UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

SUZANE DA SILVA CARVALHO

O CÁLCULO DE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS UTILIZANDO COMO FERRAMENTA AUXILIAR O GEOGEBRA 3D

ABAETETUBA - PA
2022

SUZANE DA SILVA CARVALHO

O CÁLCULO DE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS UTILIZANDO COMO FERRAMENTA AUXILIAR O GEOGEBRA 3D

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus Universitário de Abaetetuba, Universidade Federal do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa.

ABAETETUBA - PA
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C331c Carvalho, Suzane da Silva.
O cálculo de volume de sólidos geométricos utilizando como ferramenta auxiliar o GeoGebra 3D / Suzane da Silva Carvalho. — 2022.
20 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de Matemática, Abaetetuba, 2022.

1. Sólidos geométricos. 2. GeoGebra 3D. 3. Volume. I. Título.

CDD 516.007

SUZANE DA SILVA CARVALHO

O CÁLCULO DE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS UTILIZANDO COMO FERRAMENTA AUXILIAR O GEOGEBRA 3D

Trabalho de Conclusão de Curso orientado pelo Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa, apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus Universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção de grau de licenciada em Matemática.

Data de aprovação: 14/12/2022

BANCA EXAMINADORA

Manuel de Jesus dos S. Costa

Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa
Orientador– FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA

Rômulo Correa Lima

Prof. Dr. Rômulo Correa Lima
Membro – FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro
Membro – FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e aos meus familiares que me ajudaram e apoiaram nessa caminhada. Em especial aos meus pais e irmãos. Aos docentes do curso e aos colegas de aula que foram importantes nesse período da graduação. Ao Prof.º Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa pelas contribuições e orientações para a construção deste trabalho.

O CÁLCULO DE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS UTILIZANDO COMO FERRAMENTA AUXILIAR O GEOGEBRA 3D

Suzane da Silva Carvalho
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia– FACET
suzanecarvalho93@gmail.com

Manuel de Jesus dos Santos Costa
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia – FACET
manuelsc@ufpa.br

RESUMO

Este trabalho visa destacar a importância do GeoGebra 3D no estudo de sólidos geométricos, apresentando uma proposta de atividade de ensino, vinculado as possibilidades que o programa pode fornecer, em termos de contribuição à aprendizagem com relação ao cálculo do volume de sólidos geométricos. Nesse contexto, a fundamentação teórica foi articulada usando a definição de alguns sólidos geométricos convencionais como o prisma, a pirâmide, o cilindro e a esfera e a demonstração das respectivas fórmulas para o cálculo de volume. Três aplicações foram desenvolvidas de forma analítica. Posteriormente o passo a passo da construção no GeoGebra 3D para comprovação dos resultados obtidos.

Palavras-chave: Sólidos geométricos; GeoGebra 3D; Volume.

ABSTRACT

This work aims to highlight the importance of GeoGebra 3D in the study of geometric solids, presenting a proposal for a teaching activity, linked to the possibilities that the program can provide, in terms of contribution to learning regarding the calculation of the volume of geometric solids. In this context, the theoretical foundation was articulated using the definition of some conventional geometric solids such as the prism, the pyramid, the cylinder and the sphere and the demonstration of the respective formulas for the calculation of volume. Three applications were developed analytically. Later the step by step construction in GeoGebra 3D to prove the results obtained.

Keywords: Geometric solids; GeoGebra 3D; Volume

1 – INTRODUÇÃO

A geometria está vigente na sociedade desde a antiguidade, sendo um dos ramos mais antigos da matemática é está presente em situações recorrentes do cotidiano. O primeiro conhecimento geométrico que o homem possuiu, sobre geometria, surgiu da necessidade em compreender melhor o meio em que vivia.

O ensino de sólidos geométricos é de grande relevância para o avanço de habilidades e competências do aluno. Tal abordagem trata das variadas formas planas e tridimensionais e suas caracterizações em desenhos, planificações e objetos. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

> A geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, [...] estudar posição e deslocamento no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes (BRASIL 2018, p. 271).

Nesse sentido, o aprendizado de geometria é fundamental para potencializar no indivíduo o conceito geométrico. Contudo, é perceptível as dificuldades de visualizações tridimensionais que existem. Assim os recursos digitais podem ser utilizados pelos professores em sala de aula como uma ferramenta objetivando promover mudanças na forma de ensinar, contribuindo para potencializar a compreensão de conteúdos. Toleto (2015, p. 26) afirmar que:

> O uso de recursos tecnológicos (computador, recursos multimídias, softwares educativos), que auxiliam tanto o professor quanto o aluno durante o processo de aprendizagem, proporcionando condições, ao professor, para ministrar aulas de forma mais criativa, acompanhando as transformações e mudanças que ocorrem quando o aluno passa a exercer sua independência na procura e seleção de informações e na resolução de problemas, tornando-se assim o ator principal na construção de seu conhecimento.

Uma dessas ferramentas é o GeoGebra que possui uma janela de visualização tridimensional 3D, a qual possibilita a construção de geometrias de forma interativa e dinâmica, permitindo visualizar e manipular um sólido geométrico nas mais variadas perspectivas. Especificamente, no presente trabalho aborda a interface do programa e as definições dos sólidos geométricos de forma resumida, a demonstração da fórmula de volume de cada um e apresenta aplicações em relação à teoria e o programa.

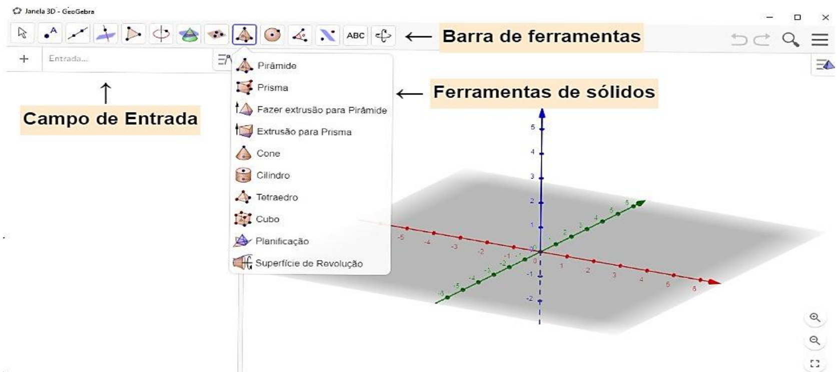
2 – O GEOGEBRA 3D

O GeoGebra é um programa gratuito que permite o estudo de Álgebra, Geometria, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade e Estatística. Pereira (2012, p.32) destaca que “As características do GeoGebra potencializam a constituição de cenários para investigação, nos quais o aluno é capaz de experimentar situações em um processo dinâmico”. Dessa forma, possibilita a visualização de objetos construídos no programa de maneira prática e versátil. Como afirma Fanti (2010, p.1).

> O Geogebra é um software livre e pode ser usado facilmente como uma importante ferramenta para despertar o interesse pela busca do conhecimento matemático principalmente com alunos dos ensinos fundamental e médio. Possibilita trabalhar de forma dinâmica em todos os níveis da educação básica permitindo a abordagem de diversos conteúdos especialmente os relacionados ao estudo da geometria e funções.

Assim, o programa disponibiliza de recursos que oportuniza aos docentes, criar aulas dinâmicas e atrativas para os alunos. Sendo um facilitador no processo de ensino e aprendizagem aos conteúdos de volume de sólidos geométricos. Como Souza (2017, p.16) ratifica “Isso pode favorecer o desenvolvimento do pensamento geométrico, inclusive da noção espacial, e dessa forma, auxiliar na resolução de problemas”. Um desses recursos é a janela de visualização 3D mostrada na Figura 1, que possibilita a visualização de figuras tridimensionais de forma clara, permitindo movimentar e criar objetos de forma precisa.

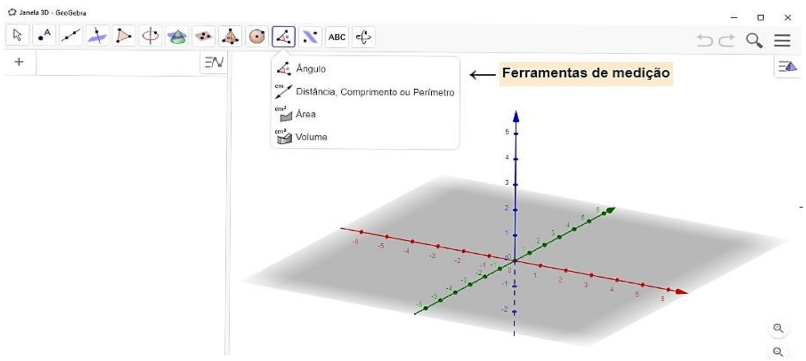
Figura 1 –Interface do programa GeoGebra com a Janela de visualização 3D



Fonte: Autoria própria

A Figura 2 mostra as ferramentas de medição, sendo utilizadas neste trabalho apenas a ferramenta “Volume”, que possibilita com um clique determina o volume do sólido.

Figura 2 – Interface do programa GeoGebra com as ferramentas de medição



Fonte: Autoria Própria

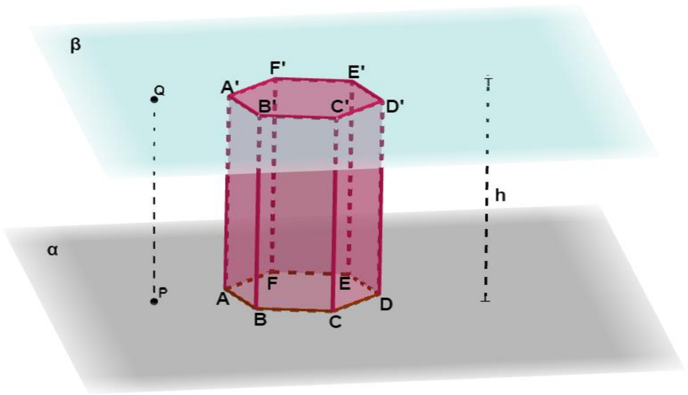
3 – SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Esta seção apresentará algumas definições dos principais sólidos geométricos apresentados durante a educação básica: prisma, pirâmide, cilindro e a esfera, bem como a demonstração da fórmula do volume dos respectivos sólidos, sendo retirados de Dolce e Pompeo (2013).

3.1 Prisma

Definição 3.1 Considera-se um polígono convexo (região poligonal convexa) ABCDEF situado num plano α e um segmento de reta $\overline{PQ}$, cuja reta suporte intercepta o plano α. Chama-se prisma (ou prisma convexo) à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a $\overline{PQ}$, com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semiespaço dos determinados por α, sendo a altura de um prisma a distância h entre os planos das bases como mostra a Figura 3.

Figura 3 - Prisma construído no GeoGebra

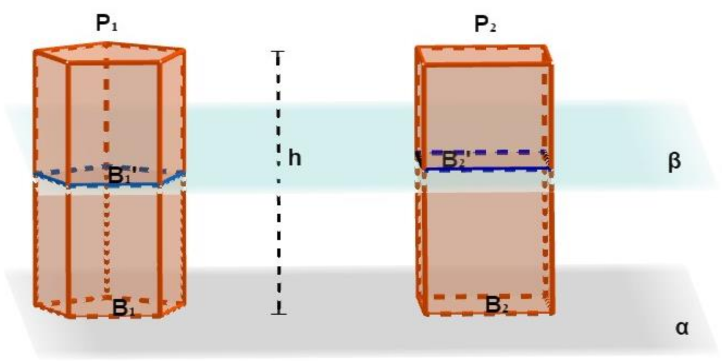


Fonte: Autoria própria

Proposição 3.1.1 O volume de um prisma é o produto da área da base pela medida da altura.

Demonstração. Seja um prisma P_1 de altura h e área da base B_1 igual a B e um paralelepípedo retângulo P_2 de altura h e área da base B_2 também igual B, sendo que o prisma e o paralelepípedo têm alturas congruentes e bases equivalente como mostra a Figura 4.

Figura 4- Prisma pentagonal e paralelepípedo retângulo



Fonte: Autoria própria

Supondo, que ambos os sólidos estão num mesmo plano α e estejam situados num mesmo semiespaço deste plano, tem-se que, qualquer plano β paralelo a α que secciona P_1 e P_2, gerando as secções (B'_1 e B'_2 respectivamente) têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases ($B'_1 = B_1, B'_2 = B_2, B_1 = B_2 = B$),

Portanto,

$$B'_1 = B'_2 .$$

Então, pelo princípio de Cavalieri, o prisma P_1 e o paralelepípedo P_2 têm volumes iguais. Assim, seja V_{P1} e V_{P2}, os volumes de P_1 e P_2 respectivamente, então seque que

$$V_{P1} = V_{P2} \quad (1)$$

Como o volume do paralelepípedo é o produto da área da base (Ab) pela medida da altura.

Logo de (1) tem-se:

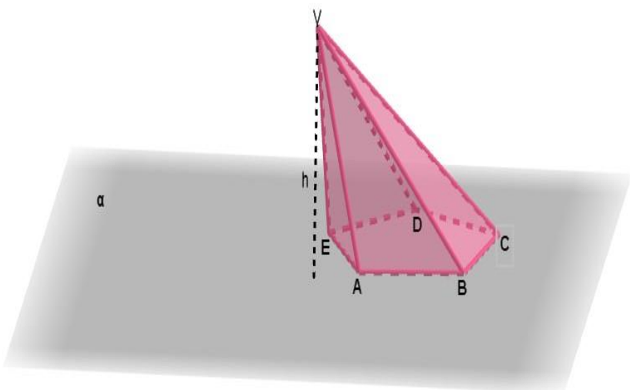
$$V_{P1} = Ab \cdot h \quad (2)$$

Portanto, o volume de um prisma é o produto da área da base pela medida da altura.

3.2 Pirâmide

Definição 3.2 Considera-se um polígono convexo (região poligonal convexa) ABCDE situado num plano α e um ponto V fora de α. Chama-se pirâmide (ou pirâmide convexa) à reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos do polígono. Sendo a altura da pirâmide a distância h entre o vértice V e o plano da base, conforme a Figura 5.

Figura 5 - Pirâmide construída no GeoGebra



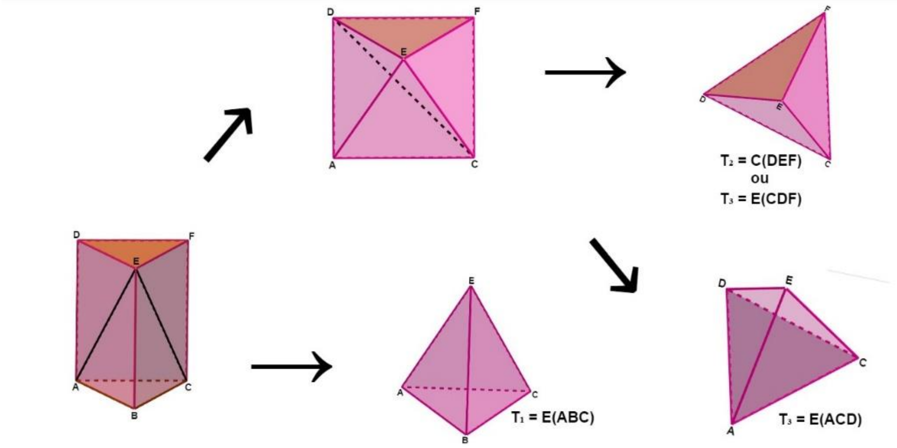
Fonte: Autoria própria.

Proposição 3.2.1 O volume de uma pirâmide é um terço do produto da área da base (Ab) pela medida da altura.

Demonstração. Seja um prisma triangular ABCDEF (ver a Figura 6). Cortando esse prisma pelo plano (A, C, E), obtém-se o tetraedro T_1 = E(ABC) e a pirâmide quadrangular E(ACFD).

Cortando a pirâmide E(ACFD) pelo plano (C, D, E), obtemos o tetraedro T_2 = C(DEF) [ou T_2 =E(DEF)] e T_3 = E(ACD).

Figura 6- Decomposição do prisma triangular



Fonte: Autoria própria

Tem-se, então que:

O prisma ABCDEF = $T_1 + T_2 + T_3$, então $V_{prisma} = V_{T_1} + V_{T_2} + V_{T_3}$

As pirâmides T_1 = E(ABC) e T_2 = C(DEF) têm o mesmo volume, pois possuem as bases (ABC e DEF) congruentes e a mesma altura (a do prisma). Portanto,

$$V_{T_1} = V_{T_2} \tag{3}$$

E as pirâmides T_2 = E(CDF) e T_3 = E(ACD) têm o mesmo volume, pois têm as bases (CDF e ACD) congruentes e mesma altura (distância de E ao plano ACFD).

Então,

$$V_{T_2} = V_{T_3} \tag{4}$$

De (3) e (4) tem-se:

Assim, conclui-se que as três pirâmides possuem o mesmo volume.

$$V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3}$$

Logo, o volume de cada pirâmide corresponde à terça parte do volume do prisma. Então,

$$V_{pirâmide} = \frac{V_{prisma}}{3}$$

Logo de (2),

$$V_{pirâmide} = \frac{Ab \cdot h}{3} \tag{5}$$

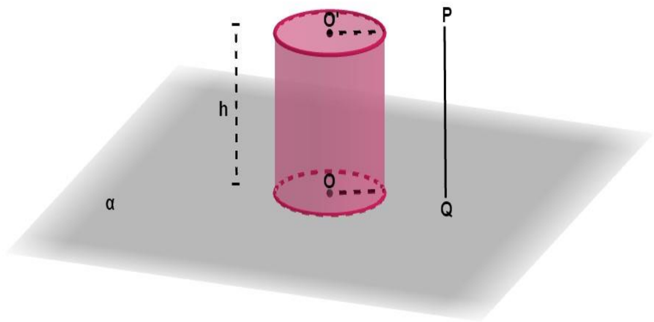
Portanto, o volume de uma pirâmide é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

3.3 Cilindro

Definição 3.3 Considera-se um círculo (região circular) de centro de centro O e raio *r*;

localizado num plano α, e um segmento de reta PQ, não nulo, não contido e não paralelo a α. Chama-se cilindro à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a PQ, com uma extremidade nos pontos do círculo e situados num mesmo semiespaço dos determinados por α. A altura de um cilindro é a distância h entre os planos das bases, conforme apresentado na Figura 7.

Figura 7 - Cilindro construído no GeoGebra

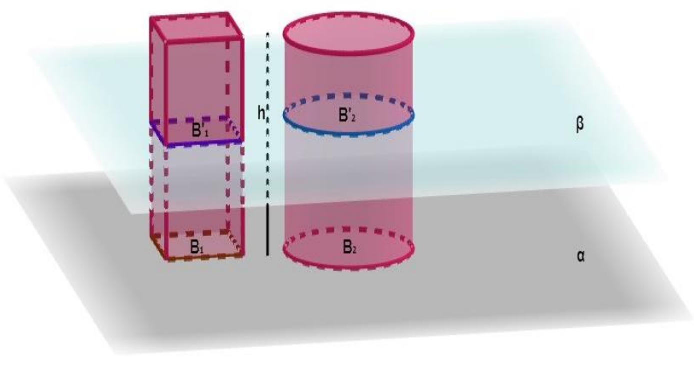


Fonte: Autoria própria.

Proposição 3.3.1 O volume de um cilindro é o produto área da base pela medida da altura

Demonstração. Considera-se um cilindro M_1 de altura h e área da base $B_2 = B$ é um prisma M_2 de altura h e área da base $B_1 = B$ (o cilindro e o prisma têm alturas congruentes e bases equivalentes). Supondo que as bases B_1 e B_2 estão num mesmo plano α e situada num dos semiespaços determinados por α (Figura 8).

Figura 8 – Prisma e Cilindro construídos no GeoGebra



Fonte: Autoria própria.

Sejam um plano β paralelo a α, que secciona o cilindro e o prisma, gerando as secções (B'_1 e B'_2) com áreas iguais, pois às respectivas bases são congruentes ($B'_1 = B_1, B'_2 = B_2, B_1 = B_2 = B$), portanto $B'_1 = B'_2$.

Então, pelo princípio de Cavalieri o cilindro M_1 e o prisma M_2 têm volumes iguais.

$$V_{cilindro} = V_{prisma} \tag{6}$$

Assim, seja V_{M1} e V_{M2}, os volumes do cilindro e do prisma respectivamente, como

$V_{M2} = Ab \cdot h$, portanto de (2).

$$V_{M1} = Ab \cdot h$$

Como $Ab = \pi r^2$, tem-se:

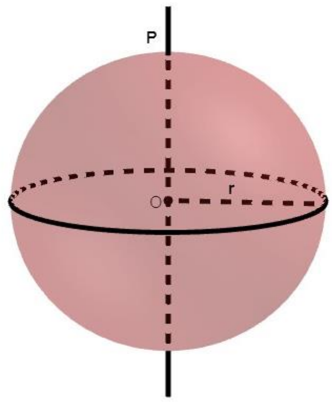
$$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h \tag{7}$$

Portanto, o volume de um cilindro é o produto da área da base pela medida da altura.

3.4 Esfera

Definição 3.4 Considera-se um ponto O e um segmento de medida r. Chama-se esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância $\overline{OP}$ seja menor ou igual a r, conforme a Figura 9.

Figura 9 - Esfera construída no GeoGebra



Fonte: Autoria própria.

Proposição 3.4.1 O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4\pi r^3}{3}$

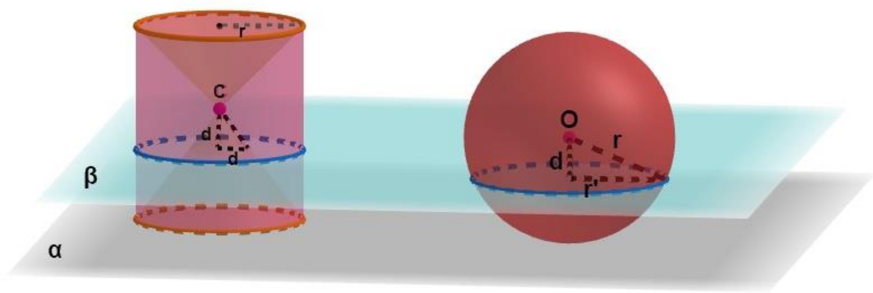
Demonstração. Seja um cilindro equilátero de raio r e altura $2r$ e seja C o ponto médio do eixo do cilindro. Considere dois cones tendo como bases as do cilindro e C como vértice comum. A união desses dois cones é chamada clépsidra e o sólido que está na parte interna do cilindro e fora da clépsidra é chamado anticlépsidra.

Seja uma esfera de raio r tangente a um plano α, plano este que contém uma base do cilindro que originou a anticlépsidra e ambos estejam num mesmo semiespaço dos determinados por α (ver Figura 10).

Considere um plano β, qualquer paralelo a α, que secciona a esfera e a anticlépsidra à mesma distância d do ponto O. A secção do plano β determina um círculo na esfera de raio r', pelo teorema de Pitágoras, tem-se $r^2 = d^2 + r'^2 \Rightarrow r'^2 = r^2 - d^2$, como a área do círculo é dada por: $A = \pi r'^2 \Rightarrow A = \pi(r^2 - d^2)$.

E a secção do plano β na anticlépsidra determina uma coroa circular de raios r e d, cuja a área é dada por: $A = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2)$.

Figura 10 – Anticlépsidra e Esfera



Fonte: Autoria própria.

Portanto, as áreas das secções da esfera e da anticlépsidra são iguais. Então, pelo Princípio de Cavalieri.

$$V_{esfera} = V_{anticlépsidra}$$

Mas,

$$V_{anticlépsidra} = V_{cilindro} - 2V_{cone} = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\right) = \pi r^2 \cdot 2r - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Logo,

$$V_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3} \qquad (8)$$

4 - APLICAÇÃO COM O AUXILIO DO GEOGEBRA

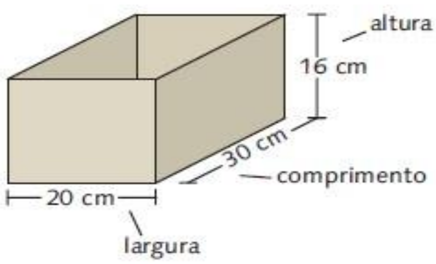
Para analisar o cálculo de volume de sólidos geométricos, três problemas foram resolvidos, seguidos da construção e verificação dos resultados obtidos usando o programa GeoGebra 3D. Os problemas a seguir foram retirado e adaptado de Andrade (2020).

4.1- Problema 1

4.1.1- Descrição do problema

Para armazenar seus produtos, uma fábrica utiliza caixas de papelão em formato de paralelepípedo reto retângulo. Um novo modelo de caixa será utilizado conforme a Figura 11. Qual o volume dessa nova caixa?

Figura 11 - Caixa no formato de paralelepípedo



Fonte: Andrade (2020).

- Resolução:

Volume do paralelepípedo (V_P) utilizando a equação (2).

$$(V_P) = Ab \cdot h = 600 \cdot 16 = 9.600\ cm^3$$

- Para a construção do paralelepípedo da Figura 12 foram realizadas as seguintes ações:

Passo 1: No menu "Exibir" selecionar a janela de visualização 3D.

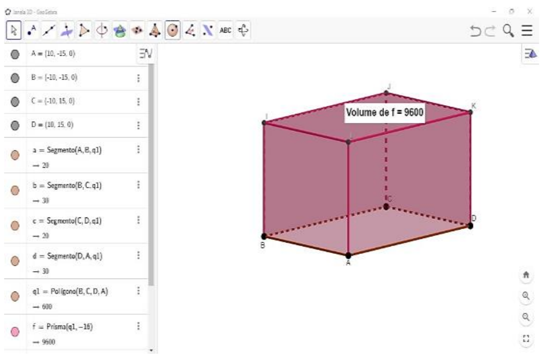
Passo 2: Utilizar o "Campo de Entrada" digitar respectivamente os pontos A = (10, -15, 0), tecla Enter, B = (-10, -15,0) tecla Enter, C = (-10,15,0) tecla Enter, D = (10,15,0) tecla Enter, será formado os vértices do polígono da base.

Passo 3: Após utilizar a ferramenta "Polígono" e ligar os pontos da base, será formado um retângulo de 20 cm de largura e 30 cm de comprimento.

Passo 4: Em seguida selecionar a ferramenta "Extrusão para Prisma", após selecionar o polígono e especifica a altura "-16" e clicar em "OK".

Passo 5: Por fim acionar a ferramenta "Volume" e após clicar no paralelepípedo que aparecera o valor do volume.

Figura 12 - Construção do paralelepípedo



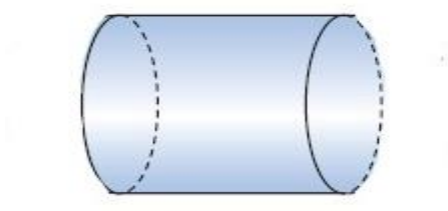
Fonte: Autoria própria.

4.2- Problema 2

4.2.1- Descrição do problema

Os reservatórios de combustível dos postos geralmente, são tanques no formato de um cilindro de 4 m de comprimento e raio 2 m. Adotando $\pi = 3{,}14$, qual e a capacidade do tanque da Figura 13 em metros cúbicos?

Figura 13 - Tanque de combustível



Fonte: Andrade (2020).

- Resolução:

Volume do cilindro (V_c) utilizando a equação (7):

$$V_c = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 4 \cong 50{,}27\ m^3$$

- Para a construção do cilindro da Figura 14 foram realizadas as seguintes ações:

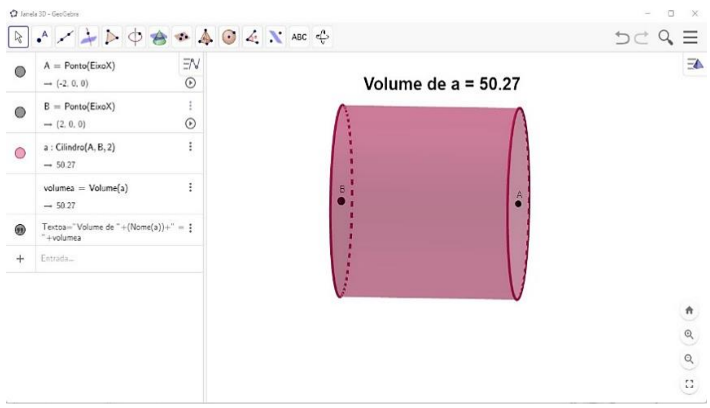
Passo 1: No menu "Exibir" selecionar a janela de visualização 3D.

Passo 2: Utilizar o "Campo Entrada" digitar A = (-2,0,0) teclar Enter, novamente "Campo Entrada" digitar B = (2,0,0) teclar Enter, os pontos serão criados na Janela de 3D.

Passo 3: Selecionar a ferramenta "Cilindro", após selecionar os pontos A e B e especifica o comprimento do raio "2" e clicar em OK.

Passo 4: Por fim acionar a ferramenta "Volume" e clicar no cilindro que aparecera o valor do volume.

Figura 14 – Construção do Tanque



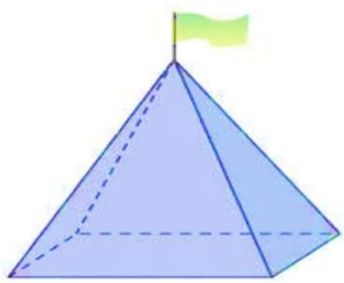
Fonte: Autoria própria.

4.3 - Problema 3

4.3.1- Descrição do problema

O Prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço como na Figura 15.

Figura 15 - Pirâmide Quadrangular



Fonte: Andrade (2020).

Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3 m e que a altura da pirâmide será de

4 m, o volume de concreto, em metros cúbicos, necessário para a construção da pirâmide será:

- Resolução:

A área da base da pirâmide $(Ab) = L^2 = 3^2 = 9$ m²

Volume da pirâmide (V) utilizando a equação (5):

$$V = \frac{A_b.h}{3} = \frac{9 \cdot 4}{3} = 12\ m^3$$

- Para a construção da pirâmide da Figura 16 foram realizadas as seguintes ações:

Passo 1: No menu “Exibir” selecionar a janela de visualização 3D.

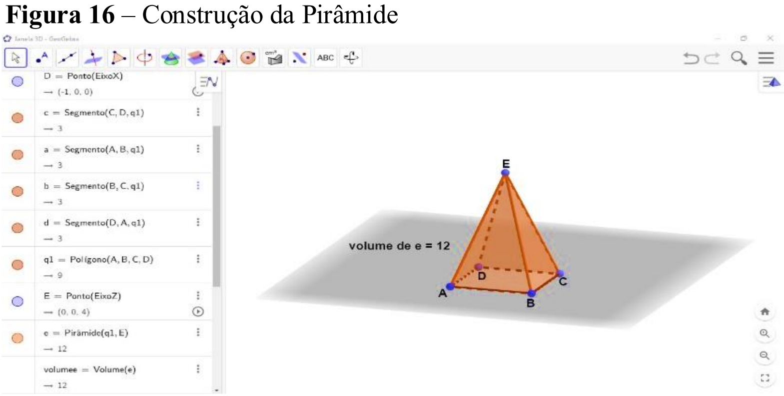
Passo 2: Utilizar o “Campo Entrada” digitar respectivamente os pontos A = (0,0,0) tecla Enter, B = (-3,0,0) tecla Enter, C = (0,3,0) tecla Enter, D = (-3,3,0) tecla Enter, E = (0,0,4) teclar Enter, será formado os vértices da pirâmide.

Passo 3: Após utilizar a ferramenta “Polígono” e ligar os pontos da base, será formado um quadrado de lado 3.

Passo 4: Em seguida usar a ferramenta “Pirâmide” e clicar no quadrado e no ponto E. Assim uma pirâmide de base quadrangular será construída.

Passo 5: Por fim acionar a ferramenta “Volume” e em seguida clicar na pirâmide que aparecera o valor do volume.

Figura 16 – Construção da Pirâmide



Fonte: Autoria própria

5 - CONCLUSÃO

Neste trabalho foram resolvidas algumas aplicações relacionadas ao cálculo de volume de sólidos geométricos, com a utilização do programa GeoGebra 3D como ferramenta auxiliar na comprovação e visualização dos resultados. Os fundamentos teóricos destacados neste trabalho são amplamente abordados no ensino médio. Assim, com a utilização do programa em sala de aula possibilita, que os estudantes tenham um mecanismo facilitador no processo de ensino e aprendizagem no cálculo de volumes, em especial na visualização e representação de sólidos geométricos.

Como perspectivas recomenda-se um estudo mais aprofundado com relação aos conceitos deste trabalho, para situações de construções de outros sólidos não convencionais levando em consideração os teoremas e axiomas da Geometria.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Thais Marcelle de. **Matemática interligada: geometria espacial e plana**. 1 ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**, 2018. Disponível em: https://docs.ufpr.br/~trovon/cursos/2020_Geometria_Euclidiana/BNCC_Matematica_Fundamental2.pdf. Acesso em: 20 set. 2022.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar 10**. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

FANTI, Ermínia de Lourdes Campello. **Utilizando o software Geogebra no ensino de certos conteúdos matemáticos.** In Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 5, 2010, João Pessoa. Anais...João Pessoa: UFPB, 2010, p. 1-16. Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/Utilizando-software-GeoGebra_Erminia_v_bienal_sbm.pdf. Acesso em: 03 out. 2022.

PEREIRA, Thales de Lélis Martins. **O uso do software GeoGebra em uma escola pública: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio**. 2012. 121 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012. Disponível em:https://www2.ufjf.br/mestradoedumat//files/2011/05/DISSERTA%c3%87%c3%83O-Thales-de-Lelis-N.pdf. Acesso em: 10 out. 2022.

SCALABRIN. Ana Maria Oliveira. **Geometria espacial com o software GeoGebra 3D: análise dos processos de ensinar e de aprender no ensino médio**. 2019. 185f. Dissertação (Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências) - Universidade Estadual de Roraima, Boa Vista, 2019. Disponível em:https://uerr.edu.br/ppgec/wpcontent/uploads/2019/07/Disserta%C3%A7%C3%A3o_Ana-Maria-Mota-Oliveira-Scalabrin.pdf. Acesso em: 01 out. 2022.

SOUZA, Weliton Iris de. **O cálculo de volumes para alguns sólidos geométricos através do Princípio de Cavalieri.** 2020. 41f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2020. Disponível em: https://repositorio.ifpb.edu.br/xmlui/bitstream/handle/177683/1523/TCC%20WELITON%20IRIS%20DE%20SOUSA.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 20 out. 2022.

SOUZA, Gabriel Moreno Ferreira de. **Uso do GeoGebra 3D no Ensino de Geometria Espacial.** 2017. 52f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas, Juiz de Fora, 2017. Disponível em: https://repositorio.ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/5854/1/gabrielmorenoferreiradesouza.pdf. Acesso em: 01 nov. 2022.

TEIXEIRA, Alcinda Souza Muniz; MUSSATO, Solange. **Contribuições do software GeoGebra nas aulas com sólidos geométricos de faces planas nos anos iniciais do ensino**

fundamental. REAMEC – Rede Amazônia de Educação em Ciências e Matemática, *[S. l]*, v. 8, n. 3, p. 449-466, 2020. DOI: 10.26571/reamec.v8i3.10835. Disponível em: https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/10835.Acesso em: 03 nov. 2022.

TOLETO, Bruno de Souza. **O uso de softwares como ferramenta de ensino-aprendizagem na educação do ensino médio/técnico no Instituto Federal de Minas Gerais.** 2015. 115 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Sistemas de Informação e Gestão do Conhecimento) - Faculdade de Ciências Empresarias, Belo Horizonte, 2015. Disponível em:https://core.ac.uk/download/pdf/51455525.pdf.Acesso em: 17 dez. 2022.