



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MANOEL NANDINHO DE ARAÚJO NETO

SALINÓPOLIS

2026

MANOEL NANDINHO DE ARAÚJO NETO

DEMONSTRAÇÕES DAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS COM ÂNGULOS
EM POSIÇÃO NORMAL.

Trabalho de Curso (TC) apresentado à Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Salinópolis, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago.

SALINÓPOLIS

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A658d Araújo Neto, Manoel Nandinho de.
 Demonstrações das identidades trigonométricas com ângulos
 em posição normal. / Manoel Nandinho de Araújo Neto. — 2026.
 38 f. : il. color.

 Orientador(a): Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago
 Trabalho de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará,
 Campus Universitário de Salinópolis, Curso de Licenciatura em
 Matemática, Salinópolis, 2026.

 1. Demonstrações das identidades trigonométricas.. 2.
 Ângulos em posição normal.. I. Título.

CDD 516.24

MANOEL NANDINHO DE ARAÚJO NETO

DEMONSTRAÇÕES DAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS COM ÂNGULOS
EM POSIÇÃO NORMAL.

Trabalho de Curso (TC) apresentado à Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Salinópolis, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago.

Aprovada em: 13/02/ 2026.
Conceito: Excelente.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **AMILCAR MONTALBAN SAYAGO**
Data: 25/02/2026 09:21:31-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago. (Orientador)
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Documento assinado digitalmente
 **JEZIEL DO NASCIMENTO CORREIA**
Data: 23/02/2026 11:05:01-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jeziel do Nascimento Correia
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Documento assinado digitalmente
 **RAMZ LUIZ FRAIHA LOPES**
Data: 24/02/2026 21:07:27-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Ramz Luiz Fraiha Lopes

Este trabalho é dedicado à minha família, pelo apoio incondicional em todas as etapas da minha vida e de modo especial, ao meu orientador, Dr. Amilcar Montalban Sayago, por compartilhar seus ensinamentos que foram fundamentais ao longo de toda a jornada acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, que me guiou e sempre abençoou minha vida.

Agradeço à minha família que sempre esteve presente me apoiando.

Agradeço à Universidade Federal Do Pará e ao seu corpo docente e administrativo, pelo ambiente de aprendizado e oportunidades oferecidas.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago, por toda paciência, dedicação e apoio para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho demonstra que, por meio da fundamentação teórica da Geometria Analítica e Trigonometria, com ênfase nas Identidades Trigonométricas sob a perspectiva dos conceitos de Ângulos em Posição Normal, é possível estabelecer uma base teórica rigorosa para a demonstração das Identidades Trigonométricas. Os resultados obtidos evidenciam a relevância das demonstrações para uma compreensão matemática aprofundada, tendo em vista que as Identidades Trigonométricas são muito utilizadas na simplificação de expressões em cálculos de Limites, Derivadas, Integrais e Transformadas de Laplace.

Palavras-chave: Geometria Analítica. Trigonometria. Identidades Trigonométricas. Ângulos em Posição Normal. Demonstrações.

ABSTRACT

This work demonstrates that, through the theoretical foundation of Analytic Geometry and Trigonometry, with emphasis on Trigonometric Identities from the perspective of the concepts of Angles in Normal Position, it is possible to establish a rigorous theoretical basis for the proof of Trigonometric Identities. The results obtained highlight the relevance of proofs for a deeper mathematical understanding, considering that Trigonometric Identities are widely used in simplifying expressions in calculations of Limits, Derivatives, Integrals, and Laplace Transforms.

Keywords: Analytical Geometry. Trigonometry. Trigonometric Identities. Angles in Standard Position. Demonstrations.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
1 PRELIMINARES	11
1.1 Razões trigonométricas de ângulos em posição normal.	11
1.1.1 Plano cartesiano e coordenadas de um ponto:	11
1.1.2 Coordenadas de um ponto:	11
1.1.3 Coordenadas do ponto médio de um segmento:	12
1.1.4 Área de uma região triângulo:	13
1.1.5 Distância entre dois pontos no plano cartesiano:	14
1.1.6 Raio Vetor de um Ponto no Plano Cartesiano:	14
1.1.7 Ângulo trigonométrico:	15
1.1.8 Ângulo em posição normal	16
1.1.9 Definições das razões trigonométricas de um ângulo em posição normal:	16
1.1.10 Lei dos Cossenos:	17
2 DEMONSTRAÇÕES DAS IDENTIDADES	18
2.1 Demonstrações das identidades trigonométricas com ângulos em posição normal.	18
2.1.1 Identidades trigonométricas fundamentais:	18
2.1.2 Identidades recíprocas:	22
2.1.3 Identidades por quociente:	22
2.1.4 Identidades trigonométricas de ângulos compostos:	23
2.1.5 Identidades trigonométricas auxiliares:	25
2.1.6 Identidades trigonométricas de ângulo duplo:	27
2.1.7 Identidades trigonométricas de ângulo triplo:	30
3 APLICAÇÕES	34
3.1 Exemplos das identidades trigonométricas em limites, deriva- das, integral e transformada de Laplace.	34
3.1.1 Limite	34
3.1.2 Derivadas	34
3.1.3 Integral	35

3.1.4	Transformada de Laplace	35
	REFERÊNCIAS	37

INTRODUÇÃO

A Trigonometria, sendo o ramo da matemática que estuda as relações entre os lados e os ângulos dos triângulos, possui aplicações fundamentais em diversas áreas do conhecimento científico. No âmbito acadêmico, o domínio das identidades trigonométricas é essencial, pois são frequentemente utilizadas para simplificar expressões complexas em cálculos avançados. Este trabalho tem como foco principal as demonstrações das identidades trigonométricas com ângulos em posição normal.

No Capítulo 1, abordam-se as preliminares de conceitos básicos da Geometria Analítica e as definições das razões trigonométricas com ângulo em posição normal.

No Capítulo 2, serão apresentadas as demonstrações das Identidades Trigonométricas com Ângulos em Posição Normal.

Por fim, no Capítulo 3, são abordadas as aplicações, nas quais o trabalho busca oferecer ao leitor uma noção de como as Identidades são utilizadas em diversas áreas da ciência para facilitar a resolução de problemas de cálculos avançados, como Limites, Derivadas, Integrais e Transformadas de Laplace.

Capítulo 1

PRELIMINARES

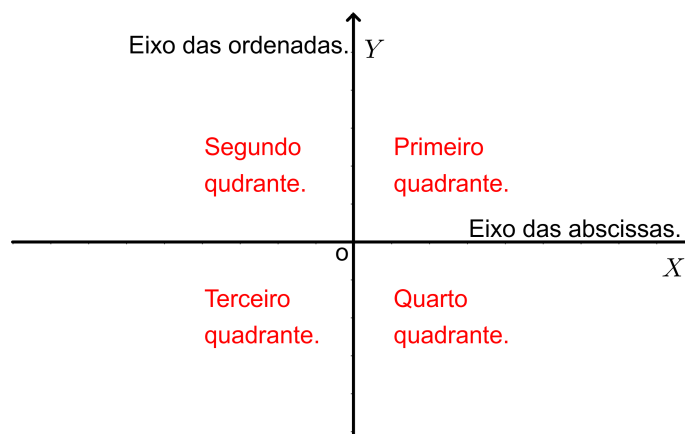
De acordo com os conceitos apresentados por AYAMA [[1],2014] segue:

1.1 Razões trigonométricas de ângulos em posição normal.

1.1.1 Plano cartesiano e coordenadas de um ponto:

Definição 1.1.1. *A Figura 1.1 representa um plano cartesiano, que é formado a partir da intersecção, na origem, de duas retas numéricas denominadas eixo x (eixo das abcissas) e eixo y (eixo das ordenadas), de modo que essas retas sejam ortogonais. Essa intersecção divide o plano em quatro quadrantes.*

Figura 1.1: Plano cartesiano.



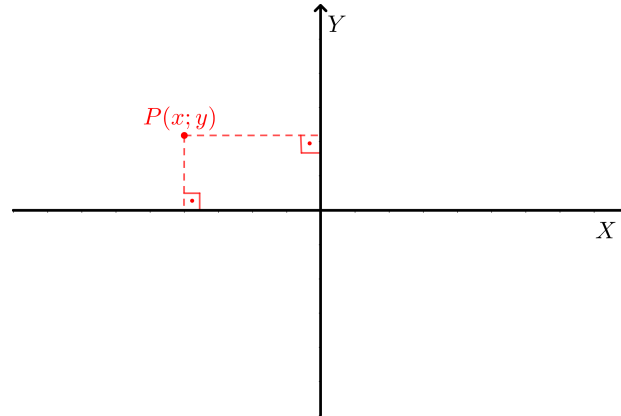
Fonte: Elaborado pelo Autor

1.1.2 Coordenadas de um ponto:

Definição 1.1.2. *Dado um ponto qualquer no plano cartesiano, este possuirá coordenadas que definem sua posição e o quadrante que está localizado. A representação de um ponto P é dado por $P(x; y)$ (notação usada para par ordenado de um ponto P .) sendo x a*

coordenada no eixo das abscissas e y a coordenada no eixo das ordenadas. Na Figura 1.2, temos a representação gráfica de um ponto qualquer no plano cartesiano.

Figura 1.2: Coordenadas de um ponto.



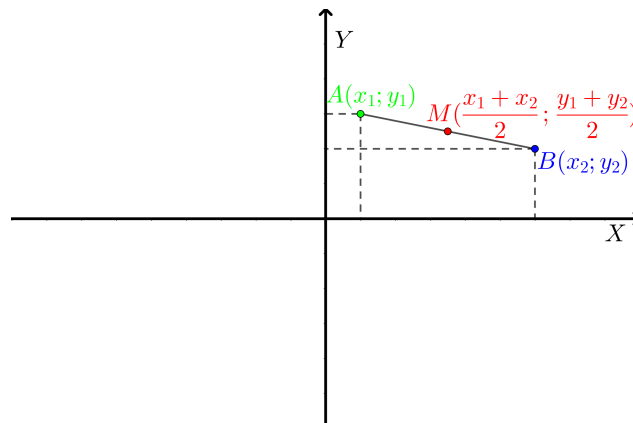
Fonte: Elaborado pelo Autor

1.1.3 Coordenadas do ponto médio de um segmento:

Definição 1.1.3. Na Figura 1.3, o segmento $\overline{AB}$, formado pelos pontos $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ possui um ponto médio com as coordenadas dadas por:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Figura 1.3: Coordenadas do ponto médio de um segmento.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Exemplo 1. Sejam $A(1;3)$ e $B(3;1)$ pontos no plano cartesiano que formam o segmento $\overline{AB}$, determine as coordenadas do ponto médio do segmento.

Solução.

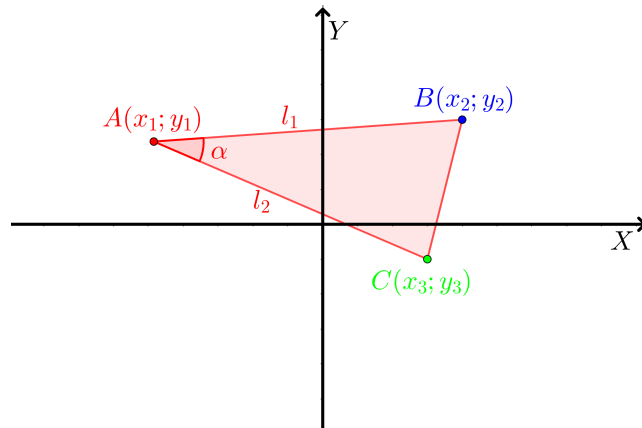
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = M\left(\frac{1 + 3}{2}; \frac{3 + 1}{2}\right) = M(2; 2).$$

1.1.4 Área de uma região triângulo:

Definição 1.1.4. A Figura 1.4, possui a representação de um triângulo qualquer cujos vértices são dados por $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ e $C(x_3; y_3)$ e lados l_1 e l_2 , a área desse triângulo pode ser calculado através das expressões:

- (i) $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} [| (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3) |]$.
- (ii) $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} l_1 l_2 \text{sen}(\alpha)$.

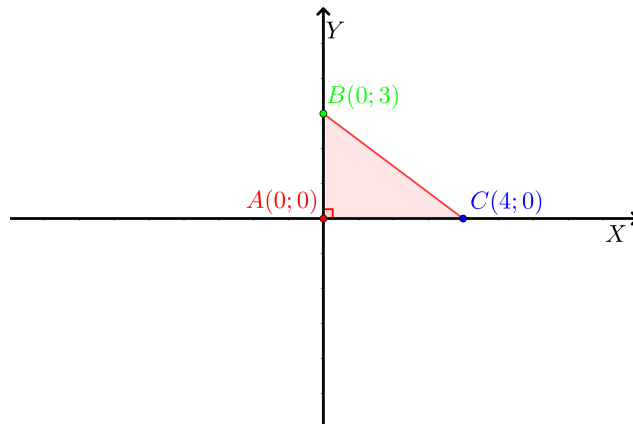
Figura 1.4: Área de uma região Triangular ABC .



Fonte: Elaborado pelo Autor

Exemplo 2. Dado um triângulo cujos vértices são $A(0;0)$, $B(4;0)$ e $C(0;3)$, determine a área desse triângulo usando os dois métodos definidos acima. A seguir temos a representação do triângulo no plano cartesiano.

Figura 1.5: Triângulo ABC .



Fonte: Elaborado pelo Autor

Solução. Usando a Definição 1.1.4-(i), temos a área da região triangular da figura 1.5

$$\begin{aligned}
 A_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} [| (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3) |] \\
 &= \frac{1}{2} [(0.0 + 4.3 + 0.0) - (0.4 + 0.0 + 3.0)] \\
 &= 6.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, calcula-se a área da região triangular usando a Definição 1.1.4-(ii), temos que o triângulo que se forma a partir dos vértices A, B e C , é um triângulo retângulo, possuindo os lados $\overline{AB} = 4$ e $\overline{AC} = 3$, logo:

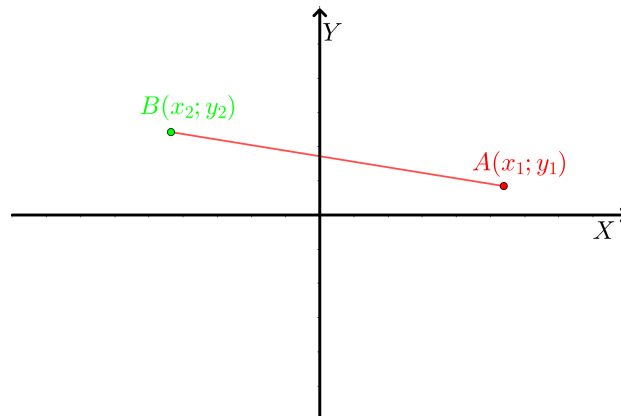
$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}l_1l_2\text{sen}(\alpha) = \frac{1}{2}3.4.\text{sen}(90^\circ) = \frac{1}{2}12 = 6.$$

1.1.5 Distância entre dois pontos no plano cartesiano:

Definição 1.1.5. Na Figura 1.6, dado dois pontos quaisquer no plano cartesiano definidos por $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$, a distância entre os dois pontos é dado por:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (1.1.1)$$

Figura 1.6: Distância entre dois pontos.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Exemplo 3. Dado dois pontos no plano cartesiano, $A(1;1)$ e $B(1;4)$, determine o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

Solução.

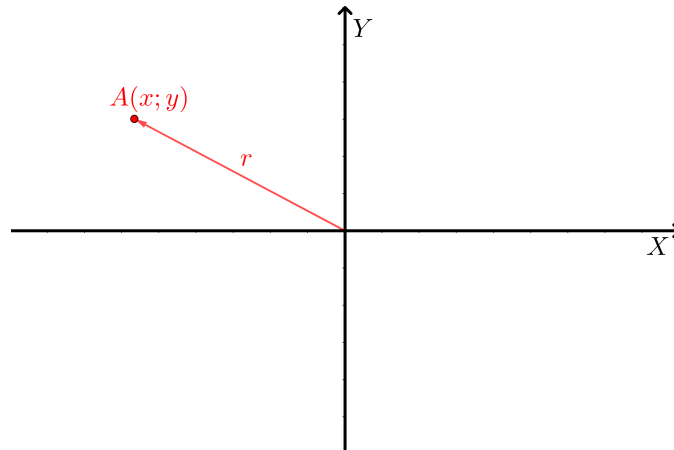
$$\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(1 - 1)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

1.1.6 Raio Vetor de um Ponto no Plano Cartesiano:

Definição 1.1.6. A Figura 1.7 representa o raio vetor de um ponto qualquer $A(x; y)$ que se dá pela distância da origem do plano cartesiano até o ponto $A(x; y)$. Essa distância é calculada por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (r > 0).$$

Figura 1.7: Raio Vetor de um Ponto no Plano Cartesiano



Fonte: Elaborado pelo Autor

Exemplo 4. Encontre o valor do raio vetor do ponto $A(2; 2)$.

Solução.

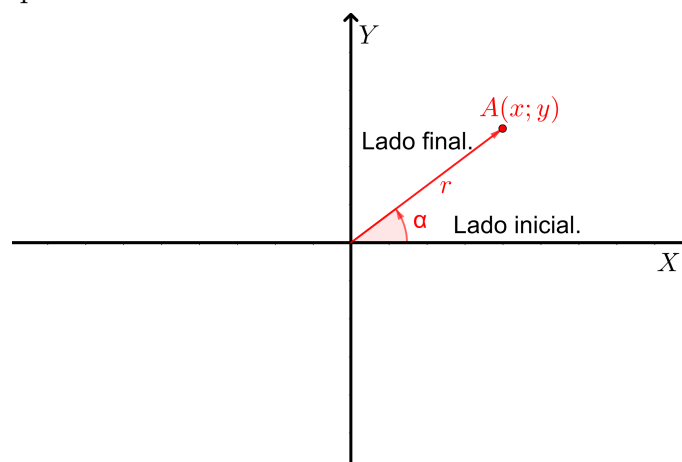
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2.$$

1.1.7 Ângulo trigonométrico:

Definição 1.1.7. O ângulo trigonométrico é gerado pelo lado inicial (semieixo positivo das abscissas) e pela rotação do raio vetor (lado final).

Na Figura 1.8 o ângulo trigonométrico α gerado pela rotação no sentido anti-horário possuirá sinal positivo.

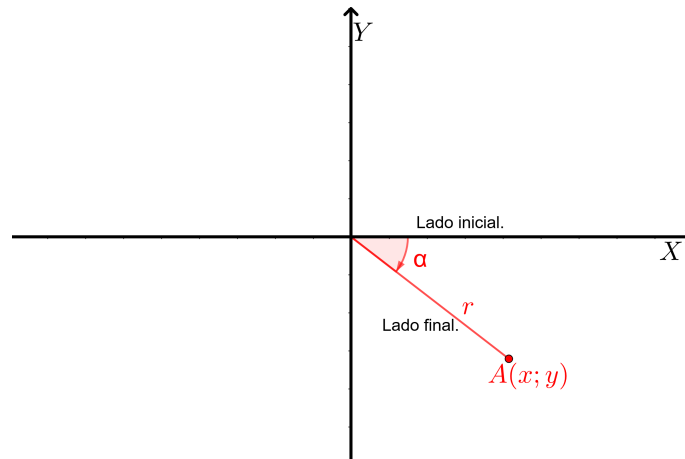
Figura 1.8: Ângulo positivo.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Na Figura 1.9, o Ângulo Trigonométrico α gerado pela rotação no sentido horário possuirá sinal negativo.

Figura 1.9: Ângulo negativo.



Fonte: Elaborado pelo Autor

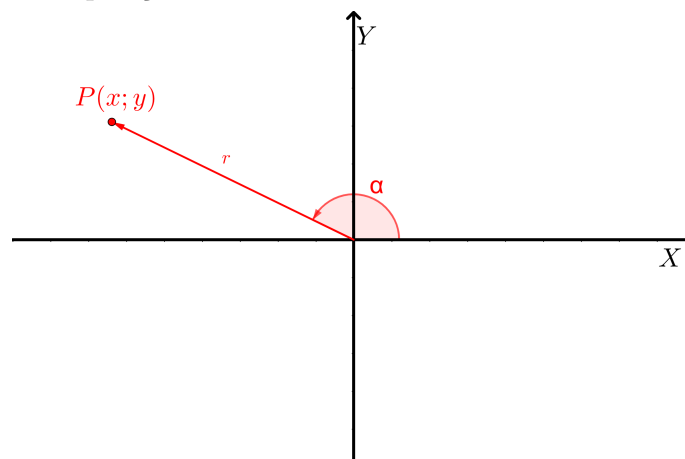
1.1.8 Ângulo em posição normal

Definição 1.1.8. O ângulo em posição normal é um ângulo trigonométrico (Definição 1.1.7) inscrito no plano cartesiano com as seguintes características:

- Seu vértice é a origem do plano cartesiano.
- Seu lado inicial é o semieixo positivo das abscissas.
- Seu lado final estará localizado em qualquer lugar no plano, indicando o quadrante no qual o ângulo pertence.

Na Figura 1.10, temos a representação gráfica do ângulo α em posição normal inscrito no plano cartesiano, cujo lado final possui o ponto $P(x; y)$.

Figura 1.10: Ângulo em posição normal.



Fonte: Elaborado pelo Autor

1.1.9 Definições das razões trigonométricas de um ângulo em posição normal:

Definição 1.1.9. As razões trigonométricas de um ângulo em posição normal se definem a partir das coordenadas de um ponto, sendo ele diferente da origem do plano

cartesiano. Dado um ponto $P(x; y)$ sendo ele o ponto extremo do raio r ($r > 0$), que foi rotacionado a partir do semieixo positivo das abcissas originando um ângulo trigonométrico α como representado na Figura 1.10.

A seguir estão definidas as razões trigonométricas de um ângulo em posição normal.

Tabela 1.1: Razões trigonométricas(RT) de um ângulo em posição normal(Figura 1.10).

RT		RT	
$sen(\alpha) = \frac{\text{ordenada do ponto final}}{\text{raio vetor}} = \frac{y}{r}$		$cot(\alpha) = \frac{\text{abscissa do ponto final}}{\text{ordenada do ponto final}} = \frac{x}{y}$	
$cos(\alpha) = \frac{\text{abscissa do ponto final}}{\text{raio vetor}} = \frac{x}{r}$		$sec(\alpha) = \frac{\text{raio vetor}}{\text{abscissa do ponto final}} = \frac{r}{x}$	
$tan(\alpha) = \frac{\text{ordenada do ponto final}}{\text{abscissa do ponto final}} = \frac{y}{x}$		$csc(\alpha) = \frac{\text{raio vetor}}{\text{ordenada do ponto final}} = \frac{r}{y}$	

Fonte: Elaborado pelo Autor

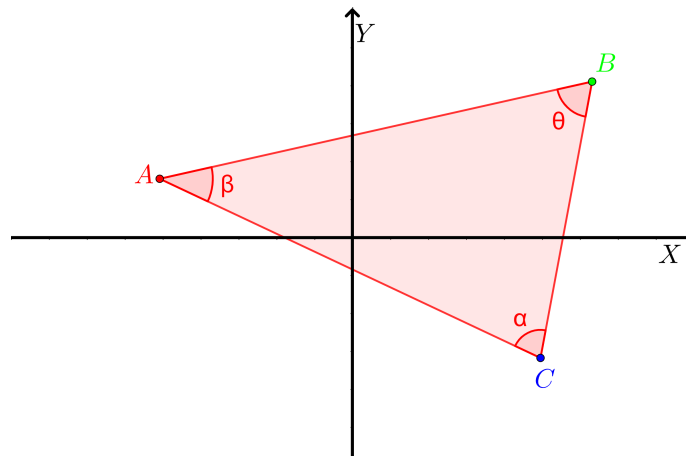
Segundo IEZZI [[7],2011], segue:

1.1.10 Lei dos Cossenos:

Definição 1.1.10. A Lei dos Cossenos pode ser aplicada em qualquer triângulo, sendo o quadrado de um lado do triângulo igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, subtraindo o dobro do produto desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles. A Figura 1.11 representa um triângulo no plano.

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - 2(\overline{BC})(\overline{CA})\cos(\alpha). \quad (1.1.2)$$

Figura 1.11: Lei dos Cossenos.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Exemplo 5. Dado um triângulo cujo lados $a = 3\text{cm}$ e $b = 5\text{cm}$ e o ângulo entre eles é de 60° . Calcule o comprimento do lado c .

Solução.

$$c^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos(60^\circ) = 9 + 25 - 15 = \sqrt{19}\text{cm}.$$

Capítulo 2

DEMONSTRAÇÕES DAS IDENTIDADES

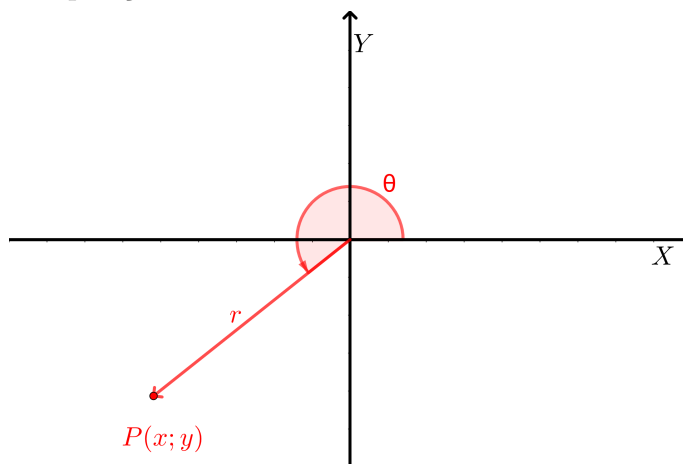
2.1 Demonstrações das identidades trigonométricas com ângulos em posição normal.

2.1.1 Identidades trigonométricas fundamentais:

Teorema 2.1.1. (*Identidades Pitagóricas*).

- (i) $\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$.
- (ii) $1 + \cot^2(\theta) = \operatorname{csc}^2(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R} - \{k\pi\}; k \in \mathbb{Z}$.
- (iii) $1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}; k \in \mathbb{Z}$.

Figura 2.1: Ângulo em posição normal.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Demonstração. Com base na Figura 2.1 demonstram-se as identidades trigonométricas fundamentais.

(i). Pelas Definições 1.1.9 e 1.1.6, segue:

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1,$$

Portanto,

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1.$$

(ii). Pelas Definições 1.1.9 e 1.1.6, segue:

$$\begin{aligned} 1 + \cot^2(\theta) &= 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 \\ &= \frac{x^2 + y^2}{r^2} + \frac{x^2}{y^2} \\ &= \frac{(x^2 + y^2)y^2 + r^2x^2}{r^2y^2} \\ &= \frac{(r^2)y^2 + r^2x^2}{r^2y^2} \\ &= \left(\frac{r^2}{r^2}\right) \frac{y^2 + x^2}{y^2} \\ &= \frac{y^2 + x^2}{y^2} \\ &= \left(\frac{r}{y}\right)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$1 + \cot^2(\theta) = \operatorname{csc}^2(\theta).$$

(iii). Pelas Definições 1.1.9 e 1.1.6, segue:

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2(\theta) &= 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \\ &= \frac{x^2 + y^2}{r^2} + \frac{y^2}{x^2} \\ &= \frac{(x^2 + y^2)x^2 + r^2y^2}{r^2x^2} \\ &= \frac{(r^2)x^2 + r^2y^2}{r^2x^2} \\ &= \left(\frac{r^2}{r^2}\right) \frac{(x^2 + y^2)}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2}{x^2} \\ &= \left(\frac{r}{x}\right)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta).$$

□

Proposição 2.1.1. (*Identidades auxiliares*).

- (i) $\operatorname{sen}^4(\theta) + \cos^4(\theta) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\theta)\cos^2(\theta); \quad \theta \in \mathbb{R}.$
- (ii) $\operatorname{sen}^6(\theta) + \cos^6(\theta) = 1 - 3\operatorname{sen}^2(\theta)\cos^2(\theta); \quad \theta \in \mathbb{R}.$
- (iii) $\tan(\theta) + \cot(\theta) = \sec(\theta)\csc(\theta); \quad \theta \in \mathbb{R} - \{k\frac{\pi}{2}\} \ (k \in \mathbb{Z}).$
- (iv) $\sec^2(\theta) + \csc^2(\theta) = \sec^2(\theta)\csc^2(\theta); \quad \theta \in \mathbb{R} - \{k\frac{\pi}{2}\} \ (k \in \mathbb{Z}).$
- (v) $(1 + \operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta))^2 = 2(1 + \operatorname{sen}(\theta))(1 + \cos(\theta)); \quad \theta \in \mathbb{R}.$

Demonstração. Com base na Figura 2.1 demonstram-se as identidades auxiliares.

(i). Aplicando o item (i) Do Teorema 2.1.1 e usando as Definições de 1.1.9, segue:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 &\implies \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1 \\
 &\implies \left[\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2\right]^2 = 1^2 \\
 &\implies \left(\frac{y^2}{r^2}\right)^2 + 2\left(\frac{y^2}{r^2}\right)\left(\frac{x^2}{r^2}\right) + \left(\frac{x^2}{r^2}\right)^2 = 1 \\
 &\implies \left[\left(\frac{y}{r}\right)^2\right]^2 + \left[\left(\frac{x}{r}\right)^2\right]^2 = 1 - 2\left(\frac{y}{r}\right)^2\left(\frac{x}{r}\right)^2.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{sen}^4(\theta) + \cos^4(\theta) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\theta)\cos^2(\theta).$$

(ii). Aplicando o item (i) Do Teorema 2.1.1 e usando as Definições de 1.1.9, segue:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 &\implies \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1 \\
 &\implies \left[\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2\right]^3 = 1^3 \\
 &\implies \left(\frac{y^2}{r^2}\right)^3 + 3\left(\frac{y^2}{r^2}\right)^2\left(\frac{x^2}{r^2}\right) + 3\left(\frac{y^2}{r^2}\right)\left(\frac{x^2}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{r^2}\right)^3 = 1 \\
 &\implies \left(\frac{y}{r}\right)^6 + 3\left(\frac{y}{r}\right)^4\left(\frac{x^2}{r^2}\right) + 3\left(\frac{y^2}{r^2}\right)\left(\frac{x}{r}\right)^4 + \left(\frac{x}{r}\right)^6 = 1 \\
 &\implies \left(\frac{y}{r}\right)^6 + 3\left(\frac{y^2}{r^2}\right)\left(\frac{x^2}{r^2}\right)\left(\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2}\right) + \left(\frac{x}{r}\right)^6 = 1 \\
 &\implies \left(\frac{y}{r}\right)^6 + \left(\frac{x}{r}\right)^6 = 1 - 3\left(\frac{y}{r}\right)^2\left(\frac{x}{r}\right)^2.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{sen}^6(\theta) + \cos^6(\theta) = 1 - 3\operatorname{sen}^2(\theta)\cos^2(\theta).$$

(iii). Usando as Definições 1.1.9 e 1.1.6, segue:

$$\tan(\theta) + \cot(\theta) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{y^2 + x^2}{xy} = \frac{r^2}{xy} = \frac{r}{x} \frac{r}{y}.$$

Portanto,

$$\tan(\theta) + \cot(\theta) = \sec(\theta)\csc(\theta).$$

(iv). Usando as Definições 1.1.9 e 1.1.6, segue:

$$\begin{aligned} \sec^2(\theta) + \csc^2(\theta) &= \left(\frac{r^2}{x^2}\right) + \left(\frac{r^2}{y^2}\right) \\ &= \frac{r^2 y^2 + x^2 r^2}{x^2 y^2} \\ &= \frac{r^2 (y^2 + x^2)}{x^2 y^2} \\ &= \frac{r^2}{x^2} \frac{(r^2)}{y^2} \\ &= \left(\frac{r}{x}\right)^2 \left(\frac{r}{y}\right)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sec^2(\theta) + \csc^2(\theta) = \sec^2(\theta)\csc^2(\theta).$$

(v). Usando as Definições de 1.1.9, 1.1.6 e aplicando o item (i) do Teorema 2.1.1, segue:

$$\begin{aligned} (1 + \sec(\theta) + \csc(\theta))^2 &= \left[1 + \left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)\right]^2 \\ &= 1 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} \frac{x}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y^2} \\ &= 1 + 2\frac{y}{x} + 2\frac{x}{y} + \left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2}\right) + 2\left(\frac{y}{x} \frac{x}{y}\right) \\ &= 2 + 2\frac{y}{x} + 2\frac{x}{y} + 2\left(\frac{y}{x} \frac{x}{y}\right) \\ &= \left[2 + 2\frac{y}{x}\right] + \left[2\frac{x}{y} + 2\left(\frac{y}{x} \frac{x}{y}\right)\right] \\ &= 2\left[1 + \frac{y}{x}\right] + 2\frac{x}{y}\left[1 + \frac{y}{x}\right] \\ &= 2\left(1 + \frac{y}{x}\right)\left(1 + \frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$(1 + \operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta))^2 = 2(1 + \operatorname{sen}(\theta))(1 + \cos(\theta)).$$

□

2.1.2 Identidades recíprocas:

Teorema 2.1.2. (*Identidades recíprocas*).

- (i) $\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{csc}(\theta) = 1$; $\theta \in \mathbb{R} - \{k\pi\}; (k \in \mathbb{Z})$.
- (ii) $\cos(\theta)\sec(\theta) = 1$; $\theta \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}; (k \in \mathbb{Z})$.
- (iii) $\tan(\theta)\cot(\theta) = 1$; $\theta \in \mathbb{R} - \{k\frac{\pi}{2}\}; (k \in \mathbb{Z})$.

Demonstração. Com base na Figura 2.1 demonstram-se as identidades recíprocas.

(i). Pela Definição 1.1.9, segue:

$$\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{csc}(\theta) = \frac{y}{r} \frac{r}{y} = 1.$$

Portanto,

$$\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{csc}(\theta) = 1.$$

(ii). Pela Definição 1.1.9, segue:

$$\cos(\theta)\sec(\theta) = \frac{x}{r} \frac{r}{x} = 1.$$

Portanto,

$$\cos(\theta)\sec(\theta) = 1.$$

(iii). Pela Definição 1.1.9, segue:

$$\tan(\theta)\cot(\theta) = \frac{y}{x} \frac{x}{y} = 1.$$

Portanto,

$$\tan(\theta)\cot(\theta) = 1.$$

□

2.1.3 Identidades por quociente:

Teorema 2.1.3. (*Identidades por quociente*).

- (i) $\tan(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$; $\theta \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}; (k \in \mathbb{Z})$.
- (ii) $\cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}$; $\theta \in \mathbb{R} - \{k\pi\}; (k \in \mathbb{Z})$.

Demonstração. Com base na Figura 2.1 demonstraremos as identidades por quociente.

(i). Pela Definição 1.1.9, segue:

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Portanto,

$$\tan(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

(ii). Pela Definição 1.1.9, segue:

$$\cot(\theta) = \frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}.$$

Portanto,

$$\cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}.$$

□

2.1.4 Identidades trigonométricas de ângulos compostos:

Observação 2.1.1. (i) Uma função $f : A \rightarrow B$ é denominada *Função Par* se, e somente, se:

$$f(z) = f(-z), \forall z \in A.$$

(ii) Uma função $f : A \rightarrow B$ é denominada *Função Ímpar* se, e somente, se:

$$f(-z) = -f(z), \forall z \in A.$$

Teorema 2.1.4. (Identidades trigonométricas de ângulos compostos).

$$(i) \quad \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\text{sen}(\beta); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

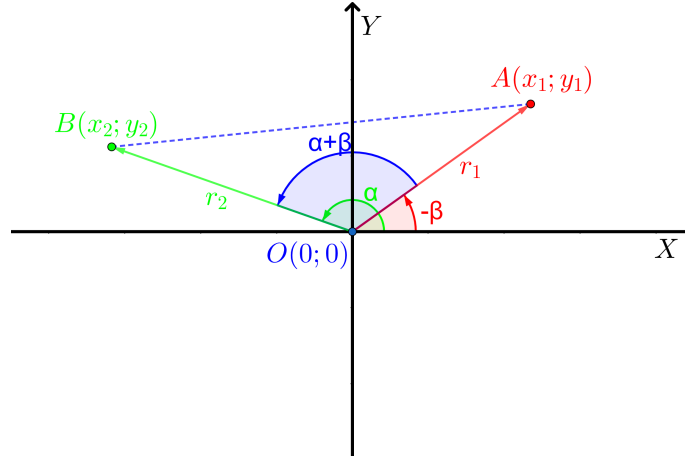
$$(ii) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$(iii) \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\} \text{ e } \tan(\alpha)\tan(\beta) \neq -1.$$

Demonstração. (i). Considerando α e $-\beta$ ângulos em posição normal da Figura 2.2, aplicamos as Definições de 1.1.9 e igualamos os itens (i), (ii) da Definição 1.1.4 e Observação 2.1.1, obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r_1r_2\text{sen}(\alpha + \beta) &= \frac{1}{2}[x_1y_2 - y_1x_2] \implies \text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{x_1}{r_1}\frac{y_2}{r_2} - \frac{x_2}{r_2}\frac{y_1}{r_1} \\ &\implies \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(-\beta) - \cos(\alpha)\text{sen}(-\beta) \\ &\implies \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\text{sen}(\beta). \end{aligned}$$

Figura 2.2: Ângulo em posição normal.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Portanto,

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\text{sen}(\beta).$$

(ii). Aplicando as Definições 1.1.2, 1.1.1 , 1.1.9 e Observação 2.1.1, segue:

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\alpha + \beta) \implies (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\alpha + \beta) \\ &\implies x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_2y_1 + y_1^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\alpha + \beta) \\ &\implies (x_2^2 + y_2^2) + (x_1^2 + y_1^2) - 2(x_2x_1 + y_2y_1) = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\alpha + \beta) \\ &\implies \frac{x_1}{r_1} \cdot \frac{x_2}{r_2} + \frac{y_2}{r_2} \cdot \frac{y_1}{r_1} = \cos(\alpha + \beta) \\ &\implies \cos(\alpha) \cdot \cos(-\beta) + \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(-\beta) = \cos(\alpha + \beta) \\ &\implies \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta) = \cos(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta).$$

(iii). Usando as Identidades (i) e (ii) provadas anteriormente, usando as Definições de 1.1.9 e Observação 2.1.1, segue:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\cos(\beta)\text{sen}(\alpha) + \cos(\alpha)\text{sen}(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)} \\ &= \frac{-\cos(\beta)\text{sen}(\alpha) - \cos(\alpha)\text{sen}(\beta)}{-\cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)} \\ &= \frac{-\cos(-\beta)\text{sen}(\alpha) + \cos(\alpha)\text{sen}(-\beta)}{-\cos(\alpha)\cos(-\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(-\beta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\frac{y_2}{r_2} \frac{x_1}{r_1} \frac{r_2}{x_2} \frac{r_1}{x_1} + \frac{x_2}{r_2} \frac{y_1}{r_1} \frac{\cancel{r_2}}{\cancel{x_2}} \frac{\cancel{r_1}}{\cancel{x_1}}}{-\frac{x_2}{r_2} \frac{x_1}{r_1} \frac{\cancel{r_2}}{\cancel{x_2}} \frac{\cancel{r_1}}{\cancel{x_1}} - \frac{y_2}{r_2} \frac{y_1}{r_1} \frac{\cancel{r_2}}{\cancel{x_2}} \frac{\cancel{r_1}}{\cancel{x_1}}} \\
&= \frac{-\frac{y_2}{x_2} \frac{x_1}{\cancel{r_1}} + \frac{\cancel{r_2}}{\cancel{x_2}} \frac{y_1}{\cancel{r_1}}}{-\frac{\cancel{r_2}}{\cancel{x_2}} \frac{\cancel{r_1}}{\cancel{x_1}} - \frac{y_2}{x_2} \frac{y_1}{x_1}} \\
&= \frac{-\tan(\alpha) + \tan(-\beta)}{-1 - \tan(\alpha)\tan(-\beta)} \\
&= \frac{-\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{-1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)} \\
&= \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}.$$

☐

2.1.5 Identidades trigonométricas auxiliares:

Proposição 2.1.2. (*Identities auxiliares*).

$$(i) \quad \text{sen}(\alpha + \beta)\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}^2(\alpha) - \text{sen}^2(\beta); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\beta); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$(iii) \tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}; \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$(iv) \quad \tan(\alpha) - \tan(\beta) = \frac{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}; \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Demonstração. Demonstram-se as identidades trigonométricas auxiliares.

(i). Aplicando o item (i) do Teorema 2.1.4 e usando as Definições de 1.1.9, segue::

$$\begin{aligned}
 \text{sen}(\alpha + \beta)\text{sen}(\alpha - \beta) &= [\text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\beta)\cos(\alpha)][\text{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\text{sen}(\beta)] \\
 &= \left[\frac{y_1}{r_1} \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_1}{r_1} \frac{y_2}{r_2} \right] \left[\frac{y_1}{r_1} \frac{x_2}{r_2} - \frac{x_1}{r_1} \frac{y_2}{r_2} \right] \\
 &= \left[\frac{y_1}{r_1} \frac{x_2}{r_2} \right]^2 - \left[\frac{x_1}{r_1} \frac{y_2}{r_2} \right]^2 \\
 &= \frac{y_1^2}{r_1^2} \left(1 - \frac{y_2^2}{r_2^2} \right) - \left(1 - \frac{y_1^2}{r_1^2} \right) \frac{y_2^2}{r_2^2} \\
 &= \frac{y_1^2}{r_1^2} - \frac{y_1^2}{r_1^2} \frac{y_2^2}{r_2^2} - \frac{y_2^2}{r_2^2} + \frac{y_1^2}{r_1^2} \frac{y_2^2}{r_2^2} \\
 &= \frac{y_1^2}{r_1^2} - \frac{y_2^2}{r_2^2}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{sen}(\alpha + \beta)\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}^2(\alpha) - \text{sen}^2(\beta).$$

(ii) Aplicando a item (ii) do Teorema 2.1.4 e usando as Definições de 1.1.9, segue:

$$\begin{aligned}
 \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) &= [\cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)][\cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)] \\
 &= \left[\frac{x_1}{r_1} \frac{x_2}{r_2} - \frac{y_1}{r_1} \frac{y_2}{r_2} \right] \left[\frac{x_1}{r_1} \frac{x_2}{r_2} + \frac{y_1}{r_1} \frac{y_2}{r_2} \right] \\
 &= \left[\frac{x_1}{r_1} \frac{x_2}{r_2} \right]^2 - \left[\frac{y_1}{r_1} \frac{y_2}{r_2} \right]^2 \\
 &= \frac{x_1^2}{r_1^2} \left(1 - \frac{y_2^2}{r_2^2} \right) - \left(1 - \frac{x_1^2}{r_1^2} \right) \frac{y_2^2}{r_2^2} \\
 &= \frac{x_1^2}{r_1^2} - \frac{x_1^2}{r_1^2} \frac{y_2^2}{r_2^2} - \frac{y_2^2}{r_2^2} + \frac{x_1^2}{r_1^2} \frac{y_2^2}{r_2^2} \\
 &= \frac{x_1^2}{r_1^2} - \frac{y_2^2}{r_2^2}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\beta).$$

(iii) Aplicando o item (i) do Teorema 2.1.3 e usando as Definições de 1.1.9, segue:

$$\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \frac{\text{sen}(\beta)}{\cos(\beta)} = \frac{\frac{y_1}{r_1}}{\frac{x_1}{r_1}} + \frac{\frac{y_2}{r_2}}{\frac{x_2}{r_2}} = \frac{\frac{y_1}{r_1} \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_1}{r_1} \frac{y_2}{r_2}}{\frac{x_1}{r_1} \frac{x_2}{r_2}}.$$

Portanto,

$$\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}.$$

(iv) Aplicando o item (i) do Teorema 2.1.3 e usando as Definições de 1.1.9, segue:

$$\tan(\alpha) - \tan(\beta) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{\text{sen}(\beta)}{\cos(\beta)} = \frac{\frac{y_1}{r_1}}{\frac{x_1}{r_1}} - \frac{\frac{y_2}{r_2}}{\frac{x_2}{r_2}} = \frac{\frac{y_1}{r_1} \frac{x_2}{r_2} - \frac{x_1}{r_1} \frac{y_2}{r_2}}{\frac{x_1}{r_1} \frac{x_2}{r_2}}.$$

Portanto,

$$\tan(\alpha) - \tan(\beta) = \frac{\text{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}.$$

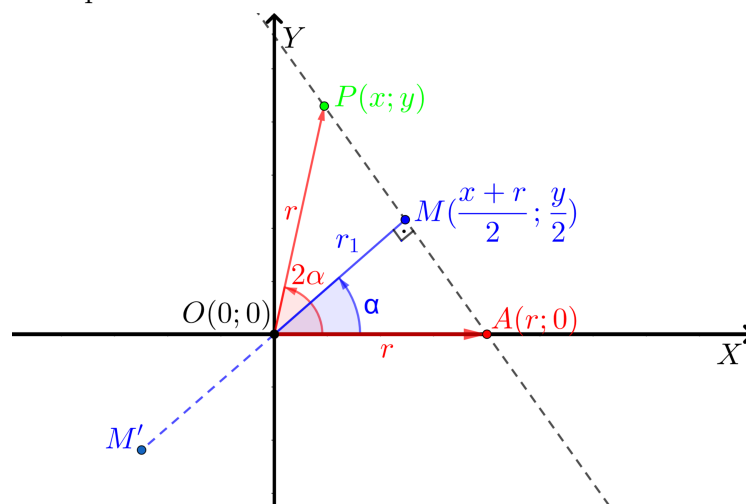
□

2.1.6 Identidades trigonométricas de ângulo duplo:

Teorema 2.1.5. (*Identidades Trigonômétricas de ângulo duplo*). Sejam 2α e α ângulos em posição normal com pontos no lado final $P(x, y)$ e $M(\frac{x+r}{2}, \frac{y}{2})$ sendo ponto médio entre P e $A(r; 0)$ tal que $M'M$ é mediatriz do segmento PA , então

- (i) $\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$; $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (ii) $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)$; $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (iii) $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$; $\alpha \in \mathbb{R} - \{\{k\frac{\pi}{4}\} - \{k\pi\}\}$ com $(k \in \mathbb{Z})$.

Figura 2.3: Ângulo duplo.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Demonstração. Demonstram-se as Identidades Trigonômétricas de ângulo duplo com base na Figura 2.3, considerando A ponto fixo, $OA = OP = r$ e $MO = M'O$, tal que M e M' são simétricos com respeito a origem. Quando 2α gira, α pode ter como lado final OM

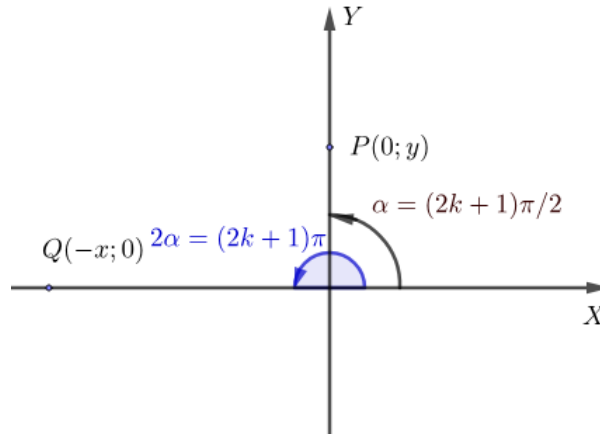
ou OM' , analisa-se o ângulo 2α da Figura 2.3:

$$2\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi\}, k \in \mathbb{Z} \iff \begin{cases} 2\alpha \in [2k\pi, (2k+1)\pi[\\ 2\alpha \in](2k+1)\pi, 2(k+1)\pi[\end{cases} \implies \begin{cases} \alpha \in [k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}[\\ \alpha \in](2k+1)\frac{\pi}{2}, (k+1)\pi[\end{cases}$$

(i) • Para $2\alpha \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$ conforme a Figura 2.3, tem-se que $\text{sen}(\alpha) = \frac{y}{2r_1}$, $\cos(\alpha) = \frac{x+r}{2r_1}$ e $r_1^2 = (\frac{x+r}{2})^2 + (\frac{y}{2})^2$. Daí segue:

$$\text{sen}(2\alpha) = \frac{y}{r} = \frac{y(x+r)}{r(x+r)} = \frac{y(x+r)}{2r_1^2} = \frac{y}{2r_1} \cdot \frac{(x+r)}{r_1} = \frac{2y}{2r_1} \cdot \frac{(x+r)}{2r_1} = 2\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha).$$

Figura 2.4: Ângulo em posição normal.



Fonte: Elaborado pelo Autor

• Para $2\alpha = (2k+1)\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ considerando os ângulos em posição normal da Figura 2.4, tem-se que

$$\text{sen}(2\alpha) = \text{sen}((2k+1)\pi) = \frac{0}{x} = 0$$

e

$$2\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha) = 2\text{sen}\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{y}{y} \cdot \frac{0}{y} = 0.$$

Portanto,

$$\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha).$$

(ii) • Considerando $2\alpha \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\pi\}$ com $k \in \mathbb{Z}$, segue da Figura 2.3 e de raciocínio análogo ao anterior que:

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \frac{x}{r} \\ &= \frac{x(x+r)}{r(x+r)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2x(x+r)}{2-2r_1^2} \\
&= \frac{x^2 + x^2 + 2xr}{4r_1^2} \\
&= \frac{x^2 + x^2 + 2xr + r^2 - r^2}{4r_1^2} \\
&= \frac{(x+r)^2}{4r_1^2} + \frac{x^2 - r^2}{4r_1^2} \\
&= \frac{(x+r)^2}{4r_1^2} - \frac{y^2}{4r_1^2}.
\end{aligned}$$

- Considerando $2\alpha = (2k+1)\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ segue da Figura 2.4, tem-se que

$$\cos(2\alpha) = \cos((2k+1)\pi) = \frac{-x}{x} = -1$$

e

$$\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \cos^2((2k+1)\frac{\pi}{2}) - \sin^2((2k+1)\frac{\pi}{2}) = \left(\frac{0}{y}\right)^2 - \left(\frac{y}{y}\right)^2 = -1.$$

Portanto,

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

- (iii) • Considerando $2\alpha \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\pi\}$ com $k \in \mathbb{Z}$, segue da Figura 2.3, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\tan(2\alpha) &= \frac{y}{x} \\
&= \frac{2y(x+r)}{2x(x+r)} \\
&= \frac{2y(x+r)}{x^2 + x^2 + 2xr + r^2 - r^2} \\
&= \frac{2y(x+r)}{(x+r)^2 - y^2} \\
&= \frac{\frac{2y(x+r)}{(x+r)^2}}{\frac{(x+r)^2 - y^2}{(x+r)^2}} \\
&= \frac{\frac{2y}{(x+r)}}{1 - \frac{y^2}{(x+r)^2}}.
\end{aligned}$$

Considerando $2\alpha = (2k+1)\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ segue da Figura 2.4, tem-se que

$$\tan(2\alpha) = \tan((2k+1)\pi) = \frac{0}{-x} = 0$$

e

$$\frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} = \frac{2\cot(\alpha)}{\cot^2(\alpha) - 1} = \frac{2\cot((2k+1)\frac{\pi}{2})}{\cot^2((2k+1)\frac{\pi}{2}) - 1} = \frac{2 \cdot \frac{0}{y}}{(\frac{0}{y})^2 - 1} = 0.$$

Portanto,

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$

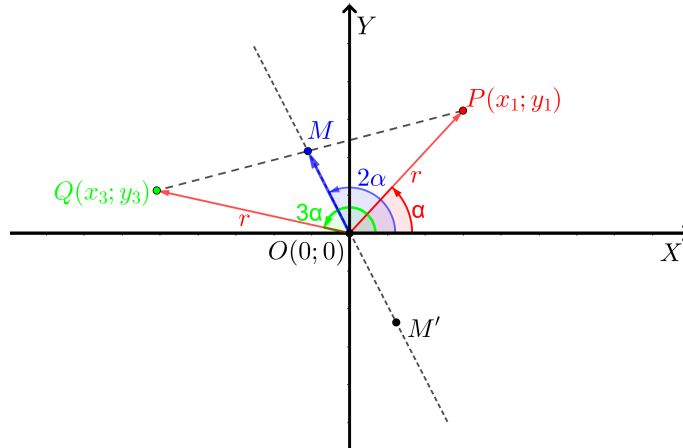
□

2.1.7 Identidades trigonométricas de ângulo triplo:

Proposição 2.1.3. *Se α e 3α ângulo em posição normal com pontos no lado final $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_3, y_3)$ tal que $OP = OQ = r$ e $M'M$ é mediatriz do segmento $PQ = 2|y_1|$, então*

- (i) $\frac{2x_1y_1}{r^2} = \frac{y_1+y_3}{2x_1}$;
- (ii) $x_1x_3 + y_1y_3 = x_1^2 - y_1^2$.
- (iii) $\frac{x_1+x_3}{2x_1} = \frac{x_1^2-y_1^2}{r^2}$

Figura 2.5: Ângulo triplo.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Demonstração. Da Figura 2.5, temos que M e M' são simétricos com respeito a origem. Quando 3α gira, 2α pode ter como lado final OM ou OM' , analisa-se o ângulo 3α da Figura 2.5:

$$3\alpha \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} 3\alpha \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ 3\alpha \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[\end{cases} \implies \begin{cases} 2\alpha \in [4k\frac{\pi}{3}, 2(2k+1)\frac{\pi}{3}], \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha \in]2(2k+1)\frac{\pi}{3}, 4(k+1)\frac{\pi}{3}[, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(i) Da Figura 2.5 e o Teorema 2.1.5, temos

$$\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{2x_1y_1}{r_1^2}.$$

Por outro lado, temos 2α ângulo em posição normal tendo ponto no lado final M ou M' e $OM = OM' = |x_1|$. Daí $\text{sen}(2\alpha) = \frac{y_1+y_3}{2x_1}$.

Portanto,

$$\text{sen}(2\alpha) = \frac{2x_1y_1}{r^2} = \frac{y_1 + y_3}{2x_1}.$$

(ii) Considerando a definição de distância entre dois pontos,

$$\begin{aligned} d^2(P, Q) &= (x_1^2 - x_3^2)^2 + (y_1^2 - y_3^2)^2 \implies (2|y_1|)^2 = x_1^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_3^2 - 2(x_1x_3 + y_1y_3) \\ &\implies (4y_1^2) = 2r^2 - 2(x_1x_3 + y_1y_3) \\ &\implies 2y_1^2 = r^2 - x_1x_3 - y_1y_3 \\ &\implies 2y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 - x_1x_3 - y_1y_3 \\ &\implies x_1x_3 + y_1y_3 = x_1^2 + y_1^2 - 2y_1^2 \\ &\implies x_1x_3 + y_1y_3 = x_1^2 - y_1^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$x_1x_3 + y_1y_3 = x_1^2 - y_1^2.$$

(iii) Da Figura 2.5, o Teorema 2.1.5 e a 1.1.9, temos

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha) = \frac{x_1^2 - y_1^2}{r^2} = \frac{x_1 + x_3}{2x_1}.$$

□

Teorema 2.1.6. (*Identidades Trigonômétricas de ângulo triplo*). Se α e 3α ângulo em posição normal com pontos no lado final $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_3, y_3)$ talque $OP = OQ$ e $M'M$ é mediatriz do segmento $PQ = 2|y_1|$, então:

- (i) $\text{sen}(3\alpha) = 3\text{sen}(\alpha) - 4\text{sen}^3(\alpha); \quad \alpha \in \mathbb{R}.$
- (ii) $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha); \quad \alpha \in \mathbb{R}.$
- (iii) $\tan(3\alpha) = \frac{3\tan(\alpha) - \tan^3(\alpha)}{1 - 3\tan^2(\alpha)}; \quad \alpha \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi \right\} \cup \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\} \text{ com } (k \in \mathbb{Z}).$

Demonstração. Da Figura 2.5 e a Proposição 2.1.3, segue:

(i)

$$\begin{aligned} \text{sen}(3\alpha) &= \frac{y_3}{r} \\ &= \frac{y_1y_3}{ry_1} \\ &= \frac{y_1}{r} \left(-1 + 1 + \frac{y_3}{y_1} \right) \\ &= \frac{y_1}{r} \left(3 - 4 + \frac{y_1 + y_3}{y_1} \right) \\ &= \frac{y_1}{r} \left(3 - 4 + \frac{4x_1^2}{r^2} \right) \\ &= \frac{y_1}{r} \left(3 - \frac{(-4r^2 + 4x_1^2)}{r^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y_1}{r} \left(3 - 4 \frac{(r^2 - x_1^2)}{r^2} \right) \\
&= \frac{y_1}{r} \left(3 - 4 \frac{y_1^2}{r^2} \right) \\
&= 3 \frac{y_1}{r} - 4 \frac{y_1^3}{r^3}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{sen}(3\alpha) = 3\operatorname{sen}(\alpha) - 4\operatorname{sen}^3(\alpha).$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\cos(3\alpha) &= \frac{x_3}{r} \\
&= \frac{x_1 x_3}{r x_1} \\
&= \frac{x_1}{r} \left(-1 + 1 + \frac{x_3}{x_1} \right) \\
&= \frac{x_1}{r} \left(-1 + \frac{x_1 + x_3}{x_1} \right) \\
&= \frac{x_1}{r} \left(-1 + \frac{2(x_1^2 - y_1^2)}{r^2} \right) \\
&= \frac{x_1}{r} \left(-1 + \frac{2(x_1^2 + x_1^2 - r^2)}{r^2} \right) \\
&= \frac{x_1}{r} \left(-1 + \frac{2(2x_1^2 - r^2)}{r^2} \right) \\
&= \frac{x_1}{r} \left(4 \frac{x_1^2}{r^2} - 3 \right) \\
&= 4 \frac{x_1^3}{r^3} - 3 \frac{x_1}{r}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha).$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\tan(3\alpha) &= \frac{y_3}{x_3} \\
&= \frac{\frac{y_1 y_3}{r y_1}}{\frac{x_1 x_3}{r x_1}} \\
&= \frac{\frac{y_1}{r} \left(3 - 4 + \frac{4x_1^2}{r^2} \right)}{\frac{x_1}{r} \left(4 \frac{x_1^2}{r^2} - 3 \right)} \\
&= \frac{\frac{y_1}{r} \left(3 - 4 + \left(\frac{4(r^2 - y^2)}{r^2} \right) \right)}{\frac{4x_1}{r^3} - \frac{3x_1}{r}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(3\frac{y_1}{r} - 4\frac{y_1^3}{r^3}\right) \frac{r^3}{x_1^3}}{\left(4\frac{x_1^3}{r^3} - 3\frac{x_1}{r}\right) \frac{r^3}{x_1^3}} \\
&= \frac{3\frac{y_1}{x_1} \frac{r^2}{x_1^2} - 4\frac{y_1^3}{x_1^3}}{4 - 3\frac{r^2}{x_1^2}} \\
&= \frac{3\frac{y_1}{x_1} \frac{(x_1^2 + y_1^2)}{x_1^2} - 4\frac{y_1^3}{x_1^3}}{4 - 3\frac{(x_1^2 + y_1^2)}{x_1^2}} \\
&= \frac{3\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_1^3}{x_1^3}}{1 - 3\frac{y_1^2}{x_1^2}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\tan(3\alpha) = \frac{3\tan(\alpha) - \tan^3(\alpha)}{1 - 3\tan^2(\alpha)}.$$

□

Capítulo 3

APLICAÇÕES

3.1 Exemplos das identidades trigonométricas em limites, derivadas, integral e transformada de Laplace.

3.1.1 Limite

Observação 3.1.1. Segundo, Guidorizzi [3, 2015], o limite fundamental $\lim_{kx \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(kx)}{kx} = 1$, onde k constante diferente de zero.

Exemplo 6. Calcular o $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{x(1 - 3\tan^2(x))}$.

Solução. Utilizam-se as identidades trigonométrica do Teorema 2.1.6-(iii), Teorema 2.1.3-(i) e Observação 3.1.1 temos,

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{x \cos(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3\sin(3x)}{3x}}{\cos(3x)} = 3.$$

3.1.2 Derivadas

Observação 3.1.2. Segundo Guidorizzi [3, 2015], a derivada da função $y = \tan(kx)$ é dada por $y' = k \sec^2(kx)$ onde k é uma constante real não nula.

Exemplo 7. Calcular a derivada da função f em $x = \frac{\pi}{28}$ onde

$$f(x) = \frac{\text{sen}(4x)\cos(3x) + \text{sen}(3x)\cos(4x)}{\cos(4x)\cos(3x) - \text{sen}(3x)\text{sen}(4x)}.$$

Solução. Utilizam-se as identidades trigonométrica do Teorema 2.1.4-(i)-(ii), Teorema 2.1.3-(ii) e Observação 3.1.2 temos,

$$f'(x) = \left(\frac{\text{sen}(4x)\cos(3x) + \text{sen}(3x)\cos(4x)}{\cos(4x)\cos(3x) - \text{sen}(3x)\text{sen}(4x)} \right)' = \left(\frac{\text{sen}(7x)}{\cos(7x)} \right)' = (\tan(7x))' = 7\sec^2(7x).$$

Daí,

$$f'(\frac{\pi}{28}) = 7 \sec^2(7(\frac{\pi}{28})).$$

Portanto, $f'(\frac{\pi}{28}) = 14$.

3.1.3 Integral

Observação 3.1.3. Segundo Guidorizzi [4, 2014] a integral de $\int \operatorname{sen}(kx)dx = -\frac{\cos(kx)}{k} + c_1$, onde k constante diferente de zero e c_1 é constante.

Exemplo 8. Calcular a integral $\int \frac{3\sin(3x) - 4\sin^3(3x)}{\cos(\frac{9x}{2})} dx$.

Solução. Usando-se as identidades trigonométricas do Teorema 2.1.6-(i), Teorema 2.1.5-(i) e Observação 3.1.3 temos,

$$\begin{aligned} \int \frac{3\operatorname{sen}(3x) - 4\operatorname{sen}^3(3x)}{\cos(\frac{9x}{2})} dx &= \int \frac{\operatorname{sen}(9x)}{\cos(\frac{9x}{2})} dx \\ &= \int \frac{2\sin(\frac{9x}{2})\cos(\frac{9x}{2})}{\cos(\frac{9x}{2})} dx \\ &= \int 2\sin(\frac{9x}{2}) dx \\ &= -\frac{4\cos(\frac{9x}{2})}{9} + c_1. \end{aligned}$$

3.1.4 Transformada de Laplace

Observação 3.1.4. Segundo GUIDORIZZI [5, 2013] a transformada de Laplace da função $f(t) = \cos(kt)$ é $\mathcal{L}\{\cos(kt)\} = \frac{s}{s^2+k^2}$, onde k constante e $s > 0$.

Exemplo 9. Calcular a transformada de Laplace da função

$$f(t) = 4\cos^3(3t) - 3\cos(2t)\cos(t) + 3\sin(2t)\sin(t).$$

Solução. Utilizam-se as identidades trigonométricas do Teorema 2.1.4-(ii), Teorema 2.1.6-(ii) e Observação 3.1.4 temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{4\cos^3(3t) - 3\cos(2t)\cos(t) + 3\sin(2t)\sin(t)\} \\ &= \mathcal{L}\{4\cos^3(3t) - 3\cos(3t)\} \\ &= \mathcal{L}\{\cos(9t)\} \\ &= \frac{s}{s^2+81}, \text{ para } s > 0. \end{aligned}$$

CONCLUSÃO

A elaboração deste trabalho permitiu uma análise profunda das identidades trigonométricas, fundamentada não apenas na memorização de fórmulas, mas na compreensão de suas origens geométrica, analítica e trigonométrica. Ao adotar a perspectiva de ângulos em posição normal no plano cartesiano, o estudo unificou conceitos que, muitas vezes, são apresentados de forma fragmentada no ensino básico. Através dessa integração, foi possível superar as limitações do estudo restrito ao triângulo retângulo, permitindo a definição e a dedução das razões e identidades trigonométricas.

As demonstrações apresentadas para as diferentes identidades trigonométricas revelaram-se fundamentais para estruturar o raciocínio dedutivo, mostrando que identidades complexas derivam logicamente de princípios elementares.

Além disso, as aplicações práticas exploradas no capítulo final reforçaram que o domínio das identidades apresentadas é uma competência indispensável no Cálculo Diferencial e Integral. A capacidade de simplificar expressões para o cálculo de limites, derivadas, integrais e na resolução de Transformadas de Laplace prova que este conhecimento merece mais atenção.

Referências Bibliográficas

- [1] AYAMA, H. Rolando. *Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal*. *Trigonometria*, Vol, 1. Lumbreira, 2014.
- [2] FLORES, P. Julio. *Identidades trigonométricas*. vol. 1. Lumbreira, 2014.
- [3] GUIDORIZZI, Hamilton L. Um Curso de Cálculo, Volume I, 5a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.
- [4] GUIDORIZZI, Hamilton L. Um Curso de Cálculo, Volume II, 5a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2014.
- [5] GUIDORIZZI, Hamilton L. Um Curso de Cálculo, Volume IV, 5a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2013.
- [6] IEZZI, G. et al. *Matemática volume único*. São Paulo. Atual editora. 5^o edição. 2011.
- [7] IEZZI, G. et al. *Fundamentos de Matemática elementar(Trigonometria)*. São Paulo. Atual editora. 9^o edição. 2013.