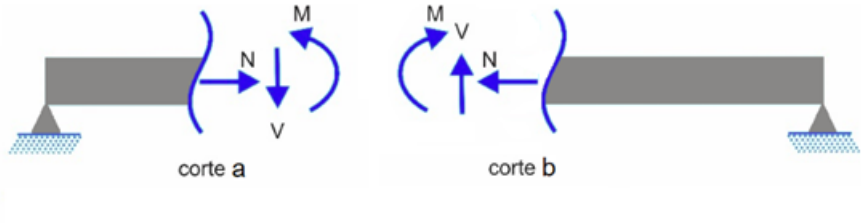
Portanto, os valores das reações de apoios são

$$V_A = \frac{qL}{2} \quad \text{e} \quad V_B = \frac{qL}{2}.$$

3.6 Esforços Internos

Ao se efetuar um corte qualquer em uma viga, para que as partes isoladas pelo corte permaneçam em equilíbrio, devem aparecer alguns esforços internos que são força de cisalhamento, força normal e momento fletor interno. Esses esforços nas partes de corte de ambos os lados devem ser tais que reproduzam a situação original quando as duas partes forem ligadas novamente, ou seja, pelo princípio da ação e reação, devem ser de mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos.

Figura 16: Esforços Internos



Fonte: Própria do Autor.

Definicão 3.6. Deformação normal é o alongamento ou contração de segmento de reta por unidade de comprimento. E é determinada pela equação

$$\varepsilon_{méd} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}. \tag{6}$$

Onde Δs é comprimento inicial e $\Delta s'$ o comprimento final do objeto.

Beer (2008) define deformação específica normal em uma barra sob carregamento axial como a deformação por unidade de comprimento da barra. Designando a deformação específica normal por ε, temos

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}, \tag{7}$$

onde δ é a variação de comprimento de uma barra e L é o comprimento inicial da mesma. Logo, podemos afirmar pelas definições das equações (6) e (7) que

$$\varepsilon = \varepsilon_{méd}.$$

Na análise de pequenas deformações a maioria dos projetos de engenharia admitem apenas pequenas deformações, tal que visivelmente os elementos praticamente não se deformam, e ainda pelo fato de que mesmo os materiais sendo expostos a deflexões aparentemente grandes, o material possa estar submetido somente a deformações muito pequenas, tal que estas são consideradas quase infinitesimais, e muito pequenas em comparação com a unidade, ou seja, $\varepsilon << 1$, tendo esta premissa bastante aplicabilidade na engenharia, a exemplo permite as aproximações de $\sin\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$ e $\tan\theta = \theta$, para

um θ muito pequeno. (HIBBELER, 2010)

Para pequenas deformações, a tensão σ é diretamente proporcional à deformação específica ε, ou seja, um aumento na tensão provoca um aumento proporcional na deformação. Essa relação é conhecida como Lei de Hooke e pode ser expressa matematicamente como:

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{8}$$

onde o coeficiente E é chamado de módulo de elasticidade do material envolvido, ou também módulo de Young.

Em Hibbeler (2010) é desenvolvida uma equação que relaciona a distribuição de tensão longitudinal em uma viga e o momento fletor interno resultante que age na seção transversal da mesma. sendo este provocado pela atuação dos carregamentos sob a viga, tal que a tensão normal, em uma distância intermediária y, e com momento de inércia (I) da área da seção transversal, possa ser determinada por

$$\sigma = -\frac{My}{I}. \tag{9}$$

4 Equação Geral de Deflexão em Vigas

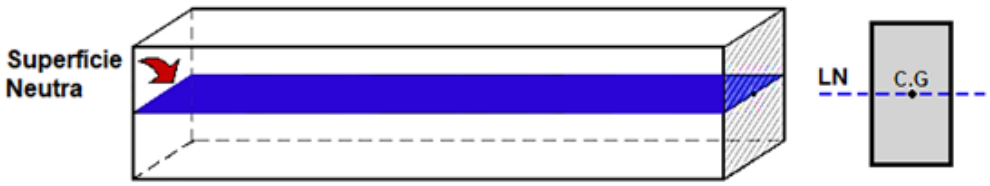
Para darmos início a dedução da equação das deflexões em vigas iremos considerar a análise de vigas prismáticas, isto é, vigas homogêneas que possuem um plano de simetria, para isso será necessário levar em consideração a Hipótese da Teoria da Flexão que nos permite afirmar que as seções planas de uma viga, tomadas normalmente a seu eixo, permanecem planas após a deformação da mesma. Essa conclusão é válida para vigas de qualquer material. As propriedades dos materiais, assim como as dimensões, devem ser simétricas em relação ao plano de flexão (plano xy).

Sob ação de carregamentos, as superfícies longitudinais que compõem a viga são submetidas à tração (alongamento) e outras a compressão (encurtamento), existindo uma Superfície intermediária onde a deformação (ε) e a tensão (σ) são nulas, isto é, não se encurta e nem se alonga. Esta superfície é chamada de superfície neutra, ela intercepta uma dada seção transversal da barra seguindo uma reta chamada linha neutra.

Definicão 4.1. Superfície Neutra é uma superfície em algum lugar entre o topo e a base da viga em que as linhas longitudinais não mudam de comprimento.

Definicão 4.2. Linha neutra é a interseção da superfície neutra com qualquer plano de seção transversal. O eixo x é a linha neutra da seção transversal ilustrada na Figura 17. Para materiais homogêneos (aço, madeira, concreto simples), a linha neutra passa no centro de gravidade (CG) da seção transversal.

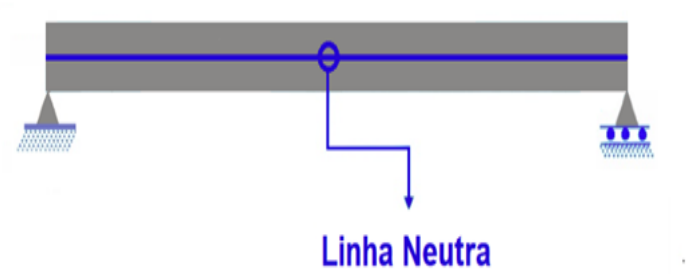
Figura 17: Superfície e Linha Neutra



Fonte: Própria do Autor.

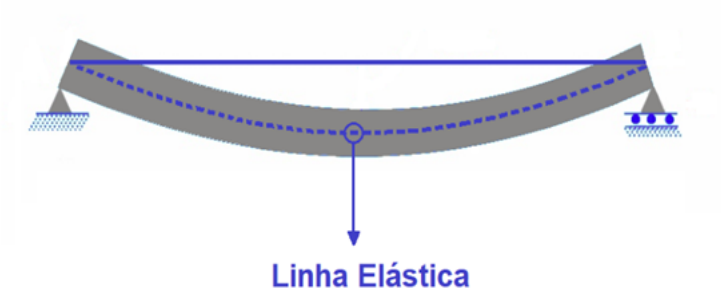
Quando um carregamento é aplicado sobre uma viga, ela se deforma e sua superfície neutra se transforma em uma superfície curva, esta curva se denomina linha elástica e representa os deslocamentos dos pontos que formam a linha neutra. Se representarmos o eixo x como a linha neutra e o eixo y como o eixo de medida para as deflexões, a linha elástica se torna uma função $y(x)$. A deflexão da viga em qualquer ponto ao longo de seu eixo é o deslocamento desse ponto em relação a sua posição inicial, com isso pode-se concluir que a deflexão pode ser obtida através da função $y(x)$ (GERE, 2003).

Figura 18: Linha Neutra



Fonte: Própria do Autor.

Figura 19: Linha Elástica

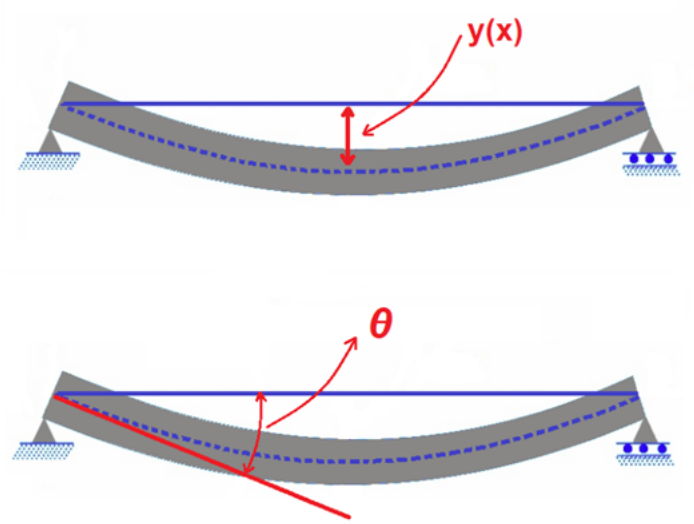


Fonte: Própria do Autor.

4.1 Equação Diferencial da Linha Elástica

Quando uma viga é flexionada ocorre em cada ponto ao longo do eixo uma deflexão (y) e uma rotação (θ), onde, a deflexão é o deslocamento dos pontos na direção y de qualquer ponto no eixo da viga e o ângulo de rotação θ é o ângulo entre o eixo x e a tangente a linha elástica (Figura 20).

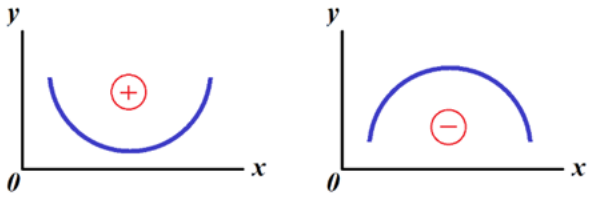
Figura 20: Deflexão e Rotação



Fonte: Própria do Autor.

Para deduzir a equação diferencial da linha elástica, utiliza-se a relação entre a curvatura e o momento fletor. Deve-se, entretanto, notar que a convenção de sinal para a curvatura da viga fletida relaciona-se aos sentidos dados aos eixos coordenados (figura 21).

Figura 21: Convenção de Sinal para Curvatura



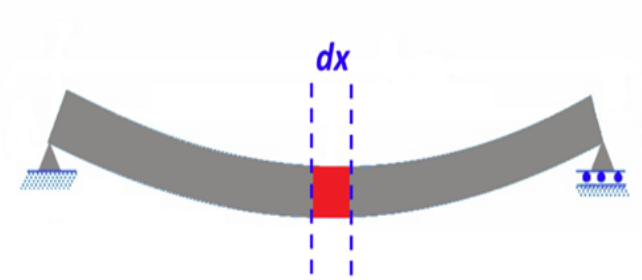
Fonte: Própria do Autor.

4.1.1 Relação entre Momento (M) e Curvatura (K)

Analisando uma faixa infinitesimal de comprimento dx da viga (Figura 22), pode ser observado o comportamento das superfícies de comprimentos infinitesimais ds e dx (Figura 23a), que estão separadas por uma distância intermediária y. O intuito dessa análise é obter as relações entre as alterações geradas nessa faixa. Após a aplicação dos carregamentos a faixa se deforma e a superfície de comprimento infinitesimal dx permanece a mesma, sendo esta, parte da superfície neutra. Considerando que a deflexão ocorrerá a partir da aplicação de carregamento vertical, haverá encurtamento das superfícies superiores e alongamento das inferiores, ou seja, ocorrerá compressão nas superfícies superiores

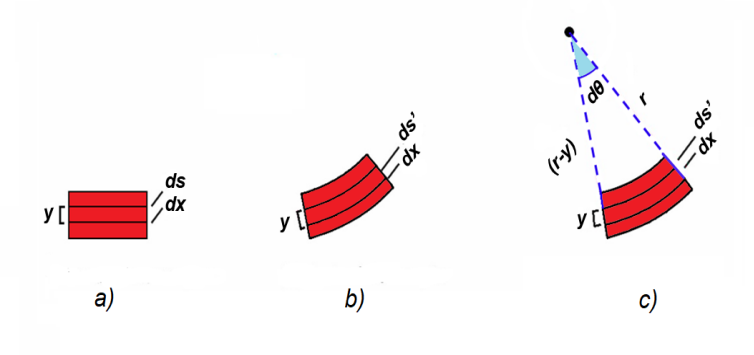
e tração nas inferiores em relação a superfície neutra dx.

Figura 22: Seção de Comprimento Infinitesimal dx



Fonte: Própria do Autor.

Figura 23: Análise da Seção dx



Fonte: Própria do Autor.

Quando o ângulo de inclinação da curva de deflexão é muito pequeno, a curva é quase horizontal, e assim vemos imediatamente que a diferença de comprimento entre ds' e dx é muito pequena (GERE, 2010). Na prática das engenharias trabalha-se com pequenas deformações, e sendo a linha elástica bastante achatada, podemos adotar a hipótese de que $ds' \cong dx$.

> Devemos salientar que, considerando $\frac{dv}{dx}$ muito pequeno, o comprimento horizontal original do eixo da viga e o arco de sua linha elástica serão aproximadamente os mesmos. Em outras palavras, ds será aproximadamente igual a dx, visto que $ds = \sqrt{(ds)^2 + (dv)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)}dx \approx dx$ (HIBBELER, 2010, p. 425).

Sabendo que o comprimento de um arco de circunferência que subentende um ângulo central é dado pela multiplicação entre esse ângulo e o raio da circunferência, e sendo dx e ds' arcos de circunferência de comprimentos infinitesimais com raios r e $(r-y)$,

respectivamente, e $d\theta$ o ângulo central. Temos,

$$dx = rd\theta \rightarrow ds = rd\theta \tag{10}$$

$$ds' = (r - y)d\theta. \tag{11}$$

Agora, utilizaremos a equação da deformação (equação 6), sendo ds o comprimento inicial Δs e ds' o comprimento final $\Delta s'$,

$$\varepsilon_{méd} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} \rightarrow \varepsilon_{méd} = \frac{ds' - ds}{ds}$$

substituindo pelas equações (10) e (11), temos

$$\varepsilon_{méd} = \frac{((r - y)d\theta - rd\theta)}{rd\theta} \rightarrow \varepsilon_{méd} = \frac{(r - y - r)d\theta}{rd\theta}$$

$$\varepsilon_{méd} = -\frac{y}{r}. \tag{12}$$

A equação (12) mostra que as deformações longitudinais na viga são proporcionais a sua curvatura $\frac{1}{r}$ e variam linearmente com a distância y para a superfície neutra. Podemos ainda a expressar como

$$-\frac{\varepsilon_{méd}}{y} = \frac{1}{r}. \tag{13}$$

Sendo a viga feita de material homogêneo e se comporta de maneira linear elástica, a lei de Hooke (equação 8) é aplicável, e sendo por definição $\varepsilon = \varepsilon_{méd}$, temos

$$\sigma = E\varepsilon \rightarrow \sigma = E\varepsilon_{méd}$$

$$\varepsilon_{méd} = \frac{\sigma}{E}. \tag{14}$$

E substituindo a equação (9) na (14), obtemos

$$\varepsilon_{méd} = \frac{\frac{-My}{I}}{E}$$

$$-\frac{\varepsilon_{méd}}{y} = \frac{M}{EI}. \tag{15}$$

E igualando as equações (13) e (15),

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI}. \tag{16}$$

A equação (16) é conhecida como equação Momento - Curvatura pois segundo Gere (2003) esta equação mostra que a curvatura $(1/r)$ é diretamente proporcional ao momento fletor (M) e inversamente proporcional à rigidez de flexão (EI) da viga, e nos permite calcular a curvatura de uma viga para um dado momento fletor. A equação momento-curvatura é o primeiro passo para se ter a capacidade de calcular a deflexão de

uma viga, desde que ela nos dê informação sobre como a viga defletirá por um momento fletor aplicado.

Agora, a partir da equação (10) podemos explicitar

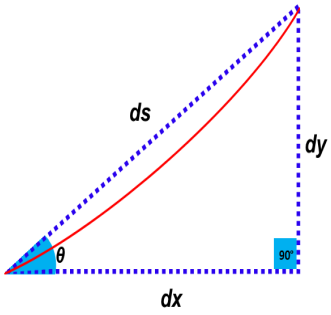
$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{dx}, \tag{17}$$

em que $\frac{d\theta}{dx}$ representa a mudança na inclinação por comprimento unitário de distância ao longo da curva, e substituindo a equação (16) na (17), obtemos

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}. \tag{18}$$

Agora, considere o triângulo da figura 24 formado pelas variações provocadas pela deformação em faixa infinitesimal, onde ds é o comprimento do arco de circunferência formado pela curva de deflexão, dx o comprimento longitudinal antes da deformação e dy o deslocamento dos pontos do eixo longitudinal na direção do eixo y.

Figura 24: Triângulo de Medidas Infinitesimais



Fonte: Própria do Autor.

Analisando a figura 24, temos

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx}. \tag{19}$$

E pela análise de pequenas deformações argumentadas na seção 3.6, podemos fazer a seguinte aproximação para a equação (19).

$$\theta \cong \tan\theta = \frac{dy}{dx}.$$

Desse modo, por transitividade podemos assumir que

$$\theta = \frac{dy}{dx}. \tag{20}$$

Agora, calculando a derivada da equação (20) em relação a x, obtermos

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}. \tag{21}$$

Substituímos a equação (18) na equação (21), teremos

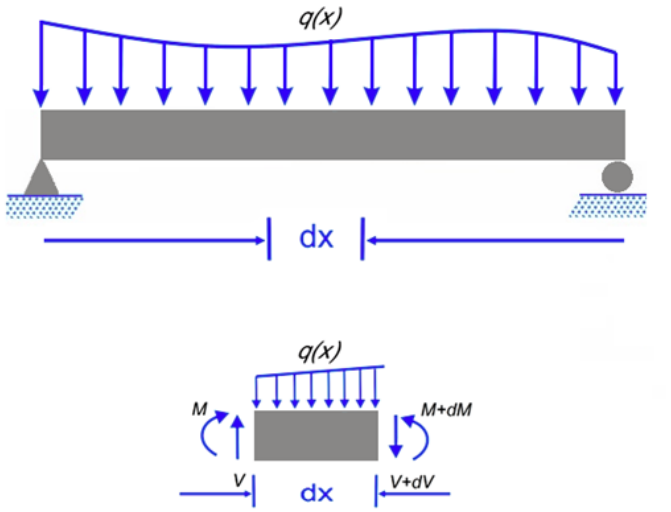
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}. \tag{22}$$

Portanto, temos a equação diferencial de segunda ordem que nos permite calcular a deflexão em qualquer ponto ao longo do eixo da viga, utilizando a equação de momento fletor.

4.2 Relações Diferenciais dos Esforços Interno

Até o presente momento temos a equação (22) que é a relação entre a deflexão e o momento fletor, no entanto, estamos em busca da equação diferencial que relaciona a deflexão com o carregamento, e para obtermos tal equação será feito a análise dos esforços internos que ocorrem em uma viga para obtemos as suas relações. Vamos considerar uma faixa infinitesimal dx de uma viga em equilíbrio, nesta faixa teremos a atuação de esforços internos a direita e a esquerda da mesma, como pode ser observado na figura (25).

Figura 25: Análise dos Esforços Internos em dx



Fonte: Própria do Autor.

Sendo dM e dV eventuais variações infinitesimais que podem existir de esforços atuantes de um ponto da esquerda para a direita da seção. Agora, utilizaremos as condições de equilíbrio da viga, adotando a convenção de sinal da seção 3.3, para determinar as

relações desejadas. Considerando o digrama de corpo livre na figura (25), pode-se

$$\sum F_y = 0$$

$$-V + qdx + V + dV = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = -q. \tag{23}$$

Isto é, a taxa de variação da força de cisalhamento em qualquer ponto do eixo da viga é igual à intensidade da carga distribuída, mas com sinal negativo, no mesmo ponto. E a satisfazer o equilíbrio de momento, de modo conveniente, iniciaremos o cálculo tomando como ponto inicial o lado direito da seção, assim

$$\sum M_z = 0$$

$$(M + dM) + (V + dV)(0) + \frac{q(dx)^2}{2} - Vdx - M = 0$$

$$M - M + dM + \frac{q(dx)^2}{2} - Vdx = 0$$

$$dM = Vdx - \frac{q(dx)^2}{2}. \tag{24}$$

O termo $q(dx)^2/2$ contém o produto de uma quantidade diferencial ao quadrado, é muitas ordens de grandeza menor do que os termos que contêm uma única diferencial, sendo assim, desprezível. Portanto, eliminamos este termo e a simplificação da equação gera

$$\frac{dM}{dx} = V. \tag{25}$$

A Equação (25) mostra que a taxa de variação do momento fletor em qualquer ponto do eixo de uma viga é igual à força de cisalhamento nesse mesmo ponto. A partir daí podemos determinar outras relações diferenciais importantes, reescrevemos a equação

(22) de modo que

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M. \tag{26}$$

Se diferenciarmos cada lado em relação a x, obtemos

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dM}{dx}. \tag{27}$$

E substituindo (27) em (25), temos

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = V. \tag{28}$$

Derivando (28) em relação a x,

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{dV}{dx}. \tag{29}$$

Agora, substituindo a equação (29) na (23),

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -q. \tag{30}$$

Portanto, as equações (26), (28) e (30), são as relações diferenciais das taxas de variação para as vigas, e nos referimos a essas equações como equação do momento fletor, equação da força de cisalhamento e equação do carregamento, respectivamente.

Diante das equações encontradas, iremos utilizar a equação (30) para determinarmos as deflexões nas vigas. Para obtermos a função $y(x)$ a partir da equação (30) temos que integra-la quatro vezes em relação x, assim obtemos as relações a seguir

$$\begin{aligned}
EI\frac{d^4y}{dx^4} &= -q \\
EI\frac{d^3y}{dx^3} &= -\int qdx + C_1 = V \\
EI\frac{d^2y}{dx^2} &= -\int dx \int qdx + C_1x + C_2 = M \\
EI\frac{dy}{dx} &= -\int dx \int dx \int qdx + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3 = EI\theta \\
EIy &= -\int dx \int dx \int dx \int qdx + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4.
\end{aligned}$$

As quatro constantes de integração podem ser determinadas a partir das condições de contorno, que incluem

(i) As condições impostas na deflexão ou na inclinação da viga por seus apoios;

(ii) As condições que V e M sejam zero na extremidade livre de uma viga engastada, ou que M seja zero em ambas as extremidades de uma viga bi apoiada.

5 Funções de Singularidades

No capítulo anterior obtemos a equação que nos possibilita calcular as deflexões a partir da equação de carregamento utilizando integrações sucessivas, mas para que isso ocorra de fato, é necessário que tenhamos a equação de carregamento bem definida. Sendo assim, iremos obter tal equação a partir de um método que utiliza funções de singularidades, desse modo, será feita a modelagem destas funções a partir do comportamento dos seus respectivos gráficos e em seguida escrevê-las utilizando parênteses angulares (conhecidos como parênteses de Macaulay), com o propósito de obter a equação que expressa todos os carregamentos sobre a viga utilizando uma única expressão.

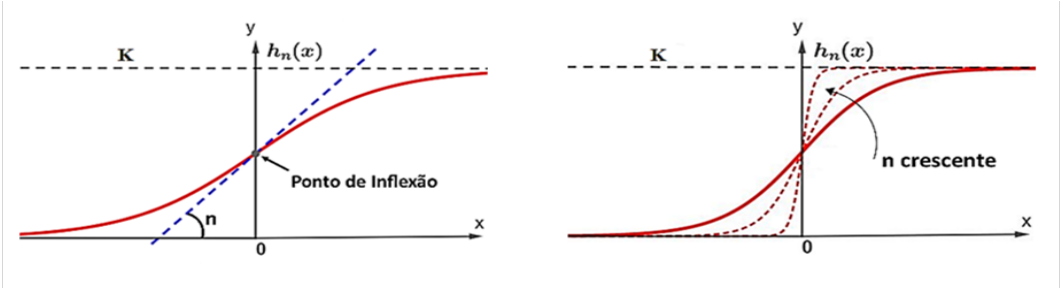
No cálculo estrutural de vigas para expressar diferentes tipos de carregamento e momentos sobre uma viga usando uma única expressão é utilizado um operador matemático que nos possibilita fazer a modelagem de carregamentos chamadas de funções de singularidades. As funções de singularidade derivam de uma sucessão de funções, neste trabalho teremos como base a função Sigmóide, mais especificamente a função Sigmóide Logística ou simplesmente Função Logística. Esta função desempenha um papel importante em estudos nas mais diversas áreas do conhecimento como economia, computação, biologia, engenharias, medicina e muitas outras. E é da forma

$$h_n(x) = \frac{K}{1 + e^{-nx}},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, sendo K o valor máximo que a curva pode assumir e n a constante de inclinação da função.

A forma como a função varia com x depende do valor de n (figura 26). Para valores de x no domínio dos números reais entre $-\infty$ e $+\infty$, obtemos uma curva sigmoide, em que a função $h_n(x)$ se aproxima de K conforme x se aproxima de $+\infty$, e também se aproxima de zero na medida que x tende a $-\infty$.

Figura 26: Função Sigmóide



Fonte: Própria do Autor.

Esse tipo de função não possui extremos - máximos e mínimos relativos, mas possui ponto de inflexão, que é o ponto no qual ocorre a taxa máxima de variação da função. A derivação da função logística ocorre tal que

$$\frac{dh_n(x)}{dx} = n \cdot h_n(x)(1 - h_n(x)).$$

5.1 Função de Heaviside

Considere a função sigmoide logística

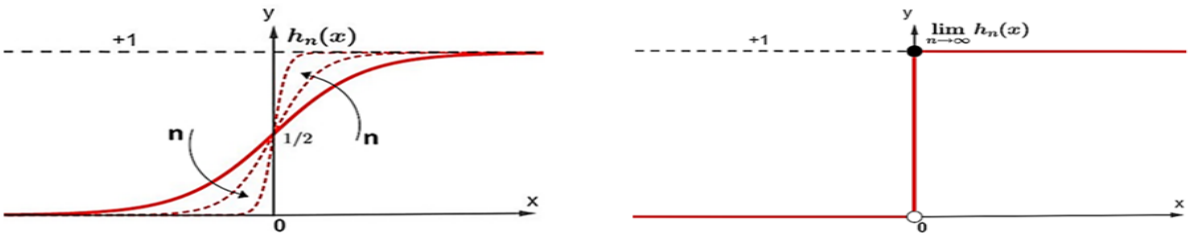
$$h_n(x) = \frac{1}{1 + e^{-nx}}, \tag{31}$$

aplicando o limite em $h_n(x)$ quando n tende a infinito, temos:

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + e^{-nx}} = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \tag{32}$$

A função (32) é conhecida como função de Heaviside, e é o limite da função sigmóide quando n tende a infinito, esta função se comporta conforme mostrado na figura (27).

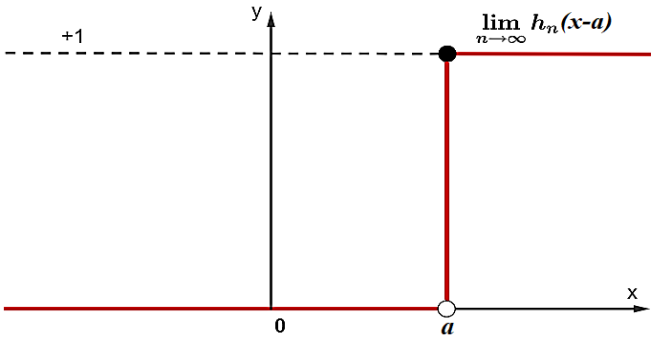
Figura 27: Função de Heaviside



Fonte: Própria do Autor.

Agora, podemos deslocar essa descontinuidade para um ponto arbitrário a, como mostra o gráfico da figura (28).

Figura 28: Representação da Função (33)



Fonte: Própria do Autor.

E subtrairemos a no argumento da função, assim

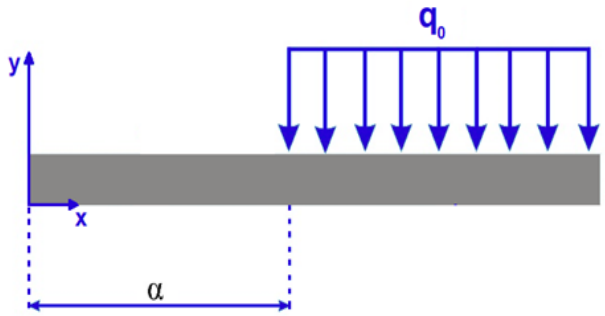
$$\lim_{n\to\infty} h_n(x-a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+e^{-n(x-a)}} = \begin{cases} 1, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}. \tag{33}$$

Obtemos assim a função de Heaviside com descontinuidade em $x = a$, que de modo geral, é denotada por

$$H(x-a) = \begin{cases} 1, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}. \tag{34}$$

O valor "1" retornado pela função de Heaviside para $x \geq a$ não possui qualquer dimensão (é um adimensional). Desta forma, multiplicar qualquer grandeza mecânica pela função de Heaviside preserva a unidade da grandeza que está sendo multiplicada. Desse modo, essa função é suficiente para descrever carregamentos distribuídos em vigas. Como exemplo, temos a viga sob um carregamento distribuído da figura (29).

Figura 29: Carregamento Distribuído



Fonte: Própria do Autor.

Observe que a descontinuidade do carregamento sobre a viga, se dá da mesma forma que ocorre na função de Heaviside, o carregamento é zero para $x < a$, e igual a q_0

para $x \geq a$. Nesse caso, para que a função descreva corretamente o carregamento sobre a viga, a multiplicamos pela intensidade do mesmo, assim

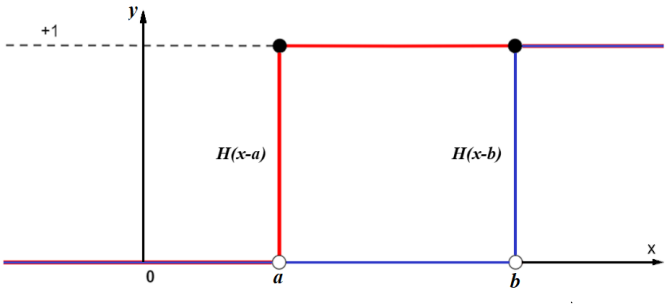
$$q(x) = q_0 \cdot H(x-a) = \begin{cases} q_0, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}. \tag{35}$$

Portanto, a equação (35) nos permite descrever carregamentos distribuídas sobre vigas. Onde x representa a posição de um ponto ao longo do comprimento da viga, e a o local da viga onde ocorre a descontinuidade do carregamento.

No entanto, essa equação nos permite descrever apenas carregamentos distribuídos ao longo de toda a extensão da viga, ou cargas que partem de um ponto até o final do comprimento da mesma.

Sendo assim, considere as funções $H(x-a)$ e $H(x-b)$, onde $b > a$ (ver figura 30).

Figura 30: Gráfico das Funções $H(x-a)$ e $H(x-b)$



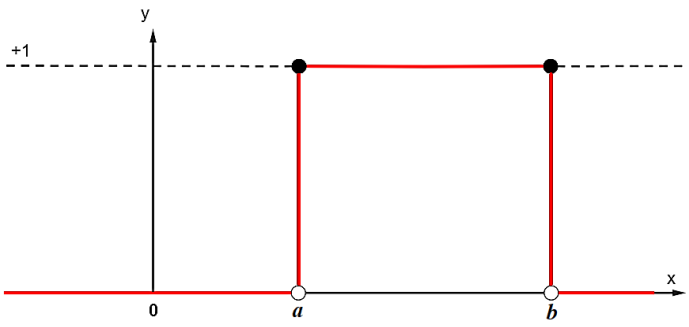
Fonte: Própria do Autor.

Subtraindo $H(x-b)$ de $H(x-a)$, temos

$$H(x-a) - H(x-b) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}. \tag{36}$$

A função (36) nos possibilita representar funções restritas a um intervalo, como mostra a (figura 31).

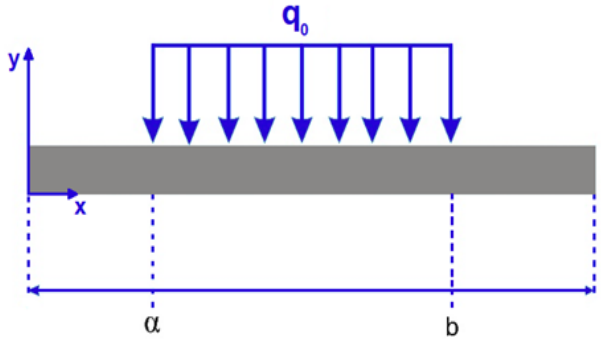
Figura 31: Representação Gráfica da Função (36)



Fonte: Própria do Autor.

Logo, a função (36) é suficiente para descrever carregamentos distribuídos que estão em um intervalo ao longo do comprimento da viga (figura 32).

Figura 32: Carregamento Distribuído



Fonte: Própria do Autor.

Assim, multiplicando a função (36) pela intensidade da carga, obtemos a função desejada.

$$q_0[H(x-a)-H(x-b)] \Rightarrow \begin{cases} 0, & x < a \\ q_0, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}. \tag{37}$$

5.2 Função Delta de Dirac

Considere a primeira derivada da função (31)

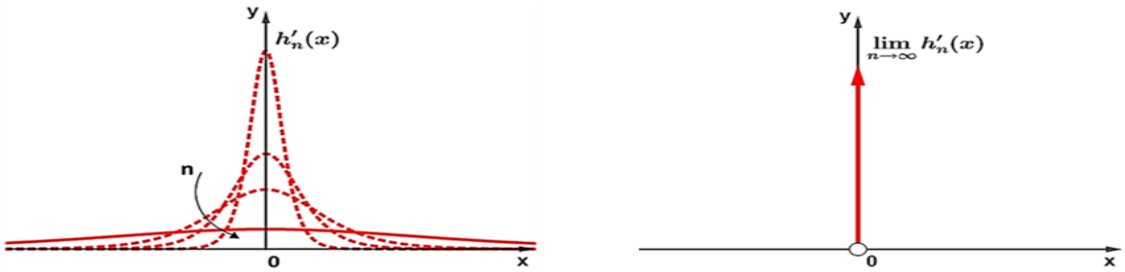
$$\frac{dh_n(x)}{dx} = \frac{ne^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2} \tag{38}$$

calculando os limites em n, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{dh_n(x)}{dx}=\lim_{n\to\infty}\frac{ne^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2}=\begin{cases}+\infty, & x=a\\ 0, & x\neq a\end{cases}. \tag{39}$$

A função (39) é conhecida como Delta de Dirac, e é o limite da função (38) quando n tende a infinito. Observe o gráfico da figura (33).

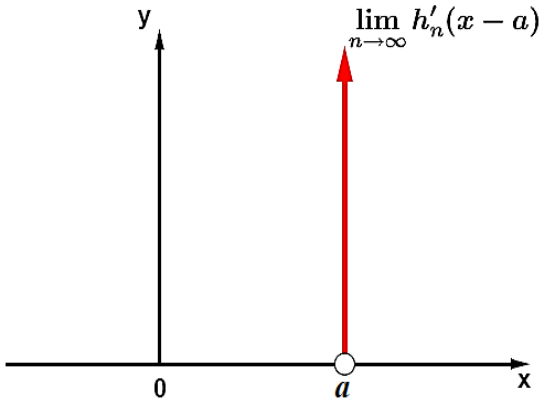
Figura 33: Função Delta de Dirac



Fonte: Própria do Autor.

Note que quanto maior o valor de n maior será o valor da derivada em $x=0$. Deslocando essa descontinuidade para um ponto arbitrário a, como mostra o gráfico da figura (34).

Figura 34: Representação Gráfica da Função (40)



Fonte: Própria do Autor.

E subtraindo a do argumento da função, temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{dh_n(x-a)}{dx}=\lim_{n\to\infty}\frac{ne^{-n(x-a)}}{(1+e^{-n(x-a)})^2}=\begin{cases}+\infty, & x=a\\ 0, & x\neq a\end{cases}. \tag{40}$$

A função (40) é a Delta de Dirac deslocada em um ponto a, amplamente denotada por

$$\delta(x-a) = \begin{cases} +\infty, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}. \tag{41}$$

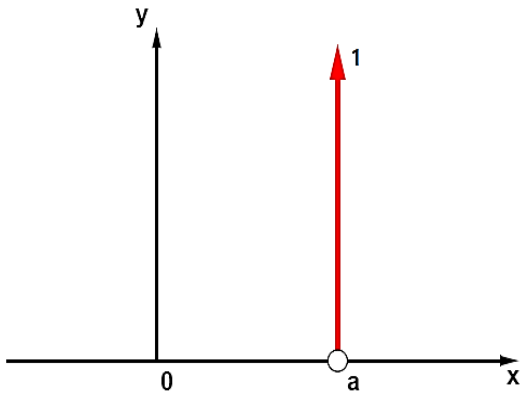
A função Delta de Dirac também é conhecida como função impulso unitário, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)dx = 1.$$

Isto é, a função Delta tem área unitária.

Á medida que $x \to 0$ (ver figura 33) a função fica mais estreita e com maior amplitude, mas a área continua igual a 1 e isso nos permite considerar que a descontinuidade que ocorre na função é um impulso de intensidade 1, isto é, impulso unitário.

Figura 35: Representação Gráfica da Função (42)



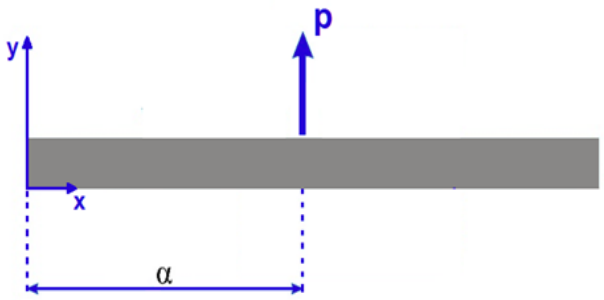
Fonte: Própria do Autor.

Desse modo, a função pode ser escrita como

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}. \tag{42}$$

Portanto, a função (42) pode ser utilizada para descrever carregamentos pontuais em vigas.

Figura 36: Carregamento Pontual Viga



Fonte: Própria do Autor.

Como exemplo, considere a viga da figura (36) e observe que $q(x) = p$ para $x = a$ e $q(x) = 0$ para $x \neq a$. Assim, para que a carga seja representada corretamente, temos que multiplicar a intensidade da força aplicada na viga pela função (42), temos

$$q(x) = p \cdot \delta(x - a) = \begin{cases} p, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}. \tag{43}$$

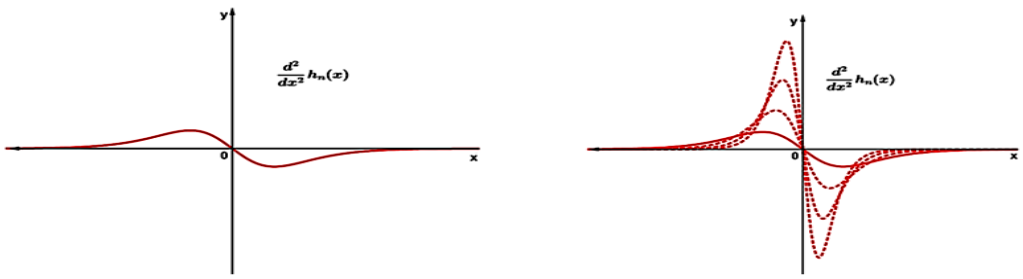
5.3 Função Dipolo

Seja a segunda derivada da função (31)

$$\frac{d^2 h_n(x)}{dx^2} = -\frac{n^2 e^{-nx}(1 - e^{-nx})}{(1 + e^{-nx})^2}. \tag{44}$$

O gráfico a seguir mostra o comportamento desta função conforme o valor de n vai aumentando.

Figura 37: Comportamento das Funções (44) e (45)



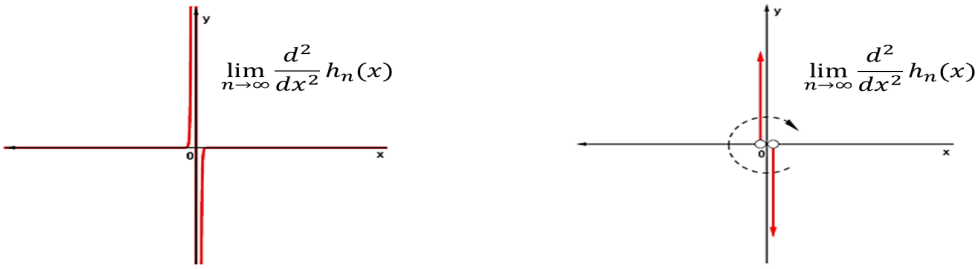
Fonte: Própria do Autor.

Observe nos gráficos da figura (37) que a medida em que n vai aumentando as curvas vão se tornando mais acentuadas. Aplicando o limite na equação (44), tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d^2 h_n(x)}{dx^2} = \begin{cases} +\infty, & x \to 0^- \\ -\infty, & x \to 0^+ \end{cases}; \quad \text{e } 0 \text{ caso contrário.} \tag{45}$$

Onde $x \to 0^+$ significa que x se aproxima de 0 por valores positivos, e $x \to 0^-$ significa que x se aproxima de 0 por valores negativos.

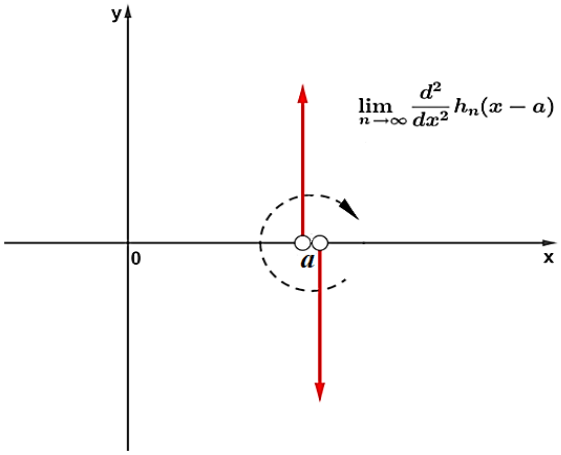
Figura 38: Comportamento da Função Dipolo



Fonte: Própria do Autor.

Observe na figura (38) que no limite em que n tende a infinito, a função resulta em duas singularidades infinitamente próximas, onde uma é positiva e a outra é negativa, ambas infinitamente próximas de $x = 0$. E o efeito resultante dessas duas singularidades é de um dipolo, um momento concentrado na origem orientado no sentido horário. Da mesma forma que foi feito nas funções Delta de Dirac e Heaviside, deslocamos essa descontinuidade para um ponto arbitrário a e o subtraimos do argumento da função.

Figura 39: Função Dipolo com Descontinuidade em a



Fonte: Própria do Autor.

Do ponto de vista meramente geométrico, podemos considerar que as duas singularidade são impulsos $\delta(x)$, isto é, impulsos com intensidade unitária. Desse modo, o momento resultante é igual a 1 (que é um valor admensional). E analisando o gráfico da figura (39), podemos concluir que

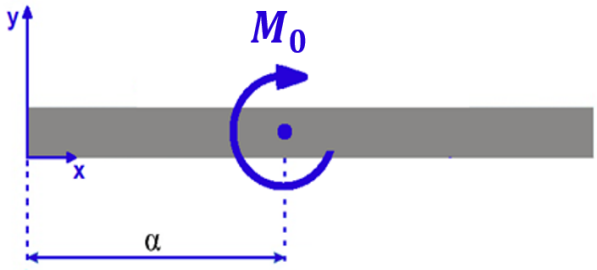
$$\lim_{n\to\infty} \frac{d^2 h_n(x-a)}{dx^2} = \begin{cases} M = 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}. \tag{46}$$

Esta função é conhecida como função Dipolo e é denotada por

$$\eta(x-a) = \begin{cases} M = 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}. \tag{47}$$

Como exemplo, considere a viga com momento concentrado da figura (40).

Figura 40: Momento Concentrado



Fonte: Própria do Autor.

Este momento pode ser descrito como

$$q(x) = M_0 \cdot \eta(x-a) = \begin{cases} M_0, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}. \tag{48}$$

Portanto, as funções Delta de Dirac, Heaviside e Dipolo nos permitem descrever matematicamente cargas descontínuas sobre vigas.

5.4 Notação de Macaulay

As funções de singularidades representadas em parênteses angulares foram, primeiramente, utilizadas na engenharia estrutural de vigas devido ao matemático inglês William Macaulay (1853-1936) e passaram a ser conhecidas como funções de Macaulay, embora os créditos para o método sejam atribuídos ao matemático alemão Alfred Clebsch (1833-1872) e ao engenheiro civil alemão Otto Foppl (1854-1924). Por definição, uma

função de singularidade, dada em parênteses de Macaulay, obedece a regra

$$\langle x-a\rangle^n = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x-a)^n, & x \geq a \end{cases}; \quad n \geq 0. \tag{49}$$

Note que $\langle x-a\rangle^n$ é escrita com parênteses angulares (também chamados de parênteses de Macaulay) para distingui-la da função comum $(x-a)^n$. Além disso, o uso dos símbolos $\langle \ \rangle$ torna a função $(x-a)^n$ nula antes do ponto de singularidade $x = a$, mantendo a mesma inalterada após este mesmo ponto.

A regra básica de integração da função $\langle x-a\rangle^n$ é

$$\int \langle x-a\rangle^n \, dx = \begin{cases} \langle x-a\rangle^{n+1}, & n < 0 \\ \frac{\langle x-a\rangle^{n+1}}{n+1} + c, & n \geq 0 \end{cases}.$$

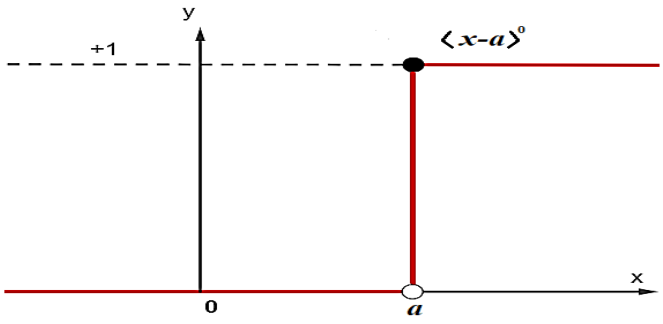
Onde C é a constante de integração a ser determinada. E a derivação,

$$\frac{d\langle x-a\rangle^n}{dx} = \begin{cases} \langle x-a\rangle^{n-1}, & n \leq 0 \\ n\langle x-a\rangle^{n-1}, & n > 0 \end{cases}.$$

As funções de singularidades desenvolvidas até então, serão agora representadas em termos de funções de Macaulay, a função de Heaviside é dada por

$$\langle x-a\rangle^0 = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}. \tag{50}$$

Figura 41: Gráfico da Função (50)



Fonte: Própria do Autor.

Assim, fazendo de forma análoga ao que foi feito nas seções 5.1, 5.2 e 5.3, derivamos duas vezes a função (50), na primeira derivação obtemos a função Delta de Dirac, e na segunda derivação obtemos a função dipolo. Além disso, multiplicando-as pelas forças a qual representam, temos

$$q\langle x-a\rangle^{0}=\begin{cases}0, & x<a\\ q, & x\geq a\end{cases}; \tag{51}$$

$$P\langle x-a\rangle^{-1}=\begin{cases}0, & x\neq a\\ P, & x=a\end{cases}; \tag{52}$$

$$M\langle x-a\rangle^{-2}=\begin{cases}0, & x\neq a\\ M, & x=a\end{cases}. \tag{53}$$

Logo, as funções (51), (52) e (53) são utilizadas para descrever carregamentos distribuídas, carregamentos pontuais e momentos concentrados, respectivamente.

Segundo Serpa (2020) as principais vantagens destas funções como ferramentas de modelagem na física em geral, derivam de que

(a) Elas descrevem fenômenos baseados na geometria, isto é, em sua generalização;

(b) Capturam quaisquer mudanças ao longo da evolução temporal;

(c) Podem incluir infinitamente muitos segmentos do espaço-tempo em diferentes estados;

(d) Podem ser redimensionadas por qualquer fator;

(e) São independentes das unidades;

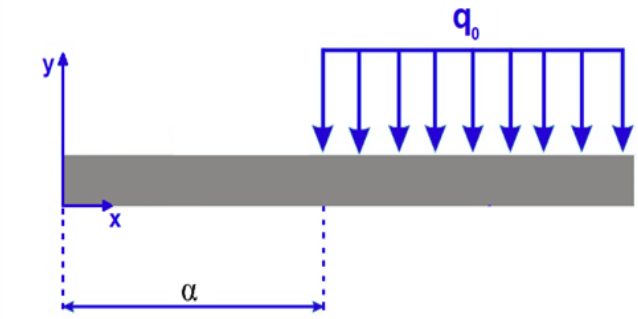
(f) São contínuas, diferenciáveis e integráveis como funções comuns.

5.4.1 Exemplos da Aplicação das Funções de Macaulay na Análise de Vigas

Para melhor intendimento acerca do que foi exposto, considere os exemplos das aplicações a seguir, no entanto deve-se prestar muita atenção a convenção de sinal, pois deve ser tal que os carregamentos pontuais e distribuídos são positivos para baixo e momentos concentrados são positivos em sentido anti-horário (HIBBELER, 2010).

(a) Carregamento distribuído em $x > a$ (até o final da viga);

Figura 42: Carregamento Distribuído



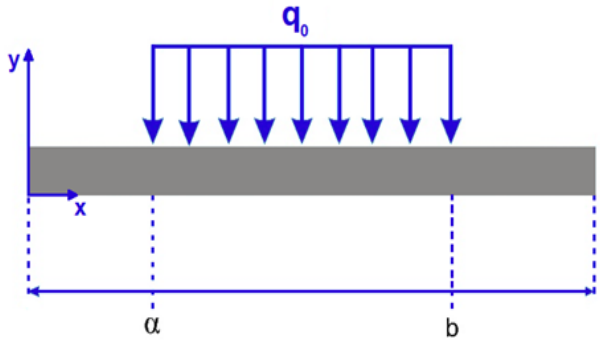
Fonte: Própria do Autor.

Para um carregamento uniformemente distribuído de intensidade q_0, tem-se a equação

$$q(x) = q_0 \langle x - a \rangle^0 . \tag{54}$$

(b) Carregamento distribuído no intervalo $a < x < b$;

Figura 43: Carregamento Distribuído



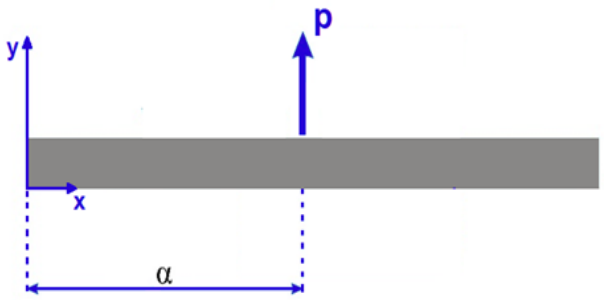
Fonte: Própria do Autor.

Quando o carregamento está atuando em um intervalo ao longo do comprimento da viga, é utilizado

$$q(x) = q_0 \langle x - a \rangle^0 - q_0 \langle x - b \rangle^0 .$$

(c) Carregamento pontual aplicado em $x = a$;

Figura 44: Carregamento Pontual



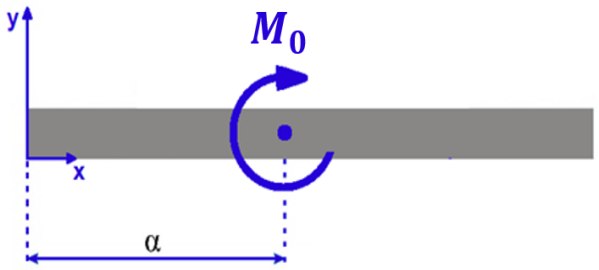
Fonte: Própria do Autor.

É dado por

$$q(x) = P \langle x - a \rangle^{-1}. \tag{55}$$

(d) Momento concentrado aplicado em $x = a$;

Figura 45: Momento Concentrado



Fonte: Própria do Autor.

Neste caso, o carregamento decorrente de um momento concentrado, é

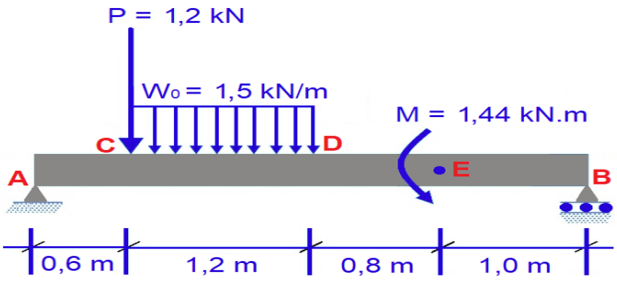
$$q(x) = M_0 \langle x - a \rangle^{-2}. \tag{56}$$

Quando houver diferentes tipos de carregamentos sobre a viga, para expressar a equação do carregamento basta fazer a somatória de todas os carregamentos. E sempre que a quantidade entre parênteses angular for positiva ou zero, os mesmos deverão ser substituídos por parênteses comuns, caso contrário, serão substituídos por zero (BEER, 2008).

6 Aplicações

Aplicação 6.1. Considerando a viga da Figura (46), vamos encontrar a equação do deslocamento (deflexão) e determinar o deslocamento no ponto médio D. Para isso usaremos $E = 200\,GPa$ e $I = 6,87 \cdot 10^{-6}\,m^4$.

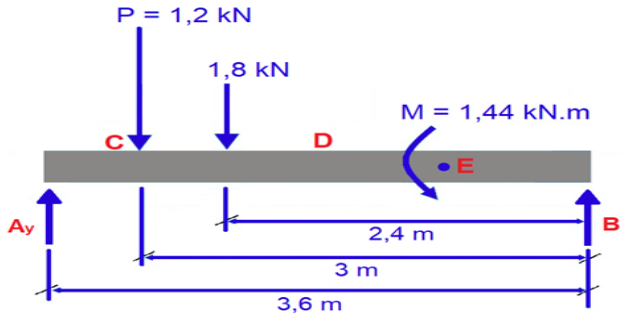
Figura 46: Representação Gráfica da Aplicação 6.1



Fonte: Própria do Autor.

Primeiramente desenhamos o diagrama de corpo livre (figura 47), depois determinamos a reação A_y utilizando a somatória de momentos em relação ao apoio B, assim

Figura 47: Diagrama de Corpo Livre da Aplicação 6.1

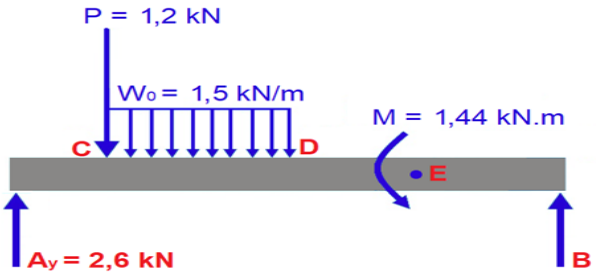


Fonte: Própria do Autor.

$$\sum M_b = 0 \rightarrow -A_y(3,6) + (1,2)(3) + (1,8)(2,4) + 1,44 = 0 \rightarrow A_y = 2,6.$$

Assim, temos

Figura 48: Diagrama de Corpo Livre da Aplicação 6.1



Fonte: Própria do Autor.

Desse modo, a equação do carregamento sobre essa viga é

$$q(x) = -2,6\langle x-0\rangle^{-1} + 1,2\langle x-0,6\rangle^{-1} + (1,5\langle x-0,6\rangle^{0} - 1,5\langle x-1,8\rangle^{0}) + 1,44\langle x-2,6\rangle^{-2} \quad (57)$$

a força reativa do apoio em $x = L$ não está incluída nessa expressão por que esse valor não tem nenhuma importância no cálculo da deflexão da viga, uma vez que sempre será igual a zero. Agora, substituindo a equação (57) na equação (30), escrevemos

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -[-2,6\langle x-0\rangle^{-1} + 1,2\langle x-0,6\rangle^{-1} + 1,5\langle x-0,6\rangle^{0} - 1,5\langle x-1,8\rangle^{0} + 1,44\langle x-2,6\rangle^{-2}]. \quad (58)$$

Isto é,

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = 2,6\langle x-0\rangle^{-1} - 1,2\langle x-0,6\rangle^{-1} - 1,5\langle x-0,6\rangle^{0} + 1,5\langle x-1,8\rangle^{0} - 1,44\langle x-2,6\rangle^{-2}. \quad (59)$$

Assim, como mostrado na seção 4.2, integrando uma e duas vezes a equação (59) obtemos a equação de cisalhamento e momento fletor, respectivamente. Temos

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = 2,6\langle x-0\rangle^{0} - 1,2\langle x-0,6\rangle^{0} - 1,5\langle x-0,6\rangle^{1} + 1,5\langle x-1,8\rangle^{0} - 1,44\langle x-2,6\rangle^{-1} + C_1; \quad (60)$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 2,6\langle x-0\rangle^{1} - 1,2\langle x-0,6\rangle^{1} - \frac{1,5}{2}\langle x-0,6\rangle^{2} + \frac{1,5}{2}\langle x-1,8\rangle^{2} - 1,44\langle x-2,6\rangle^{0} + C_1x + C_2. \quad (61)$$

Com pode ser observado na seção 4.2, a equação (61) é a relação da deflexão com a equação de momento fletor, então

$$M(x) = 2,6\langle x-0\rangle^{1} - 1,2\langle x-0,6\rangle^{1} - \tfrac{1,5}{2}\langle x-0,6\rangle^{2} + \tfrac{1,5}{2}\langle x-1,8\rangle^{2} - 1,44\langle x-2,6\rangle^{0} + C_1x + C_2.$$

Desse modo, considerando o item (ii) da seção 4.2, iremos determinar as constantes de integração tal que as condições de contorno são $M(0) = 0$ e $M(3,6) = 0$. Para $M(0) = 0$

$$\begin{aligned} M(0) &= 2,6\langle x-0\rangle^{1} - 1,2\langle x-0,6\rangle^{1} - \tfrac{1,5}{2}\langle x-0,6\rangle^{2} + \tfrac{1,5}{2}\langle x-1,8\rangle^{2} - 1,44\langle x-2,6\rangle^{0} + C_1x + C_2; \\ 0 &= 2,6\langle 0-0\rangle^{1} - 1,2\langle 0-0,6\rangle^{1} - \tfrac{1,5}{2}\langle 0-0,6\rangle^{2} + \tfrac{1,5}{2}\langle 0-1,8\rangle^{2} - 1,44\langle 0-2,6\rangle^{0} + C_1(0) + C_2. \end{aligned}$$

E pela definição das funções de Macaulay, se o valor que estiver dentro dos parênteses triangulares for negativo, os termos são substituídos por zero, caso contrário são substituídos por parênteses comuns, sendo assim $C_2 = 0$. E de forma análoga para $M(3,6)$

$$\begin{aligned}
M(3,6) &= 2{,}6\langle x-0\rangle^1 - 1{,}2\langle x-0{,}6\rangle^1 - \tfrac{1{,}5}{2}\langle x-0{,}6\rangle^2 + \tfrac{1{,}5}{2}\langle x-1{,}8\rangle^2 - 1{,}44\langle x-2{,}6\rangle^0 + C_1 x + C_2;\\
0 &= 2{,}6\langle 3{,}6-0\rangle^1 - 1{,}2\langle 3{,}6-0{,}6\rangle^1 - \tfrac{1{,}5}{2}\langle 3{,}6-0{,}6\rangle^2 + \tfrac{1{,}5}{2}\langle 3{,}6-1{,}8\rangle^2 - 1{,}44\langle 3{,}6-2{,}6\rangle^0 + C_1(3{,}6) + C_2;\\
0 &= 2{,}6(3{,}6)^1 - 1{,}2(3)^1 - 0{,}75(3)^2 + 0{,}75(1{,}8)^2 - 1{,}44(1)^0 + 3{,}6C_1;\\
0 &= 9{,}36 - 3{,}6 - 6{,}75 + 2{,}43 - 1{,}44 + 3{,}6C_1;\\
C_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Substituindo C_1 e C_2 em (61), obtemos

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 2{,}6\langle x-0\rangle^1 - 1{,}2\langle x-0{,}6\rangle^1 - \frac{1{,}5}{2}\langle x-0{,}6\rangle^2 + \frac{1{,}5}{2}\langle x-1{,}8\rangle^2 - 1{,}44\langle x-2{,}6\rangle^0. \quad (62)$$

Agora, integrando novamente duas vezes a equação (62), obtemos a equação da linha elástica da viga.

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{2{,}6}{2}\langle x-0\rangle^2 - \frac{1{,}2}{2}\langle x-0{,}6\rangle^2 - \frac{1{,}5}{6}\langle x-0{,}6\rangle^3 + \frac{1{,}5}{6}\langle x-1{,}8\rangle^3 - 1{,}44\langle x-2{,}6\rangle^1 + C_3; \quad (63)$$

$$EIy = \frac{2{,}6}{6}\langle x-0\rangle^3 - \frac{1{,}2}{6}\langle x-0{,}6\rangle^3 - \frac{1{,}5}{24}\langle x-0{,}6\rangle^4 + \frac{1{,}5}{24}\langle x-1{,}8\rangle^4 - \frac{1{,}44}{2}\langle x-2{,}6\rangle^2 + C_3x + C_4. \quad (64)$$

Aqui, pelo item (i) da seção 4.2, as constantes de integração serão determinadas pelas condições de contorno envolvendo os deslocamentos da linha elástica em $y(0) = 0$ e $y(3,6) = 0$

$$\begin{aligned}
EIy(0) &= \tfrac{2{,}6}{6}\langle x-0\rangle^3 - \tfrac{1{,}2}{6}\langle x-0{,}6\rangle^3 - \tfrac{1{,}5}{24}\langle x-0{,}6\rangle^4 + \tfrac{1{,}5}{24}\langle x-1{,}8\rangle^4 - \tfrac{1{,}44}{2}\langle x-2{,}6\rangle^2 + C_3x + C_4;\\
0 &= \tfrac{2{,}6}{6}\langle 0-0\rangle^3 - \tfrac{1{,}2}{6}\langle 0-0{,}6\rangle^3 - \tfrac{1{,}5}{24}\langle 0-0{,}6\rangle^4 + \tfrac{1{,}5}{24}\langle 0-1{,}8\rangle^4 - \tfrac{1{,}44}{2}\langle 0-2{,}6\rangle^2 + C_3(0) + C_4;\\
C_4 &= 0.
\end{aligned}$$

E ainda,

$$\begin{aligned}
EIy(3,6) &= \tfrac{2{,}6}{6}\langle x-0\rangle^3 - \tfrac{1{,}2}{6}\langle x-0{,}6\rangle^3 - \tfrac{1{,}5}{24}\langle x-0{,}6\rangle^4 + \tfrac{1{,}5}{24}\langle x-1{,}8\rangle^4 - \tfrac{1{,}44}{2}\langle x-2{,}6\rangle^2 + C_3x + C_4;\\
0 &= \tfrac{2{,}6}{6}\langle 3{,}6-0\rangle^3 - \tfrac{1{,}2}{6}\langle 3{,}6-0{,}6\rangle^3 - \tfrac{1{,}5}{24}\langle 3{,}6-0{,}6\rangle^4 + \tfrac{1{,}5}{24}\langle 3{,}6-1{,}8\rangle^4 - \tfrac{1{,}44}{2}\langle 3{,}6-2{,}6\rangle^2 + C_3(3{,}6) + C_4;\\
0 &= 0{,}4333(3{,}6)^3 - 0{,}2(3)^3 - 0{,}0625(3)^4 + 0{,}0625(1{,}8)^4 - 0{,}72(1)^2 + C_3(3{,}6);\\
C_3 &= 2{,}692.
\end{aligned}$$

Substituindo C_3 e C_4 nas equações (63) e (64), temos

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{2{,}6}{2}\langle x-0\rangle^2 - \frac{1{,}2}{2}\langle x-0{,}6\rangle^2 - \frac{1{,}5}{6}\langle x-0{,}6\rangle^3 + \frac{1{,}5}{6}\langle x-1{,}8\rangle^3 - 1{,}44\langle x-2{,}6\rangle^1 + 2{,}692; \quad (65)$$

$$EIy = \frac{2{,}6}{6}\langle x-0\rangle^3 - \frac{1{,}2}{6}\langle x-0{,}6\rangle^3 - \frac{1{,}5}{24}\langle x-0{,}6\rangle^4 + \frac{1{,}5}{24}\langle x-1{,}8\rangle^4 - \frac{1{,}44}{2}\langle x-2{,}6\rangle^2 + 2{,}692x. \quad (66)$$

Portanto, a equação (66) nos permite calcular a deflexão em qualquer ponto da viga.

Agora, calculemos o deslocamento no ponto D utilizando a equação (66), em que D está localizado em $x = 1,8m$, assim o deslocamento no ponto D pode ser definido pela seguinte relação

$$EIy_D = \tfrac{2,6}{6}\langle 1,8-0\rangle^3 - \tfrac{1,2}{6}\langle 1,8-0,6\rangle^3 - \tfrac{1,5}{24}\langle 1,8-0,6\rangle^4 + \tfrac{1,5}{24}\langle 1,8-1,8\rangle^4 - \tfrac{1,44}{2}\langle 1,8-2,6\rangle^2 + 2,692(1,8),$$

os parênteses angulares com valores negativos são substituídos por zero, e os com valores positivos são substituídos por parênteses comuns, assim

$$\begin{aligned} EIy_D &= \frac{2,6}{6}(1,8-0)^3 - \frac{1,2}{6}(1,8-0,6)^3 - \frac{1,5}{24}(1,8-0,6)^4 + 2,692(1,8); \\ EIy_D &= \frac{2,6}{6}(1,8)^3 - \frac{1,2}{6}(1,2)^3 - \frac{1,5}{24}(1,2)^4 + 2,692(1,8); \\ EIy_D &= -2,794. \end{aligned}$$

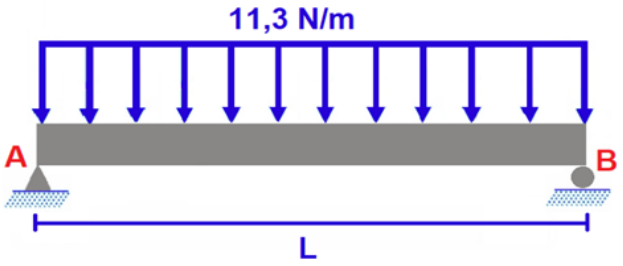
E utilizando os valores de $E = 200 \cdot 10^6\ kN/m^2$ e $I = 6,87 \cdot 10^{-6}\ m^4$, escrevemos

$$\begin{aligned} EIy_D &= -2,794; \\ (200 \cdot 10^6\ kN/m^2)(6,87 \cdot 10^{-6}\ m^4)y_D &= -2,794\ kNm^3; \\ y_D &= -0,00203\ m = -2,03\ mm. \end{aligned}$$

Portanto, o deslocamento no ponto D é de $2,03\ mm$.

Aplicação 6.2. Consideraremos uma viga bi apoiada, no qual o valor máximo de deflexão estabelecida no projeto de vigas é de $0,02544\ mm$. Sabendo que sobre essa viga haverá um carregamento distribuído de $11,3\ N/m$, com $EI = 1,1992545 \cdot 10^4\ Nm^2$. Iremos encontrar o maior valor do vão (L) de modo a atender a norma do projeto em questão.

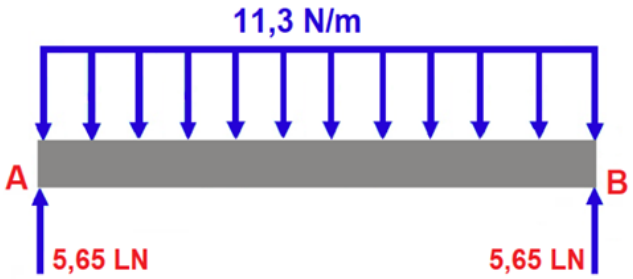
Figura 49: Representação Gráfica da Aplicação 6.2



Fonte: Própria do Autor.

Solução: Calculando as reações dos apoios, obtemos

Figura 50: Diagrama de Corpo Livre da Aplicação 6.2



Fonte: Própria do Autor.

E utilizando as funções de Macaulay para obter a equação dos carregamentos que estão sobre a viga, escrevemos

$$q(x) = -5,65L\left\langle x-0\right\rangle^{-1} + 11,3\left\langle x-0\right\rangle^{0} - 5,65L\left\langle x-L\right\rangle^{-1}$$

substituindo $q(x)$ na equação (30), escrevemos

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -5,65L\left\langle x-0\right\rangle^{-1} + 11,3\left\langle x-0\right\rangle^{0} - 5,65L\left\langle x-L\right\rangle^{-1}$$

Integrando duas vezes, obtemos

$$EI\frac{d^2y}{dx^4} = -5,65L\left\langle x-0\right\rangle^{1} - \frac{11,3}{2}\left\langle x-0\right\rangle^{0} + 5,65L\left\langle x-L\right\rangle^{1} + C_1x + C_2.$$

Utilizando as condições de contorno de momento em $M(0) = 0$ e $M(L) = 0$, obtemos $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$, assim

$$EI\frac{d^2y}{dx^4} = -5,65L\left\langle x-0\right\rangle^{1} - \frac{11,3}{2}\left\langle x-0\right\rangle^{0} + 5,65L\left\langle x-L\right\rangle^{1}.$$

E integrando duas vezes, temos

$$EIy = \frac{5,56L}{6}\left\langle x-0\right\rangle^{3} - \frac{11,3}{24}\left\langle x-0\right\rangle^{4} + \frac{5,56L}{6}\left\langle x-L\right\rangle^{3} + C_3x + C_4.$$

Agora, utilizando os valores de contorno para deflexão onde $y(x) = 0$ e $y(L) = 0$, obtemos $C_3 = -11,3/24L^3$ e $C_4 = 0$, assim

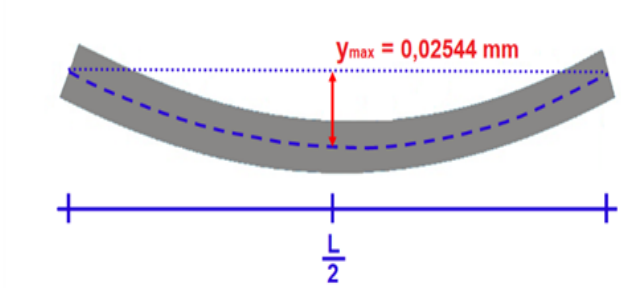
$$EIy = \frac{5,56L}{6}\left\langle x-0\right\rangle^{3} - \frac{11,3}{24}\left\langle x-0\right\rangle^{4} + \frac{5,56L}{6}\left\langle x-L\right\rangle^{3} - \frac{11,3}{24}L^3x.$$

Obtemos a equação de deflexão da viga, e podemos simplificá-la

$$EIy = \frac{5,56L}{6}x^3 - \frac{11,3}{24}x^4 + \frac{5,56L}{6}\left\langle x-L\right\rangle^{3} - \frac{11,3}{24}L^3x.$$

Nesse caso, sabendo que a deflexão máxima irá ocorrer na metade do vão, isto é, em $x = L/2$ então

Figura 51: Deflexão Máxima



Fonte: Própria do Autor.

$$\begin{aligned} EIy_{máx} &= \frac{5,56L}{6}\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{11,3}{24}\left(\frac{L}{2}\right)^4 + \frac{5,56L}{6}\left(\frac{L}{2} - L\right)^3 - \frac{11,3}{24}L^3\left(\frac{L}{2}\right) \\ EIy_{máx} &= \frac{5,65L^4}{48} - \frac{11,3L^4}{384} - \frac{11,3L^4}{48} \\ EIy_{máx} &= -\frac{56,5L^4}{384}. \end{aligned}$$

Agora usando os valores de EI e $EIy_{máx}$ em metros, escrevemos

$$\begin{aligned} EIy_{máx} &= -\frac{56,5L^4}{384} \\ (1,1992545 \cdot 10^4)(2,544 \cdot 10^{-5}) &= -\frac{56,5L^4}{384} \\ (0,30509)(384) &= -56,5L^4 \\ -\frac{117,15456}{56,5} &= L^4 \\ 2,07353 &= L^4 \\ L &= 1,2. \end{aligned}$$

Portanto, a atender a norma estabelecida o vão máximo da viga precisa ser igual a 1,2 metros.

7 Considerações Finais

No decorrer desta pesquisa foi observado que a Modelagem Matemática está diretamente relacionada com a engenharia civil, pois aqui foram utilizadas as mais diversas ferramentas matemáticas para descrever fenômenos relacionados a mecânica e resistência dos materiais. As equações diferenciais se mostraram como um importante recurso para a modelagem da equação de deflexão e obter outras relações importantes presenciadas ao longo do processo de desenvolvimento da mesma, e nota-se também que as funções de singularidades, juntamente com os parênteses de Macaulay podem ser aplicadas para descrever e desenvolver fenômenos físicos usando apenas a geometria de seus gráficos.

O cálculo de deflexões em vigas, é um meio de evitar deformações estéticas e até mesmo evitar tragédias, pois se calculadas corretamente podem impedir rupturas em elementos estruturais de máquinas e de pequenas ou grandes construções, daí vem a importância do estudo de métodos que sejam eficazes. No entanto, o método das funções de singularidades não costuma ser explicitado de forma aprofundada na maioria das fontes disponíveis, e costumam apenas citar as equações já preparadas para o cálculo final, o que dificulta o processo de entendimento do método. Desse modo, esta pesquisa vem para contribuir com o detalhamento da construção e desenvolvimento do método das funções de singularidades, e proporcionar ao leitor um entendimento completo sobre o conteúdo através de uma linguagem acessível, dinâmica e objetiva.

Contudo, ao final desta pesquisa, enquanto um dos autores, foi gratificante desenvolver a temática proposta, pois foi possível a praticabilidade dos novos conhecimentos adquiridos através das leituras, das discussões e das escritas. Não obstante, no decorrer da pesquisa ficou evidente as dificuldades enfrentadas para o desenvolvimento de uma monografia, dificuldades nas quais estão ligadas à própria escrita, bem como, a escassez de referência nacionais para determinados assuntos e o processo exaustivo de produção das figuras apresentadas. O êxito desta pesquisa é decorrente dos esforços conjuntos dos autores, que estiverem assíduos constantemente no processo de elaboração, possibilitando os resultados obtidos (modelagem da equação das deflexões e a sua respectiva aplicação). Para trabalhos futuros, proponhamos um estudo aplicado sobre os resultados atingidos na pesquisa, como também, o estudo das funções não abordadas nesta pesquisa para descrever outros tipos de carregamentos. Também proponhamos a continuidade da pesquisa em futuras publicações.

8 Referências

Referências

[1] AZAMBUJA, Haroldo. A função Delta: Propriedades e Aplicações. 1964, Tese (Livre docência da Cadeira de Física I) - Universidade do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1964.

[2] BEER, F. P. et al.; Mecânica dos Materiais. – 5ª Ed. – São Paulo: AMGH Editora LTDA, 2008.

[3] BEER, Ferdinand; JOHNSTON, Russel. Resistência dos Materiais. 3 ed. Trad. e revisão técnica Celso Pinto Morais Pereira. Pearson Makron Books, 1995.

[4] BORJA, Edilberto. Tensões De Flexão E De Cisalhamento Em Vigas. [ca.2016]. [S.I.]. 18 p. Notas de Aula.

[5] BOYCE, W. E.; Equações Diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. / William E. Boyce, Richard C. D-Prima; Tradução e revisão Valéria de Magalhães Iório - Rio de Janeiro: LTC, 2010.

[6] BUFFONI, Salete. Deflexão de Vigas. [ca.2008]. Rio de Janeiro. 12 p. Notas de Aulas.

[7] CHRISTOFORO, A. L. SIMIONI, C. F. Esforços Solicitantes Em Vigas. [ca.2017]. [S.I.]. 47 p. Notas de Aulas.

[8] COSTA, Richard. Um estudo de equações diferenciais aplicado á deflexão de vigas. 2010, Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, 2010.

[9] COUTO, Roberto. A Função Delta De Dirac Aplicada Na Representação De Grandezas Físicas Infinitamente Concentradas. Niterói: Universidade Federal Fluminense – Dep. Matemática Aplicada. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Roberto-Couto-3. Acesso em: 30 de janeiro de 2022.

[10] FLORENTINO, H. et al.; Funções Sigmoidais Aplicadas Na Determinação Da Atividade Metanogênica Específica – Ame. Rev. Bras. Biom., São Paulo, v.28, n.1, p.141-150, 2010.

[11] GERE, J.M.; Mecânica dos materiais. Trad. Luiz Fernando de Castro Paiva. Revisão técnica Marco Lúcio Bittencourt. Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2003.

[12] GODINHO, L. et al.; Estudos de Modelos de Equações Diferenciais para Deflexão de Vigas. Vozes do Vale, Minas Gerais, ano V, out. 2016.

[13] GOMES, Camilo. Modelagem Matemática Em Python Para A Previsão Do Preço Do Café: Um Estudo Dos Modelos. 2019. Monografia (Bacharelado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2019.

[14] GIUFRIDA, Willyan. Flexão em Vigas e Projeto de Vigas. [ca.2015]. [S.I.]. 46 p. Notas de Aulas.

[15] HIBBELER, R. C.; Resistência dos Materiais / Tradução Arlete Simille Marques; Revisão técnica Sebastião Simões da Cunha Jr. 7ª Ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

[16] JR, Roberto. Mecânica Dos Sólidos II: Funções De Macaulay. [entre 2007 e 2019]. São Paulo. 9 p. Notas de Aula.

[17] JR, Roberto. Mecânica Dos Sólidos II: Funções De Singularidade. [entre 2007 e 2019]. São Paulo. 16 p. Notas de Aula.

[18] LABAKI, Josué. Resistencia dos Materiais I. 2019. [S. l.]. 89 p. Notas de Aula.

[19] LABAKI, Josué. Resistencia dos Materiais II. 2009. [S. l.]. 131 p. Notas de Aula.

[20] LEET, K. et al.; Fundamentos da Análise Estrutural. 3 ed. Trad. João Eduardo Nóbrega Tortello. revisão técnica: Pedro V. P. Mendonça. Porto Alegre: AMGH, 2010.

[21] LEGGERINI, M. R.; Mecânica dos Sólidos. [S.I.].[ca.2009]. 62 p. Notas de Aula.

[22] MARIANI, R. et al.; O Uso De Equações Diferenciais Ordinárias No Cálculo De Escoamento De Água. [S.I.:s.n.], [ca. 2018].

[23] MARTINS, Marcos. Resistência dos Materiais. 2019. [S.I]. 15 p. Notas de Aula.

[24] NASH, William; Potter, Merle. Resistência dos Materiais. 5 ed. Trad. Walter Libardi. Revisão técnica José Benaque Rubert. Bookman editora LTDA, [S.I],2014.

[25] SERPA, Nilo. Funções Generalizadas: Aplicações na Engenharia Civil. Revista Brasiliense de Engenharia e Física Aplicada, [S. l.], v. 5, 2020. Suplemento.

[26] SOUSA, Carlos. Uma aplicação das equações diferenciais à deflexão de vigas. 2013, Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência e Tecnologia) – Universidade Federal Rural do Semiárido, UFERSA, Mossoró, 2013.

[27] SILVA, Fernanda. Cálculo de deflexões usando a Resistência dos Materiais e a Teoria da Elasticidade. 2017, Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2017.

[28] SILVA, Leonan Patrick; SANTOS, Filipe. Determinação da deflexão de uma viga através do método de Runge-Kutta. 2019, Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência e Tecnologia) - Universidade Federal Rural do Semiárido, UFERSA, Mossoró, 2019.

[29] SODRÈ, Ulysses. Equações Diferenciais Ordinárias. 2003. [S.I.]. 60 p. Notas de Aula.

[30] TRAUTWEIN, L.M.; Mecânica Dos Materiais. 2005. São Paulo. 107 p. Notas de Aula.

[31] VIANA, R. L.; Função Delta de Dirac. 2013. Curitiba. 21 p. Notas de Aula.

[32] YARTEY, Joseph; RIBEIRO, Simone, Equações Diferenciais. UFBA - Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação a distância. Salvador, 2017. E-book. Disponível em: ¡ https://repositorio.ufba.br/handle/ri/25540¿. Acessado em 14 de dez. de 2021.