



Serviço Público Federal
Universidade Federal do Pará-UFPA
Campus Universitário do Tocantins/Cametá-CUNTINS
Faculdade de Matemática-FAMAT

Um Efeito Geométrico da Curvatura de Gauss

Mocajuba-PA
2024

Josenilda Baia Ribeiro

Um Efeito Geométrico da Curvatura de Gauss

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal do Pará, Cuntins/Cametá, sob a orientação do Prof. Dr. Júlio Roberto Soares da Silva.

Mocajuba-PA
2024

Josenilda Baia Ribeiro

Um Efeito Geométrico da Curvatura de Gauss

Mocajuba-PA, 29 de Abril de 2024:

**Profa. Dra. Tarciana do Socorro Figueiredo
de Sousa**
Campus Paragominas- UFRA

Prof. Dr. Dalmi Gama dos Santos
Campus Universitário do Tocantins/Cametá- UFPA

Prof. Dr. Júlio Roberto Soares da Silva
Campus Universitário do Tocantins/Cametá- UFPA
Orientador

Mocajuba-PA
2024

Dedico este trabalho ao meu filho, ao meu querido avô e aos meus irmãos ribeirinhos que sonham com um futuro melhor através dos estudos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem ele não teria conseguido. Deus sempre me ajudou e me iluminou durante meus estudos me fazendo procurar e encontrar as respostas necessárias para obter os resultados esperados. Aos meus pais, agradeço intensamente por me mostrarem o caminho correto a se seguir e por serem os guias iniciais em minha jornada estudantil.

Tenho profunda gratidão ao meu companheiro, que durante todo o meu percurso na universidade me auxiliou e me ofereceu seu apoio e encorajamento para seguir em frente. Me mostrou que a confiança em si mesma é uma arma poderosa e que sentir medo faz parte do processo.

A meu filho, agradeço por fazer parte de minha vida e se tornar o meu bem mais precioso. Aos meus sogros agradeço por terem cuidado de meu pequeno enquanto estive ausente para focar nos estudos.

Ao meu querido avô sou grata eternamente por ter feito parte de minha vida, e por ter sido uma pessoa boa, reta e digna, sei que não estará presente no grande dia, mas o senhor sempre estará em meu coração. Agradeço a todos os meus familiares pelo carinho que recebi de cada um de vocês.

Não posso encerrar esta fala sem expressar minha gratidão ao professor orientador Dr. Júlio Roberto Soares da Silva. No início de minha trajetória acadêmica me concedeu a oportunidade de continuar com os estudos, sua orientação e incentivo foram cruciais para que eu concluísse este trabalho.

Sou grata grandemente a todas as pessoas que acreditaram em mim. Obrigada.

Resumo

O presente trabalho busca estudar e classificar os pontos críticos de funções de duas variáveis baseado em resultados da Geometria Diferencial de curvas e superfícies. O trabalho estrutura-se em uma pesquisa bibliográfica trazendo várias informações sobre curvaturas de superfícies e por meio do efeito geométrico da Curvatura Gaussiana classificar esses extremos em máximo, mínimo ou ponto de sela.

Palavras-chave: Pontos Críticos; Geometria Diferencial; Curvatura Gaussiana; Funções de Duas Variáveis.

Abstract

The present work aims to study and classify the critical points of functions of two variables based on results of the Differential Geometry of curves and surfaces. The work is structured in a bibliographic research bringing various information about surface curvatures and through the geometric effect of the Gaussian Curvature classify these extremes into maximum, minimum or saddle point.

Keywords: Critical Areas; Differential Geometry; Gaussian curvature; Function of Two Variables.

Lista de Símbolos

x	Variável
y	Variável
f	Função
I_P	Primeira Forma Quadrática
II_P	Segunda forma Quadrática
\mathbb{R}	Conjunto dos números Reais
π	Letra grega Pi
α	Letra grega Alfa
β	Letra grega Beta
ϕ	Letra grega Phi
θ	Letra grega Theta
λ	Letra grega Lambda
γ	Letra grega Gama
\langle, \rangle	Produto interno
$\ \quad \ $	Norma de um vetor
$T_p S$	Plano tangente
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	Segunda derivada parcial da função em relação a x
\int	Integral

Tópico de Notações

S	Representa a superfície S
$p \in S$	Um ponto específico pertencente a superfície
$N(p)$	Vetor normal a superfície no ponto p
dN_p	Derivada da Aplicação Normal de Gauss
S^2	Representa a esfera unitária
dX_q	A diferencial de X no ponto q
$J(u_0, v_0)$	Representa a matriz jacobiana
$X_u \wedge X_v$	Produto vetorial entre os vetores X_u e X_v
U	Conjunto aberto em \mathbb{R}^2
X	Representa uma parametrização
$\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}$	Derivada parcial de (x, y) em relação a (u, v)
$B((x_0, y_0); r)$	Disco aberto em \mathbb{R}^2
N	Representa o campo de vetores normais e unitários
$k(s)$	Representa a curvatura de α
$K(p)$	Representa a curvatura de Gauss
k_n	Representa a curvatura normal
$\det(dN_p)$	Representa o determinante da derivada de Gauss
$N(X(u, v))$	Aplicação Normal de Gauss

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Um Breve Panorama Histórico	3
1.2	Um Pouco Da História De Gauss	6
1.3	Objetivos	8
2	Conceitos Teóricos Preliminares	9
2.1	Superfícies Parametrizadas Regulares	9
2.2	Curvas Coordenadas	18
2.3	Formas Fundamentais e Aplicação Normal de Gauss	23
2.3.1	Primeira Forma Fundamental	23
2.3.2	Aplicação Normal de Gauss	26
2.3.3	Diferencial da Aplicação Normal de Gauss	28
2.3.4	Segunda Forma Fundamental	30
2.3.5	Coeficientes da Segunda Forma Fundamental	32
3	Curvaturas de Superfícies	34
3.1	Curvatura Normal	34
3.2	Curvatura Gaussiana	37
4	Classificação de Pontos Críticos	38
4.1	Máximos e Mínimos	38
4.2	Concavidade e Curvaturas	41
4.3	Da demonstração e entendimento do Teste do Hessiano	44
4.4	Um Efeito Geométrico da Curvatura de Gauss	46
	Conclusão	54
	Referências	55

1 Introdução

Neste trabalho serão apresentados os conceitos fundamentais necessários para a elaboração deste estudo, começaremos explorando os primeiros conhecimentos de geometria e de seu processo histórico até a formulação de seus conceitos pelo matemático Euclides. Após um breve panorama histórico adentraremos aos conceitos de Geometria Diferencial, estes são essenciais para a conclusão deste trabalho, uma vez que nos permite trabalhar a geometria intrínseca da superfície considerando este objeto independente do espaço a qual está inserido.

Por meio das ferramentas da Geometria Diferencial de curvas e superfície, iremos introduzir o conceito de superfícies parametrizadas regulares imersas no espaço de \mathbb{R}^3 , trabalhando inicialmente sua métrica, e com auxílio desta análise vamos introduzir o conceito de curvatura nas direções tangentes á superfície, chegando assim ao conceito de Curvatura Gaussiana e mediante esta fazer uma relação deste conceito com a classificação dos extremos de funções de duas variáveis.

O objetivo da pesquisa é explorar o uso da Curvatura Gaussiana e por meio desta classificar os pontos críticos de funções de duas variáveis com base em resultados obtidos por meios da Geometria Diferencial, que surgiu como conhecimento no século XVIII relacionando este com o cálculo diferencial e integral.

Os conceitos matemáticos surgem a partir de problemas e a partir destes buscam-se respostas para solucionar os mesmos, respostas essas que precisam ser comprovadas cientificamente para poder ser aceita como um objeto de estudo matemático, pois a ciência não aceita suposições sem comprovações. É necessário comprovar os conhecimentos observados por meios de definições e demonstrações.

O estudo acerca da Geometria Diferencial surgiu a partir do quinto postulado de Euclides, este provocou controversas entre os matemáticos das mais variadas épocas, pois a sua formulação era muito complexa, havia pouco apelo intuitivo e seu enunciado era diferente dos anteriores.

Devido a este fato vários estudiosos tentaram prová-lo como um teorema. De acordo com Gorosk(2009, p.14) “o resultado desse esforço continuado, que durou cerca de dois mil anos, culminou com a descoberta das geometrias não euclidianas por Gauss, Bolyai e Lobachevski no século XIX”.

Para Silva (2022, p.11) “estudar Geometria Diferencial é de grande importância em

matemática devido ao grande número de aplicações desta teoria em outras áreas das ciências”. Estas aplicações servem para modelar numerosos problemas que surgem durante os estudos na área da matemática, por meio de resoluções de equações diferenciáveis.

O trabalho busca entender e compreender alguns conceitos fundamentais desta geometria e com isso alcançar o objetivo da pesquisa, classificar os pontos críticos de funções de duas variáveis por meio da Curvatura Gaussiana uma ferramenta grandiosa da Geometria Diferencial.

1.1 Um Breve Panorama Histórico

Entender o processo de construção do conhecimento de geometria é fundamental para um entendimento completo de sua origem e de seu processo histórico. A palavra geometria vem do grego “geometren”, onde “geo” significa terra e “metrem” significa medida, significando assim medida da terra. Esta ciência surgiu nas antigas civilizações e há duas versões de sua existência, a primeira é dada pelo historiador Heródoto, para ele a geometria é resultado da necessidade de efetuar medições de terras pelos agrimensores, responsáveis por medir a terra para as plantações. Por outro lado, o filósofo Aristóteles afirmou que este conhecimento surgiu por meio de um grupo de sacerdotes influentes e estudiosos da época.

Segundo Boyer e Merzbach

Em cerca de 450 a.c., Heródoto, o inveterado viajante grego e historiador narrativo, visitou o Egito. Ele viu os monumentos antigos, entrevistou sacerdotes e observou a majestade do Nilo e as conquistas dos que trabalhavam ao longo de suas margens (Boyer; Merzbach, 2012, p.29).

Em sua visita ao Antigo Egito, o historiador teve a oportunidade de conhecer e observar como eram utilizados os primeiros conhecimentos de geometria, através do cálculo de medições de terras para o plantio, pois a cada vez que o Rio Nilo transbordava havia a necessidade de refazer as demarcações de terras, pois estas haviam sido apagadas pela água. Entretanto

Ao tratar da matemática, ele manteve que a geometria tinha-se originado no Egito, pois acreditava que o assunto tinha aparecido lá a partir da necessidade prática de redemarcar terras depois da enchente anual das margens do vale do rio (Boyer; Merzbach, 2012, p.29).

O historiador Heródoto atribuiu ao povo egípcio os primeiros conhecimentos de geometria, fruto da necessidade do dia a dia de resolver problemas de agricultura. No Antigo Egito eram os escravos chamados de agrimensores, que realizavam a tarefa de medir e demarcar a terra para as plantações e construções de grandes monumentos, estes efetuavam as medições com fios esticados de uma ponta a outra, sendo chamados assim de “esticadores de corda”.

Ainda segundo Boyer e Merzbach (2012, p.29) “um século mais tarde, o filósofo Aristóteles especulou sobre o mesmo assunto e atribuiu a busca da geometria pelos egípcios à existência de uma classe de sacerdotes com o tempo para o lazer”. Não se sabe ao certo

qual das duas versões está correta, mas os registros históricos nos revelam que este conhecimento surgiu nas antigas civilizações e teve um papel crucial na resolução de problemas do dia a dia relacionado as medições de terras e nas suas grandiosas construções históricas. Além desta, outras civilizações como a babilônia também tinham alguns conhecimentos acerca da geometria. Coimbra (2008, p.3) assegura que “formas primitivas de geometria são encontradas também entre os hindus e chineses, embora nesses povos, a geometria parece ter sido apresentada apenas como um conjunto de regras empíricas”.

Com o passar do tempo foram surgindo outros matemáticos que contribuíram para o estudo deste conhecimento, Tales de Mileto, considerado o primeiro filósofo ocidental, criou o “Teorema de Tales” e iniciou a matemática dedutiva. Em seu teorema, Tales afirmou que da interseção de um feixe de retas paralelas com duas transversais, surgem segmentos proporcionais. Mais tarde outros matemáticos como Pitágoras e Euclides também contribuíram para o estudo da geometria. Sendo que os dois primeiros estudiosos desenvolveram este conhecimento como sendo um conhecimento dedutivo, feito através de análise de conhecimentos já existentes de geometria.

Segundo Coimbra, a geometria teve o seu

Desenvolvimento na Antiga Grécia, notadamente nos textos de Euclides de Alexandria. Euclides foi o matemático grego responsável pela compilação de praticamente toda a matemática desenvolvida até sua época em uma monumental obra de 13 volumes chamada de *Os Elementos* (coimbra,2008, p.3).

De acordo com o autor, foi na Grécia que este conhecimento foi sistematizado por meio do filósofo Euclides de Alexandria, considerado o pai da geometria, que contou com ajuda de conhecimentos já existentes do assunto e por meio destes organizou e concretizou os conceitos desta ciência (conhecida como Geometria-Euclidiana). O pensador se tornou um matemático muito importante ao publicar seu tratado “Os Elementos” composto por treze volumes, contendo 131 definições e 465 proposições, reunindo assim todo o conhecimento de geometria que se tinha até aquele momento.

Nestes volumes continham estudos variados, sobre aritmética, álgebra, proporções e a maioria deles estavam voltados para o estudo da geometria plana e espacial, neles continham os conceitos básicos de geometria, estudando assim o espaço e os objetos que podem ocupá-lo. Esta foi a geometria conhecida e estudada por muitos anos até os dias atuais.

No que se refere aos estudos da Geometria Diferencial, estes surgiram muitos anos depois de Euclides ter formulado os conceitos básicos de geometria, por volta do século XVIII, por meio de aplicações do cálculo diferencial e integral na geometria analítica. Segundo Coimbra (2008, p.4) “postula-se que esta tenha começado com estudo de curvas notáveis, que são abundantemente encontrados nas obras de Euclides, Arquimedes de Siracusa e Apolônio de Perga”, e para ser compreendida necessita de conhecimentos básicos de cálculo diferencial e de álgebra linear. Seus conceitos e definições foram elaborados com auxílio de vários teóricos matemáticos da época, que contribuíram grandemente para a realização deste estudo.

A Geometria Diferencial está dividida em dois aspectos fundamentais para a compreensão do conteúdo: a geometria diferencial clássica e a global. A clássica estuda o comportamento das propriedades locais das curvas e superfície, Carmo (2005, p.1) afirma que, “por propriedades locais entendemos aquelas propriedades que dependem não apenas do comportamento da curva ou superfície nas proximidades de um ponto”. Para o estudo destas propriedades é necessário usar as ferramentas do cálculo diferencial com funções deriváveis um certo número de vezes. Já a global, estuda o comportamento das curvas como um todo e não apenas nas proximidades de um ponto, encontra-se aqui um estudo geral das curvas e superfícies.

Os primeiros conhecimentos desta ciência

Tiveram seu início com Carl Gauss em seu trabalho *Disquisitiones generales circa superficies curva*, de 1828, e coincide com uma época em que o famoso “Problema das Paralelas”, que consistia em tentar provar que o Quinto Postulado de Euclides era independente dos demais, estava para ser resolvido (Coimbra, 2008, p.3).

Nesta época vários matemáticos tentaram provar por meio do “problema das paralelas” resultados diferentes dos obtidos por Euclides e a contestação dos postulados entraram em vigor. Após muitos estudos Gauss chegou à conclusão da existência de uma geometria não euclidiana, pois em suas pesquisas conseguiu provar vários resultados não euclidianos. Apesar de suas descobertas Gauss as manteve em sigilo dos demais matemáticos, pois tinha medo de repressões já que a Geometria-Euclidiana era tida como verdade absoluta. Além de Gauss outros matemáticos como Nikolai Lobachewsky e Janos Bolyai também conseguiram provar resultados não euclidianos.

Coimbra relata que,

Gauss havia demonstrado que a curvatura de uma superfície do \mathbb{R}^3 , depende apenas de sua métrica e não da forma como a superfície está mergulhada no \mathbb{R}^3 . Nessa demonstração Gauss obteve uma expressão explícita para a curvatura em termos dos coeficientes da métrica (isto é, coeficientes da Primeira Forma Quadrática) e de suas derivadas (Coimbra, 2008, p.4).

A formulação de conceitos e propriedades desta geometria foram introduzidos primeiramente por Gauss, porém após a publicação de seu primeiro trabalho sobre as curvas, outros matemáticos das mais variadas instituições passaram a se dedicar a esse estudo, dentre eles Bernhard Riemann (1826-1860), Pierri Bonnet (1819-1892), Joseph Serret (1819-1885), contribuindo assim significativamente para o aprimoramento desses conceitos por meio de novas descobertas.

Vamos conhecer um pouco da história de Gauss, entender como era a vida deste matemático que durante sua vida se dedicou exclusivamente em seus estudos e realizou descobertas significativas em várias áreas do conhecimento, como a matemática, física e astronomia, era considerado um menino prodígio desde a infância até sua morte aos 78 anos de idade.

1.2 Um Pouco Da História De Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), nascido em Brunswick na Alemanha é considerado o maior matemático de sua época, nasceu e se estabeleceu na cidade de Brunswick próximo a seus pais, seus conhecimentos na matemática surgem ainda na infância. Gauss aprendeu a ler sozinho e estudou na escola local de sua cidade, sendo este o matemático que nunca saiu de sua terra natal, desenvolvendo assim seus estudos todos eles em sua localidade.

Segundo Boyer,

Seu pai era um laborioso trabalhador de Brunswick, teimoso em seu ponto de vista, que tentou evitar que seu filho recebesse instruções adequadas, mas sua mãe, ela própria sem instrução, encorajou seu filho nos seus estudos e orgulhou-se grandemente de seu sucesso até sua morte aos noventa e sete anos (Boyer, 1974, p.367).

O pai do matemático tentou evitar que seu filho frequentasse a escola, pois eram bastante humildes e devido à falta de condições financeiras duvidou que seu filho pudesse ter um futuro através dos estudos. Mas graças a sua mãe Dorothea Benze Gauss, o estudioso Gauss teve a oportunidade de ingressar em uma escola aos sete anos de idade,

começando assim a ser considerado um menino prodígio devido as facilidades e agilidades em resolver operações em pouco tempo.

Em um dia comum de aula, seu professor passou um problema para seus alunos com o propósito de deixar a turma ocupada, onde pedia que estes somassem todos os números de 1 a 100 e pusesse o resultado em sua mesa. Gauss de imediato analisou que a soma de todos os números equidistantes davam 101 e que havia 50 soluções iguais a 101, logo multiplicou a solução 101 por 50 e obteve o resultado 5050. O que chamou atenção de seu professor, pois o menino de 10 anos havia concluído a tarefa em poucos minutos.

Boyer afirma que,

Aos quinze anos Gauss frequentou o colégio de Brunswick, graças ajuda do duque de Brunswick, e em 1775, sempre com a ajuda do duque, entrou em Gottingen. Não tinha decidido ainda se seria filósofo ou matemático, embora já tivesse descoberto e justificado o método dos mínimos quadrados – uma década antes de Legendre publicar o processo (Boyer, 1974, p. 367).

Gauss teve muito sucesso em sua vida acadêmica, além de estudar matemática, também estudou física e astronomia. Na física Gauss desenvolveu as quatro leis de magnetismo, que mais tarde receberam o nome de leis de Gauss em sua homenagem. Nessa época criou um aparelho muito eficiente que conseguia medir a magnitude da terra, chamado de magnetômetro, muito utilizado pelos pesquisadores até os dias de hoje. Neste mesmo ano, criou o telégrafo junto a um colega de trabalho para transmitir mensagens de sua casa até o seu local de trabalho.

Aos trinta anos de idade Gauss se tornou professor de Gottingen, na mesma instituição que estudara como aluno e mais tarde passou a trabalhar no Observatório da mesma instituição. Na astronomia, o matemático alemão passou a observar as órbitas dos planetas, nesta época ajudou no aprimoramento de vários instrumentos manuais utilizados na medição da luz provenientes dos corpos celestes.

O estudioso se casou duas vezes e teve seis filhos, três em cada casamento e após ter ficado viúvo duas vezes, decidiu ficar sozinho até o fim de sua vida. Gauss morreu de infarto aos 78 anos de idade e vários de seus feitos foram publicados logo após a sua morte. Gauss se dedicou exclusivamente em seus estudos e suas descobertas foram comprovadas cientificamente ainda em vida, suas contribuições são reconhecidas mundialmente, pois é considerado “O Príncipe da Matemática” e o maior de sua época.

1.3 Objetivos

Investigar os processos utilizados na construção do conhecimento sobre as curvas e superfícies, estas são ferramentas da Geometria Diferencial que surgiu por meio da aplicação do cálculo diferencial na Geometria Analítica, responsável pelo estudo dos objetos geométricos no espaço. E por meio da Curvatura Gaussiana identificar os pontos críticos de funções de duas variáveis.

Os objetivos abordados para se alcançar os resultados da pesquisa, estão dispostos da seguinte maneira:

- Relacionar os conceitos de Curvatura Normal e de Gauss por meio e através de resultados baseados em Geometria Diferencial.
- Analisar ou interpretar o conceito geométrico da Curvatura de Gauss imersa no \mathbb{R}^3 .
- Relacionar e classificar os pontos críticos de funções de duas variáveis com a Curvatura de Gauss da superfície descrita através do gráfico de funções.

2 Conceitos Teóricos Preliminares

Neste capítulo iniciaremos o estudo de superfícies parametrizadas no espaço de \mathbb{R}^3 , estes objetos bi-dimensionais são definidos como conjuntos abertos contidos no plano, sendo levados por aplicações diferenciáveis em abertos no espaço, resultando assim em uma superfície S . Contudo há certas exigências para tais aplicações, estas precisam ser diferenciáveis para podermos trabalhar com as ferramentas do cálculo de várias variáveis no espaço de \mathbb{R}^3 .

Segundo Tenenblat(2008, p.1), “no estudo de curvas e superfícies, serão utilizados os conceitos fundamentais do cálculo vetorial e do cálculo diferencial de funções de uma ou mais variáveis”, tais conceitos são fundamentais para definirmos as superfícies como sendo um subconjunto contido no espaço euclidiano formada por vários pedaços do plano contido em um aberto U de \mathbb{R}^2 . O objeto obtido é suave, pois a aplicação exigida é diferenciável não podendo haver arestas ou auto-interseções na figura resultante. E é por meio dessa aplicação diferenciável, que iremos definir um plano tangente em cada ponto desta superfície S contida no espaço de \mathbb{R}^3 .

2.1 Superfícies Parametrizadas Regulares

Nesta seção iremos tratar da definição de superfície parametrizada regular no espaço de \mathbb{R}^3 como sendo um subconjunto e não como uma aplicação, as curvas também podem ser entendidas como subconjuntos de \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^2 , estando estas no plano ou no espaço.

A ideia de superfície se parece de certo modo com a noção de curvas parametrizadas, pois em ambas as definições as aplicações chamadas de parâmetro precisam obrigatoriamente serem todas diferenciáveis, fazendo com que o objeto resultante seja suave para que se possa aplicar as noções do cálculo e suas ferramentas no estudo destes objetos bi-dimensionais.

Tomando

Um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z em \mathbb{R}^3 e consideramos uma função $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, de duas variáveis u, v , que variam em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Para cada $(u, v) \in U$, $X(u, v)$ determina um ponto de \mathbb{R}^3 . Denotamos por S o subconjunto de \mathbb{R}^3 formado pelos pontos $X(u, v)$. Afim de que possamos utilizar as técnicas de cálculo diferencial no estudo de superfícies, vamos exigir a diferenciabilidade da função X (Tenenblat, 2008, p.109).

Para Carmo

A grosso modo, uma superfície regular em \mathbb{R}^3 é obtida tomando-se pedaços do plano, deformando-os e colocando-os em entre si, de tal modo que a figura resultante não apresente pontas, arestas ou auto-interseções: e que tenha sentido falar em plano tangente nos pontos desta figura. A ideia é definir um conjunto que seja, em certo sentido, bi-dimensional e que seja também suficientemente suave de forma que as noções usuais do cálculo possam ser estendidas a um tal conjunto (Carmo, 2005, p.61).

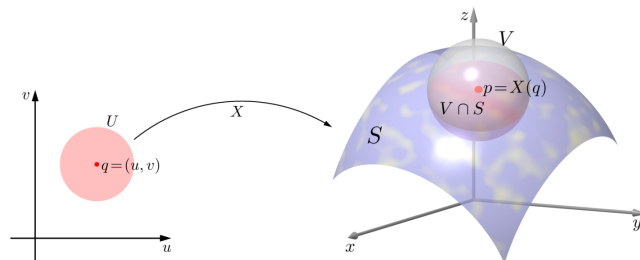
Esta superfície será constituída por várias aplicações de conjuntos abertos do plano, sendo que estes abertos são transformados em um subconjunto de \mathbb{R}^3 , formando assim a superfície por meio de aplicações diferenciáveis. Estas aplicações precisam necessariamente serem diferenciáveis, pois iremos trabalhar com objetos bi-dimensionais suaves no espaço de \mathbb{R}^3 .

Definição 2.1.1: Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^3$ com $p \in V$ e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ definida em um aberto U de \mathbb{R}^2 tal que:

1. $X : U \rightarrow V \cap S$, $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, é diferenciável, isto é, as funções $x, y, z : U \rightarrow \mathbb{R}$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .
2. $X : U \rightarrow V \cap S$ é um homeomorfismo, isto é, X é uma bijeção contínua cuja $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ é contínua.
3. $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $q \in U$.

A aplicação X é chamada de parametrização ou sistema de coordenadas locais em uma vizinhança de p , e $V \cap S$ é chamada de vizinhança coordenada de S em p .

Figura 1: Vizinhança coordenada do ponto $p \in S$.



fonte: Delgado e Frensel (2017, p.82).

Na figura 1 apresentada, podemos compreender a definição de superfície por meio de uma aplicação que atua em um conjunto aberto U do plano onde X está definida, essa aplicação estabelece uma correspondência entre os pontos de U e V , sendo estes conjuntos abertos do plano e do espaço.

O ponto p localizado no espaço tri-dimensional é o ponto de intersecção entre o conjunto V com a superfície em questão. Portanto, p faz parte tanto do conjunto V quanto da própria superfície S .

É importante notar, que essa superfície é composta por uma coleção de tais conjuntos $V \cap S$, cada um deles é obtido através de uma aplicação X em diferentes abertos de \mathbb{R}^2 . Cada uma dessas transformações por meio de X resultará em pontos de intersecção com a superfície S . São esses pontos de intersecção que quando combinados formam a superfície completa.

Portanto, a superfície é formada pela união desses conjuntos $V \cap S$, onde cada conjunto é gerado por meio das aplicações X em abertos de \mathbb{R}^2 . Essas intersecções em pontos específicos são essenciais para a composição integral da superfície como um todo.

A definição 2.1.1 é um elemento crucial em nosso contexto e merece uma análise mais detalhada.

Observação 2.1.1

- A condição (1) é natural se esperarmos fazer alguma Geometria Diferencial sobre S . Por exemplo, permite definir o conceito de plano tangente.
- A injetividade de X na condição (2) tem como objetivo excluir a possibilidade de auto-intersecções em superfícies regulares, que é necessário para podermos falar, por exemplo, sobre o plano tangente em um ponto de S .
- A continuidade da inversa na condição (2) serve para provar que certos conceitos que dependem aparentemente da parametrização, na realidade só dependem do ponto $p \in S$, isto é, independem da parametrização $X : U \rightarrow V \cap S$ com $p \in S$.
- A condição (3) garante a existência de um plano tangente em todos os pontos de S .

Vejamos algumas formas equivalentes de expressar a condição (3). Sejam e_1, e_2 a base canônica de \mathbb{R}^2 e f_1, f_2 e f_3 a base canônica de \mathbb{R}^3 . Para cada $q = (u_0, v_0) \in U$, sabemos que a matriz associada a dX_q nas bases canônicas de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 é a matriz jacobiana.

$$J(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

pois,

$$dX_q(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

$$dX_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right).$$

Denotamos esses dois vetores por $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$, respectivamente, observamos que as seguintes afirmações são equivalentes:

- 1) dX_q é injetora;
- 2) A matriz $J(u_0, v_0)$ tem posto 2;
- 3) Os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são linearmente independentes;
- 4) $X_u(u_0, v_0) \wedge X_v(u_0, v_0) \neq \vec{0}$.

Exemplo 2.1.1: Vamos mostrar que a esfera de centro na origem e raio 1,

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma superfície regular.

Seja a aplicação $X_3^+ : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X_3^+(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}),$$

definida no aberto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$.

Então X_3^+ satisfaz as condições da definição 2.1.1. De fato:

- (1) $X_3^+(U) = S^2 \cap H_3^+$, onde $H_3^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ é um aberto de \mathbb{R}^3 .
- (2) X_3^+ é diferenciável, pois $1 - (u^2 + v^2) > 0$ para todo $(u, v) \in U$.
- (3) $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$ para todo $q \in U$.

(4) X_3^+ é um homeomorfismo, pois X_3^+ é uma bijeção contínua sobre $S^2 \cap H_3^+$, e $(X_3^+)^{-1} = \pi|_{S^2 \cap H_3^+}$ é contínua, onde $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a projeção sobre o plano-xy dada por $\pi(x, y, z) = (x, y)$.

Podemos cobrir a esfera com seis parametrizações similares a esta. Para isto, consideramos as aplicações:

$$X_1^+, X_1^-, X_2^+, X_2^-, X_3^+, X_3^- : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

dadas por:

$$X_1^\pm(u, v) = (\pm\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v);$$

$$X_2^\pm(u, v) = (u, \pm\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v);$$

$$X_3^\pm(u, v) = (u, v, \pm\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}).$$

De modo análogo ao feito para X_3^+ , podemos provar que X_1^\pm , X_2^\pm e X_3^- são parametrizações de S^2 sobre $S^2 \cap H_1^\pm$, $S^2 \cap H_2^\pm$, $S^2 \cap H_3^\pm$, respectivamente, onde

$$H_1^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}; H_1^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0\};$$

$$H_2^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}; H_2^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y < 0\};$$

$$H_3^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}; H_3^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\},$$

são abertos de \mathbb{R}^3 . Como

$$X_1^+(U) \cup X_1^-(U) = S^2 - \{(x, y, z) \in S^2 \mid y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x = 0\};$$

$$X_2^+(U) \cup X_2^-(U) = S^2 - \{(x, y, z) \in S^2 \mid x^2 + z^2 = 1 \text{ e } y = 0\};$$

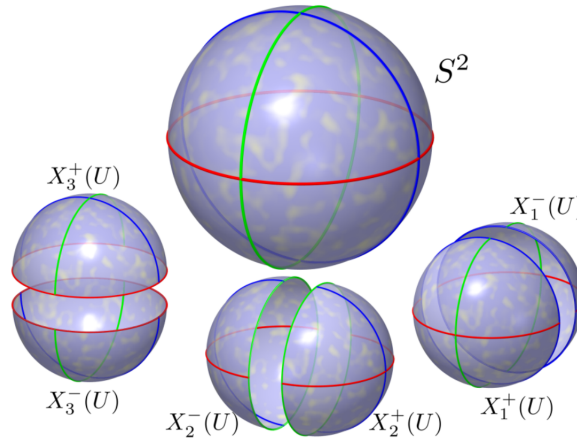
$$X_3^+(U) \cup X_3^-(U) = S^2 - \{(x, y, z) \in S^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z = 0\}.$$

Temos que

$$S^2 = X_1^+(U) \cup X_1^-(U) \cup X_2^+(U) \cup X_2^-(U) \cup X_3^+(U) \cup X_3^-(U).$$

Logo S^2 é uma superfície regular.

Figura 2: Cobertura da esfera pelas 6 parametrizações X_1^\pm , X_2^\pm e X_3^\pm .



fonte: Delgado e Frensel (2017, p.85).

As proposições a seguir simplificam a tarefa de mostrar por meio das três condições que um subconjunto de \mathbb{R}^3 é uma superfície regular.

Proposição 2.1.2: Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em um conjunto aberto U de \mathbb{R}^2 , então o gráfico de f , isto é, o subconjunto de \mathbb{R}^3 dado por $(x, y, f(x, y))$ para $(x, y) \in U$, é uma superfície regular.

Demonstração. Basta mostrar que a aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

é uma parametrização do gráfico, cuja vizinhança coordenada cobre todos os pontos do gráfico. A condição 1 é verificada sem problemas, e a condição 3 também não oferece dificuldade, uma vez que $\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \equiv 1$. Finalmente, cada ponto (x, y, z) do gráfico é a imagem por X de um único ponto $(u, v) = (x, y) \in U$. Consequentemente, X é bijetiva, e como X^{-1} é a restrição ao gráfico de f da projeção (contínua) de \mathbb{R}^3 sobre o plano xy , X^{-1} é contínua. \square

Exemplo 2.1.2.1: O Parabolóide Elíptico

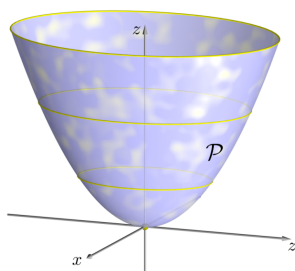
$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\},$$

onde a e b são constantes positivas, é uma superfície regular.

De fato, $P = \text{Graf}(f)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável dada por

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Figura 3: Parabolóide Elíptico.



fonte: Delgado e Frensel (2017, p.89).

Exemplo 2.1.2.2: O Parabolóide Hiperbólico

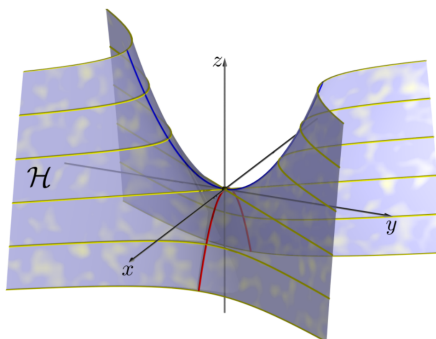
$$H = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \right\},$$

onde a e b são constantes positivas, é uma superfície regular.

Com efeito, H é o gráfico da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}.$$

Figura 4: Parabolóide Hiperbólico.



fonte: Delgado e Frensel (2017, p.89).

Definição 2.1.3: Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável definida no aberto U de \mathbb{R}^n . Dizemos que $p_0 \in U$ é um ponto crítico de F se a $dF_{p_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ não é

sobrejetora.

Um ponto $b \in \mathbb{R}^m$ é um valor crítico de F se existe um ponto crítico $p_0 \in U$ tal que $F(p_0) = b$.

Um ponto $a \in \mathbb{R}^m$ que não é um valor crítico de F é chamado um valor regular de F , isto é, dF_p é sobrejetora para todo $p \in F^{-1}(a)$.

Observação 2.1.3: Pela própria definição, se $a \notin F(U)$, então a é um valor regular de F .

Proposição 2.1.4: Se $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $a \in f(U)$ é um valor regular de f , então $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular em \mathbb{R}^3 .

Demonstração: Ver (Carmo, 2005, p.69).

Exemplo 2.1.4: O Elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

é uma superfície regular. De fato, é o conjunto $f^{-1}(0)$, onde

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

é uma função diferenciável e 0 é um valor regular de f . Isso segue-se do fato das derivadas parciais

$$f_x = \frac{2x}{a^2}, f_y = \frac{2y}{b^2}, f_z = \frac{2z}{c^2}$$

se anularem simultaneamente apenas no ponto $(0, 0, 0)$, que não pertence a $f^{-1}(0)$. Este exemplo inclui a esfera como um caso particular ($a = b = c = 1$).

Proposição 2.1.5: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Então existe uma vizinha V de p em S tal que V é o gráfico de uma função diferenciável que tem uma das seguintes formas: $z = f(x, y), y = g(x, z), x = h(y, z)$.

Demonstração: Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de S em p , e escreva $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in U$. Pela condição 3 da definição 2.1.1, um dos determinantes jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)},$$

não se anula em $X^{-1}(p) = q$.

Primeiramente suponha que $\partial(x, y)/\partial(u, v)(q) \neq 0$, e considere a aplicação $\pi \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde π é a projeção $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Então $\pi \circ X(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, e, como $\partial(x, y)/\partial(u, v)(q) \neq 0$, podemos aplicar o teorema da função inversa para garantir a existência de vizinhanças V_1 de q e V_2 de $\pi \circ X(q)$ tais que $\pi \circ X$ aplique V_1 difeomorficamente sobre V_2 . Decorre daí que π restrita a $X(V_1) = V$ é bijetiva e tem uma inversa diferenciável $(\pi \circ X)^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$. Observe que, como X é um homeomorfismo, V é uma vizinhança de p em S . Agora, considerando a composição da aplicação $(\pi \circ X)^{-1} : (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$ com a função $(u, v) \rightarrow z(u, v)$, podemos notar que V é o gráfico de uma função diferenciável $z = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$, e isso encerra a demonstração deste primeiro caso.

Os casos que restam podem ser tratados da mesma maneira, fornecendo-nos $x = h(y, z)$ e $y = g(x, z)$. \square

Exemplo 2.1.5: O cone C de uma folha dado por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

não é uma superfície regular.

Não podemos concluir isto só pelo fato da “parametrização natural” de C dada por

$$(x, y) \rightarrow (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$$

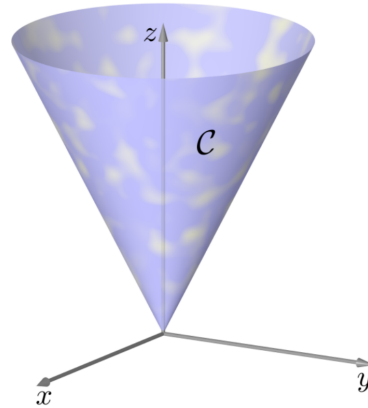
não ser diferenciável na origem, pois poderia existir outra parametrização em $p = (0, 0, 0)$ satisfazendo as condições da definição 2.1.1. Provaremos que isto não ocorre, utilizando a proposição 2.1.5.

De fato, se C fosse uma superfície regular, existiria, pela proposição 2.1.5, um aberto $V \subset S$ com $(0, 0, 0) \in V$, que seria o gráfico de uma função diferenciável de uma das três formas:

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad \text{ou} \quad x = h(y, z)$$

definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ com $(0, 0) \in U$.

Figura 5: Cone de uma folha.



fonte: Delgado e Frensel (2017, p.97).

A função não pode ser da forma $y = g(x, z)$ nem da forma $x = h(y, z)$, pois numa vizinhança da origem $(0, 0, 0)$ as projeções de C sobre os planos xz e yz não são injetoras. E também não pode ser da forma $z = f(x, y)$ numa vizinhança da origem, pois teríamos $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ que não é diferenciável em $(0, 0)$.

Proposição 2.1.6: Seja $p \in S$ um ponto de uma superfície regular S e seja

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

uma aplicação com $p \in X(U)$ tal que as condições 1 e 3 da def. 2.1.1 sejam satisfeitas. Suponha que X seja bijetiva. Então X^{-1} é contínua.

Demonstração: Ver (Carmo, 2005, p.74).

2.2 Curvas Coordenadas

Chamamos de curva uma função que mapeia pontos de um intervalo da reta, para pontos do espaço bi-dimensional ou tri-dimensional, as curvas descrevem uma trajetória ou um caminho nesse espaço, ao qual é denominado de contradomínio da função.

Definição 2.2.1: Uma curva parametrizada diferenciável no plano é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ definida em um intervalo aberto $I = (a, b)$ da reta.

Se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, dizemos que t é o parâmetro da curva; $\alpha(I) = \{\alpha(t) \mid t \in I\}$ é o traço da curva, e o vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ é o vetor tangente (ou vetor velocidade) à curva α em $t \in I$.

Observação 2.2.2: Lembre que uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de classe C^∞ se, e só se,

suas funções coordenadas $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^∞ .

Definição 2.2.3: Dizemos que uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é regular em $t = t_0 \in I$ quando $\alpha'(t_0) \neq 0$. Nesse caso, a reta r_{t_0} que passa por $\alpha(t_0)$ e é paralela ao vetor $\alpha'(t_0)$ é chamada de reta tangente a α em t_0 e é dada por

$$r_{t_0} = \{\alpha(t_0) + s\alpha'(t_0) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Um ponto singular de α é um valor do parâmetro $t \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha'(t) = 0$.

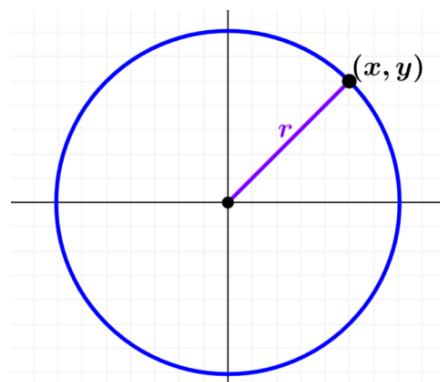
Quando α é regular em todos os pontos $t \in I$, dizemos que α é uma curva parametrizada diferenciável regular.

Vejam os seguintes exemplos de curvas.

Exemplo 2.2.1.1: A aplicação $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\beta(t) = (rcost, rsent), \text{ com } r > 0.$$

É uma curva parametrizada diferenciável regular, pois $\beta'(t) \neq (0, 0)$, cujo traço é um círculo de centro na origem e raio r .

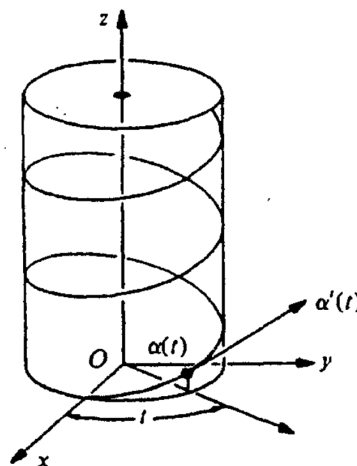


fonte: <https://br.neurochispas.com/wp-content/uploads/2021/09/Equacao-da-circunferencia-com-centro-na-origem-768x846.png>.

Exemplo 2.2.1.2: A aplicação $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$\gamma(t) = (acost, asent, bt), \text{ com } a > 0 \text{ e } b \neq 0.$$

É uma curva parametrizada diferenciável regular, pois $\gamma'(t) = (-asent, acost, b) \neq (0, 0, 0)$, seu traço é uma hélice circular.

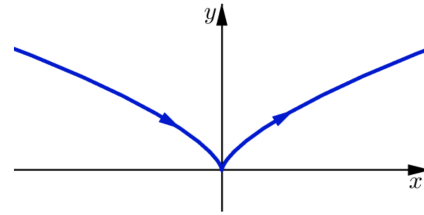


fonte: Carmo, 2005, p.3.

Exemplo 2.2.1.3: A curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,
dada por

$$\alpha(t) = (t^3, t^2).$$

É diferenciável, mas não é regular, pois
 $\alpha'(t) = (3t^2, 2t) = (0, 0)$ para $t = 0$, ou seja,
 $t = 0$ é um ponto singular.



fonte: Delgado e Frensel (2017, p.2).

Definição 2.2.4: Dizemos que uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é simples quando a aplicação α é injetora, isto é, $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ se $t_1 \neq t_2, t_1, t_2 \in I$.

Em outras palavras, cada ponto $\alpha(I)$ no traço da curva é percorrido uma única vez.

Percebe-se que as curvas dos exemplos 2 e 3 são exemplos de curvas simples, enquanto que no exemplo 1 temos um exemplo de curva não simples, visto que o traço do círculo é percorrido mais de uma vez.

Duas curvas u e v representadas a seguir,

$$u(t) = (u(t), v_0) \rightarrow \text{chamada curva coordenada } v = v_0$$

$$v(t) = (u_0, v(t)) \rightarrow \text{chamada curva coordenada } u = u_0$$

são chamadas de curvas coordenadas sobre uma superfície S . E são obtidas quando fixamos uma das variáveis, digamos u e variamos v ou simplesmente variamos v e mantemos u constante. Esta curva é uma curva parametrizada no plano e é levada por X em uma curva contida na imagem da superfície S . As curvas coordenadas são chamadas assim, pois dependem das coordenadas u e v que são os parâmetros da aplicação X .

A seguir abordaremos a condição 3 uma condição já abordada anteriormente, ela garante a existência de planos tangentes em todos os pontos de uma superfície S , lembrando que o ponto q é um ponto $\in U$ onde está definida a aplicação X .

Vamos calcular a matriz da transformação linear dX_q , com os vetores da base canônica de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , representados respectivamente pelos vetores $(e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$ de \mathbb{R}^2 e pelos vetores $(f_1 = (1, 0, 0), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 0, 1))$ de \mathbb{R}^3 .

Tomando $q = (u_0, v_0)$ um ponto $\in U$, o vetor e_1 é tangente a curva $u(t) = (u(t), v_0)$. Aplicando X a esta curva contida no plano, a imagem adquirida é uma curva cuja imagem está contida na superfície S

$$u(t) = (x(u(t), v_0), y(u(t), v_0), z(u(t), v_0)).$$

A essa curva chamamos de curva coordenada $v = v_0$. Para obter o vetor $X_u(u_0, v_0)$ tangente a esta curva passando por $X(q)$, cujo traço está em S , calculamos a

$$dX_q(e_1) = \frac{\partial X}{\partial u}(q) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(q), \frac{\partial y}{\partial u}(q), \frac{\partial z}{\partial u}(q) \right).$$

Para obter o vetor $X_v(u_0, v_0)$ tangente a curva $v(t) = (u_0, v(t))$, chamada de curva coordenada $u = u_0$, cuja imagem também está contida em S , calculamos a

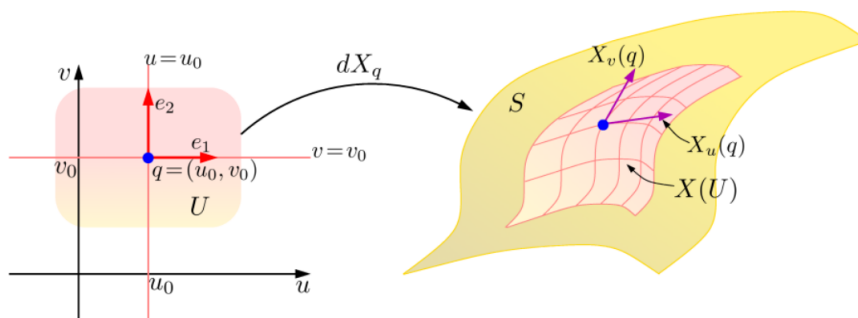
$$dX_q(e_2) = \frac{\partial X}{\partial v}(q) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(q), \frac{\partial y}{\partial v}(q), \frac{\partial z}{\partial v}(q) \right).$$

Contudo a matriz jacobiana é a matriz que representa a transformação linear entre esses vetores, ela descreve uma aplicação que transforma vetores do plano em vetores do espaço tri-dimensional.

$$dX_q = J(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

Observe a representação gráfica a seguir.

Figura 6: Vetores tangentes as curvas coordenadas.



fonte: Delgado e Frensel (2017, p.83).

Os vetores tangentes as curvas coordenadas obtidos por meio das derivadas parciais da aplicação X em relação a cada uma de suas variáveis, formam as colunas da matriz jacobiana nas bases canônicas de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

A condição (3) da definição 2.1.1, nos diz que $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora, o que significa que as duas colunas da matriz jacobiana acima são linearmente independentes, ou seja, que o produto vetorial é diferente de zero:

$$\frac{\partial X}{\partial u}(q) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(q) \neq 0.$$

Ou ainda, que um dos menores de ordem 2 da matriz de dX_q , isto é, um dos determinantes:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(q) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}(q) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{vmatrix}$$

é diferente de zero.

Contudo, em uma superfície parametrizada regular podemos obter uma curva parametrizada $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, onde u e v são funções diferenciáveis que dependem de um parâmetro $t, t \in I \subset \mathbb{R}$. Essa curva representa uma trajetória ou caminho no espaço tri-dimensional, com coordenadas $x(t), y(t), z(t)$ e seu traço está contido na superfície S .

Definição 2.2.5: Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Dizemos que $v \in \mathbb{R}^3$ é um vetor tangente a S em p se $v = \alpha'(0)$, onde $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ é uma curva parametrizada diferenciável em 0 e $\alpha(0) = p$.

Dizemos que um vetor v é tangente a esta superfície em um ponto p , se ele for tangente a esta curva parametrizada cujo traço está contido na superfície. Os vetores $X_u(q)$ e $X_v(q)$ são tangentes a superfície S , pois são tangentes as curvas coordenadas sobre a superfície S .

O plano tangente designado por $T_p S$, é o conjunto de todos os vetores tangentes à superfície S no ponto p . Os vetores $X_u(q)$ e $X_v(q)$ são linearmente independentes e formam uma base para o $T_p S$, isso significa, que cada vetor v em $T_p S$ pode ser obtido como uma combinação linear dos vetores da base.

Assim,

$$\forall v \text{ em } T_p S \Rightarrow v = aX_u(q) + bX_v(q).$$

2.3 Formas Fundamentais e Aplicação Normal de Gauss

Neste capítulo apresentaremos as Formas Fundamentais e a Aplicação Normal de Gauss, veremos que a Primeira Forma Fundamental nos permite trabalhar a geometria intrínseca da superfície S , ou seja, permite trabalhar a geometria dentro da própria superfície. A Aplicação Normal de Gauss associa em cada ponto da superfície S um vetor normal unitário, obtendo assim um campo diferenciável de vetores normais e unitários o que nos dá a orientação da superfície. É uma aplicação da superfície S na esfera S^2 .

Por meio da Aplicação Normal de Gauss iremos medir a taxa de variação do plano tangente $T_p S$, essa taxa de variação é obtida restringindo esse campo de vetores normais unitários a uma curva parametrizada cujo traço está contido na superfície S . Uma vez especificado um vetor normal á superfície equivale a especificar um plano tangente $T_p S$. Assim, estudar a taxa de variação do plano tangente equivale a estudar a taxa de variação do campo de vetores normais unitários restrita a esta curva.

Em um ponto $p \in S$ passam várias curvas parametrizadas e por tanto há várias direções tangentes nesse ponto, dessa forma calculamos a curvatura em todas essas direções tangentes desse ponto específico. Para medir a curvatura utiliza-se a Segunda Forma Fundamental que reúne todas as informações acerca das curvaturas de uma superfície.

2.3.1 Primeira Forma Fundamental

A Primeira Forma Fundamental nos ajuda a entender como a geometria funciona dentro da superfície, permitindo definir distâncias, comprimentos de curvas, ou seja, nos permite usar a geometria dentro da superfície S , considerando a superfície como sendo o próprio espaço em questão apesar desta está mergulhada em \mathbb{R}^3 .

Sendo S uma superfície parametrizada regular, o produto interno canônico de \mathbb{R}^3 , induz o produto interno em cada plano tangente á superfície S num ponto p , este produto interno é denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Dessa forma dados dois vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3) \subset T_p S$, o produto interno entre eles é obtido da mesma maneira em que obtemos entre os vetores de \mathbb{R}^3 . Isto é equivalente a dizer que:

$$\langle u, v \rangle_p = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Este produto interno é uma forma bilinear simétrica, isto é $\langle u, v \rangle_p = \langle v, u \rangle_p$ e $\langle u, v \rangle_p$ é linear nas duas entradas, além disso corresponde a forma quadrática, definida da seguinte

forma:

$$I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$I_p(v) = \langle v, v \rangle_p = \|v\|^2 \geq 0.$$

Isso significa que para cada vetor v em $T_p S$ a imagem de v por I_p vai ser $\langle v, v \rangle_p$.

Definição 2.3.1.1: A forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, $I_p(v) = \langle v, v \rangle_p$ é chamada de primeira forma fundamental da superfície regular S em $p \in S$.

Para expressar a forma quadrática na base $\{X_u, X_v\}$ associada a uma parametrização $X : U \rightarrow X(U) \subset S$, escolhemos um vetor v em $T_p S$ tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, sendo definida num intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ com imagem em $X(U)$, com $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = v$, onde $q = (u_0, v_0)$ e $X(q) = p$.

Lembrando que qualquer vetor v em $T_p S$ é obtido por:

$$v = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0).$$

Observe a demonstração a seguir:

$$\begin{aligned} I_p(v) &= \langle v, v \rangle \\ &= \langle aX_u(q) + bX_v(q), aX_u(q) + bX_v(q) \rangle_p \\ &= \langle aX_u(q) + bX_v(q), aX_u(q) \rangle_p + \langle aX_u(q) + bX_v(q), bX_v(q) \rangle_p \\ &= \langle aX_u(q), aX_u(q) \rangle_p + \langle bX_v(q), aX_u(q) \rangle_p + \langle aX_u(q), bX_v(q) \rangle_p + \langle bX_v(q), bX_v(q) \rangle_p \\ &= a^2 \langle X_u(q), X_u(q) \rangle_p + 2ab \langle X_u(q), X_v(q) \rangle_p + b^2 \langle X_v(q), X_v(q) \rangle_p \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} \langle X_u(q), X_u(q) \rangle_p &= E(u_0, v_0) \\ \langle X_u(q), X_v(q) \rangle_p &= F(u_0, v_0) \\ \langle X_v(q), X_v(q) \rangle_p &= G(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Dessa forma

$$I_p(v) = a^2 E(u_0, v_0) + 2ab F(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0).$$

Onde $E(u_0, v_0)$, $F(u_0, v_0)$ e $G(u_0, v_0)$ são chamados de coeficientes da Primeira Forma Fundamental expressa na base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p S$.

Observação 2.3.1.1: As funções $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe \mathcal{C}^∞ , $E(u, v) > 0$, $G(u, v) > 0$ e $(EG - F^2)(u, v) > 0$ para todo $(u, v) \in U$, pois

$$\|X_u \wedge X_v\|^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = EG - F^2 > 0,$$

já que $X_u(u, v)$ e $X_v(u, v)$ são LI.

Comprimento de Curvas

Definição 2.3.1.2: Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Se

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$$

é uma curva diferenciável da superfície, então, para $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$, o comprimento de t_0 a t_1 é dado por:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I(\alpha'(t))} dt.$$

Ou simplesmente

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{a^2 E + 2abF + b^2 G} dt.$$

Ângulo entre Curvas

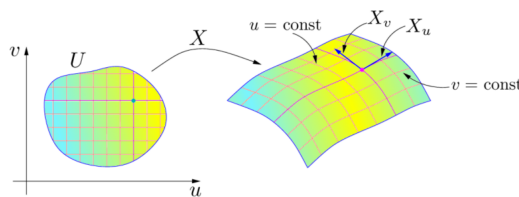
O ângulo θ que duas curvas parametrizadas regulares $\alpha, \beta : I \rightarrow S$ que se intersectam em $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ fazem nesse ponto é dada por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|}.$$

Em particular, o ângulo φ de interseção das curvas coordenadas de uma parametrização $X : U \rightarrow X(U)$ é:

$$\cos \varphi = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{\|X_u\| \|X_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Figura 7: Curvas coordenadas.



fonte: Delgado e Frensel (2017, p.130).

Então, as curvas coordenadas de uma parametrização são ortogonais se, e somente se, $F(u_0, v_0) = 0$ para todo $(u_0, v_0) \in U$. Uma tal parametrização é chamada uma parametrização ortogonal.

Exemplo 2.3.1.1: Consideremos a superfície

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

que descreve o cilindro circular $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$. Os coeficientes da primeira forma quadrática são também dados por $E(u, v) = G(u, v) = 1, F(u, v) = 0$.

2.3.2 Aplicação Normal de Gauss

De acordo com Araújo (1998, p.55) “uma superfície é orientável quando nela for possível diferenciar o lado de cima do de baixo, de modo que um observador lá colocado possa distinguir esquerda de direita”. A orientação do plano tangente a uma superfície induz a orientação da mesma, pois em cada plano tangente obtém-se dois vetores normais, um apontando para cima e outro para baixo. Se for possível obter um campo de vetores normais unitários de modo que estes vetores apontem unicamente para fora ou para dentro da superfície, então dizemos que S é uma superfície orientável. A esse campo de vetores normais chamamos de uma orientação de S (Araújo, 1998).

Definição 2.3.2.1: Se $X(u, v)$ é uma superfície e $p \in S$, dizemos que um vetor de \mathbb{R}^3 é normal a X em p se é ortogonal a $T_p S$, isto é, é ortogonal a todos os vetores tangentes a S em p .

Definição 2.3.2.2: Um campo de vetores normais unitários diferenciável (resp. contínuo) em um aberto V de uma superfície S é uma aplicação $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciável (resp. contínua), tal que $\|N(p)\| = 1$ e $N(p) \perp T_p S$ para todo $p \in V$.

Sendo $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ a parametrização de uma superfície regular, com $p \in S$, podemos escolher um vetor normal unitário em cada um de seus pontos, por meio da regra

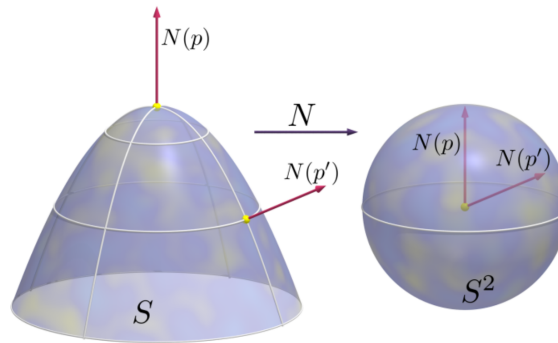
$$N(p) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(q), \text{ com } p \in X(U).$$

Desse modo, a cada ponto $p \in X(U)$ a aplicação diferenciável $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ associa um vetor normal unitário $N(p)$, no ponto p da superfície. Variando $(u, v) \in U$, temos uma

aplicação diferenciável $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ denominada Aplicação Normal de Gauss, definida por

$$N(X(u, v)) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v)$$

Figura 8: Aplicação Normal de Gauss.



fonte: Delgado e Frensel (2017, p.165).

cuja imagem está contida na esfera centrada na origem e raio 1.

Proposição 2.3.2.3: Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se, e só se, existe um campo de vetores normais unitários $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciável em S .

Observação 2.3.2.3: A escolha de um campo diferenciável de vetores normais unitários $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada de uma orientação de S .

Quando for possível a escolha de um campo diferenciável de vetores normais unitários dizemos que S é uma superfície orientável, o que significa que há duas orientações possíveis para S . Estas podem ser obtidas pela Aplicação Normal de Gauss da seguinte maneira:

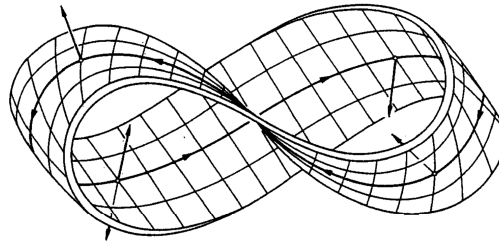
$$N(X(u, v)) = \pm \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v).$$

Exemplo 2.3.2.3: Uma superfície que é o gráfico de uma função diferenciável é uma superfície orientável, pois toda superfície que é coberta por uma única vizinhança coordenada é orientável.

Na superfície S a seguir não é possível a escolha de um campo diferenciável de vetores normais.

Contudo, nem toda superfície é orientável. A faixa de Möbius é uma superfície regular, porém não é orientável, pois não é possível obter um campo de vetores que apontem unicamente em uma única direção ao longo da faixa de Möbius.

Figura 9: A faixa de Mobius.



fonte: Carmo, 2005, p.160.

2.3.3 Diferencial da Aplicação Normal de Gauss

A Diferencial da Aplicação Normal de Gauss, ajuda a entender o comportamento dos planos tangentes de uma superfície em torno de um ponto $p \in S$. Para isso é utilizado um campo de vetores normais unitários N , o que nos fornece a orientação de superfície S . Tem o objetivo principal medir o quão rapidamente uma superfície S se afasta do plano tangente em torno de uma vizinhança de p . Em outras palavras estamos medindo a taxa de variação deste campo de vetores normais unitários N em torno desse ponto específico. Contudo a taxa de variação corresponde a uma aplicação linear Auto-Adjunta.

A Diferencial dN_p é uma aplicação linear que opera levando vetores do plano tangente, indicado por T_pS em vetores do plano tangente á esfera S^2 em $N(p)$, dada por

$$dN_p : T_pS \rightarrow T_{N(p)}S^2.$$

Sendo uma aplicação de T_pS em $T_{N(p)}S^2$, observa-se que o espaço tangente é o mesmo, uma vez que

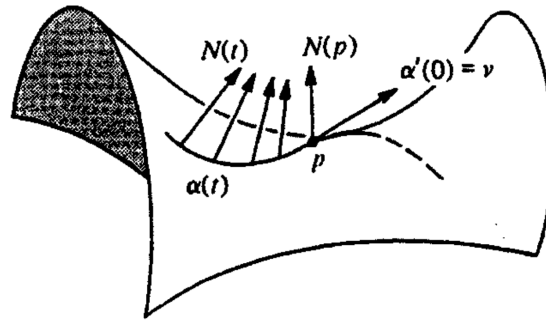
$$dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$$

leva vetores do espaço tangente de T_pS para o mesmo espaço tangente T_pS , o que significa que esta aplicação age dentro do próprio espaço em questão. A aplicação dN_p representa a derivada da Aplicação Normal de Gauss, esta função mede a taxa de variação do vetor normal ao longo da superfície S restrito a curva $\alpha(t)$.

Para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ em S , com $\alpha(0) = p$, consideramos a curva parametrizada $N \circ \alpha(t) = N(t)$ na esfera S^2 ; isso equivale a restringir o vetor normal N a curva $\alpha(t)$. O vetor tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ é um vetor de T_pS . Ele mede a taxa de variação do vetor normal N , restrito a curva $\alpha(t)$, em $t = 0$. Assim, dN_p mede quanto N

se afasta de $N(p)$ em uma vizinhança de p . No caso das curvas, esta medida é dada por um número, a curvatura. No caso das superfícies, esta medida é caracterizada por uma aplicação linear.

Figura 10: A Diferencial da Aplicação Normal de Gauss.



fonte: Carmo, 2005, p.162.

Seja V um espaço vetorial de dimensão 2 munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dizemos que uma aplicação linear $A : V \rightarrow V$ é auto-adjunta se

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle,$$

para todos $u, v \in V$.

Proposição 2.3.3.1: A Diferencial $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.

Demonstração. Como dN_p é linear, basta verificar que $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$ para uma base $\{w_1, w_2\}$ de T_pS . Seja $X(u, v)$ uma parametrização de S em p e $\{X_u, X_v\}$ a base associada de T_pS . Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$, temos

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(X_u u'(0) + X_v v'(0)) \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t))|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0); \end{aligned}$$

em particular, $dN_p(X_u) = N_u$ e $dN_p(X_v) = N_v$. Portanto, para provar que dN_p é auto-adjunta, é suficiente mostrar que

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle.$$

Para ver isto, derivamos $\langle N, X_u \rangle = 0$ e $\langle N, X_v \rangle = 0$, em relação a v e u , respectivamente, e obtemos

$$\begin{aligned}\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle &= 0, \\ \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle = \langle N_v, X_u \rangle. \square$$

O fato de ser $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ uma aplicação linear auto-adjunta nos permite associar a dN_p uma forma quadrática Q em $T_p S$, dada por $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$ $v \in T_p S$.

2.3.4 Segunda Forma Fundamental

A Primeira Forma Fundamental nos fornece informações da geometria intrínseca de uma superfície, veremos nesta seção que a Segunda Forma Fundamental nos dá a curvatura intrínseca da superfície S em um ponto p descrevendo o quanto a superfície se curva nesse ponto específico.

Esta aplicação associada a derivada da Aplicação Normal de Gauss, nos dá a curvatura normal de uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco contida na superfície S . Seguindo a abordagem de Araújo(1998, p.80) “a Segunda Forma Fundamental reúne toda a informação acerca das Curvaturas Normais, Curvaturas Principais e Curvaturas Gaussiana dos pontos da superfície”.

Definição 2.3.4.1: A forma quadrática $II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$, é chamada a segunda forma fundamental de S em p .

Com intuito de facilitar o entendimento ao invés de usar a notação $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ vamos usar $II_p(v) = \langle \alpha''(0), N(p) \rangle$, uma vez que ambas as expressões são equivalentes.

Para dar uma interpretação da segunda forma fundamental II_p , considere uma curva regular $C \subset S$ parametrizada por $\alpha(s)$, onde s é o comprimento de arco de C , com $\alpha(0) = p$. Se indicarmos por $N(s)$ a restrição do vetor normal N á curva $\alpha(s)$, teremos $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$, donde

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle.$$

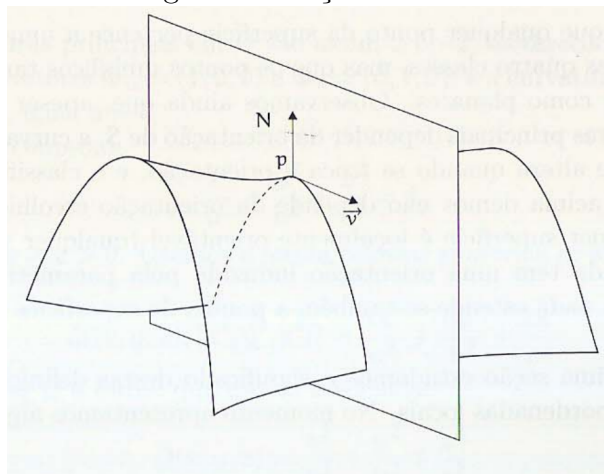
Portanto,

$$\begin{aligned}
II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\
&= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle \\
&= \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\
&= \langle N, kn \rangle(p) = k_n(p).
\end{aligned}$$

Considerando qualquer curva que passa pelo ponto p na direção de v , o resultado da Segunda Forma Fundamental não se altera, uma vez que esta aplicação não depende da escolha da curva e sim do vetor v e do ponto p fixado. A Segunda Forma Fundamental nos permite analisar a Curvatura Normal desta curva $\alpha(s)$ em relação ao vetor normal unitário no ponto p , isso ocorre uma vez que estamos restringindo este vetor normal unitário a esta curva $\alpha(s)$ contida na superfície.

Assim tomando um vetor v qualquer em T_pS , o plano que intersecta com S e é paralelo aos vetores v e $N(p)$ é chamada seção normal de S em p , na vizinhança desse ponto específico, a Seção Normal corresponde a uma curva regular contida em S passando por p na direção de v . A normal n desta curva pode ser $\pm N(p)$ ou zero, uma vez que n pode estar alinhado a $N(p)$ ou em direção oposta, no caso em que é zero a seção não se curva e é considerada plana.

Figura 11: Seção Normal.



fonte: Araújo, 1998, p.73.

Contudo, a Segunda Forma Fundamental aplicada em um vetor unitário $v \in T_pS$ é igual a Curvatura Normal de qualquer curva regular em S que passa por p e é tangente a v em p .

2.3.5 Coeficientes da Segunda Forma Fundamental

Mostraremos a seguir que a Segunda Forma Fundamental não depende da curva escolhida. Tomando um vetor v em T_pS , onde $v = aX_u(q) + bX_v(q)$ e considerando uma curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ tal que $(u(t_0), v(t_0)) = q$ e $\alpha'(0) = v$, isto é,

$$(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0), (u'(t_0), v'(t_0)) = (a, b)$$

como

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t))$$

e

$$\begin{aligned} \alpha''(t) = & u''(t)X_u(u(t), v(t)) + (u'(t))^2X_{uu}(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t)X_{uv}(u(t), v(t)) + \\ & (v'(t))^2X_{vv}(u(t), v(t)) + v''(t)X_v(u(t), v(t)), \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} II_p(v) &= \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle \\ &= a^2\langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0) + 2ab\langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0) + b^2\langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0), \end{aligned}$$

onde a última expressão não depende da curva α .

Usando a notação

$$\begin{aligned} e(u_0, v_0) &= \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0), \\ f(u_0, v_0) &= \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0), \\ g(u_0, v_0) &= \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0), \end{aligned}$$

temos que

$$II_p(v) = a^2e(u_0, v_0) + 2abf(u_0, v_0) + b^2g(u_0, v_0).$$

As funções $e(u, v)$, $f(u, v)$ e $g(u, v)$ são funções diferenciáveis e são chamados coeficientes da Segunda Forma Fundamental na base $\{X_u, X_v\}$.

Exemplo 2.3.5.1: Consideremos a superfície

$$X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

que descreve o parabolóide hiperbólico. Calculando os coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas em $q = (0, 0)$, obtemos

$$E(0, 0) = 1, F(0, 0) = 0, G(0, 0) = 1,$$

$$e(0, 0) = -2, f(0, 0) = 0, g(0, 0) = 2.$$

Exemplo 2.3.5.2: A superfície

$$X(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

descreve a chamada sela de macaco. É fácil verificar que os coeficientes da segunda forma quadrática se anulam em $q = (0, 0)$. Portanto, a curvatura normal e a segunda forma quadrática em q são funções nulas.

3 Curvaturas de Superfícies

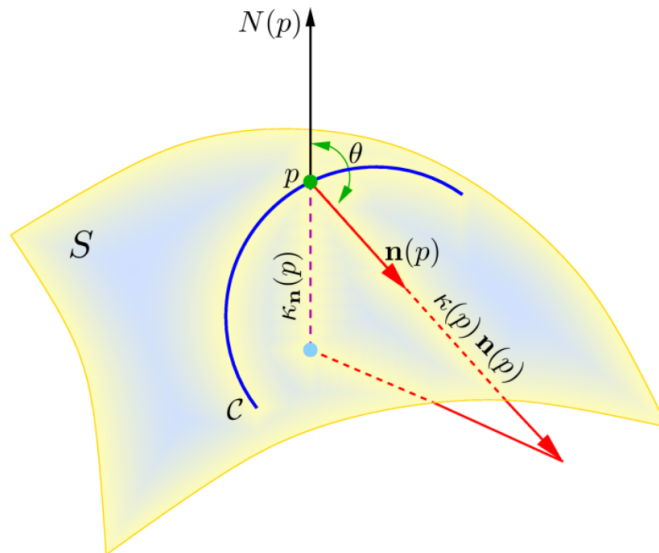
Vimos no capítulo anterior, que a Segunda Forma Fundamental aplicada na direção de um vetor v em $T_p S$ nos fornece a Curvatura Normal de uma curva contida na superfície S . A seguir será introduzido os conceitos de Curvatura Normal ao longo de uma direção v na superfície, afim de definir a Curvatura Normal da superfície S em um ponto $p \in S$. As curvas na superfície ajudam a entender o quão curva a superfície é em pontos específicos de S , permitindo calcular a curvatura da superfície nesses pontos.

3.1 Curvatura Normal

Seja C uma curva regular em S , com $p \in C$, e $\alpha : I \rightarrow C$ uma parametrização de C pelo comprimento de arco tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

Definição 3.1.1: Seja C uma curva regular em S que passa por p , $k(p)$ a curvatura de C em p e $\cos \theta = \langle n(p), N(p) \rangle$, onde $n(p)$ é o vetor normal a C em p e $N(p)$ é o vetor normal a S em p . O número $k_n(p) = k(p) \cos \theta$ é chamado de curvatura normal de C em p .

Figura 12: k_n é projeção do vetor kn sobre a normal N da superfície em p .



fonte: Delgado e Frensel (2017, p.172).

Observação 3.1.1.1: No caso em que $k(p) = 0$, consideramos $n(p) = 0$.

Observação 3.1.1.2: $kn(p) = k(p) \langle n(p), N(p) \rangle$ é o comprimento da projeção do vetor $k(p)n(p)$ sobre o vetor $N(p)$ com o sinal dado pela orientação $N(p)$ de S em p .

Observação 3.1.1.3: A curvatura normal $kn(p)$ de C em p não depende da orientação de C , pois $k(p)$ e $n(p)$ não se alteram quando mudamos a orientação de C , mas muda de sinal quando mudamos a orientação N da superfície para $-N$.

Proposição 3.1.2: (Meusnier) Todas as curvas regulares de uma superfície S que passam por $p \in S$ e têm a mesma reta tangente nesse ponto, possuem a mesma Curvatura Normal em p .

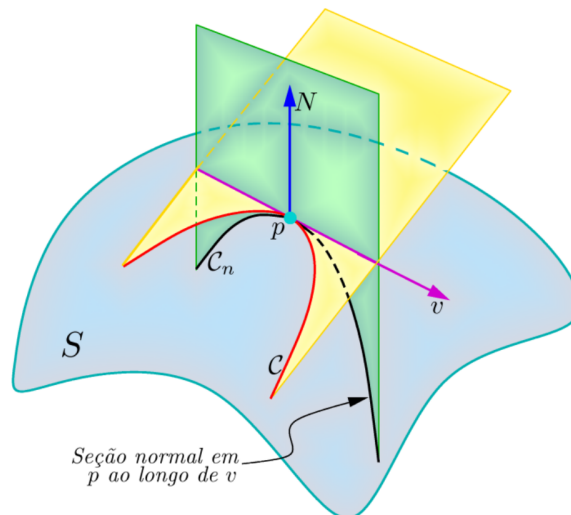
A proposição acima nos permite definir a curvatura normal de S no ponto $p \in S$ segundo uma dada direção v em T_pS da seguinte maneira:

$$kn_{(p)}(v) = \frac{II_p(v)}{I_p(v)}, v \in T_pS - \{0\}.$$

Observe que $kn_{(p)}(v) = kn_{(p)}(\lambda v)$ para todo $v \in T_pS - \{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definição 3.1.3: Seja $v \in T_pS$ um vetor unitário e seja $\pi(N(p), v)$ o plano que passa por p e é paralelo aos vetores v e $N(p)$. A interseção de $S \cap \pi(N(p), v)$ é chamada seção normal de S em p ao longo de v .

Figura 13: Representação do teorema de Meusnier.



fonte: Delgado e Frensel (2017, p.173).

Assim, o valor absoluto da curvatura normal em p de uma curva α é igual à curvatura da seção normal de S em p ao longo de v .

Observação 3.1.3: Estamos considerando a curva plana $C \subset \pi(N(p), v)$ como uma curva no espaço, e portanto, $k(p) \geq 0$.

De acordo com Araújo (1998, p.73) “para analisar as curvaturas normais em $p \in S$ basta estudar as curvaturas das seções normais; e o sinal de k_n vai depender de a concavidade em p de tal curva apontar no sentido de $N(p)$ ou no oposto”.

Exemplo 3.1.3.1: Se S é um plano, então todas as seções normais a S são retas. Portanto, todas as curvaturas normais são nulas. Logo a Segunda Forma Fundamental de S é identicamente nula em todos os pontos, ou seja, $dN_p = 0$ para todo $p \in S$.

Exemplo 3.1.3.2: Seja a esfera unitária $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com a orientação $N : S^2 \rightarrow S^2$ dada por $N(p) = -p$.

Então toda seção normal C a S^2 é um círculo centrado na origem e, portanto, de raio 1 e curvatura igual a 1 em todos os pontos. Além disso, com $n(p) = N(p)$ para todo ponto $p \in C$, temos que todas as curvaturas normais são iguais a 1, isto é, $II_p(v) = 1$ para todo $p \in S$ e todo $v \in T_p S$ com $\|v\| = 1$.

Assim, -1 é o único autovalor de dN_p , ou seja, $dN_p(v) = -v$ e $II_p(v) = \langle v, v \rangle$ para todo $p \in S^2$ e todo $v \in T_p S^2$.

Curvaturas Principais

Sendo a derivada de Gauss uma aplicação linear, para cada $p \in S$ existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p S$ tal que $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$, $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$. Além disso, k_1 e k_2 ($k_1 \geq k_2$) são o máximo e o mínimo da Segunda Forma Fundamental II_p restrita ao círculo unitário de $T_p S$; isto é, são os valores extremos da curvatura normal em p . E cuja matriz A associada a esta base é uma matriz diagonal, e os elementos da diagonal principal corresponde aos valores de máximo e mínimo k_1 e k_2 respectivamente.

Definição 3.1.4: O máximo da curvatura normal k_1 e o mínimo da curvatura normal k_2 , são chamados curvaturas principais em p ; as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos auto-vetores e_1 e e_2 são chamadas direções principais em p .

A curvatura principal k_1 mede a maior curvatura que a seção normal à superfície pode ter em um ponto específico, conseqüentemente k_2 mede a menor curvatura da mesma seção normal no mesmo ponto $p \in S$.

Exemplo 3.1.4:

- Num plano, todas as direções em todos os pontos são principais, pois $k_1(p) = k_2(p) = 0$ e, portanto, $kn_p(v) = 0$ para todo p e toda direção v .
- O mesmo ocorre para a esfera S^2 , pois $k_1(p) = k_2(p) = 1$ e, portanto, $kn_p(v) = 1$ para todo $p \in S^2$ e todo $v \in T_p S^2 - \{0\}$.

3.2 Curvatura Gaussiana

A Curvatura de Gauss é um invariante geométrico que só depende da geometria intrínseca da própria superfície. A seguir apresentaremos dois conceitos fundamentais no estudo da curvatura de uma superfície regular, a Curvatura Gaussiana e Média. A Curvatura Gaussiana é obtida por meio do produto das Curvaturas Principais e a Curvatura Média é a média aritmética das Curvaturas Principais.

Definição 3.2.1: Sejam $p \in S$ e $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ a Diferencial da Aplicação Normal de Gauss em p . O determinante de dN_p é chamado a Curvatura Gaussiana K de S em p , e o negativo da metade do traço de dN_p é chamado a Curvatura Média H de S em p . Assim,

$$K(p) = \det(dN_p) \quad \text{e} \quad H(p) = -\frac{1}{2} \text{traço}(dN_p).$$

No caso em que $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de T_pS formada de autovetores de dN_p , com $dN_p(e_1) = -k_1e_1$ e $dN_p(e_2) = -k_2e_2$,

$$K(p) = k_1k_2 \quad \text{e} \quad H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Observação 3.2.1: Se mudarmos a orientação de S , a Curvatura Gaussiana não muda, mas a Curvatura Média muda de sinal.

Ainda, podemos representar as Curvaturas Gaussiana e Média em termos dos coeficientes da Primeira e Segunda Forma Fundamental da seguinte maneira;

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

e

$$H(p) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

Demonstração: Ver (Carmo, 2005, p.181-184) ou (Araújo, 1998, p.80-82).

4 Classificação de Pontos Críticos

Os extremos de uma função referem-se aos valores máximos e mínimos que a função pode assumir em seu domínio e são obtidos por meio de um ponto crítico, que é um ponto onde as derivadas parciais se anulam ou não estão definidas, e são os candidatos a serem os extremos de uma função. São classificados como máximo e mínimo local ou relativo, aqui estamos analisando o ponto crítico em uma vizinhança, e máximos e mínimos globais ou absolutos, estudados no domínio como um todo ou em regiões fechadas. Um ponto considerado nem máximo e nem mínimo é chamado ponto de sela.

4.1 Máximos e Mínimos

Definição 4.1.1: A função f de duas variáveis tem um valor máximo relativo no ponto (x_0, y_0) se existir um disco aberto $B((x_0, y_0); r)$, tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para todo (x, y) em B .

Definição 4.1.2: A função f de duas variáveis tem um valor mínimo relativo no ponto (x_0, y_0) se existir um disco aberto $B((x_0, y_0); r)$, tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todo (x, y) em B .

Observação 4.1.1: Um ponto que não é máximo nem mínimo é chamado ponto de sela.

Teorema 4.1.3: Seja $f(x, y)$ definida em todos os pontos de algum disco aberto $B((x_0, y_0); r)$ e tendo um extremo relativo em (x_0, y_0) . Então, se existirem $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$, teremos $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Definição 4.1.4: Um ponto (x_0, y_0) para o qual temos ambas as igualdades $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$, é chamado de ponto crítico.

Teorema 4.1.5: Seja f de classe C^2 e seja (x_0, y_0) um ponto interior do domínio de f . Uma condição necessária para que (x_0, y_0) seja ponto de máximo local de f é que (x_0, y_0) seja ponto crítico de f e, além disso, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$.

Se as condições do teorema acima forem trocadas por $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \geq 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \geq 0$ teremos um mínimo local em f .

Exemplo 4.1.1: Determine os candidatos a extremantes locais de

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4.$$

Solução:

Os únicos candidatos a extremantes locais são os pontos críticos, pois o domínio de $f(D_f = \mathbb{R}^2)$ aberto. De

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3.$$

resulta que os candidatos a extremantes locais são as soluções do sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0. \end{cases}$$

As soluções do sistema são: $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$. Temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y.$$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 6$; logo, $(1, 1)$ é candidato a ponto de mínimo local.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 1) = -6$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 1) = 6$; logo, $(-1, 1)$ não é extremante local. O mesmo acontece com o ponto $(1, -1)$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -6$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -1) = -6$; logo, $(-1, -1)$ é candidato a ponto de máximo local.

Definição 4.1.6: A função f de duas variáveis terá um valor máximo absoluto em seu domínio D , no plano xy , se existir algum ponto (x_0, y_0) em D , tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para todos os pontos (x, y) em D . Em tal caso, $f(x_0, y_0)$ é denominado o valor máximo absoluto de f em D .

Definição 4.1.7: A função f de duas variáveis terá um valor mínimo absoluto em seu domínio D , no plano xy , se existir algum ponto (x_0, y_0) em D , tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todos os pontos (x, y) em D . Em tal caso, $f(x_0, y_0)$ é denominado o valor mínimo absoluto de f em D .

Exemplo 4.1.7: Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Como D_f é um conjunto aberto ($D_f = \mathbb{R}^2$),

de

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \end{cases}$$

segue que $(0, 0)$ é o único candidato a estremo local. Como $f(x, y) \geq f(0, 0) = 0$, para todo (x, y) em \mathbb{R}^2 , resulta que $(0, 0)$ é um ponto de mínimo global de f .

Teorema 4.1.8: Seja R uma região fechada no plano xy , e seja f uma função de duas variáveis contínua em R . Então, existe pelo menos um ponto em R onde f tem um valor máximo absoluto, e pelo menos um ponto em R onde f tem um valor mínimo absoluto.

Observação 4.1.8: Para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado D :

1. Determinar os valores de f nos pontos críticos de f em D .
2. Determinar os valores extremos de f na fronteira de D .
3. O maior dos valores dos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto; e o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Exemplo 4.1.8: Determine os extremantes de $f(x, y) = 2x + y$ em A dado por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 4$ e $3x + y \leq 6$.

Solução

f assume em A valor máximo e valor mínimo, pois f é contínua e A , compacto. Como f não admite ponto crítico, os valores máximo e mínimo são atingidos na fronteira de A .

$$z = 2x + y$$

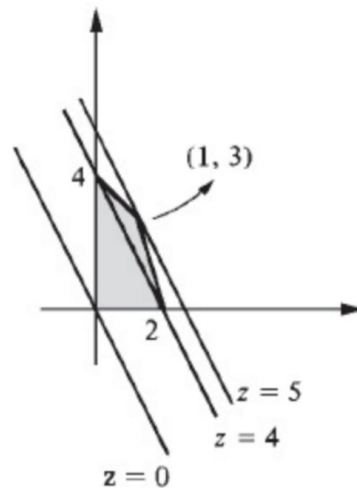
Como f é uma função afim e a fronteira de A é formada por segmentos de retas (A é um polígono), resulta que entre os vértices de A existe pelo menos um ponto de máximo e pelo menos um ponto de mínimo. Calculando os valores de f nos vértices encontramos:

$$f(1, 3) = 5 \text{ valor máximo}$$

e

$$f(0, 0) = 0 \text{ valor mínimo.}$$

Figura 14: Representação gráfica.



fonte: Guidorizzi, 2014, p.409.

4.2 Concavidade e Curvaturas

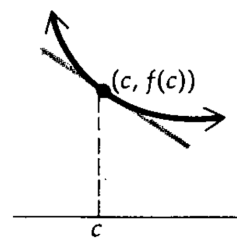
Embora sejam conceitos diferentes estão-interligados, uma vez que ambos descrevem características específicas de um determinado gráfico de uma função representado por uma curva. Ambos os conceitos dependem do comportamento da reta tangente ao gráfico. A curvatura descreve a taxa de variação da reta tangente, a velocidade com que elas mudam de direção.

Em outras palavras mede o quão curva é uma curva ou simplesmente a velocidade com que um objeto se dobra. Já a concavidade é a maneira, a forma de como a curva está se curvando, se esta se curva no formato de uma concha para cima, ou no formato de uma concha para baixo. Se ela se curva para cima dizemos que é côncava para cima, mas se ela se curva para baixo, dizemos que a concavidade é voltada para baixo.

Teorema 4.2.1: Seja f contínua no intervalo I .

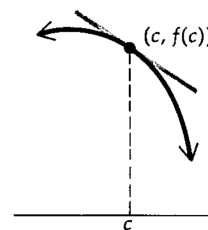
1. Se $f'(x) > 0$ pra todo x interior a I , então f será estretamente crescente em I .
2. Se $f'(x) < 0$ pra todo x interior a I , então f será estretamente decrescente em I .

Definição 4.2.2: O gráfico de uma função f será côncavo para cima no ponto $(c, f(c))$ se $f'(c)$ existir e houver um intervalo aberto I contendo c , tal que para todos os valores de $x \neq c$ em I , o ponto $(x, f(x))$ do gráfico estará acima da reta tangente ao gráfico em $(c, f(c))$.



fonte: Leithold, 1994, p.242.

Definição 4.2.3: O gráfico de uma função f será côncavo para baixo no ponto $(c, f(c))$ se $f'(c)$ existir e se houver um intervalo aberto I contendo c , tal que para todos os valores de $x \neq c$ em I , o ponto $(x, f(x))$ do gráfico estará abaixo da reta tangente ao gráfico em $(c, f(c))$.

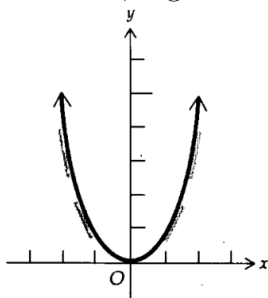


fonte: Leithold, 1994, p.242.

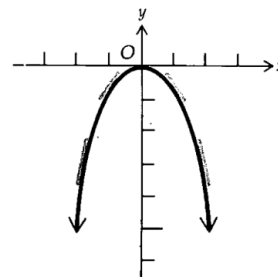
Teorema 4.2.4: Seja f uma função diferenciável em algum intervalo aberto contendo c . Então,

1. se $f''(c) > 0$, o gráfico de f é côncavo para cima em $(c, f(c))$;
2. se $f''(c) < 0$, o gráfico de f é côncavo para baixo em $(c, f(c))$.

Exemplo 4.2.4: Se f for a função definida por $f(x) = x^2$, então $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$. Assim, $f''(x) > 0$ para todo x . Além disso, o gráfico de f , está acima de suas retas tangentes. Então, o gráfico de f é côncavo para cima, em todos os seus pontos.



fonte: Leithold, 1994, p.242.



fonte: Leithold, 1994, p.242.

Se g for a função definida por $g(x) = -x^2$, então $g'(x) = -2x$ e $g''(x) = -2$. Logo, $g''(x) < 0$ para todo x . Também, o gráfico de g , está abaixo de suas retas tangentes. Logo, o gráfico de g é côncavo para baixo em todos os seus pontos.

Os pontos críticos que não são máximo e nem mínimo, são chamados de pontos de inflexão. Os pontos de inflexão são identificados onde há a mudança de concavidade da

função, porém é necessário haver uma reta tangente neste ponto, caso contrário não será um ponto de inflexão.

Definição 4.2.5: O ponto $(c, f(c))$ será um ponto de inflexão do gráfico da função f se o gráfico tiver nele uma reta tangente e se existir um intervalo aberto I contendo c , tal que se x estiver em I , então

1. $f''(x) < 0$ se $x < c$ e $f''(x) > 0$ se $x > c$, ou
2. $f''(x) > 0$ se $x < c$ e $f''(x) < 0$ se $x > c$.

Teorema 4.2.6: Se a função f for derivável em algum intervalo aberto contendo c e se $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de f , então se $f''(c)$ existe, $f''(c) = 0$.

Veremos a seguir a descrição de uma curva no plano do \mathbb{R}^2 , dada em sua forma paramétrica e logo após relacionar o conceito de curvatura com o de concavidade de uma função.

Por uma curva em \mathbb{R}^2 entendemos uma função que a cada t pertencente a um intervalo I associa um ponto $(x(t), y(t))$ em \mathbb{R}^2 , em que $x(t)$ e $y(t)$ são funções definidas em I . Dizemos que

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Definição 4.2.7: Uma curva parametrizada diferenciável no plano é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe c^∞ definida num intervalo aberto $I = (a, b)$ da reta.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $\|\alpha'(s)\| = 1$ para todo $s \in I$.

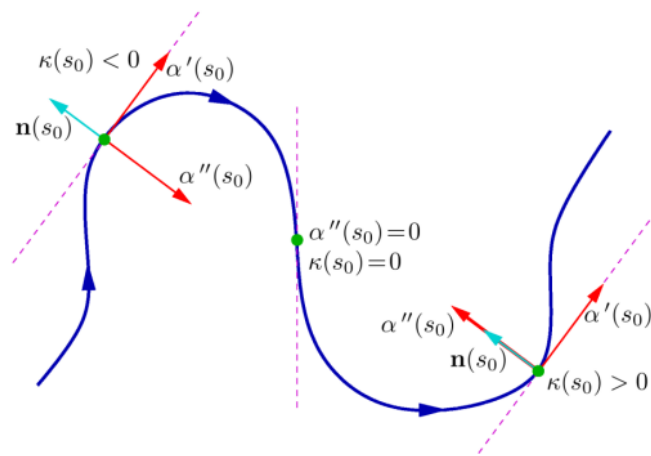
Para cada $s \in I$, o vetor $\alpha'(s)$ é um vetor unitário e será designado por $t(s)$, isto é, $t(s) = (x'(s), y'(s))$.

A curvatura de α em $s \in I$ é dada por $k(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle$, e muda de sinal de acordo com a concavidade da função.

A partir das definições acima, podemos fazer a seguinte relação:

1. Se $f''(x) > 0$, a concavidade é voltada para cima e $k(s) > 0$.
2. Se $f''(x) < 0$, a concavidade é voltada para baixo e $k(s) < 0$.

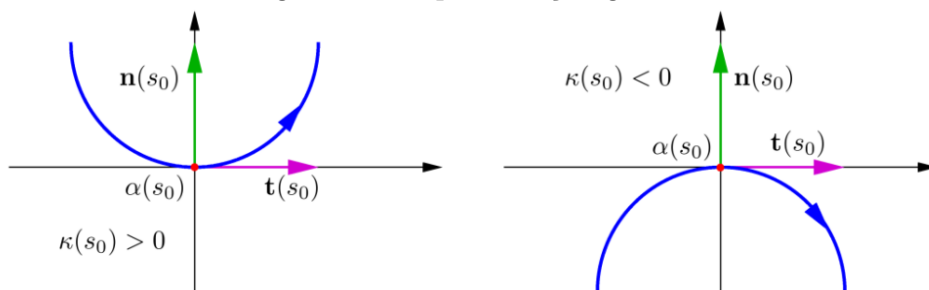
Figura 15: Variação do sinal da curvatura.



fonte: Delgado e Frensel (2017, p.19).

Como já mencionado anteriormente, a curvatura e a concavidade de uma função, dependem do comportamento da reta tangente ao gráfico em cada ponto da curva. O crescimento e o decréscimo nos dá a concavidade da curva, e a velocidade com que as retas tangentes ao gráfico mudam de direção é chamada de curvatura.

Figura 16: Representação gráfica.



fonte: Delgado e Frensel (2017, p.31).

Se a curva é côncava para baixo, a curvatura é negativa, mas se for côncava para cima a curvatura é positiva.

4.3 Da demonstração e entendimento do Teste do Hessiano

No cálculo de uma variável, há o teste da primeira e da segunda derivada para determinar os extremantes de uma função, de maneira análoga há ambos os testes para determinar os extremantes de uma função de duas variáveis reais. Já vimos a condição

necessária, agora veremos a condição suficiente para um ponto crítico de uma função de duas variáveis ser um extremante local. Essa condição é dada pelo teste do hessiano, o determinante da matriz hessiana e de acordo com este determinante podemos classificar os pontos críticos em máximo, mínimo ou ponto de sela.

A matriz hessiana foi desenvolvida pelo matemático alemão Ludwig Otto Hesse(1811–1874), é uma matriz representada por uma matriz quadrada com n linhas e n colunas, onde n indica as funções de duas ou mais variáveis. Suas linhas e colunas são formadas pelas derivadas parciais de segunda ordem, e pela derivada mista.

Seja $f(x, y)$ de classe C^2 . A função H dada por

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix}$$

denomina-se hessiano de f . Observe que

$$H(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right]^2$$

Teorema 4.3.1: Sejam $f(x, y)$ de classe C^2 e (x_0, y_0) um ponto interior de D_f . Suponhamos que (x_0, y_0) seja ponto crítico de f . Então

1. Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ e $H(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) será ponto de mínimo local de f .
2. Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ e $H(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) será ponto de máximo local de f .
3. Se $H(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) não será extremante local. Neste caso, (x_0, y_0) será ponto de sela.
4. Se $H(x_0, y_0) = 0$, nada se pode afirmar.

Exemplo 4.3.1.1: Seja $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$. Os pontos críticos de f são: $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$. Temos:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} e \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x.$$

Então:

- $H(1, 1) = 36 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6 > 0$; logo, $(1, 1)$ é ponto de mínimo local. Note que $(1, 1)$ não é ponto de mínimo global, pois $f(-3, 0) < f(1, 1)$.
- $H(-1, -1) = 36 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -6 < 0$; logo, $(-1, -1)$ é ponto de máximo local; entretanto, $(-1, -1)$ não é ponto de máximo global, pois $f(4, 0) > f(-1, -1)$.
- Como $H(-1, 1) < 0$ e $H(1, -1) < 0$, segue que $(-1, 1)$ e $(1, -1)$ não são extremantes, são pontos de sela.

Exemplo 4.3.1.2: Seja $f(x, y) = 3x^4 + 2y^4$. O único ponto crítico de f é $(0, 0)$ e temos $H(0, 0) = 0$; logo, o teorema não nos fornece informação sobre este ponto crítico. Trabalhando diretamente com a função verifica-se sem dificuldade que $(0, 0)$ é ponto de mínimo global.

4.4 Um Efeito Geométrico da Curvatura de Gauss

A classificação dos pontos de uma superfície regular depende do resultado da Curvatura Gaussiana, usaremos a seguir a Curvatura Gaussiana para classificar os pontos críticos em uma superfície regular, fazendo uma relação dos resultados da Curvatura de Gauss com os conceitos de máximos e mínimos locais de uma função de duas variáveis.

Definição 4.4.1: Um ponto p de uma superfície regular S é chamado:

- 1) Elíptico, se $\det(dN_p) > 0$;
- 2) Hiperbólico, se $\det(dN_p) < 0$;
- 3) Parabólico, se $\det(dN_p) = 0$, com $dN_p \neq 0$;
- 4) Planar, se $dN_p = 0$.

Observação 4.4.1.1: Num ponto elíptico, a curvatura Gaussiana é positiva e, portanto, as curvaturas principais têm o mesmo sinal. Assim, todas as curvaturas passando pelo ponto têm seus vetores normais apontando para um mesmo lado do plano tangente.

Observação 4.4.1.2: Em um ponto Hiperbólico p , a curvatura Gaussiana é negativa. Assim, as curvaturas principais têm sinais opostos e, portanto, existem curvas passando pelo ponto p cujos vetores normais em p apontam para lados diferentes do plano tangente.

Observação 4.4.1.3: Em um ponto parabólico, a curvatura Gaussiana é nula, mas uma das curvaturas principais é diferente de zero. No cilindro, todos os pontos são parabólicos e têm curvatura média constante $\frac{1}{2}$.

Observação 4.4.1.4: Em um ponto planar p , todas as curvaturas normais são nulas. Portanto $K(p) = H(p) = 0$.

Proposição 4.4.2: Seja $p \in S$ um ponto elíptico de uma superfície S . Então existe uma vizinhança V de p em S tal que todos os pontos de V estão do mesmo lado do plano tangente $T_p S$. Seja $p \in S$ um ponto hiperbólico. Então em cada vizinhança de p existem pontos de ambos os lados de $T_p S$.

Demonstração: Seja $X(u, v)$ uma parametrização em p , com $X(0, 0) = p$. A distância d , de um ponto $q = X(u, v)$ ao plano tangente $T_p S$ é dada por

$$d = \langle X(u, v) - X(0, 0), N(p) \rangle.$$

Como $X(u, v)$ é diferenciável, temos a fórmula de Taylor:

$$X(u, v) = X(0, 0) + X_u u + X_v v + \frac{1}{2}(X_{uu}u^2 + 2X_{uv}uv + X_{vv}v^2) + \bar{R},$$

onde as derivadas são calculadas em $(0, 0)$ e o resto \bar{R} satisfaz a condição

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\bar{R}}{u^2 + v^2} = 0.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} d &= \langle X(u, v) - X(0, 0), N(p) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \{ \langle X_{uu}, N(p) \rangle u^2 + 2 \langle X_{uv}, N(p) \rangle uv + \langle X_{vv}, N(p) \rangle v^2 \} + R \\ &= \frac{1}{2} (eu^2 + 2fuv + gv^2) + R = \frac{1}{2} II_p(w) + R, \end{aligned}$$

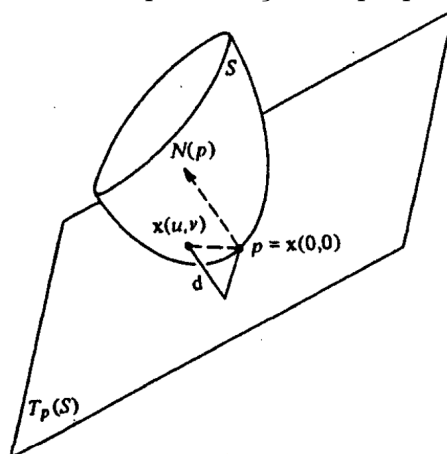
onde $w = X_u u + X_v v$, $R = \langle \bar{R}, N(p) \rangle$, $\lim_{w \rightarrow 0} (R/|w|^2) = 0$.

Em um ponto elíptico p , $II_p(w)$ tem um sinal fixo. Portanto, para todo (u, v) suficientemente próximo a p , d tem o mesmo sinal que $II_p(w)$; isto é, todos os pontos (u, v) estão do mesmo lado de $T_p S$.

Para um ponto hiperbólico p , em cada vizinhança de p existem pontos (u, v) e (\bar{u}, \bar{v}) tais que $II_p(w/|w|)$ e $II_p(\bar{w}/|\bar{w}|)$ têm sinais opostos (aqui $\bar{w} = X_u \bar{u} + X_v \bar{v}$); tais pontos pertencem, portanto, a lados distintos de $T_p S$. \square

Observação 4.4.2: Quando p é um ponto parabólico ou planar, nada podemos afirmar.

Figura 17: Representação da proposição.



fonte: Carmo, 2005, p.187.

Não se pode fazer afirmações análogas à proposição acima para pontos parabólicos ou planares, uma vez que na vizinhança de pontos parabólicos ou planares, a superfície S está em um lado de $T_p S$, podendo haver uma reta em comum com o plano tangente (Manfredo, 2005).

Os máximos e mínimos das curvaturas das seções normais k_1 e k_2 , vem com um sinal, indicando a concavidade da curvatura. De acordo com a proposição para pontos elípticos e hiperbólicos, se a curvatura de Gauss é positiva e as curvaturas principais forem ambas positivas, a superfície S estará abaixo do plano tangente, logo p é ponto de máximo local, se a curvatura de Gauss é positiva e ambas as curvaturas principais forem negativas, a superfície S estará acima do plano tangente, logo p é ponto de mínimo local.

Contudo, se a curvatura de Gauss for negativa a superfície S apresentará pontos em ambos os lados do plano tangente, dizemos que p é um ponto de sela. Serão pontos de máximos e mínimos locais, pois a afirmação da **proposição 4.4.2** é válida apenas em torno de um ponto p específico, ou seja, na vizinhança de p .

Levando em consideração este fato, e tomando como ponto de partida o **Teorema 4.3.1**, quando $H(x_0, y_0) > 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ nos dará a concavidade da função, assim:

1. Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$; k_1 e $k_2 > 0$ e $K(p) > 0$, indicando um ponto de máximo local de S
2. Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$; k_1 e $k_2 < 0$ e $K(p) > 0$, indicando um ponto de mínimo local de S .
3. Se $K(p) < 0$ dizemos que p é um ponto de sela.

4. Se $K(p) = 0$ nada podemos afirmar.

A proposição se aplica apenas aos pontos elípticos e hiperbólicos, devido ao fato de nos pontos parabólicos e planares a $II_p(v) = 0$, ou seja, não está definida, a direção v é nula.

Aplicação 1: Considere-se o parabolóide hiperbólico $\{(x, y, z) : z = x^2 - y^2\}$ com a orientação induzida pela parametrização $\phi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$, ou seja

$$N(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}(-2u, 2v, 1).$$

No ponto $O = \phi(0, 0)$ temos

$$-N_u = (2, 0, 0) = 2\phi_u,$$

$$-N_v = (0, -2, 0) = -2\phi_v.$$

As curvaturas principais em O são assim 2 e -2 , as direções principais são as dos vetores $\phi_u = (1, 0, 0)$ e $\phi_v = (0, 1, 0)$, e a curvatura gaussiana é negativa, igual a -4 .

Aplicação 2: Seja S a superfície regular, denominada sela de macaco, que é o gráfico da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3 - 3y^2x$.

Então $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$X(u, v) = (u, v, u^3 - 3v^2u)$$

é uma parametrização que cobre toda a superfície S .

Afirmção: O ponto $p_0 = X(0, 0) = (0, 0, 0)$ é um ponto planar e em qualquer vizinhança desse ponto existem pontos de ambos os lados de seu plano tangente.

De fato, como

$$X_u(u, v) = (1, 0, 3u^2 - 3v^2);$$

$$X_v(u, v) = (0, 1, -6vu);$$

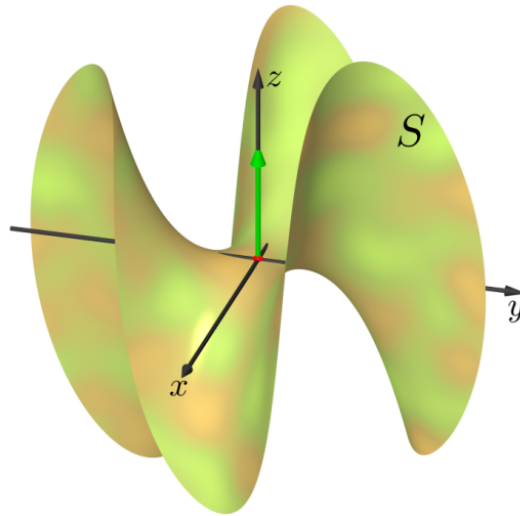
$$X_{uu}(u, v) = (0, 0, 6u);$$

$$X_{uv}(u, v) = (0, 0, -6v);$$

$$X_{vv}(u, v) = (0, 0, -6u);$$

temos que:

$$X_u(0, 0) = (1, 0, 0); X_v(0, 0) = (0, 1, 0)$$

Figura 18: Sela de macaco S .

fonte: Delgado e Frensel (2017, p.196).

e

$$X_{uu}(0, 0) = X_{uv}(0, 0) = X_{vv}(0, 0) = (0, 0, 0).$$

Portanto, $T_{p_0}S = \text{plano } xy$, $e(0, 0) = f(0, 0) = g(0, 0) = 0$, isto é $II_{p_0} \equiv 0$.

Logo, p_0 é um ponto planar.

Seja $\alpha(t) = X(t, 0) = (t, 0, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. Como $t^3 < 0$ se $t < 0$ e $t^3 > 0$ se $t > 0$, temos que toda vizinhança de p_0 possui pontos em ambos os lados do plano tangente $T_{p_0} = \text{plano } xy$.

Aplicação 3: Considere o parabolóide circular $z = x^2 + y^2$, onde

$$X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

é uma parametrização de S . Classifique o ponto $p = (0, 0, 0)$.

Solução: Calculando as derivadas de primeira e segunda ordem, temos:

$$X_u(u, v) = (1, 0, 2u);$$

$$X_v(u, v) = (0, 1, 2v);$$

$$X_{uu}(u, v) = (0, 0, 2);$$

$$X_{uv}(u, v) = (0, 0, 0);$$

$$X_{vv}(u, v) = (0, 0, 2);$$

$$X_u \wedge X_v = (-2u, -2v, 1)$$

$$N(u, v) = \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}.$$

Coefficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais.

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + 4u^2 \qquad e = \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 4uv \qquad f = \langle X_{uv}, N \rangle = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + 4v^2 \qquad g = \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

$$p(0, 0) = (0, 0, 0).$$

Coefficientes das primeiras e segundas formas fundamentais calculadas no ponto $p = (0, 0)$.

$$E(0, 0) = 1$$

$$e(0, 0) = 2$$

$$F(0, 0) = 0$$

$$f(0, 0) = 0$$

$$G(0, 0) = 1$$

$$g(0, 0) = 2$$

onde,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

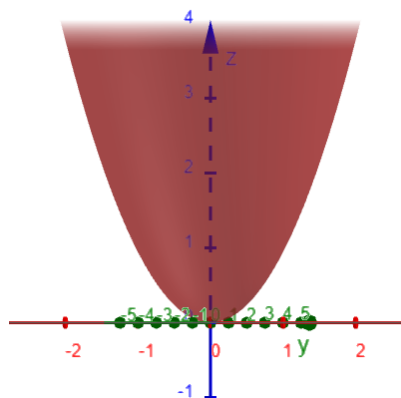
$$K = 4 > 0$$

temos,

$$H(0, 0) = 4 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 > 0$$

Figura 19: Gráfico da função $z = x^2 + y^2$.



fonte: Imagem construída no Geogebra por JOSENILDA, J.B. em 30/11/2023.

Logo $p = (0, 0)$ é um ponto de mínimo local.

Aplicação 4: Considere o parabolóide circular $z = -x^2 - y^2$, onde

$$X(u, v) = (u, v, -u^2 - v^2)$$

é uma parametrização de S . Classifique o ponto $p = (0, 0, 0)$.

Solução: Calculando as derivadas de primeira e segunda ordem, temos:

$$X_u(u, v) = (1, 0, -2u);$$

$$X_v(u, v) = (0, 1, -2v);$$

$$X_{uu}(u, v) = (0, 0, -2);$$

$$X_{uv}(u, v) = (0, 0, 0);$$

$$X_{vv}(u, v) = (0, 0, -2);$$

$$X_u \wedge X_v = (2u, 2v, 1)$$

$$N(u, v) = \frac{(2u, 2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}.$$

Coefficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais.

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + 4u^2 \qquad e = \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{-2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 4uv \qquad f = \langle X_{uv}, N \rangle = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + 4v^2 \qquad g = \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{-2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

$$p(0, 0) = (0, 0, 0).$$

Coefficientes das primeira e segunda formas fundamentais, calculadas no ponto $p = (0, 0)$.

$$E(0, 0) = 1$$

$$e(0, 0) = -2$$

$$F(0, 0) = 0$$

$$f(0, 0) = 0$$

$$G(0, 0) = 1$$

$$g(0, 0) = -2$$

onde,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

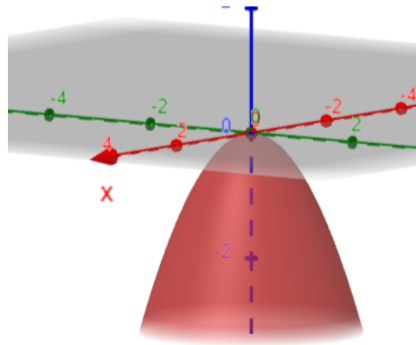
$$K = 4 > 0$$

temos,

$$H(0, 0) = 4 > 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -2 < 0.$$

Logo $p = (0, 0)$ é um ponto de máximo local.

Figura 20: Gráfico da função $z = -x^2 - y^2$.



fonte: Imagem construída no Geogebra por JOSENILDA,J.B. em 30/11/2023.

Conclusão

O presente trabalho buscou classificar os extremos de uma função de duas variáveis por meio de estudos baseados na geometria de curvas e superfícies, destacando a Curvatura Gaussiana como uma ferramenta grandiosa da Geometria Diferencial. Por meio dela foi possível relacionar os conceitos de cálculo com os conceitos de Geometria Diferencial e assim classificar os pontos críticos de acordo com o sinal dado pela curvatura de Gauss. Observa-se uma enorme relação deste com o conceito de máximos e mínimos encontrados no livro de cálculo, neste caso mais complexo, pois exige um estudo mais abrangente do assunto.

O estudo detalhado de alguns conceitos em Geometria Diferencial ajudou durante todo o percurso deste trabalho, com a investigação podemos analisar e demonstrar os conceitos de curvatura, Curvatura Gaussiana e os passos a serem seguidos para se classificar os pontos críticos de funções de duas variáveis, trazendo um longo processo de desenvolvimento do assunto por meio de várias definições e demonstrações.

Com base nos estudos necessários e com o auxílio das ferramentas do cálculo junto as ferramentas desta geometria, foi possível relacionar e classificar os pontos críticos de funções de duas variáveis. A proposição para pontos elípticos e hiperbólicos, desempenhou um papel fundamental nesse processo, possibilitando interligar os conceitos de máximos e mínimos com o de Curvatura Gaussiana, possibilitando assim, alcançar com êxito o objetivo deste estudo.

Referências

- ARAÚJO, Paulo Ventura. Geometria diferencial. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1998.
- BOYER, Carl benjamim. *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blucher, 1974.
- BOYER, Carl benjamim.; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2012.
- CARMO, Manfredo Perdigão. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- COIMBRA, José de Ribamar Viana. *Uma Introdução à Geometria Diferencial*. Campinas-SP: Dissertação de Mestrado, UNICAMP, 2008.
- DELGADO, Jorge.; FRENSEL, Katia. *Geometria Diferencial I*. Instituto de Matemática-UFF, 2017.
- GORODSKI, Claudio. *Um breve panorama histórico da geometria*. Revista Matemática Universitária, n. 44, p. 14-29, 2009.
- GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo Volume 1*. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo Volume 2*. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.
- LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica Volume 1*. 3 ed. São Paulo: Harbra ltda, 1994.
- LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica Volume 2*. 3 ed. São Paulo: Harbra ltda, 1994.
- SILVA, Laurienny Gondim et al. *Curvas e Superfícies Regulares: Um Estudo sobre Curvaturas*. 2022.
- TENENBLAT, Keti. *Introdução a Geometria Diferencial*. 2 ed. São Paulo: Blucher, 2008.