



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE FÍSICA**

RUAN LUCAS SOUSA LIMA

**IMPLEMENTAÇÃO DE APARATO PARA MEDIÇÃO DE ESTADO DE
POLARIZAÇÃO VIA FORMALISMO DE STOKES-MUELLER**

BELÉM-PA

2019

RUAN LUCAS SOUSA LIMA

**IMPLEMENTAÇÃO DE APARATO PARA MEDIÇÃO DE ESTADO DE
POLARIZAÇÃO VIA FORMALISMO DE STOKES-MUELLER**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado como pré-requisito parcial para obtenção de grau de Bacharel em Física pela Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Newton Martins Barbosa Neto

BELÉM-PA

2019



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE FÍSICA

ATA DA APRESENTAÇÃO E DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE
CURSO – TCC

Ata da sessão de apresentação e defesa de Trabalho de Conclusão de Curso para concessão de grau de Bacharelado em Física, realizado às **11:00** horas do dia **16 de dezembro de 2019**, no auditório de física pesquisa, cuja orientação teve início em Fevereiro de 2017 sendo intitulada: **"Implementação de Aparato para Medição de Estado de Polarização via Formalismo de Stokes-Mueller"**, com um total de **55** páginas, que foi apresentado durante 27 minutos pelo discente **Ruan Lucas Sousa Lima**, matrícula **201608140012** diante da banca examinadora aprovada pela Faculdade de Física do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará, assim constituída: **Prof. Dr. Newton Martins Barbosa Neto** (Orientador - UFPA), **Prof. Dr. Alexandre Guimarães Rodrigues** (UFPA), **Prof. Dr. Marcelo Costa de Lima** (UFPA), **Prof. Dr. Sanclayton Geraldo Carneiro Moreira** (UFPA). Em seguida o mesmo foi submetido à arguição, tendo demonstrado conhecimentos no tema objeto da proposta de TCC, favorecendo à banca examinadora apresentar contribuições para melhoras no desenvolvimento e decidir pelo conceito exq do mesmo, bem como conceder o prazo máximo de 15 dias para serem efetuadas as modificações sugeridas pela banca, se for o caso, e em seguida a mesma será assinada por todos os membros. Para constar foram lavrados os termos da presente ata que lida e aprovada recebe a assinatura dos integrantes da banca examinadora e do DISCENTE.

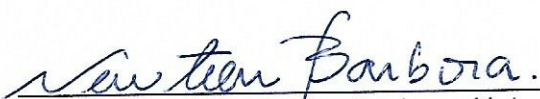
ORIENTADOR: Newton Barbosa
EXAMINADOR 1: Alexandre Guimarães Rodrigues
EXAMINADOR 2: Marcelo Costa de Lima
EXAMINADOR 3: Sanclayton Geraldo Carneiro Moreira
DISCENTE: Ruan Lucas Sousa Lima

RUAN LUCAS SOUSA LIMA

"Implementação de Aparato para Medição de Estado de Polarização via Formalismo de Stokes-Mueller"

Monografia apresentada como pré-requisito para obtenção do título de Bacharel em Física pela Faculdade de Física do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal Pará, submetida à apreciação da banca examinadora composta pelos membros a seguir.

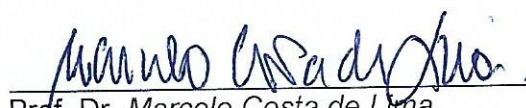
Orientador:


Prof. Dr. Newton Martins Barbosa Neto
(FACFIS – ICEN – UFPA)

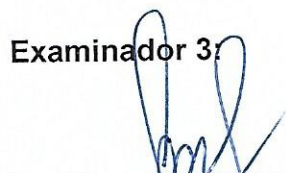
Examinador 1:


Prof. Dr. Alexandre Guimarães Rodrigues
(ITEC – UFPA)

Examinador 2:


Prof. Dr. Marcelo Costa de Lima
(FACFIS – ICEN – UFPA)

Examinador 3:


Prof. Dr. Sanclayton Geraldo Carneiro Moreira
(FACFIS – ICEN – UFPA)

Belém-PA, 16 de dezembro de 2019.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todas as pessoas e instituições que me permitiram atingir este marco na minha vida acadêmica.

À minha família, em especial aos meus pais, que dedicaram suas vidas para me fornecer educação, saúde e caráter. Amo vocês e tudo que fizeram por mim.

Aos meus amigos, em especial aos companheiros de laboratório, Leonardo, Diogo, Willian, Pallas, Jhon, Pedro, Luís, João Marcelo, Jason, Eric e Jefferson, pelas histórias, (muitas) risadas e discussões. Aos demais amigos da turma, Gabriel, Bruno, Brendo, Eliezer, e Jhonatan, os quais também chegaram nesta etapa; são igualmente importantes. Aos amigos que encontrei durante a vida, especialmente na graduação, a todos os jovens do Clube do Problema, e a minha companheira Yara pelo suporte e paciência, meu muito obrigado.

Ao meu orientador Newton Martins Barbosa Neto por me dar a oportunidade de desenvolver o potencial que eu nem sabia que tinha. Obrigado por abrir a porta e receber três garotos perdidos quando mais precisavam. Afinal, “se é pau de jangada é pau que boia”. Sentar-nos-emos a pua.

Aos professores que encontrei durante a graduação, especialmente aos professores da Banca Examinadora que aceitaram fazer parte desse fechamento de ciclo. Agradeço especificamente ao Prof. Sanclayton pelo apoio técnico durante as medidas com a disponibilização do espectrofotômetro portátil.

À Universidade Federal do Pará e às Agências de Fomento à Pesquisa, CAPES, CNPq e FAPESPA, principalmente ao CNPq pelo apoio financeiro durante a maior parte deste projeto.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos a montagem e teste de uma prática de laboratório utilizada para medição e análise do estado de polarização um feixe de luz arbitrário. Baseada nos formalismos dos parâmetros Stokes para polarização e das matrizes de Mueller, esta pode ser efetivamente implementada sob a perspectiva de dois grandes eixos da Universidade: Ensino e Pesquisa. No primeiro, pois a metodologia utilizada fornece um excelente recurso no ensino de conceitos mais avançados em cursos de Óptica Física; e no segundo, uma vez que a técnica, sendo adaptada, pode ser utilizada para investigação espectroscópica de fenômenos relacionados a direções preferenciais, ou seja, anisotrópicos. Este trabalho estabelece o primeiro passo na análise de tal fenomenologia em amostras materiais de interesse da comunidade de ciências dos materiais, seja na análise de emissão fluorescente ou de luz transmitida; tanto em sólidos (filmes finos) quanto em líquidos (soluções). Para isso, geramos diferentes estados de polarização da luz controladamente, através da construção de um simulador de polarização, e os estados foram analisados segundo a técnica da lâmina de quarto-de-onda rotatória aqui mostrada. Esta estabelece que o sinal transmitido pela lâmina rotatória seguida de um polarizador linear é modulado segundo uma superposição harmônica de uma base de estados de polarização. Em nossos experimentos, produzimos os estados que formam esta base utilizando outros polarizadores, e os analisamos no comprimento de onda para o qual a lâmina de onda tem retardância de um quarto de onda; em 445 nm. Dessa forma, mostramos que a técnica funciona correta e satisfatoriamente para determinação dos estados da base, e de estados mistos, onde o sinal pode ser entendido como uma superposição de porções de tais estados. Por fim, analisamos os resultados experimentais fenomenologicamente, de forma a esclarecer a física de como a técnica funciona; dada a fundamentação teórica estabelecida.

Palavras-chave: Óptica; Instrumentação; Polarização; Parâmetros de Stokes; Anisotropia.

ABSTRACT

In this project, we present the setup and the implementation of a laboratory practice used to measure and analyze the polarization state of an arbitrary light beam. Backgrounded by the polarization Stokes parameters and Mueller matrices formalisms, it can be effectively implemented under the perspective of two main university principles: Teaching and Research. In the first, because this methodology yields a great resource for teaching more advanced concepts in optics; and in the second, since this technique, being expanded, may be applied in the spectroscopic investigation of phenomena regarding preferential directions; i.e., anisotropic phenomena. This work then establishes the very first step towards the analysis of this phenomenology in real samples of interest for the material science community, either through fluorescent emission or transmission analysis, both in solid (thin films) and liquids (solutions). For that, we prompted different polarization states using a homemade simulator, and then analyzed them according to the rotatable Quarter-Wave plate technique shown here. It says that the transmitted light signal through the wave plate followed by a linear polarizer is modulated as a harmonic superposition of a polarization state basis. In our experiments, we have created the basis states using other polarizers, and analyzed them at the wavelength in which the wave plate has retardance of a quarter wave (or 90°). With this procedure, we have shown the technique works correctly for the determination of the basis states, as well as for mixed states, where the experimental signal may be interpreted as a superposition of portions of that basis states. Finally, we have looked over the experimental results phenomenologically, so the physics of how the technique works could be clarified; given the theoretical background.

Keywords: Optics; Instrumentation; Polarization; Stokes Parameters; Anisotropy.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Esquema da elipse de polarização, com Ângulo de inclinação (Ψ) e Elipticidade (χ)	15
Figura 2 -	Esquema do observador virtual que define convenção adotada para os estados de polarização	20
Figura 3 -	Foto e esquema do aparato experimental	27
Figura 4 -	Esquema de Lâmina de Quarto-de-Onda rotátil	28
Figura 5 -	Curva experimental e ajuste teórico para luz Não-Polarizada	32
Figura 6 -	Esquema de campo elétrico para um feixe de luz não polarizado	33
Figura 7 -	Curva experimental e ajuste teórico para Luz Vertical e Horizontalmente Polarizada	34
Figura 8 -	Esquema de polarização linear sobre os eixos do laboratório	35
Figura 9 -	Esquema de polarização circular devido ação da LQO sobre um feixe polarizado a 45° relativos ao seu eixo rápido	36
Figura 10 -	Curva experimental e ajuste teórico para Luz Linearmente Polarizada à $+45^\circ$ e -45°	38
Figura 11 -	Curva experimental e ajuste teórico para Luz Circularmente Polarizada à Esquerda e Direita	40
Figura 12 -	Simulação de superposição de estados	42
Figura 13 -	Curva experimental e ajuste teórico para luz horizontalmente polarizada utilizando polarizador circular invertido	44
Figura 14 -	Esquema de funcionamento de um Polarizador Circular	45
Figura 15 -	Esquema de efeito de um polarizador linear sobre um feixe de luz	49
Figura 16 -	Esquema de efeito de lâmina de onda de retardância arbitrária	52
Figura 17 -	Esquema de funcionamento de rotator de eixos em um θ arbitrário	53
Figura 18 -	Esquema de elemento polarizador rotacionado	55

LISTA DE ABREVIATÖES

LQO	Lâmina de Quarto-de-Onda	
PLV	Polarizador Linear na Vertical	
LPCE	Luz Polarizada Circularmente à Esquerda	
LPCD	Luz Polarizada Circularmente à Direita	
FL	Fonte de Luz	
PC	Polarizador Circular	
E	Espelho injetor	
PL	Polarizador Linear	
L	Lentes Colimadoras	
A	Analisador	
EP	Espectrômetro Portátil	
U	$S1/S0$	Parâmetro Relativo Um
D	$S2/S0$	Parâmetro Relativo Dois
T	$S3/S0$	Parâmetro Relativo Três
P	Grau de Polarização	
LPH	Luz linearmente Polarizada na Horizontal	
LPV	Luz linearmente Polarizada na Vertical	

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	12
2.1	<i>Elipse de polarização</i>	12
2.2	<i>Formalismo de Stokes</i>	16
2.3	<i>Matrizes de Mueller</i>	23
3	MATERIAIS E MÉTODOS	26
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	30
4.1	<i>Luz Não Polarizada ou Aleatoriamente Polarizada</i>	32
4.2	<i>Luz Linearmente Polarizada na Horizontal e Vertical</i>	34
4.3	<i>Luz Linearmente Polarizada à $+45^\circ$ e -45°</i>	38
4.4	<i>Luz Circularmente Polarizada para Esquerda e para Direita</i>	40
4.5	<i>Luz Linearmente Polarizada usando Polarizador Circular Invertido</i>	44
5	CONCLUSÕES	46
	REFERÊNCIAS	47
	APÊNDICE A	49
a)	<i>MATRIZ DE POLARIZADOR LINEAR</i>	49
b)	<i>MATRIZ DE LÂMINA DE ONDA</i>	51
c)	<i>MATRIZ DE ROTATOR</i>	53
d)	<i>MATRIZ DE ELEMENTO POLARIZADOR ROTACIONADO</i>	54
e)	<i>MATRIZ PARA NOSSO APARATO: MATRIZ DE MUELLER PARA LÂMINA DE ONDA ROTACIONADA SEGUIDA DE POLARIZADOR LINEAR NA VERTICAL</i>	57
	APÊNDICE B	58
a)	<i>REDEFINIÇÃO DE S_2</i>	58
b)	<i>REDEFINIÇÃO DE S_3</i>	60

1 INTRODUÇÃO

Apesar de não pertencer ao grupo de disciplinas fundamentais da grade curricular de Física, a óptica figura como um dos ramos de grande importância desta ciência, uma vez que serve de suporte teórico e técnico para uma vasta quantidade de aplicações tecnológicas em nosso dia a dia, tais como lasers, sensores, fibras ópticas, processamento de imagens, instrumentos de magnificação, espectroscopia de materiais, dentre outros **(YOUNG, 1998; FOWLES, 1975; KENYON, 2008, MELISSINOS, 1966; HECHT, 2002; HERZBERGER, 1958; TKACHENCKO, 2006; DEMTRÖDER, 2003)**. Em função disso, o ensino dessa disciplina em diferentes níveis do aprendizado é de fundamental importância, e o desenvolvimento de metodologias que sejam capazes de ir além da simples transmissão do conhecimento, motivando os estudantes para área e fornecendo, além do conhecimento em óptica, um conjunto mais abrangente de habilidades e competências, é algo bastante desejado.

Para isso, a luz, objeto de estudo da óptica, pode começar a ter sua descrição moderna feita a partir de quatro grandes propriedades intrínsecas, as quais a caracterizam completamente: Intensidade (brilho), Frequência (cor), Coerência (capacidade de interferência) e Polarização (comportamento vetorial). Esta última diz respeito ao comportamento vetorial da luz, isto é, a parte que define uma direção de ação em cada posição e instante. Nesse contexto, este trabalho apresenta o desenvolvimento de uma técnica específica para a medição de estado de polarização de luz, a qual cumpre o papel de ensinar a fundamentação teórica necessária, ao mesmo tempo em que permite aos estudantes desenvolverem suas habilidades experimentais, em especial os interessados em seguir carreira em física experimental. Isso se dá pelo fato do caráter vetorial da polarização da luz fornecer uma poderosa ferramenta na investigação de fenômenos associados a propriedades que dependam de alguma direção preferencial; isto é, fenômenos anisotrópicos. A análise de tal fenomenologia é de grande interesse para aplicações no estudo de materiais, tanto em líquidos, quanto em sólidos, sob a forma de filmes finos, por exemplo. **(ALLIPRANDINI-FILHO et al, 2006; 2009; BORGES JÚNIOR, 2010; DALKIRANIS et al., 2018)**.

Neste trabalho, propomos um experimento que pode ser montado em um curso de laboratório de óptica avançado (último ano do curso) com grande potencial didático, tanto para o ensino aprofundado do fenômeno da polarização quanto para o aprendizado de métodos experimentais. A técnica consiste na medição dos Parâmetros de Stokes para luz via método da Lâmina de Quarto-de-Onda Rotatória **(BERRY; GABRIELSE; LIVINGSTON, 1977; GOLDSTEIN, 2003)** baseada no formalismo matricial de Mueller **(HECHT, 2002; JONES, 1947)**, aplicada a um comprimento de onda compatível com a retardância da lâmina disponível, em 445 nm. Através desse aparato, qualquer estado de polarização poderá ser descrito a partir polarizações de luz características e independentes (polarizações de base), as quais podem ser separadas devido à modulação específica que cada um desses estados sofre ao longo do giro da lâmina de onda, como será descrito a frente. Tal procedimento estabelece o início da implementação de uma versátil técnica para investigação espectral do estado de polarização na emissão e transmissão de luz por polímeros semicondutores. Estes materiais são particularmente interessantes em pesquisas de eletrônica orgânica, e processos de agregação molecular em soluções e filmes finos **(BARBOSA NETO et al., 2018; ULRICH, 2017)**.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 *Elipse de polarização*

Como resultado natural das equações de Maxwell aplicadas ao espaço livre de distribuição de cargas e correntes, obtemos uma equação de onda cuja solução representa uma onda formada por campos elétricos e magnéticos mutuamente interagentes que oscilam no tempo e no espaço (**GRIFFITHS, 1999; NUSSENZVEIG, 1997; GOLDSTEIN, 2003**). A solução mais simples para tal equação de onda, segundo essas condições, assume a forma de onda plana monocromática, i.e., um campo vetorial cujas componentes são perpendiculares à direção de propagação. Tomando o eixo z do sistema de referência do laboratório como a direção de propagação do feixe de luz, podemos escrever as componentes cartesianas do campo elétrico da onda plana como (**GOLDSTEIN, 2003**):

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(\tau) = \text{Re}\{E_{0x} e^{i\tau}\} \quad (1-a)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} \cos(\tau + \delta) = \text{Re}\{E_{0y} e^{i\delta} e^{i\tau}\} \quad (1-b)$$

Onde, por conveniência, as **equações (1)** foram escritas em um sistema de coordenadas em que a amplitude em x é máxima no plano $z=0$, no instante $t=0$, além de tomar o eixo z como a direção de propagação. Essa escolha é completamente válida, uma vez que espaço é isotrópico, e ela não passa de uma escolha conveniente de origem e orientação dos eixos cartesianos. O termo $\tau = \omega t - kz$ é denominado de propagador, e descreve por completo as propriedades de propagação da onda tais como, frequência de oscilação, número de onda, e direção de propagação. A segunda igualdade das **equações (1)** expressa a notação complexa, na qual a parte real da solução representa de forma mais conveniente a função harmônica real, a qual é implicitamente considerada neste trabalho.

Apesar de ser a onda eletromagnética composta de dois campos vetoriais, para avaliarmos suas propriedades de polarização basta observarmos um dos campos, pois suas propriedades de polarização são mutuamente relacionadas pelo produto vetorial $\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}$, sendo $\hat{k}$ o versor que indica a direção de propagação da

onda (**GRIFFITHS, 1999**); isto é, basta descrever o que ocorre com o campo elétrico, e o mesmo estará ocorrendo com o campo de indução magnética perpendicularmente. Além disso, em geral os elementos de polarização (polarizadores, lâminas de onda, interfaces ar-vidro etc.) são meios dielétricos, que interagem de forma mais significativa com o campo elétrico da luz (**YOUNG, 1998**). Tal fato favorece a observação de tais fenômenos com campo elétrico e o determina como convenção para analisarmos o estado de polarização da radiação.

Analogamente ao movimento bidimensional de um projétil sob a ação da gravidade, onde uma equação de trajetória parabólica é obtida pela combinação dos movimentos nas coordenadas cartesianas a partir de sua mútua dependência com o tempo, é possível obtermos uma equação de elipse combinando as coordenadas cartesianas do campo elétrico através de sua dependência mútua com o propagador. Com manipulações algébricas das **equações (1) (NUSSENZVEIG, 1998; GOLDSTEIN, 2003)**, isolamos:

$$\cos \tau = \frac{E_x}{E_{0x}} \Rightarrow \sin \tau = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2} \quad (2)$$

E também,

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\tau + \delta) = \cos \tau \cos \delta - \sin \tau \sin \delta \quad (3)$$

Tal que, substituindo (2) em (3), obtemos:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right) &= \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right) \cos \delta \mp \left(\sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2}\right) \sin \delta \\ \Rightarrow \left[\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right) - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right) \cos \delta\right]^2 &= \left[\mp \sin \delta \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2}\right]^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 \cos^2 \delta - 2 \frac{E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \cos \delta &= \sin^2 \delta - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 \sin^2 \delta \end{aligned}$$

$$\frac{E_x^2(t)}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2(t)}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x(t) E_y(t)}{E_{0x} E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (4)$$

Esta elipse, aqui aplicada no plano tomado em $z=0$, é denominada de elipse de polarização, e representa a forma mais geral de polarização; a de uma elipse inclinada em relação aos eixos cartesianos, como representado na **figura 1**. Todos os casos especiais de polarização são obtidos a partir da elipse de polarização (**NUSSENZVEIG, 1998**), tais como: polarização linear ($\delta = 0 + n\pi$), partindo de:

$$\left[\left(\frac{E_y(t)}{E_{0y}} \right) - \left(\frac{E_x(t)}{E_{0x}} \right) \cos n\pi \right]^2 = 0$$

Conseguimos,

$$E_y(t) = (-1)^n \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x(t) \quad (5)$$

Polarização elíptica ($\delta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ e $E_{0x} \neq E_{0y}$), da **equação (4)**:

$$\frac{E_x^2(t)}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2(t)}{E_{0y}^2} = 1 \quad (6)$$

E circular ($\delta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ e $E_{0x} = E_{0y} = E_0$), como caso da **equação (6)**:

$$E_x^2(t) + E_y^2(t) = E_0 \quad (7)$$

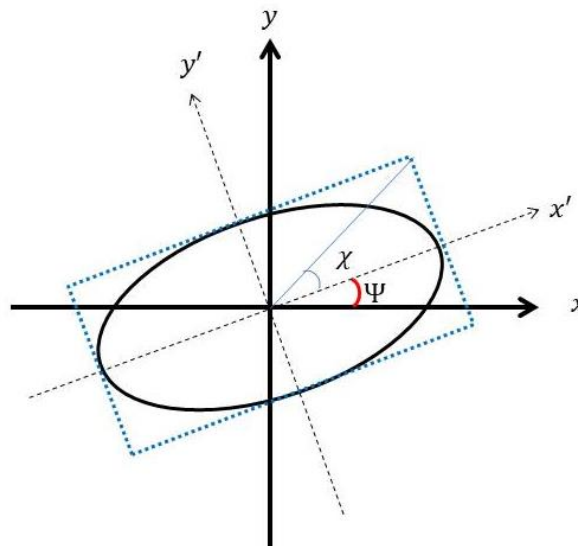
Todas essas relações podem ser expressas geometricamente por dois parâmetros intrínsecos da elipse de polarização: o ângulo de inclinação e a elipticidade, ambos indicados na **figura 1**. Estas quantidades são definidas a partir das amplitudes das componentes cartesianas do campo elétrico e a diferença de fase entre elas como seguem:

$$\tan(2\Psi) = \frac{2 E_{0x} E_{0y} \cos \delta}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \quad (8-a)$$

$$\sin(2\chi) = \frac{2 E_{0x} E_{0y} \sin \delta}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \quad (8-b)$$

Desta maneira, os mesmos casos especiais avaliados anteriormente podem ser vistos geometricamente pelas **relações (8)**. Agora, uma polarização linear tem elipticidade χ nula, e um ângulo de inclinação dependendo da direção do plano de polarização em questão, enquanto uma polarização circular tem $\chi = 45^\circ$, e ângulo de inclinação indeterminado, como esperado, e para uma polarização elíptica, tais grandezas tomam valores intermediários. Vale destacar que o estado de luz não polarizada existe para caso específico em que a elipticidade é nula, e o ângulo de inclinação é indeterminado; isto é, uma polarização linear com todas as possíveis orientações de plano de oscilação. Tal discussão será melhor feita na discussão dos resultados experimentais, mas já é possível notar como de fato o estado de polarização pode ser bem determinado, dada as amplitudes e fases das componentes elétricas do feixe de luz.

Figura 1 - Esquema da elipse de polarização, com Ângulo de inclinação (Ψ) e Elipticidade (χ).



FONTE: Arquivo do autor.

2.2 Formalismo de Stokes

A descrição da polarização da luz através da elipse de polarização, dada pela **equação (4)**, embora teoricamente simples, apresenta o inconveniente de ser experimentalmente impraticável, uma vez que, para a luz visível o período de oscilação da onda eletromagnética é da ordem de 10^{-15} s; muito mais rápido do que qualquer sistema de detecção existente em laboratório seja capaz de medir. Isto ocorre, pois, tais detectores utilizam processos físicos que são correlacionados com a intensidade de campo que incide nestes. Estes processos são em geral muito mais lentos do que o período de oscilação de uma onda eletromagnética. Deste modo, a intensidade; a média temporal do fluxo de energia transportada por uma onda eletromagnética; é o real observável medido nos laboratórios.

Uma alternativa a esta realidade acabou, não exatamente por estes motivos, sendo desenvolvida por Sir George Gabriel Stokes em 1852, enquanto tentava estabelecer uma formulação matemática mais conveniente para se tratar de fenômenos relacionados às leis de interferência de Fresnel-Arago (1818) para feixes parcialmente polarizados em termos de quatro observáveis mensuráveis (**STOKES, 1852 apud SCHAEFER et al., 2007**). Para isso, desenvolveu um formalismo matemático para lidar com a questão da polarização da luz totalmente baseado em medidas de intensidade, ou seja, em medidas realizadas sobre o único observável da luz diretamente detectável em laboratório (**GOLDSTEIN, 2003; KENYON, 2008**). Para construir este formalismo, primeiramente toma-se a média temporal do campo elétrico na elipse de polarização para um período de aquisição do detector (período de um ciclo do processo empregado na detecção da luz). Tal período pode ser considerado infinito se comparado a um ciclo de oscilação da luz. Uma analogia a esse processo ocorre na observação a olho nu de uma fonte luminosa ligada à tensão alternada doméstica, onde o brilho da lâmpada parece se manter constante ao longo de toda a observação, devido o fato do olho humano tomar a média temporal da intensidade absorvida em um intervalo de tempo maior do que o período da rede alternada (**HECHT, 2002**).

Matematicamente, pela linearidade da operação de média, tomar a média temporal da elipse de polarização é equivalente a tomar a média temporal de cada termo dependente do tempo na **equação (4)**,

$$\frac{\langle E_x^2(t) \rangle}{E_{0x}^2} + \frac{\langle E_y^2(t) \rangle}{E_{0y}^2} - 2 \frac{\langle E_x(t) E_y(t) \rangle}{E_{0x} E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (9)$$

de acordo com a **equação (10)**:

$$\langle E_i(t) E_j(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_i(t) E_j(t) dt \quad (10)$$

Utilizando as soluções para o campo elétrico, dadas pelas **equações (1)**, e aplicadas no plano $z=0$. Com isso, vemos que:

$$i) \langle E_x^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_{0x}^2 \cos^2(\omega t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_{0x}^2 \frac{T}{2}$$

$$\therefore \langle E_x(t) \rangle = \frac{E_{0x}^2}{2} \quad (11-a)$$

$$ii) \langle E_y^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_{0y}^2 \cos^2(\omega t + \delta) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_{0y}^2 \frac{T}{2}$$

$$\therefore \langle E_y(t) \rangle = \frac{E_{0y}^2}{2} \quad (11-b)$$

$$iii) \langle E_x(t) E_y(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_{0x} E_{0y} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \delta) dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{0x} E_{0y}}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [\cos(2\omega t + \delta) + \cos(\delta)] dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{0x} E_{0y}}{2} \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2\omega} \sin \left(2 * \frac{2\pi}{T} * T \right) + \cos(\delta) T \right] =$$

$$\therefore \langle E_x(t) E_y(t) \rangle = \frac{E_{0x} E_{0y}}{2} \cos \delta \quad (11-c)$$

Assim, rearranjando algebricamente a média temporal da elipse de polarização, multiplicando por $E_{0x}^2 E_{0y}^2$, e isolando o primeiro termo, conseguimos:

$$\frac{\langle E_x^2(t) \rangle}{E_{0x}^2} + \frac{\langle E_y^2(t) \rangle}{E_{0y}^2} - 2 \frac{\langle E_x(t) E_y(t) \rangle}{E_{0x} E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta$$

$$\Rightarrow \langle E_x^2(t) \rangle E_{0y}^2 = - \langle E_y^2(t) \rangle E_{0x}^2 + 2 \langle E_x(t) E_y(t) \rangle E_{0x} E_{0y} \cos \delta + E_{0x}^2 E_{0y}^2 \sin^2 \delta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} E_{0x}^2 E_{0y}^2 = - \frac{1}{2} E_{0y}^2 E_{0x}^2 + E_{0x}^2 E_{0y}^2 \cos^2 \delta + E_{0x}^2 E_{0y}^2 \sin^2 \delta$$

Para escrevermos a expressão em termos proporcionais à intensidade do feixe, somamos a ambos os lados um termo de forma se a completar quadrados perfeitos:

$$\begin{aligned} \Rightarrow (E_{0x}^4 + E_{0y}^4) + 2 E_{0x}^2 E_{0y}^2 \\ = (E_{0x}^4 + E_{0y}^4) - 2 E_{0y}^2 E_{0x}^2 + (2 E_{0x} E_{0y} \cos \delta)^2 + (2 E_{0x} E_{0y} \sin \delta)^2 \end{aligned}$$

E chegamos na **equação (12)**:

$$(E_{0x}^2 + E_{0y}^2)^2 = (E_{0x}^2 - E_{0y}^2)^2 + (2 E_{0x} E_{0y} \cos \delta)^2 + (2 E_{0x} E_{0y} \sin \delta)^2 \quad (12)$$

Desta forma, os parâmetros de Stokes são naturalmente definidos em termos das amplitudes complexas das coordenadas cartesianas do campo elétrico como se segue:

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 = E_x E_x^* + E_y E_y^* \quad (13-a)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2 = E_x E_x^* - E_y E_y^* \quad (13-b)$$

$$S_2 = 2 E_{0x} E_{0y} \cos \delta = E_x E_y^* + E_y E_x^* \quad (13-c)$$

$$S_3 = 2 E_{0x} E_{0y} \sin \delta = i[E_x E_y^* - E_y E_x^*] \quad (13-d)$$

Sendo as amplitudes complexas definidas, segundo as **equações (1)**, como $E_x = E_{0x}$ e $E_y = E_{0y} e^{i\delta}$, satisfazendo as definições dadas pela segunda igualdade

das **equações (13)**, de forma que todos eles satisfazem a seguinte condição, vista da **equação (12)**,

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (14)$$

a qual representa que a soma quadrática das partes polarizadas resultam no total.

Construídos desta forma, os parâmetros de Stokes descrevem qualquer estado de polarização da luz. Essa afirmação pode ser facilmente verificada, uma vez que as definições dos parâmetros de Stokes em **(13)** são completamente equivalentes às definições das quantidades geométricas da elipse de polarização, dadas em **(8)**, de forma que as redefinimos para:

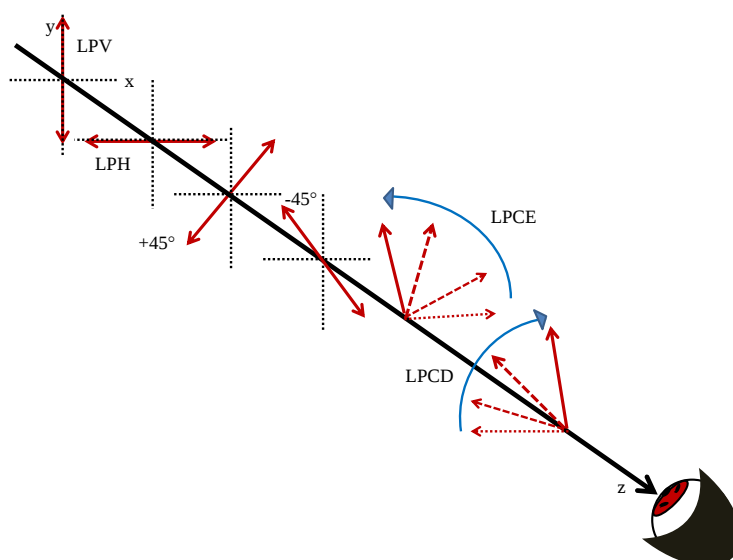
$$\tan(2\Psi) = \frac{S_2}{S_1} \quad (15-a)$$

$$\sin(2\chi) = \frac{S_3}{S_0} \quad (15-b)$$

Isto é, encontradas as quatro quantidades mensuráveis de Stokes, o estado de polarização da parte polarizada fica univocamente determinado, já que a elipse de polarização associada ao feixe fica completamente descrita.

Com isso, o significado de cada um destes pode ser visto a partir das próprias **equações (13)**, ou das **equações (B15)** presentes no **Apêndice B**. Da **equação (13-a)** verifica-se que o parâmetro S_0 , que é sempre positivo, associa-se à intensidade total da luz por ser a soma de termos proporcionais as intensidades em cada eixo cartesiano. Já o parâmetro S_1 , definido pela **equação (13-b)**, é correlacionado a intensidade de luz polarizada na horizontal ($S_1 > 0$) e vertical ($S_1 < 0$). Já os parâmetros S_2 e S_3 , das **equações (13-c) e (13-d)**, são relacionados com a intensidade de luz cuja polarização está nas direções $+45^\circ$ ($S_2 > 0$) e -45° ($S_2 < 0$), e circular a direita ($S_3 > 0$) e circular a esquerda ($S_3 < 0$), respectivamente. É importante ressaltar que a convenção de polarização adotada aqui é definida em acordo com um observador que olha na direção de propagação da luz vindo ao seu encontro, como ilustrado na **figura 2**.

Figura 2 - Esquema do observador virtual que define convenção adotada para os estados de polarização. Seguindo a direção Z, eles são: LPV (luz linearmente polarizada na vertical); LPH (luz linearmente polarizada na horizontal); 45° (luz linearmente polarizada a $\pm 45^\circ$); LCPD (Luz circularmente polarizada para direita); LCPE (Luz circularmente polarizada para esquerda).



FONTE: Arquivo do autor.

Vale ressaltar que uma das vantagens imediatas do formalismo de Stokes sobre a elipse polarização ou sobre as matrizes de Jones (**FOWLES, 1975; JONES, 1947; KENYON, 2008**) é que embora os estados de polarização definidos acima sejam estados de polarização para luz completamente polarizada, os parâmetros de Stokes são também capazes de descrever qualquer estado de polarização, inclusive a luz não polarizada – ou também chamada, aleatoriamente polarizada (**HECHT, 2002**). Mais especificamente, o formalismo de Stokes estabelece um novo paradigma para a descrição do estado de polarização, principalmente para luz parcialmente polarizada. O que segundo uma visão geométrica seria ineficaz de descrever, com os parâmetros de Stokes temos uma nova perspectiva para falar do estado de polarização de qualquer feixe. Por isso, a partir daqui não precisaremos mais nos referir aos parâmetros da elipse, Ψ e χ , uma vez que os Parâmetros de Stokes já são suficientes para descrever qualquer que seja o estado de polarização.

Além disso, vê-se da condição de soma das partes dada pela **equação (14)** que esta na verdade descreve o caso para luz totalmente polarizada, uma vez que a intensidade total (associada ao parâmetro S_0) é neste caso é igual à soma das intensidades associadas a todos os possíveis estados de polarização da luz.

Todavia, a luz parcialmente polarizada pode ser compreendida como a superposição de uma porção totalmente polarizada com outra não polarizada, desde que se garanta que suas componentes sejam independentes, portanto incoerentes, entre si. A superposição é feita pela soma algébrica dos (pseudo) vetores de Stokes correspondentes a cada porção, isto é, estruturas matriciais que contêm os quatro parâmetros de Stokes associados ao feixe de luz analisado. Este é chamado de pseudo-vetor por não obedecer rigorosamente a todas as condições de um espaço vetorial. Contudo, como a aditividade e transformações lineares dessas estruturas matriciais são válidas para esta entidade, a partir daqui o chamaremos somente de vetor de Stokes, de forma a evitarmos que o formalismo matemático irrelevante para a análise de dados o torne fisicamente incompreensível. Assim, tal superposição incoerente pode ser escrita na forma:

$$\vec{S}_{total} = \vec{S}_{pol} + \vec{S}_{n-p} \quad (16)$$

E pela condição dada pela igualdade em **(14)**, temos:

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{0np} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Nota-se que a intensidade total mensurada pode ser escrita como a soma das intensidades das porções totalmente polarizada e totalmente despolarizada. Assim, vemos agora uma redefinição da igualdade **(14)** para o caso de luz parcialmente polarizada, onde a soma quadrática das partes polarizadas é menor do que a intensidade total medida, como segue na desigualdade **(18)**, agora estabelecendo a relação mais geral entre os parâmetros de Stokes para qualquer estado de polarização:

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (18)$$

Segue da desigualdade estabelecida na **equação (18)** a definição de grau de polarização da luz que é escrito como a razão entre a intensidade de luz completamente polarizada e a total do feixe analisado, segundo:

$$P = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0} \quad (19)$$

sendo $0 \leq P \leq 1$. De acordo com a **equação (19)**, $P=0$ corresponde a luz completamente não polarizada enquanto $P=1$, corresponde a luz totalmente polarizada, e por fim, valores intermediários entre de P correspondem a luz parcialmente polarizada.

2.3 Matrizes de Mueller

O formalismo matricial de Mueller estabelece uma ferramenta extremamente útil para o tratamento matemático da interação de luz polarizada com elementos ópticos polarizantes, tais como polarizadores, lâminas de onda, entre outros. Segundo essa estruturação, qualquer que seja o elemento óptico considerado, assume-se que seu efeito atua linearmente sobre o vetor de Stokes (**GOLDSTEIN, 2003; HECHT, 2002; KENYON, 2008**). Em outras palavras, quando um feixe de luz polarizada atravessa um elemento óptico polarizante, os quatro parâmetros de Stokes, os quais compõem o vetor de Stokes e descrevem o estado de polarização de luz de saída, são obtidos a partir de uma combinação linear dos parâmetros de Stokes da luz incidente, tendo como coeficientes termos associados ao elemento óptico (**GOLDSTEIN, 2003; JONES, 1947**). Desta forma, o já citado vetor de Stokes associado àquele feixe é modificado via uma operação matricial entre a matriz que representa a ação do elemento polarizante com o vetor de Stokes do tal feixe incidente, na forma:

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

a qual pode ser escrita em notação reduzida como uma transformação linear, segundo:

$$\vec{S}' = M \vec{S} \quad (21)$$

A matriz M depende unicamente da forma como o elemento óptico interage com o feixe de luz, sendo cada elemento representado por sua própria matriz de Mueller. Para o problema abordado aqui, apenas duas matrizes de Mueller precisam ser definidas: 1) A matriz de Mueller para uma lâmina de quarto de onda (LQO); isto é, um cristal birrefringente que pode defasar componentes ortogonais do campo elétrico em 90° em fase, ou um quarto do comprimento de onda em distância, cujo eixo rápido (eixo que exibe o menor índice de refração) é rotacionado, no sentido horário segundo o mesmo observador que define as polarizações, de um ângulo θ ,

em relação a um eixo de referência; nesse caso, eixo y do referencial do laboratório e 2) A matriz de Mueller de um polarizador ideal cujo eixo de transmissão se encontra na direção vertical (coordenada y do referencial do laboratório).

Para um observador tomado no referencial do laboratório que observa o feixe de luz de acordo com a **figura 2**, a matriz de Mueller para a lâmina de quarto de onda rotacionada, deduzida no **Apêndice A**, é dada por (**GOLDSTEIN, 2003**):

$$M^{LQO}(2\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta & -\sin 2\theta \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & -\cos 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Assim, de acordo com a **equação (20)**, o vetor de Stokes da luz emergente da LQO é determinado pelo produto da **equação (22)** e o vetor de Stokes da luz incidente:

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \cos^2 2\theta - S_2 \sin 2\theta \cos 2\theta - S_3 \sin 2\theta \\ -S_1 \sin 2\theta \cos 2\theta + S_2 \sin^2 2\theta - S_3 \cos 2\theta \\ S_1 \sin 2\theta + S_2 \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (23)$$

Já a matriz de Mueller para um polarizador linear vertical (PLV), também deduzida no **Apêndice A**, é dada por:

$$M_p^V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Assim, se o PLV interagir com o feixe logo após este passar pela LQO, o vetor de Stokes resultante para a luz emergente que passa pelos dois elementos é dado por:

$$\begin{bmatrix} S''_0 \\ S''_1 \\ S''_2 \\ S''_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (S_0 - S_1 \cos^2 2\theta + S_2 \sin 2\theta \cos 2\theta + S_3 \sin 2\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Uma vez que S_0'' representa a intensidade total da luz que emerge do sistema formado pela LQO e pelo PLV, esta será exatamente a intensidade de luz medida pelo detector localizado após os elementos ópticos. Usando identidades trigonométricas apropriadas, a intensidade de luz medida para cada posição angular do eixo rápido da LQO é escrita em relação aos parâmetros de Stokes da luz incidente como **(ARNOLDST, 2011; BERRY; GABRIELSE; LIVINGSTON, 1977; GOLDSTEIN, 2003)**:

$$I(\theta) \equiv S_0'' = \frac{1}{2} \left[\left(S_0 - \frac{S_1}{2} \right) - \frac{S_1}{2} \cos 4\theta + \frac{S_2}{2} \sin 4\theta + S_3 \sin 2\theta \right] \quad (26)$$

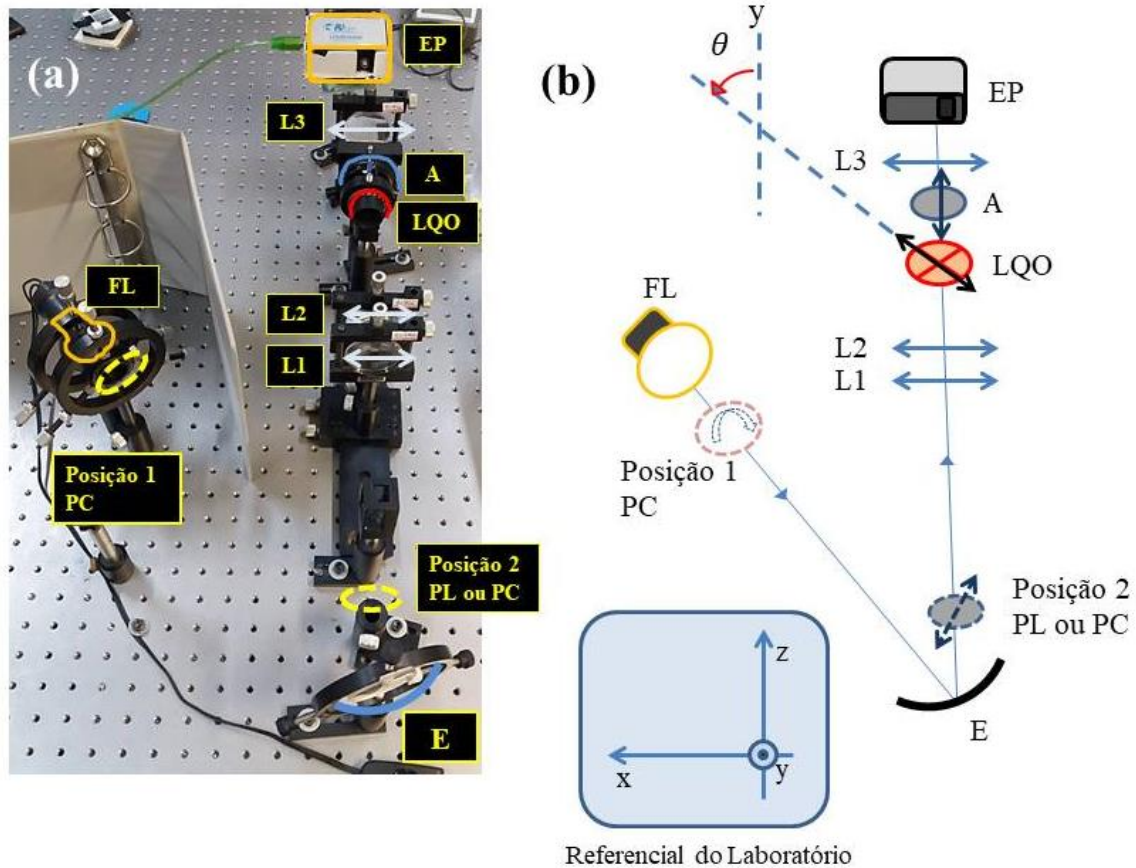
Esta equação estabelece uma série de Fourier truncada, onde os termos de amplitude definem o estado de polarização do feixe que entrou no sistema de análise, ou seja, para um dado estado de polarização da luz incidente, o sistema composto pela LQO rotacionada seguida do PLV fornece uma curva de intensidade harmônica, descrita pela **equação (26)**. Isto é, cada curva de pontos experimentais, aqui batizada de curva de Stokes, pode ser interpretada como uma superposição de funções harmônicas ortogonais cujos coeficientes (ou amplitudes) dependem univocamente do estado de polarização do feixe incidente; uma superposição de estados de polarização da base de polarizações fundamentais. Para o caso de uma curva de Stokes obtida para radiação monocromática, a maneira mais direta de obtermos os Parâmetros de Stokes é ajustando a curva experimental com a **equação (26)**, pelo método de mínimos quadrados não linear, o que é facilmente realizado via softwares de análise de dados apropriados.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

O sistema experimental utilizado para adquirir o sinal de luz polarizado consiste de uma LQO de ordem zero para 445 nm, um PLV e um fotodetector. Para obtermos os diferentes estados de polarização da luz utilizada no estudo, construímos um simulador de luz polarizada que consiste de um LED branco não polarizado, emitindo entre 420 nm e 700 nm, e elementos ópticos polarizantes (polaroides linear e circular) posicionados após o LED, de acordo com a **figura 3**, onde se pode ver a disposição dos espelhos, polarizador, analisador, lâmina de quarto de onda, lentes e detector. Aqui é importante frisar que com o polarizador circular empregado obtém-se luz polarizada circularmente à esquerda (LPCE), por fabricação. Desta forma, luz polarizada circularmente à direita (LPCD) foi obtida posicionando o polarizador antes do espelho injetor, enquanto LPCE é obtida posicionando o polarizador circular após o espelho injetor. Assim, é possível obter todos os possíveis estados de polarização básicos: Linear horizontal e vertical, linear $\pm 45^\circ$ e circular à esquerda e à direita, ou combinações.

Em relação ao fotodetector, este pode ser de qualquer tipo, tal como detectores de silício. Todavia, devido a nossa fonte ser policromática, tais detectores inseririam erros na medida, uma vez que aquisicionam a intensidade integrada da fonte de luz para todos os comprimentos de onda incidente e a lâmina de quarto de onda empregada é específica para 445 nm. Vale ressaltar que a técnica aqui descrita assume que a lâmina de onda rotatória tem retardância de um quarto de onda, e por isso a análise com a lâmina utilizada se restringe ao comprimento de onda especificado por fabricação. Para evitar este erro optamos por utilizar como detector um espectrômetro portátil *Ocean Optics* USB 2000, hoje já bastante empregados em laboratórios avançados de ensino. Desta forma, é possível analisar as intensidades na curva de Stokes pertencente apenas ao comprimento de onda específico para a lâmina de quarto de onda empregada (445 nm).

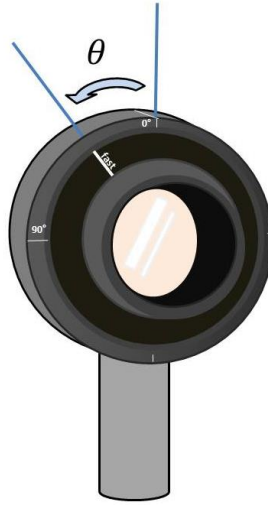
Figura 3 - (a) Foto do aparato experimental e (b) esquema indicando a disposição dos elementos empregados. Seguindo a direção de propagação tem-se: FL: Fonte de Luz; PC: polarizador circular; E: espelho injetor; PL: Polarizador linear; L1 e L2: Lentes colimadoras; LQO: Lâmina de quarto de onda; A: analisador (polarizador linear); L3: Lente focalizadora; EP: espectrômetro portátil.



FONTE: Arquivo do autor.

No experimento, espectros são adquiridos para diferentes posições angulares da lâmina de quarto de onda, cuja rotação ocorre em torno do eixo paralelo a direção de propagação do feixe de luz em passos de 10° , como esquematizado na **figura 4**. As curvas de Stokes para todos os estados de polarização investigados foram obtidas a partir dos espectros medidos, selecionando-se a intensidade em 445 nm para cada espectro.

Figura 4 – Esquema da Lâmina de Quarto-de-onda rotátil



FONTE: Arquivo do autor

A partir daqui, chamaremos cada parâmetro de Stokes relativo à intensidade total pelas letras que começam os números dos índices que as diferenciam; isto é, S_1/S_0 agora será U (de Um), S_2/S_0 será D (de Dois), e S_3/S_0 será T (de Três), de forma que, ao rearranjarmos a equação de ajuste teórico para:

$$I(\theta) = \frac{S_0}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \frac{S_1}{S_0} \right) - \frac{1}{2} \frac{S_1}{S_0} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \frac{S_2}{S_0} \sin 4\theta + \frac{S_3}{S_0} \sin 2\theta \right] \quad (27)$$

Renomeamos os termos, tal que a equação utilizada nos ajustes passa a ser dada por:

$$I(\theta) = \frac{S_0}{2} \left[\left(1 - \frac{U}{2} \right) - \frac{U}{2} \cos 4\theta + \frac{D}{2} \sin 4\theta + T \sin 2\theta \right] \quad (28)$$

Assim, os ajustes teóricos das curvas experimentais por mínimos quadráticos não linear, os quais fornecem automaticamente a intensidade total do feixe, S_0 , os parâmetros de Stokes relativos e seus erros padrão, foram realizados com a **equação (26)**, porém aqui só trataremos dos parâmetros relativos. O grau de polarização e seu erro padrão associado foi calculado com a **equação (19)**, utilizando os valores dos parâmetros de Stokes obtidos do ajuste das curvas experimentais, e agora é escrita como:

$$P = \sqrt{U^2 + D^2 + T^2} \quad (29)$$

Desta definição, encontramos o desvio padrão associado segundo a regra de propagação de erros, dada por **(BEVINGTON; ROBINSON, 2002)**:

$$\delta P = \sqrt{\left(\frac{\partial P_{(U,D,T)}}{\partial U} \delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial P_{(U,D,T)}}{\partial D} \delta D\right)^2 + \left(\frac{\partial P_{(U,D,T)}}{\partial T} \delta T\right)^2}$$

Portanto, da **equação (29)**:

$$\delta P = \sqrt{\frac{(U \delta U)^2 + (D \delta D)^2 + (T \delta T)^2}{U^2 + D^2 + T^2}} \quad (30)$$

onde as quantidades acompanhadas de delta minúsculo representam seus respectivos desvios padrão.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir, apresentamos os resultados experimentais acompanhados dos ajustes teóricos realizados com a **equação (28)**. As medidas foram obtidas para um feixe de luz dito: não polarizado; linearmente polarizado na vertical e na horizontal; linearmente polarizado $\pm 45^\circ$; e circularmente polarizado a esquerda e a direita. Importante mencionar que, para facilitar a comparação dos resultados obtidos, apresentamos os parâmetros de Stokes relativos à intensidade total; U, D e T, em gráficos construídos sempre na mesma escala vertical e horizontal. Os valores encontrados para os parâmetros de Stokes relativos, juntamente com o grau de polarização obtido para cada experimento, segundo a **equação (29)**, estão organizados na **tabela 1**.

Tabela 1. Parâmetros relativos de Stokes (U, D e T) obtidos para diferentes de estados de polarização da luz e seus respectivos Graus de Polarização (P). Na tabela, LPH: luz polarizada linearmente na horizontalmente; LPV: luz polarizada linearmente na verticalmente; $+45^\circ$: luz polarizada linearmente à 45° ; -45° : luz polarizada linearmente à -45° ; LPCD: luz polarizada circularmente à direita; LPCE: luz polarizada circularmente à esquerda; PC: polaroide circular.

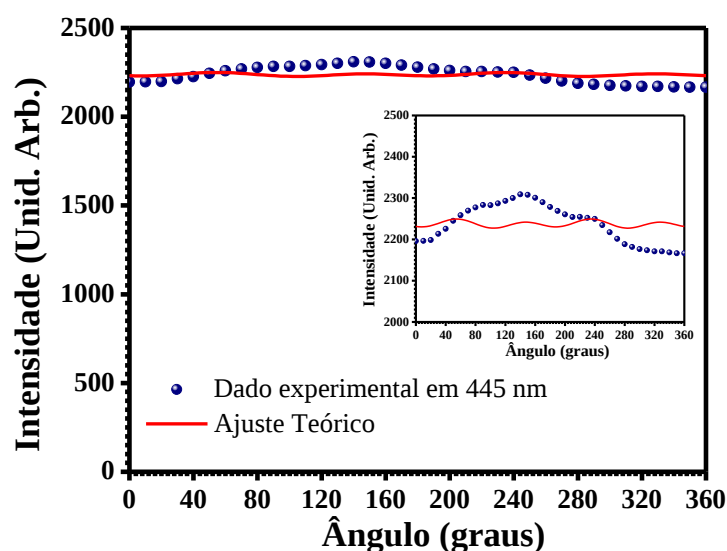
Estado de polarização	U	D	T	P
Não polarizado	0.01 ± 0.01	-0.01 ± 0.01	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.01
LPH	0.99 ± 0.01	0.01 ± 0.01	-0.08 ± 0.00	1.00 ± 0.01
LPV	-0.98 ± 0.03	0.18 ± 0.02	-0.07 ± 0.01	1.00 ± 0.03
$+45^\circ$	0.17 ± 0.01	1.00 ± 0.01	-0.11 ± 0.01	1.02 ± 0.02
-45°	-0.02 ± 0.01	-0.98 ± 0.02	-0.02 ± 0.01	0.98 ± 0.02
LPCE	-0.33 ± 0.02	-0.10 ± 0.02	-0.92 ± 0.01	0.98 ± 0.01
LPCD	-0.31 ± 0.06	0.17 ± 0.05	0.92 ± 0.04	0.98 ± 0.04
PC invertido	1.00 ± 0.01	0.00 ± 0.01	0.00 ± 0.01	1.00 ± 0.01

Vale ressaltar que os erros, ou desvios padrão, associados a cada medida foram obtidos diretamente da estatística do ajuste de curva pelo método numérico de Mínimos Quadrados Não Linear, de natureza gaussiana (**BEVINGTON; ROBINSON, 2002**), e dessa forma, não são consequência da estatística para uma amostragem de vários experimentos. Isto é, cada curva experimental foi obtida para **uma** rotação completa, de 360°, da LQO, e não da média estatística dentre 10 rotações completas (amostras) independentes, como poderia ser feita, mas não foi, uma vez que cada rotação completa é feita à mão, e leva cerca de 10 minutos, entre passos de 10° e aquisições de espectros. Para um sistema motorizado e automatizado, tal estatística sobre amostragem se torna mais convenientemente praticável. Mesmo assim, neste trabalho estimamos o desvio padrão para o grau de polarização (P) segundo a regra de propagação de erros, já que este depende de U, D e T, cujos valores e desvios padrão são estimados do ajuste da curva teórica. Dessa forma, todos os desvios padrão tem a mesma natureza, e a análise da implementação da técnica permanece válida. Agora, analisemos cada caso simulado.

4.1 Luz Não Polarizada ou Aleatoriamente Polarizada

Como mostrado na **figura 5**, a intensidade medida em 445 nm para a luz não polarizada é aproximadamente constante para qualquer posição angular da LQO, não apresentando a curva de Stokes qualquer padrão harmônico. Tal estado de polarização foi obtido retirando qualquer elemento polarizante de antes do aparato de análise; assim somente a emissão não polarizada do LED foi analisada.

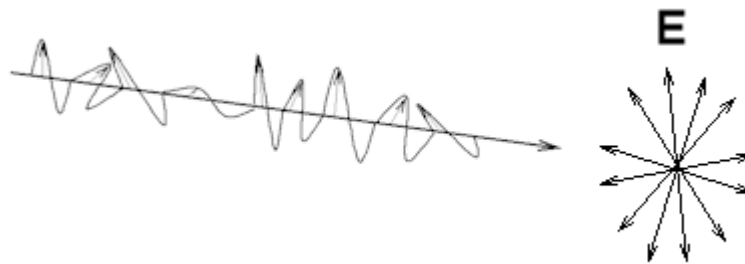
Figura 5 - Curva Experimental e ajuste teórico para luz não polarizada em 445 nm. Os pontos azuis são dados experimentais medidos em 445 nm e a curva vermelha sólida é o ajuste teórico realizado com a **equação (28)**. Inserido no gráfico mostramos sua magnificação para melhor visualização do seu comportamento na escala vertical.



Tal comportamento decorre do fato da luz incidente ser não polarizada, uma vez que esta é interpretada como um conjunto polarizações lineares independentes entre si em todas as possíveis direções de oscilações, como na **figura 6** de maneira a forma uma combinação de componentes ortogonais incoerentes, cujas fases relativas mudam tão rápida e aleatoriamente, tal que a média temporal dos parâmetros de Stokes associados a essa diferença de fase se anula (**HECHT, 2002**). Para esta condição, a LQO funciona apenas como uma simples lâmina de vidro, e o analisador filtra apenas uma das componentes incoerentes presente no eixo perpendicular à direção de análise. Pode-se observar também uma pequena oscilação em intensidade no sinal medido, a qual pode ser atribuída a flutuações na intensidade da FL devido seu caráter aleatório. Por fim, devido à ausência de padrão

harmônico significativo na curva de Stokes, causado pela natureza aleatoriamente polarizada da luz, e mostrado no **sub-gráfico da figura 5**, os parâmetros U, D e T são mensurados como aproximadamente nulos, como mostrado na **tabela 1**, o que implica, como esperado da **equação (28)**, em uma curva de Stokes quase constante.

Figura 6 – Esquema do campo elétrico para um feixe de luz não polarizado.

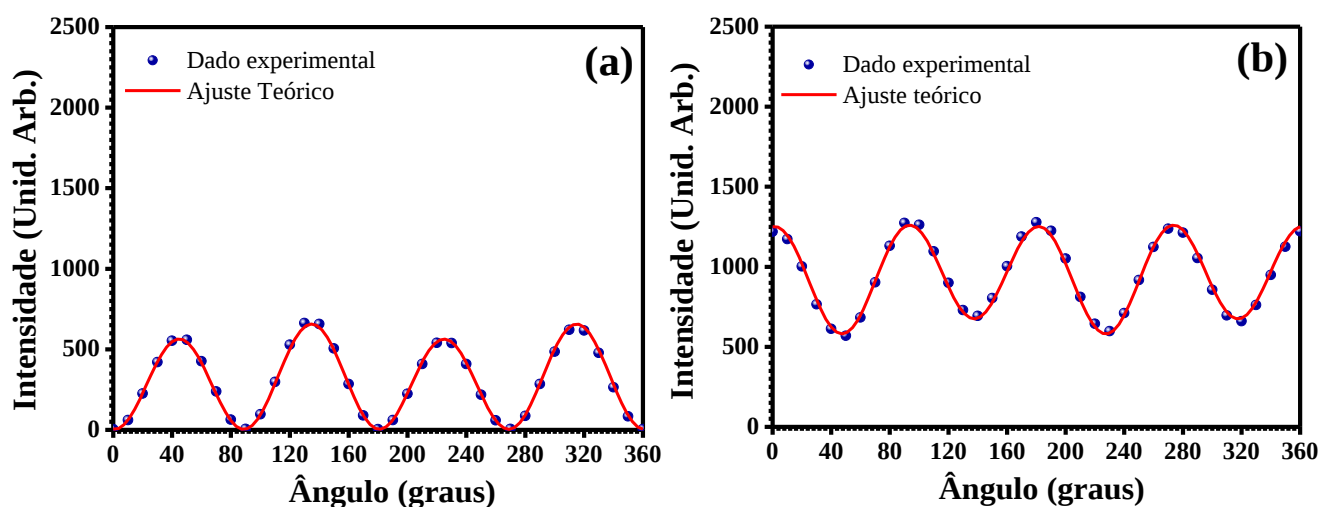


FONTE: Polarization. Disponível em:
<http://labman.phys.utk.edu/phys222core/modules/m6/polarization.html>

4.2 Luz Linearmente Polarizada na Horizontal e Vertical

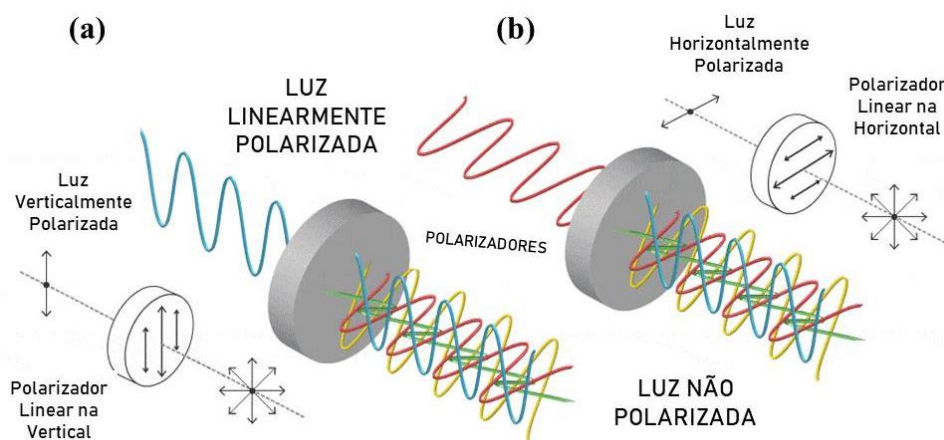
No **figura 7** as curvas de Stokes obtidas para luz linearmente polarizada na direção horizontal (LPH), **figura 7(a)**, e vertical (LPV), **figura 7(b)**, são apresentadas.

Figura 7 - Curva Experimental e ajuste teórico para luz linearmente polarizada na direção (a) horizontal e (b) vertical. Os pontos azuis são dados experimentais medidos para o comprimento de onda 445 nm e a curva vermelha sólida é o ajuste teórico realizado com a **equação (28)**.



Tais estados de polarização foram obtidos acrescentando-se um polarizador linear do tipo Polaroid no caminho do feixe após o espelho injetor, de forma que o plano de polarização é definido pela posição do eixo de transmissão desse polarizador, como esquematizado na **figura 8**, e cuja marcação fica indicada no seu suporte giratório.

Figura 8 – Esquema de polarização linear sobre os eixos do laboratório.



FONTE: Adaptado de *How 3D glasses work*. Disponível em:

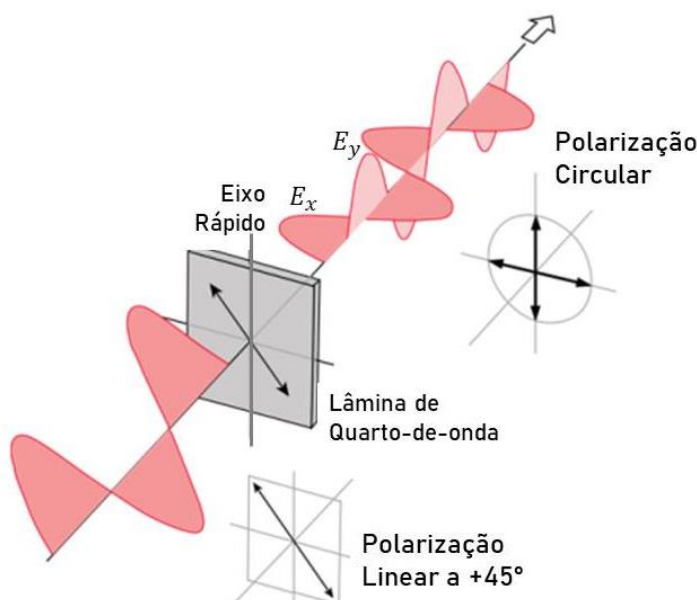
<https://scienceworldbang.blogspot.com/2019/01/how-3d-glasses-work.html>.

É observado que a curva de Stokes para LPH, na **figura 7(a)**, cuja representação esquemática está na **figura 8(b)** possui intensidade nula em cada múltiplo de 90° para posição angular da LQO, o que está em acordo com o fato da lâmina de onda ser um cristal birrefringente; isto é, possuir diferentes refrações em direções ortogonais, chamados como eixo rápido (de menor refração) e eixo lento (de maior refração) (**FOWLES, 1975; HECHT, 2002; KENYON, 2008; YOUNG, 1998**). Quando o eixo rápido da LQO (nosso eixo de referência) está a 0° (90°), em relação ao eixo vertical do referencial do laboratório, o campo elétrico da luz polarizada horizontalmente se propaga apenas no eixo lento (rápido) da LQO, não exercendo nenhum tipo de efeito sobre sua polarização. Nesta condição, a LQO se comporta novamente como uma lâmina de vidro ordinária. Desta forma, quando o feixe atinge o analisador (um polarizador linear na vertical), a luz horizontalmente polarizada é completamente extinta e nenhum sinal é captado pelo detector.

Além disso, as posições dos máximos ocorrem quando a LPH possui componentes ortogonais de mesma amplitude projetadas sobre os dois eixos (rápido e lento) da LQO; isto é, quando o eixo rápido da LQO está em posições angulares múltiplas de 45° em relação ao eixo de oscilação da LPH. Essas posições são exatamente as intermediárias entre as duas posições de mínimo, como esperado. Devemos notar que nesta configuração angular a LPH é transformada em luz

circularmente polarizada, como mostra a **figura 9**, de modo que, quando incide sobre o analisador, esta polarização possui uma de suas componentes extinta, e a outra é transmitida, fornecendo assim a maior intensidade permitida para este estado de polarização, a qual corresponde à metade da intensidade total do feixe (**FOWLES, 1975; NUSSENZVEIG, 1998**). O resultado final desta combinação de ações da lâmina de onda e do analisador sobre a luz polarizada fornece o padrão cossenoidal, com períodos de 90° esperado da **equação (28)** quando $U \approx 1.0$ e $D \approx T \approx 0$.

Figura 9 – Esquema de polarização circular devido ação da lâmina de onda sobre um feixe polarizado a 45° relativos ao seu eixo rápido.



FONTE: Adaptado de NAVE, R. **Quarter-Wave Plate**. Disponível em: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/phyopt/quarwv.html#c3>.

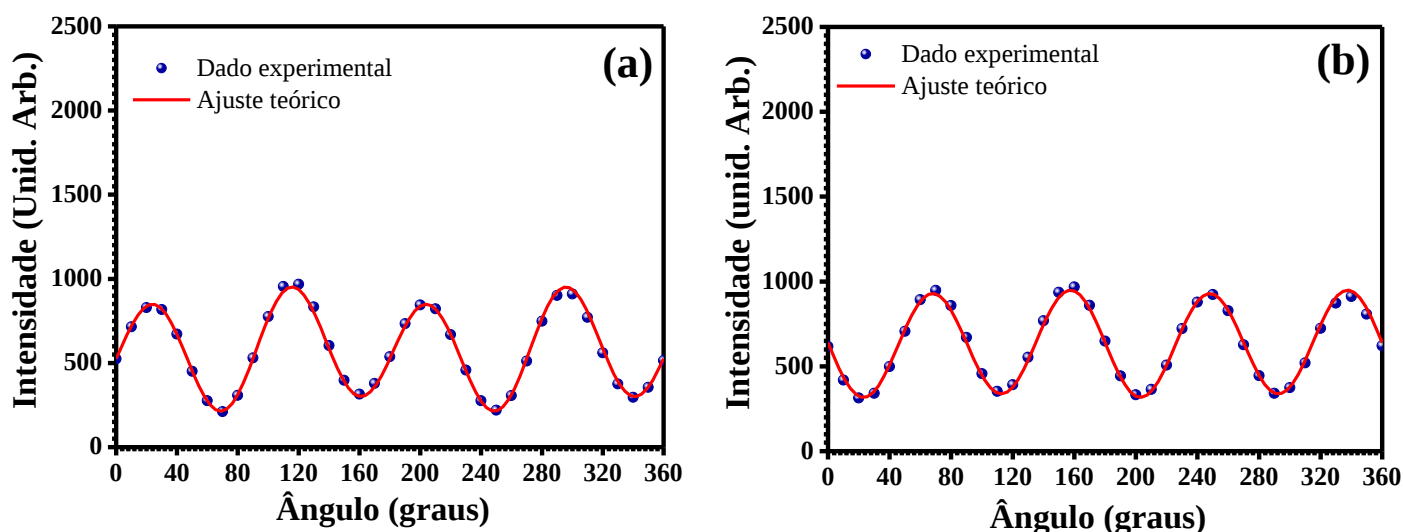
A curva de Stokes para a LPV, esquematizado na **figura 8(a)**, mostra um comportamento similar, mas com um mínimo de intensidade não nulo defasado de 90° em relação à curva de Stokes obtida para a LPH. Assim, quando as posições angulares da LQO são múltiplos de 90° , o campo elétrico da LPV também oscila apenas sobre o eixo com uma única refração (rápido ou lento) da LQO. Todavia, o estado de polarização não alterado agora é transmitido pelo analisador que, como dito antes, é ajustado na direção vertical. Por outro lado, quando a LPV se torna circularmente polarizada, novamente como no esquema da **figura 9**, o que ocorre

quando o eixo rápido da LQO está a 45° com a direção vertical, apenas metade da intensidade total é transmitida uma vez que uma das componentes é extinta pelo analisador. Tal fato gera um mínimo não nulo, equivalente ao máximo obtido para a curva de Stokes obtida para a LPH. Novamente, obtém-se da combinação de ações da lâmina de onda e do analisador sobre a luz polarizada o padrão cossenoidal de período de 90° , como esperado da **equação (28)** quando $U \approx -1,0$, e $D = T = 0$. Os valores numéricos dos parâmetros relativos e graus de polarização estimados do ajuste de curvas estão contidos na **tabela 1** e demonstram resultados satisfatórios, e que são consistentes com o esperado da simulação: polarizações lineares nos eixos.

4.3 Luz Linearmente Polarizada à $+45^\circ$ e -45°

As curvas de Stokes medidas para luz polarizada linearmente a $\pm 45^\circ$ são apresentadas na **figura 10** e verifica-se que estas possuem comportamento senoidal com período de 90° , além de se encontrarem em posições intermediárias da escala de intensidade se comparadas a LPH e LPV. Tais estados são obtidos com a rotação do mesmo polarizador do tipo Polaroid utilizado no experimento anterior, bastando alinhar seus eixos de transmissões com as direções em questão, como indicaria uma adaptação na **figura 8 mostrada na seção anterior**.

Figura 10 - Curva Experimental e ajuste teórico para luz linearmente polarizada na direção (a) $+45^\circ$ (b) -45° . Os pontos azuis são dados experimentais medidos para o comprimento de onda 445 nm e a curva vermelha sólida é o ajuste teórico realizado com a **equação (28)**.



Também se observa que estas, assim como as curvas obtidas para LPH e LPV, possuem amplitudes invertidas entre si, com o máximo de uma correspondendo ao mínimo da outra e vice-versa. Todavia, diferentemente do par de estados anterior, as curvas obtidas agora, não possuem suas curvas deslocadas em intensidade (escala vertical) uma em relação a outra e sempre apresentam uma intensidade de mínimo diferente de zero. Tal fato é esperado, pois, para polarizações à $\pm 45^\circ$ sempre há uma componente de polarização transmitida pelo analisador (posicionado na direção vertical do referencial do laboratório). Isto pode ser facilmente compreendido sabendo-se que havendo luz linearmente polarizada a $\pm 45^\circ$, a LQO ao ser rotacionada passa por posições angulares que geram desde luz

circularmente polarizada, em múltiplos de 90° iniciando pelo 0° , como indica a **figura 9**, até luz linearmente polarizada a $\pm 45^\circ$, quando a posição angular da lâmina também é $\pm 45^\circ$; de forma que posições intermediárias geram estados elípticos de polarização. O único fator de distinção entre a luz polarizada circularmente e a linearmente a $\pm 45^\circ$ está na diferença de fase entre as componentes ortogonais que as compõem, o que não é detectado pelo analisador. Tal fato justifica a ausência de deslocamento na escala de intensidade observado para a LPH e LPV, além de explicar porque as intensidades medidas para posições angulares múltiplas de 45° (iniciando-se do 0°) são aproximadamente as mesmas. Por fim, os máximos (mínimos) são obtidos quando a LQO gera uma luz de saída elipticamente polarizada, com semieixo maior na direção de transmissão (extinção) do analisador.

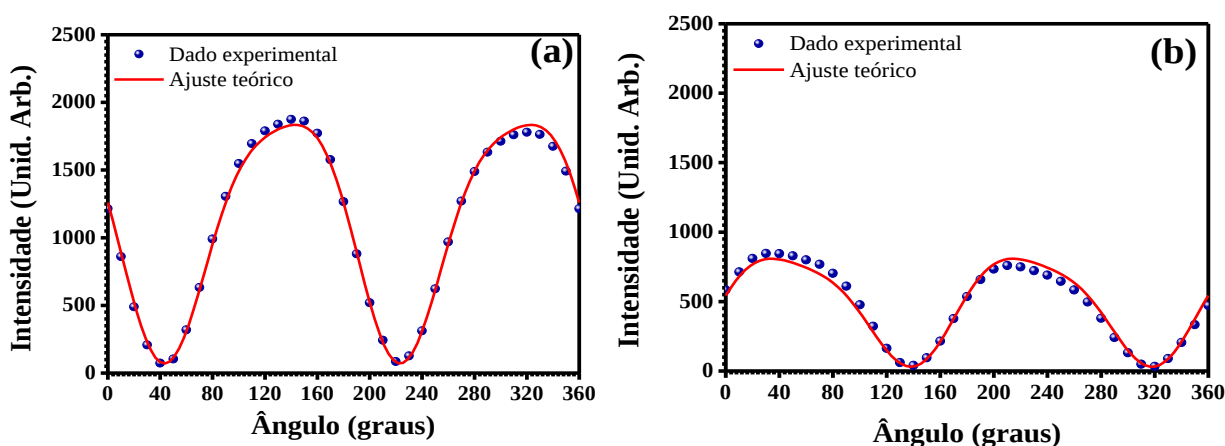
O comportamento experimental observado está em perfeito acordo com a **equação (28)**, sendo o padrão observado o esperado quando $U = T = 0$, sendo $D \approx 1,0$, para luz polarizada a $+45^\circ$ e $D \approx -1,0$ para -45° , como mostrado na **tabela 1**, onde os valores dos parâmetros relativos conseguidos dos ajustes mostram boas estimativas para os casos simulados. Para o caso de simulação de polarização a $+45^\circ$, houve uma porção maior de polarização nos eixos, U , o que pode ser facilmente compreendido como uma imprecisão maior na posição angular do eixo de transmissão do polarizador linear de simulação, tendo esse provavelmente sido posicionado em um pouco menos de $+45^\circ$, gerando uma componente maior na direção horizontal, como mostra $U = +0.17 \pm 0.01$ para tal simulação. Mesmo assim, a análise e os valores numéricos são consistentes com a modelagem teórica, e demonstram o bom funcionamento do aparato.

4.4 Luz Circularmente Polarizada para Esquerda e para Direita

Para investigar luz circularmente polarizada, foi usado um polarizador circular também do tipo Polaroid de máquina fotográfica e utilizamos a técnica de Stokes para calibrá-lo e obter o sentido em que este polariza a luz circularmente, direita (horário) ou esquerda (anti-horário). Tal procedimento foi feito, pois, nas especificações do polarizador circular tal informação não é fornecida. Na **figura 11(a)** apresentamos a curva de Stokes obtida para o polarizador circular posicionado logo após o espelho injetor do feixe (posição 2 na **figura 3(b)**). Esse posicionamento garante que o sentido da luz circularmente polarizada é o gerado pelo Polaroid.

De acordo com os parâmetros relativos de Stokes, resumidos na **tabela 1**, conclui-se que o polarizador circular utilizado gera luz circularmente polarizada para esquerda ($T = -0,922$); ou seja, um observador virtual posicionado atrás do detector olhando para o espelho vê a luz girar no sentido anti-horário, como mostrado na **figura 2**. Verifica-se também que uma porção de luz linearmente polarizada na vertical também é gerada pelo Polaroid ($U = -0.33$). Também se nota que a porção de luz linearmente polarizada na direção -45° é desprezível ($D = -0.10$) quando comparado com a porção de luz circular, T . Esses resultados indicam que o Polaroid circular investigado não é capaz de gerar luz perfeitamente circular no comprimento de onda analisado (445 nm), de forma que, no lugar, gera-se luz elipticamente polarizada, devido as componentes de polarização linear. Na **figura 11**, vemos como tal imperfeição na simulação de polarização circular é refletida no padrão da curva experimental.

Figura 11 - Curva Experimental e ajuste teórico para luz circularmente polarizada à (a) esquerda e à (b) direita. Os pontos azuis são dados experimentais medidos para o comprimento de onda 445 nm e a curva vermelha sólida é o ajuste teórico realizado com a **equação (28)**.



Além disso, visando verificar os mecanismos de funcionamento do polarizador circular e algumas propriedades da ótica de polarização, realizamos medidas com este posicionado antes do espelho injetor (posição 1 **figura 3(b)**). Na **figura 11(b)** mostramos a curva de Stokes obtida para esta configuração, com uma clara diminuição de intensidade total advinda de perdas pelo novo posicionamento do polarizador, cujo suporte acaba por bloquear parte da luz que entraria no sistema caso este estivesse após o espelho injetor. Agora, vale lembrar que o sentido da polarização circular ser modificado por reflexão já é conhecido da literatura (**FOWLES, 1975; GOLDSTEIN, 2003; HECHT, 2002**). Assim, esse experimento propositalmente avalia que se polarizarmos a luz circularmente antes de refletirmos o feixe para o aparato de medida, o sentido de sua porção de polarização circular deve ser invertido, com uma troca de sinal no parâmetro de Stokes associado a tal polarização, em relação ao experimento anterior.

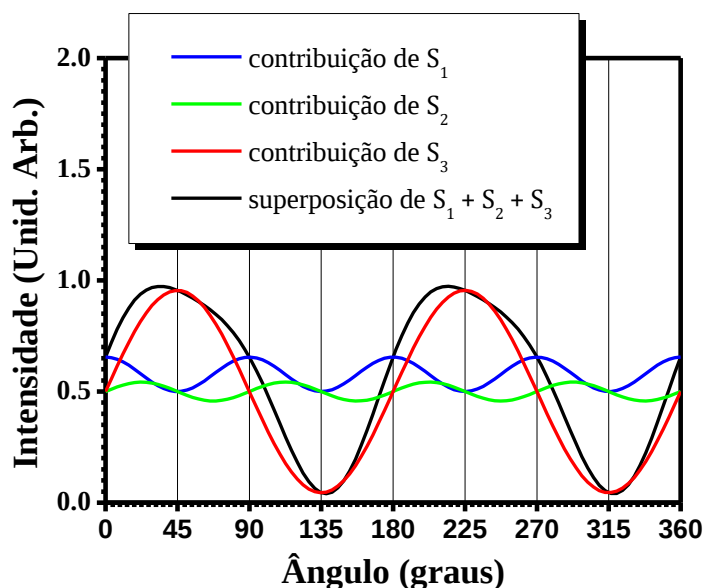
De fato, os parâmetros de relativos de Stokes obtidos a partir do ajuste da curva na **figura 11(b)** indicam que a luz é composta majoritariamente por luz circularmente polarizada a direita ($T = 0.92$), mas com uma porção de luz linearmente polarizada na vertical ($U = -0.31$), e uma pequena porção projetada na direção $+45^\circ$ ($D = 0.17$), as quais são responsáveis por distorcer a polarização circular para um caso elíptico de rotação invertida, devido a inversão da elipse de polarização ocorrido na reflexão de injeção.

É possível notar a mudança no sentido da polarização circular com a reflexão diretamente da inversão da relação de amplitude quando comparamos as **figuras 11(a) e 11(b)**. Note que a posição angular de máximo (mínimo) na **figura 7(a)** corresponde a posição de mínimo (máximo) na **figura 7(b)**. Esta inversão está de acordo com o comportamento previsto pela **equação (28)**, onde, para luz circularmente polarizada $U = D = 0$, tal que $T \approx 1.0$ para luz circularmente polarizada a direita, e $T \approx -1.0$ para luz circularmente polarizada a esquerda.

Contudo, muito embora a **equação (28)** preveja um comportamento senoidal para as curvas de Stokes medidas para luz com polarização puramente circular, o formato peculiar observado para as curvas de Stokes na **figura 11** pode ser compreendido como sendo causado pela superposição de diferentes estados de polarização; a superposição das porções de estado de polarização “da base”. Como visto, de acordo com a **equação (28)**, cada estado de polarização contribui para a intensidade de forma independente segundo a base de funções de Fourier. Da

tabela 1, vemos que a luz que emerge do polaroide circular, embora possua a maior parte da luz circularmente polarizada, também apresenta componentes de luz linearmente polarizadas na direção vertical e à $\pm 45^\circ$. Além de menor amplitude, estas contribuições possuem períodos diferentes da contribuição atribuída a polarização circular. Tal processo se torna demasiado complicado de ser explicado fenomenologicamente a partir da ideia de elipse de polarização. Todavia, o uso do formalismo de Stokes e a ideia de superposição de estados da base simplificam substancialmente a tarefa. Tal fato é ilustrado na **figura 12**, onde os gráficos referentes às componentes linear vertical, linear $\pm 45^\circ$, e circular a direita são apresentados bem como o resultado de sua superposição. As curvas na **figura 12** para polarizações puramente linear e circular foram obtidas da **equação (28)**, supondo as outras contribuições nulas. Os valores dos parâmetros de Stokes utilizados para construir teoricamente o gráfico da **figura 12** são os valores relativos a S_0 , obtidos do ajuste da curva na **figura 11(b)**. Como as contribuições são percentuais de S_0 , e são as quantidades mais importantes na descrição da polarização da luz, o valor da intensidade total se torna completamente arbitrário para esta análise, permitindo-nos escolher $S_0 = 1$ u.a. sem nenhuma perda qualitativa na análise sobre superposição.

Figura 12 – Simulação de superposição de estados. Curva de Stokes obtida para luz linearmente polarizada na vertical (linha sólida azul) linearmente polarizada a $+45^\circ$ (linha sólida verde) e circularmente polarizada à direita (linha sólida vermelha). Curva resultante da superposição das três componentes de polarização (linha sólida preta).

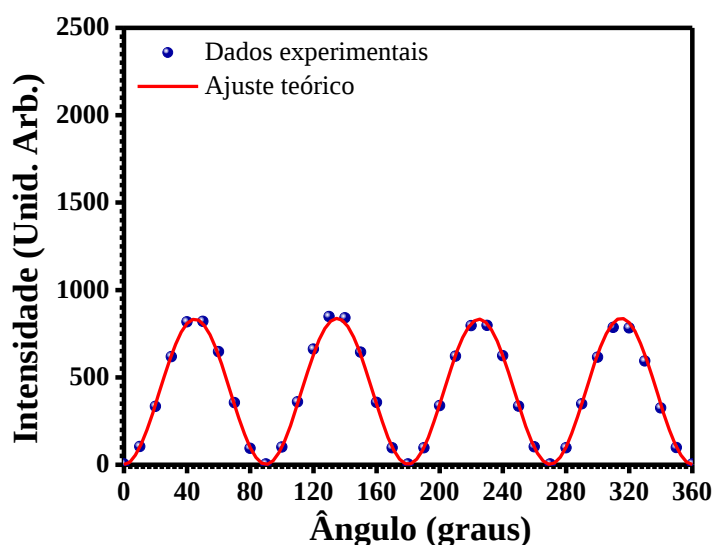


Vê-se que a curva de Stokes resultante da superposição das três componentes de polarização (linha sólida preta na **figura 12**) é bastante similar a curva experimental mostrada na **figura 11**, já que foi construída com os parâmetros relativos retirados do seu ajuste teórico. Ou seja, a forma da curva de Stokes presente na **figura 11** não é nenhum erro do experimento, mas um efeito da superposição das contribuições da base estados de polarização. Agora, de fato podemos pensar nos parâmetros de Stokes como uma base de estados de polarização, obtidas a partir de um observável físico mensurável (a intensidade da luz), com o qual podemos descrever qualquer estado de polarização da luz, inclusive o estado não polarizado; obtido quando $U = D = T = 0$.

4.5 Luz Linearmente Polarizada usando Polarizador Circular Invertido

Por fim, visando entender o funcionamento do Polaroid circular e verificar um fato sobre sua montagem, utilizamos da técnica dos parâmetros de Stokes para aprofundar nosso entendimento de como esse elemento óptico afeta o estado de polarização da luz. Para isto, invertemos o polarizador circular, sendo este rotacionado de 180° ao longo do eixo vertical perpendicular à mesa óptica (eixo y no sistema de referência do laboratório). Feito isso, o experimento foi realizado, e a curva de Stokes obtida para esta configuração é mostrada na **figura 13**.

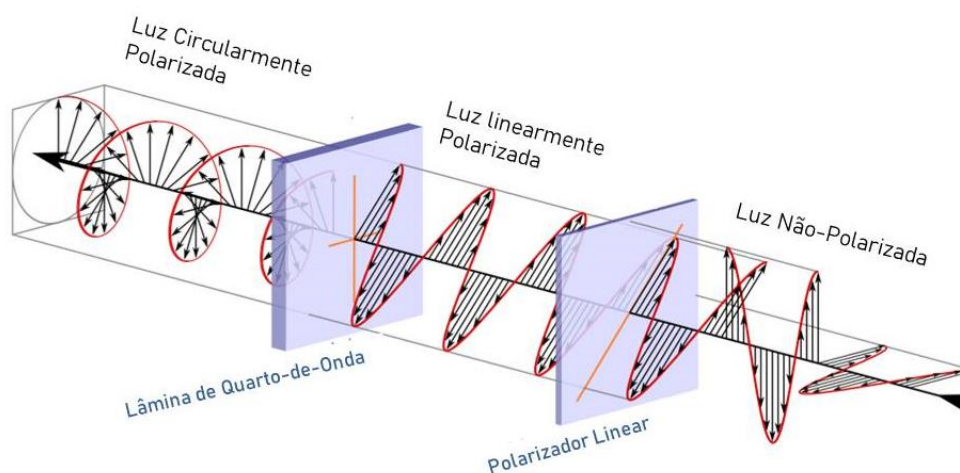
Figura 13 - Curva Experimental e ajuste teórico para luz polarizada pelo polaroide circular invertido. A curva vermelha sólida corresponde ao ajuste obtido com a **equação (28)** e os círculos cheios azuis aos pontos experimentais.



Os parâmetros relativos de Stokes, sumarizados na **tabela 1**, indicam que o polarizador circular invertido gera um estado de polarização puramente linear na direção horizontal, o que mostra que este grau de liberdade modifica bastante o estado de polarização da luz gerado pelo dispositivo. A diferença no estado de polarização da luz, causado apenas pela inversão do Polaroid, pode ser explicado a partir do princípio de funcionamento deste elemento. O polarizador circular é formado pela combinação de dois elementos ópticos; um polarizador linear na horizontal seguido de uma placa de quarto de onda posicionado a 45° (HECHT,

2002). Estes são montados e alinhados em uma plataforma mecânica que também pode acoplar o polarizador circular em câmeras fotográficas. Desta forma, quando a luz não polarizada passa pelo polarizador horizontal, esta é polarizada linearmente em uma direção cujas componentes se propagam através dos eixos com diferentes refrações da lâmina de quarto de onda posicionados posteriormente à 45°. Tal configuração gera luz polarizada com uma porção circular de grande magnitude, e este processo está esquematizado na **figura 14**.

Figura 14 – Esquema de funcionamento de um Polarizador Circular



FONTE: Adaptado de How 3D glasses work. Disponível em:

<https://scienceworldbang.blogspot.com/2019/01/how-3d-glasses-work.html>.

Todavia, quando o dispositivo é invertido, a sequência de elementos ópticos é invertida e o feixe não polarizado se propaga primeiro pela lâmina de onda, com este feixe agora se propagando da esquerda para direita na **figura 14**. Uma vez que as componentes ortogonais da luz não polarizada (ou aleatoriamente polarizada) são incoerentes, e, portanto, suas fases variam independentemente uma da outra, uma defasagem de um quarto de onda entre as mesmas não gera resultado algum, pois continuarão incoerentes. Assim, como explicado na sessão de luz não polarizada, a lâmina não afetará tal estado aleatoriamente polarizado. Em seguida, quando a luz não polarizada se propaga pelo polarizador linear, esta emerge com o estado de polarização gerado por este último elemento, tal que a posição do eixo de transmissão seu plano de polarização; nesse caso, convenientemente escolhido na horizontal, o que explica a curva de Stokes mostrada na **figura 13**.

5 CONCLUSÕES

Propomos neste trabalho uma prática experimental factível de ser implementada em laboratórios avançados de ensino de óptica, e na formação de novos estudantes interessados em óptica e aplicações. Aqui, o autor desenvolveu toda a fundamentação teórica necessária para domínio da análise de dados, base para a construção da prática capaz de determinar completamente o estado de polarização de qualquer feixe de luz. Simultaneamente com a montagem do aparato, um simulador de luz polarizada foi desenvolvido para a calibragem do sistema, sendo este capaz de gerar de forma controlada, com uma fonte de luz não polarizada e polarizadores luz linearmente polarizada na vertical e horizontal e a $\pm 45^\circ$, assim como polarização mista com grande componente de luz circularmente polarizada.

Com isso, as curvas de Stokes relacionadas a cada estado de polarização foram investigadas, e seu comportamento fenomenológico, discutido. Todos os resultados experimentais estão de acordo com a modelagem teórica de Stokes-Mueller apresentada, implicando no bom funcionamento da prática experimental, e assegurando que esta pode ser montada em laboratórios de ensino sem muitas dificuldades. Além disso, vale ressaltar que caso fontes monocromáticas sejam utilizadas, como lasers, a detecção pode ser feita com fotodetectores simples, não sendo necessário o uso do espectrômetro portátil.

Por fim, a montagem desta técnica até o atual estágio estabelece o primeiro passo para sua expansão em trabalhos futuros, nos quais pretendemos montar um sistema mais robusto capaz de construir *espectros de estados de polarização*. Com essa versátil e barata técnica estabelecida, poderemos avançar com o estudo espectroscópico em amostras reais, como, por exemplo, em análises de emissão fluorescente de polímeros orgânicos conjugados, em filmes e soluções, cujos entendimentos são de grande interesse no desenvolvimento da eletrônica orgânica e dispositivos ambientalmente sustentáveis. Além disso, pode-se estender seu uso para muitas outras técnicas envolvendo interação da luz com a matéria, como Espectroscopia Raman, Dicroísmos Linear e Circular, e até, como maiores desafios técnicos, polarimetria resolvida no tempo e topologia microscópica polarimétrica.

REFERÊNCIAS

ALLIPRANDINI-FILHO, P.; DA SILVA, R.A.; BARBOSA NETO, N.M.; MARLETTA, A. Partially polarized fluorescence emitted by MEHPPV in solution. **Chemical Physics Letters**, 469, 94-98, 2009.

ALLIPRANDINI-FILHO, P.; SILVA, R.A.; DA SILVA, G.B.; BARBOSA NETO, N.M.; CURY, L.A.; MOREIRA, R.L.; MARLETTA, A. Measurement of the Emitted Light Polarization State in Oriented and Non-Oriented PPV Films, **Macromolecular Symposia**, 245-246, 406-409, 2006.

ARNOLDT, v. S. **Rotating Quarter-Wave Plate Stokes Polarimeter**, Tese de Bacharelado em Física, Universidade de Bonn, 2011.

BARBOSA NETO, N. M. B.; SILVA, M. D. R.; ARAÚJO, P. T.; SAMPAIO, R. N. Photoinduced Self-Assembled Nanostructures and Permanent Polaron Formation in Regioregular Poly(3-hexylthiophene). **Advanced Materials**, 2018.

BENINGTON, P. R.; ROBINSON D. K. **Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences**. 3a edição. McGraw-Hill: New York, 2002.

BERRY, H.G.; GABRIELSE, G.; LIVINGSTON, A.E. Measurement of the Stokes parameters of light, **Applied Optics**, Vol.16, No. 12, 1977.

BORGES JÚNIOR, G.F. **Estudo da Transição de Fase em Cristais Líquidos Utilizando a Técnica de Elipsometria de Emissão**. 2010. 61 f. Monografia (Física de Materiais) – Faculdade de Física, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2010.

DALKIRANIS, G.G. et al. Emission ellipsometry as a tool for luminescent liquid Crystal phase transition identification. **Physical Review E**. Vol. 98, 2018.

DEMTRÖDER, W. **Laser spectroscopy: Basic concepts and instrumentation**, 3rd ed., Springer, New York, 2003.

FOWLES, G.R. **Introduction to Modern Optics**, Dover Publications, Inc., New York, 1975.

GOLDSTEIN, D. **Polarized Light**, 2nd ed., Marcel Dekker Inc., 2003.

GRIFFITHS, D.J. **Introduction to Electrodynamics**, 3rd ed., Prentice Hall Inc., New Jersey, 1999.

HALLIDAY, D; RESNICK, R. **Física**, Vol. 4, 4a ed., LTC, Rio de Janeiro, 1984.
HECHT, E. **Optics**, 4th ed., Addison Wesley, San Francisco, 2002.

HERZBERGER, M. **Modern geometrical optics**, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.

HOW 3D glasses work. 2019. Disponível em:
<https://scienceworldbang.blogspot.com/2019/01/how-3d-glasses-work.html>

JONES, R.C. A New Calculus for the Treatment of Optical Systems, V. A More General Formulation, and Description of Another Calculus, **Journal of the Optical Society of America**, Vol. 37, No 2. 1947.

KENYON, I.R. **The light fantastic**: A modern introduction to classical and quantum optics, Oxford University Press, Oxford, 2008.

MELISSINOS, A.C. **Experiments in Modern Physics**, Acamedic Press, Inc., San Diego, 1966.

NAVE, R. **Quarter-Wave Plate**. 2000. Disponível em: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/phyopt/quarwv.html#c3>.

NUSSENZVEIG, H.M. **Curso de Física Básica**: Eletromagnetismo, Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1997.

NUSSENZVEIG, H.M. **Curso de Física Básica**: Ótica, Relatividade, Física Quântica, Vol. 4, 1ª Ed. Editora Blucher, Rio de Janeiro, 1998.

SCHAEFER, B.; COLLET, E.; SMYTH, R.; BARRETT, D.; FRAHER, B. Measuring the Stokes polarization parameters, **American Journal of Physics**, Vol. 75, No. 2, 2007.

STOKES, G. G. Composition and resolution of streams of polarized light from multiple sources, **Trans. Cambridge Philos. Soc.** 9. 399-416 (1852); Reprinted in **Mathematical and Physical Papers** (Cambridge U. P., London, 1901), Vol. 3, pp. 233-258

TKACHENCKO, N.V. **Optical spectroscopy**: Methods and instrumentations, Elsevier, Amsterdam, 2006.

ULRICH, S. **Stokes spectroscopy**: the development of a novel method to acquire and interpret polarized emission spectra – applications to Poly(3heylthiophene) and P(NDI2OD-T2). PhD Thesis, the University of Alabama, 2017.

APÊNDICE A

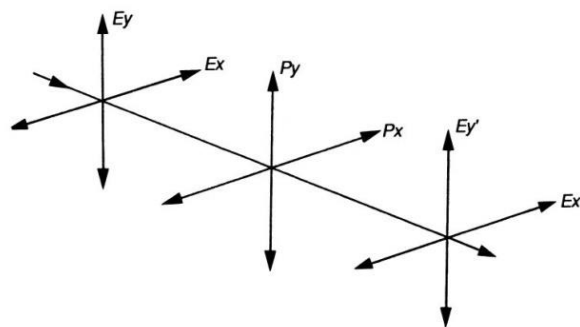
Dedução das Matrizes de Mueller utilizadas

Todas as deduções teóricas envolvendo matrizes de Mueller começam com uma hipótese de como as amplitudes (complexas) das componentes elétricas da radiação são afetadas por tal elemento óptico. Uma vez que os Parâmetros de Stokes são definidos em termos dessas amplitudes quadráticas, e conseguimos estabelecer relações de efeito causado pelo elemento, obteremos como o vetor de Stokes incidente é modificado por cada item polarizante. As demonstrações aqui feitas são adaptações, ou outros casos, das que podem ser encontradas em **Goldstein (2003)**.

a) *MATRIZ DE POLARIZADOR LINEAR*

Um polarizador real pode ser entendido como o elemento que transforma as amplitudes complexas das componentes elétricas da radiação incidente de acordo com o esquema da **figura (15)**.

Figura 15 – Esquema de efeito de um polarizador linear sobre um feixe de luz.



FONTE: GOLDSTEIN, D. Polarized Light, Ed. 2, 2003.

Algebricamente, a relação de as amplitudes mudam pode ser escrita da seguinte maneira:

$$E'_x = p_x E_x \quad (\text{A1 - a})$$

$$E'_y = p_y E_y \quad (\text{A1 - b})$$

Tal que os coeficientes de transmissão satisfazem a seguinte condição, conivente com a conservação de energia do sistema:

$$0 \leq p_x \leq 1 \quad (\text{A2} - \text{a})$$

$$0 \leq p_y \leq 1 \quad (\text{A2} - \text{b})$$

Mas, das definições dos parâmetros de Stokes em termos das amplitudes complexas, aplicados ao feixe que emerge do elemento, são dadas por:

$$S'_0 = E'_x E'^*_x + E'_y E'^*_y = S'_0 (S_0, S_1, S_2, S_3) \quad (\text{A3} - \text{a})$$

$$S'_1 = E'_x E'^*_x - E'_y E'^*_y = S'_1 (S_0, S_1, S_2, S_3) \quad (\text{A3} - \text{b})$$

$$S'_2 = E'_x E'^*_y + E'_y E'^*_x = S'_2 (S_0, S_1, S_2, S_3) \quad (\text{A3} - \text{c})$$

$$S'_3 = i[E'_x E'^*_y - E'_y E'^*_x] = S'_3 (S_0, S_1, S_2, S_3) \quad (\text{A3} - \text{d})$$

Com isso, uma vez que temos como as amplitudes incidentes e emergentes se relacionam, podemos estabelecer a relação entre os parâmetros de Stokes respectivamente associados. Substituindo as **equações (A1)** nas **definições (A3)**, após algum algebrismo, encontramos:

$$S'_0 = \left(\frac{p_x^2 + p_y^2}{2} \right) S_0 + \left(\frac{p_x^2 - p_y^2}{2} \right) S_1 \quad (\text{A4} - \text{a})$$

$$S'_1 = \left(\frac{p_x^2 - p_y^2}{2} \right) S_0 + \left(\frac{p_x^2 + p_y^2}{2} \right) S_1 \quad (\text{A4} - \text{b})$$

$$S'_2 = p_x p_y S_2 \quad (\text{A4} - \text{c})$$

$$S'_3 = p_x p_y S_3 \quad (\text{A4} - \text{d})$$

Como já foi definido, os coeficientes da transformação linear dos vetores de Stokes definem a Matriz de Mueller do elemento óptico transformador. Nesse caso, portanto, conseguimos a matriz de Mueller para um polarizador arbitrário:

$$M^p = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_x^2 + p_y^2 & p_x^2 - p_y^2 & 0 & 0 \\ p_x^2 - p_y^2 & p_x^2 + p_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_x p_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p_x p_y \end{bmatrix} \quad (\text{A5})$$

E o caso particular que utilizamos no trabalho na aplicação da técnica foi o do Polarizador Linear Vertical, quando a componente em x do campo elétrico é completamente absorvida ($p_x = 0$, logo $E'_x = 0$), e, para um elemento ideal, toda a componente em y é transmitida ($p_y = 1$, logo $E'_y = E_y$), de forma que a matriz utilizada toma a forma mostrada no texto principal:

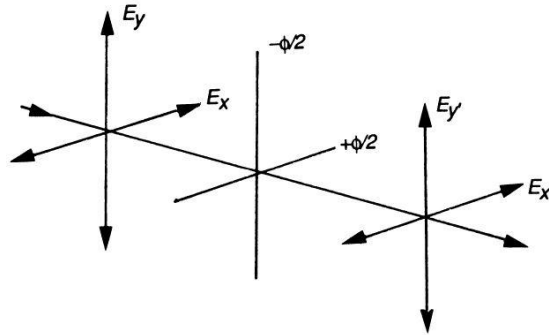
$$M^p = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A6})$$

Outros casos especiais podem ser facilmente verificados da **matriz (A5)**.

b) MATRIZ DE LÂMINA DE ONDA

Para analisarmos uma lâmina de onda, devemos primeiramente entender seu mecanismo de polarização. Sua natureza birrefringente faz com que cada componente do campo elétrico oscilante da radiação incidente experimente uma refração diferente da outra; isto é, cada componente tem uma velocidade naquele meio, de forma a torná-las defasadas espacialmente, ou em fase. Aqui, assumiremos que o eixo rápido da lâmina; aquele de menor índice de refração, logo permite maior velocidade, o que acrescenta uma fase àquela componente; está na vertical; diferentemente de como está representado na **figura 16**, retirada de Goldstein (2003), apenas por um sinal no valor da defasagem. Na referência, por razões de simplicidade e simetria, o autor opta por representar uma defasagem líquida ϕ no eixo horizontal como devido meias defasagens relativas em cada eixo (rápido e lento).

Figura 16 – Esquema de funcionamento de lâmina de onda de retardância arbitrária.



FONTE: GOLDSTEIN, D. Polarized Light, Ed. 2, 2003.

Como dito anteriormente, construímos uma relação de transformação entre as amplitudes complexas elétricas incidentes e emergentes, de forma a conseguir a transformação dos vetores de Stokes associados. Para este caso, em notação complexa, devido à defasagem com o eixo rápido na **vertical**, podemos escrever as seguintes transformações nas amplitudes complexas:

$$E'_x(z, t) = e^{-\frac{i\phi}{2}} E_x(z, t) \quad (\text{A7 - a})$$

$$E'_y(z, t) = e^{+\frac{i\phi}{2}} E_y(z, t) \quad (\text{A7 - b})$$

Aplicando-as nas **definições (A3)**, e tomando o algebrismo necessário, encontramos:

$$S'_0 = S_0 \quad (\text{A8 - a})$$

$$S'_1 = S_1 \quad (\text{A8 - b})$$

$$S'_2 = S_2 \cos \phi - S_3 \sin \phi \quad (\text{A8 - c})$$

$$S'_3 = S_2 \sin \phi + S_3 \cos \phi \quad (\text{A8 - d})$$

De forma que, em notação matricial, a transformação de parâmetros de Stokes é dada pela Matriz de Mueller para a Lâmina de Onda de retardância ϕ e eixo rápido na vertical, a seguir:

$$M^{LO} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (A9)$$

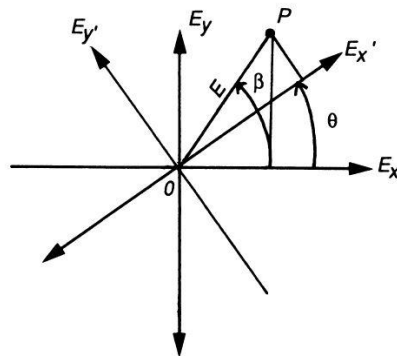
Para uma lâmina de quarto-de-onda com o eixo rápido na vertical, onde a retardância total vale, em fase, $\phi = 90^\circ$ (ou $\lambda/4$, em distância), e é o elemento utilizado neste trabalho, sua Matriz de Mueller fica como segue:

$$M^{LQO} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (A10)$$

c) MATRIZ DE ROTATOR

A **figura 17** apresenta o esquema de um rotator; o elemento virtual que usaremos somente para formar elementos ópticos rotatórios, muito úteis para as aplicações mostradas no trabalho.

Figura 17 – Esquema de funcionamento de rotator de eixos em um ângulo θ arbitrário.



FONTE: GOLDSTEIN, D. Polarized Light, Ed. 2, 2003.

Da mesma forma que os outros elementos, encontramos sua matriz de Mueller partindo da construção da transformação de amplitudes. Dado um vetor do campo elétrico contido em plano arbitrário, como $z=0$, suas componentes podem ser transformadas por uma rotação de θ da maneira canônica da álgebra linear:

$$E'_x = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta \quad (\text{A11} - \text{a})$$

$$E'_y = -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta \quad (\text{A11} - \text{b})$$

Então, usando as **definições (A3)**, após as manipulações necessárias, chegamos à transformação de parâmetros de Stokes:

$$S'_0 = S_0 \quad (\text{A12} - \text{a})$$

$$S'_1 = \cos(2\theta) S_1 + \sin(2\theta) S_2 \quad (\text{A12} - \text{b})$$

$$S'_2 = -\sin(2\theta) S_1 + \cos(2\theta) S_2 \quad (\text{A12} - \text{c})$$

$$S'_3 = S_3 \quad (\text{A12} - \text{d})$$

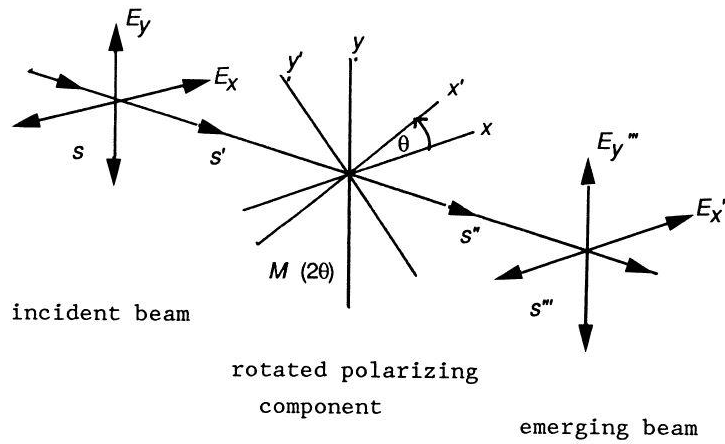
Com isso, podemos definir a Matriz de Mueller de Rotação:

$$M^R(2\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A13})$$

d) MATRIZ DE ELEMENTO POLARIDOR ROTACIONADO

Por fim, determinemos as matrizes de Mueller que representam elementos ópticos polarizadores que estejam rotacionado. Vale lembrar que até agora cada elemento foi tomado como tendo seu efeito restringido às direções cartesianas definidas em laboratório. Contudo, como mostrado na **figura 18**, tais elementos podem ter sua ação efetuada em alguma direção rotacionada de θ da direção canônica.

Figura 18 – Esquema de elemento polarizador rotacionado.



FONTE: GOLDSTEIN, D. Polarized Light. Ed. 2, 2003.

Para a construção dessas matrizes, pode-se entender o mecanismo algébrico como uma rotação dos eixos da polarização incidente, seguido do efeito polarizador do elemento em questão, e então rotação inversa no sentido oposto, para retornarmos para os eixos cartesianos iniciais. Segundo o formalismo de Mueller, essa sequência de ações polarizantes (giro – efeito – desgiro) é representada pelo produto das matrizes associadas a cada processo.

Seja a matriz para um elemento polarizante, M . Assumimos que o vetor de Stokes incidente, S , é primeiramente transformado por uma rotação de eixos, de forma que o novo vetor, S' , é dado por:

$$S' = M^R(2\theta) S \quad (A14)$$

Em seguida, o componente polarizante transforma este novo vetor a sua maneira, dada pela matriz M . Assim, o vetor transforma-se segundo:

$$S'' = M S' = M M^R(2\theta) S \quad (A15)$$

Por fim, faz-se uma rotação inversa do mesmo ângulo em que o sistema foi rotacionado, e voltamos para os eixos originais, tal que o vetor de Stokes do feixe emergente é:

$$S''' = M^R(-2\theta)S'' \quad (\text{A16})$$

O efeito líquido das três transformações fica representado pelo produto matricial naturalmente formado substituindo **(A15)** em **(A16)**, desta forma relacionado o vetor de Stokes incidente e emergente por:

$$S''' = [M^R(-2\theta)M M^R(2\theta)] S \quad (\text{A17})$$

Tal que a matriz do elemento rotacionado é entrado segundo:

$$M(2\theta) = M^R(-2\theta)M M^R(2\theta) \quad (\text{A18})$$

Por exemplo, a matriz para uma lâmina de onda arbitrária rotacionado é encontrada quando M assume a forma da **matriz (A9)**. Assim, consegue-se mostrar que ela tem a forma que segue:

$$M^{LOR}(\phi, 2\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \cos \phi \sin^2 2\theta & (1 - \cos \phi) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin \phi \sin 2\theta \\ 0 & (1 - \cos \phi) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta + \cos \phi \cos^2 2\theta & -\sin \phi \cos 2\theta \\ 0 & -\sin \phi \sin 2\theta & \sin \phi \cos 2\theta & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (\text{A19})$$

E finalmente, para o caso especial utilizado no trabalho, a lâmina de quarto de onda rotacionada tem sua matriz representada por:

$$M^{LQOR}(90^\circ, 2\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & -\cos 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A20})$$

e) *MATRIZ PARA NOSSO APARATO: MATRIZ DE MUELLER PARA LÂMINA DE ONDA ROTACIONADA SEGUIDA DE POLARIZADOR LINEAR NA VERTICAL*

Já sabe-se que a sequência de elementos ópticos é representado pelo produto matricial de cada matriz de Mueller respectivamente associado. Assim, para esse sistema específico, após emergir da lâmina rotacionada de θ , o feixe interage com um polarizador, dito ideal, com eixo de transmissão na vertical. Isto é,

$$\vec{S}' = [M_H^P (M_{(-2\theta)}^R M^{QWP} M_{(2\theta)}^R)] \vec{S} = M_H^P M^{QWP}(2\theta) \vec{S} \quad (A21)$$

Assim, das equações **(A6)** e **(A20)**, conseguimos o produto:

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & -\cos 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$$

Tal que o vetor de Stokes toma forma,

$$\therefore \begin{bmatrix} S''_0 \\ S''_1 \\ S''_2 \\ S''_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (S_0 - S_1 \cos^2 2\theta + S_2 \sin 2\theta \cos 2\theta + S_3 \sin 2\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A22)$$

E a intensidade total transmitida, e de fato mensurada, é, como mostrada no texto principal, dada por:

$$S_0' = I(\theta) = \frac{1}{2} \left[\left(S_0 - \frac{S_1}{2} \right) - \frac{S_1}{2} \cos(2\theta) + \frac{S_2}{2} \sin(4\theta) + S_3 \sin(2\theta) \right] \quad (A23)$$

APÊNDICE B

Redefinição de parâmetros como diferença de intensidades

Apesar de haver sido usado somente na forma das **equações (13)**, podemos redefinir os parâmetros S_2 e S_3 como diferenças de intensidade, da mesma forma que S_1 foi definido. Tal formato não apareceu nessas equações, cuja dedução foi feita sobre uma base canônica definida em laboratório, porém são igualmente equivalentes, uma vez que os parâmetros de Stokes são proporcionais à Intensidades de luz; isto é, grandezas mensuráveis escalares, que não dependem do sistema de referência adotado.

a) REDEFINIÇÃO DE S_2

Começamos com a redefinição do parâmetro S_2 . Lembrando que existe uma base ortogonal rotacionada de $+45^\circ$ da base canônica $\hat{x}$ e $\hat{y}$, cujos versores denominaremos $\hat{a}$ e $\hat{b}$, respectivamente contidos nas direções que fazem $+45^\circ$ e -45° com o eixo x. Assim, pela regra de rotação de vetores cartesianos de um ângulo finito, obtemos que:

$$\hat{a} = \cos 45^\circ \hat{x} + \sin 45^\circ \hat{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{y}) \quad (\text{B1} - \text{a})$$

$$\hat{b} = -\sin 45^\circ \hat{x} + \cos 45^\circ \hat{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{y} - \hat{x}) \quad (\text{B1} - \text{b})$$

Desta forma, podemos inverter o sistema, e obter a base canônica em termos da base rotacionada de $+45^\circ$. Teremos, então:

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{b}) \quad (\text{B2} - \text{a})$$

$$\hat{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{b}) \quad (\text{B2} - \text{b})$$

E por isso, transformando a forma geral do vetor de campo elétrico de uma onda plana que se propaga na direção z

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} \quad (\text{B3})$$

para a base rotacionada, teremos:

$$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x + E_y) \hat{a} + \frac{1}{\sqrt{2}} (E_y - E_x) \hat{b} \quad (\text{B4})$$

Desta forma, transformamos a representação da mesma onda plana arbitrária para uma base rotacionada em 45° em relação ao referencial do laboratório, o que pode ser interpretado como uma polarização arbitrária sendo resultado da superposição de componentes oscilantes nessas direções. Então, podemos definir as amplitudes dessas componentes, como:

$$E_{+45} = E_a = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x + E_y) \quad (\text{B5 - a})$$

$$E_{-45} = E_b = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_y - E_x) \quad (\text{B5 - b})$$

E com isso, determinamos como as amplitudes complexas canônicas são escritas em termos dessas novas amplitudes à $\pm 45^\circ$.

$$E_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_a - E_b) \quad (\text{B6 - a})$$

$$E_y = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_a + E_b) \quad (\text{B6 - b})$$

Portanto, ao utilizarmos a definição na base canônica do parâmetro S_2 , dada na **equação (13)**, encontramos que esse parâmetro é escrito em termos de tais novas amplitudes, como segue:

$$S_2 = E_x E_y^* + E_x^* E_y = E_a^2 - E_b^2 \quad (\text{B7})$$

Isto é, S_2 pode ser interpretado como proporcional a diferença de intensidades de luz nas direções $+45^\circ$ e -45° , respectivamente; consiste com a significação física apresentada no texto principal.

b) REDEFINIÇÃO DE S_3

Agora, determinemos uma relação análoga para S_3 . Para isso, utilizamos das definições de vetores unitários complexos de polarização circular, deduzidos no capítulo de Polarização do livro de **Nussenzveig (1998)**. Com uma adaptação na definição de propagador, aqui sendo $\tau = \omega t - kz + \delta$, estes são encontrados e definidos como seguem:

$$\hat{e}_E = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i \hat{y}) \quad (\text{B8} - \text{a})$$

$$\hat{e}_D = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i \hat{y}) \quad (\text{B8} - \text{b})$$

Sendo, respectivamente, o versor para polarização para Esquerda, e para Direita. Note que podemos escrever os versores cartesianos em termos dos versores de polarização circular, de modo que a base canônica passa a ser entendida como uma superposição de versores da base de polarização circular:

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_E + \hat{e}_D) \quad (\text{B9} - \text{a})$$

$$\hat{y} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{e}_E - \hat{e}_D) \quad (\text{B9} - \text{b})$$

Assim, por substituição direta na forma geral do vetor de campo elétrico para uma onda plana, da **equação (B3)**, determina-se que qualquer estado de polarização pode ser escrito como uma superposição coerente de polarizações circulares para direita e para esquerda, segundo:

$$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x + i E_y) \hat{e}_E + \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x - i E_y) \hat{e}_D \quad (\text{B10})$$

Assim, definem-se as amplitudes (complexas) de tais polarizações circulares para Esquerda e para Direita, respectivamente, em termos das amplitudes da base canônica, como:

$$E_E = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x + i E_y) \quad (\text{B11 - a})$$

$$E_D = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x - i E_y) \quad (\text{B11 - b})$$

Isto é, a forma geral do vetor de polarização é redefinida como a superposição supramencionada:

$$\vec{E} = E_E \hat{e}_E + E_D \hat{e}_D \quad (\text{B12})$$

Uma vez tendo as amplitudes circulares escritas em termos das amplitudes canônicas, podemos inverter o sistema, de modo a isolarmos as amplitudes cartesianas e substituí-las na definição de S_3 dada na **equação (13)**. Daí, vemos:

$$E_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_D + E_E) \quad (\text{B13 - a})$$

$$E_y = \frac{i}{\sqrt{2}} (E_D - E_E) \quad (\text{B13 - b})$$

E utilizando da definição do parâmetro S_3 , obtemos:

$$S_3 = i[E_x E_y^* - E_x^* E_y] = E_D^2 - E_E^2 \quad (\text{B14})$$

Ou seja, S_3 pode ser interpretado como proporcional à diferença de intensidades de luz circularmente polarizada para Direita e para Esquerda, respectivamente; o que está consistente com a significação física dada no texto principal. Finalmente, podemos definir os quatro parâmetros de Stokes de uma

maneira mais conveniente, em termos (pelo menos proporcionais) das Intensidades associadas a diferentes direções, com o destaque para a invariância na noção de intensidade total dada ao parâmetro S_0 , segundo as **equações (B15)**:

$$\begin{aligned}
 S_0 &= E_x^2 + E_y^2 = I_x + I_y = I_{+45} + I_{-45} = I_D + I_E \\
 S_1 &= E_x^2 - E_y^2 = I_x - I_y \\
 S_2 &= E_a^2 - E_b^2 = I_{+45} - I_{-45} \\
 S_3 &= E_D^2 - E_E^2 = I_D - I_E
 \end{aligned}
 \tag{B15}$$