

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA

LEONARDO DO NASCIMENTO BARBOSA

**NÚMEROS COMPLEXOS: CÁLCULO DE RAÍZES E SUA REPRESENTAÇÃO
GEOMÉTRICA USANDO O APLICATIVO MATHEMATICA**

CASTANHAL/PA

2018

LEONARDO DO NASCIMENTO BARBOSA

**NÚMEROS COMPLEXOS: CÁLCULO DE RAÍZES E SUA REPRESENTAÇÃO
GEOMÉTRICA USANDO O APLICATIVO MATHEMATICA**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Faculdade de Matemática
da Universidade Federal do Pará,
Campus Universitário de Castanhal, como
parte dos requisitos para obtenção do
Título de Licenciado Pleno em
Matemática.

Orientador: Professor José Geraldo
Gonçalves da Silva

CASTANHAL/PA

2018

LEONARDO DO NASCIMENTO BARBOSA

**NÚMEROS COMPLEXOS: CÁLCULO DE RAÍZES E SUA REPRESENTAÇÃO
GEOMÉTRICA USANDO O APLICATIVO MATHEMATICA**

Aprovado em _____ / _____ / _____

Conceito: _____

Banca Examinadora

Prof. M. Eng. José Geraldo Gonçalves da Silva
Faculdade de Matemática - Orientador

Prof. Dr. Nildsen Fernando Lisboa da Silva
Faculdade de Matemática - Membro

Prof. Dr. Frayzer Lima de Almeida
Faculdade de Matemática - Membro

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais Raimundo coelho Barbosa e Maria Zuleide do Nascimento Barbosa, e a todos os meus amigos e professores que me apoiaram e incentivaram no meu trajeto ao longo desses anos de estudos graças a eles consegui forças para seguir em frente, é a eles que dedico esta obra.

Leonardo do Nascimento Barbosa

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por todos os dias da minha existência e por poder ter me proporcionado essa oportunidade de cursar uma faculdade, a minha família, aos meus amigos que sempre se fizeram presentes me ajudando e incentivando nas horas difíceis durante a minha jornada.

Meus agradecimentos aos colegas de sala que me proporcionaram que a caminhada até aqui tenha sido tranquila e prazerosa. Ao professor Ms José Geraldo Gonçalves da Silva pela paciência e apoio na elaboração deste trabalho.

Agradeço aos meus familiares, sobretudo aos meus pais, que me apoiaram e incentivaram durante o curso.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, meu agradecimento.

RESUMO

Este artigo apresentará um estudo sobre a evolução dos números complexos, em particular, sobre cálculos de raízes e sua representação geométrica utilizando o software Mathematica, sua finalidade e calcular as raízes complexas e esboçar o seu gráfico utilizando um software de matemática. A princípio iniciou com uma abordagem histórica e teórica, procurando entender como surgiram os números complexos e quais foram os principais matemáticos envolvidos que contribuíram para o seu desenvolvimento. Buscando de esse modo desenvolver e compreender como são realizados os cálculos das raízes complexas assim como a utilização do Mathematica como forma de suporte para facilitar a interpretação geométrica das raízes, auxiliando os estudantes na realização dos cálculos e tornando o mesmo mais rápido de ser realizado. A metodologia empregada envolve a aplicação do cálculo de raízes complexas, fundamentada em pesquisas bibliográficas. Desta forma, mostram-se as definições dos números complexos, as propriedades do mesmo bem como da fórmula de Moivre, seguido de algumas aplicações com o intuito de mostrar em diversas situações a aplicabilidade desse assunto.

Palavras-chave: Números complexos; Representação Geométrica; Mathematica

ABSTRACT

This paper will present a study on the evolution of complex numbers, in particular, on calculations of roots and their geometric representation using Mathematica software, their purpose and calculate the complex roots and sketch their graph using mathematical software. At first it began with a historical and theoretical approach, trying to understand how the complex numbers arose and which were the main mathematicians involved that contributed to its development. In this way, we try to develop and understand how complex root calculations are performed as well as the use of Mathematica as a support to facilitate the geometrical interpretation of the roots, helping the students to perform the calculations and making it faster. The methodology used involves the application of the calculation of complex roots, based on bibliographical research. In this way, the definitions of the complex numbers, the properties of the same as well as of the formula of Moivre are shown, followed by some applications with the intention of showing in several situations the applicability of this subject.

Keywords: Complex numbers; Geometric Representation; Mathematica

LISTA DE ILUSTRAÇÃO

Figura 1- Representação gráfica do conjugado de z	27
Figura 2 - Representação Vetorial.....	30
Figura 3 – Representação geométrica de um número complexo.....	34
Figura 4 - Multiplicação de dois números complexos na forma polar.....	37
Figura 5 - Produto de dois números complexos.....	38
Figura 6 - Divisão de dois números complexos na forma polar.....	39
Figura 7- Polígono regular de n lados	43

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	9
1. HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS	12
2. NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS PROPRIEDADES	18
2.1. NÚMEROS COMPLEXOS	18
2.2. OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS	19
2.3. PROPRIEDADES DA ADIÇÃO	21
2.4. PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO	23
3. POTÊNCIAS DE i	26
4. CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO	27
5. MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO.....	30
6. REPRESENTAÇÃO TRIGONOMETRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS	34
6.1. AS COORDENADAS POLARES NO PLANO	34
6.2. OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS NA REPRESENTAÇÃO POLAR	36
7. FÓRMULA DE DE MOIVRE	40
7.1. RAÍZES DE NÚMEROS COMPLEXOS.....	40
8. SOFTWARE MATHEMATICA	46
CONSIDERAÇÕES FINAIS	51
REFERÊNCIAS.....	52

INTRODUÇÃO

Dentro da matemática os números complexos se tornaram importante na resolução de problemas que até então não tinha solução como foi o caso das equações do segundo grau, daí em diante foram evoluindo e chegaram a praticamente todas as áreas que envolvem matemática como física quântica, engenharia, teoria do caos, principalmente na solução de equações algébricas e equações diferenciais. Este projeto consiste em realizar uma abordagem histórica, de conceitos, propriedades e aplicações das raízes complexas através do software MATHEMATICA.

Os números complexos, apesar de serem descobertos há muitos anos é um dos temas que ainda gera dúvida entre os estudantes de matemática em especial com relação às raízes complexas, por esse motivo o referido trabalho buscou mostrar a partir da sua origem, da dificuldade em resolver problemas que envolvem raiz quadrada de números negativos assim como sua evolução que teve participação de diferentes matemáticos, e também algumas aplicações na realização do cálculo das raízes complexas através da fórmula de De Moivre com o auxílio do software MATHEMATICA, levando em consideração a importância dessa ferramenta no auxílio aos estudantes.

Esse trabalho teve como metodologia adotada a pesquisa quantitativa, onde se baseou em levantamentos bibliográficos e foram utilizadas as seguintes ferramentas como suporte na construção do trabalho que são livros, sites, registro de pesquisas já publicadas, e o software MATHEMATICA assim como algumas aplicações através das pesquisas realizadas.

O nosso trabalho está dividido em 8 capítulos. No capítulo 1, foi feita uma abordagem em relação a história dos números complexos a dificuldade que os matemáticos tinham em resolver problemas envolvendo raízes de números complexos assim como o surgimento de outros matemáticos que vieram a colaborar durante o seu período de evolução na matemática.

No capítulo 2, foi apresentada uma definição sobre os números complexos em particular a respeito do seu reconhecimento, como se apresenta um número complexo, também foi realizado algumas operações com os números complexos de soma, subtração, multiplicação e divisão, mais adiante foi apresentado as suas propriedades com as suas seguintes demonstrações.

No capítulo 3, nos referimos as potências de i foi mostrado como elas são criadas obedecendo uma serie de repetições seguido da fórmula do termo geral.

O capítulo 4 nos referiu ao conjugado de um número complexo e suas propriedades foi mostrado a sua forma algébrica seguido da sua representação geométrica no plano complexo, também foram feitas demonstrações conforme as suas propriedades.

No capítulo 5 foi mostrado o aspecto geométrico do módulo de um número complexo, e a seguir foram apresentadas as propriedades, também foi feito a demonstração em relação a elas.

No capítulo 6 encontram-se a representação trigonométrica dos números complexos, através do plano complexo se mostrou da onde surgem as equações trigonométricas e como são convertidas para a forma polar, também mostra como é encontrado o módulo dos números complexos como também da definição de argumento, e a fórmula que se utiliza para encontrar esse ângulo, foram feitas alguns exemplos dentre eles se mostra como calcular o módulo e o argumento de z , o valor principal do argumento, e como escrever um número complexo na forma polar. No subcapítulo 6.2 mostramos como são feitas as operações de multiplicação e divisão na forma polar obedecendo algumas regras tanto para multiplicação como para a divisão.

No capítulo 7, mostra-se a fórmula de De Moivre onde falamos sobre sua importância para determinar potências de expoentes naturais de números complexos, como também para calcular raízes de números complexos. Essas raízes correspondem a vértices de polígonos regulares de n lados expressos no plano de Argand- Gauss. Mostramos como a fórmula de De Moivre se apresenta assim como da sua estrutura, descrevendo minuciosamente cada detalhe da mesma. Buscamos mostrar algumas aplicações onde calculamos raízes complexas fazendo a aplicação da fórmula.

No capítulo 8, foi abordado a respeito do software MATHEMATICA com um breve resumo da sua história e de como é empregado em diferentes problemas que envolve cálculos. Sua finalidade e suas funcionalidades foram citados neste capítulo, também foi relatado a importância desse software para a otimização na realização de cálculos matemáticos proporcionando mais rapidez e segurança para o estudante. Em seguida foram realizados alguns cálculos de raízes complexas onde

foi utilizado o MATHEMATICA para encontrar as raízes junto com a representação gráfica dessas raízes no plano de Argand-Gaus.

1. HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Os números complexos surgiram na matemática a partir do século XVI, foi nesse período que se houve as primeiras indagações a respeito das raízes de números complexos, nessa época alguns matemáticos europeus em especial italianos produziram pesquisas, e foi através da troca de conhecimentos entre esses matemáticos que se chegou a uma formalização da estrutura que hoje conhecemos.

A história dos números complexos começou a ser traçada graças ao matemático italiano Girolamo Cardano(1501-1576). Ele foi o responsável por mostrar que mesmo tendo um termo negativo em uma raiz quadrada poderia se chegar a uma solução para uma equação do segundo grau.

Portanto a forma como se calculava equações do segundo grau até o século XVI consistia de se chegar a uma solução onde as raízes seriam sempre de números positivos, equações do segundo grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ quando utilizando a fórmula de Baskara e frequente usarmos a fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Existem situações em que pode se obter que o número $\Delta = b^2 - 4.a.c$ seja um número negativo nesse caso não haveria solução dentro dos números reais essa definição era utilizada pelos matemáticos da época que ate aquele momento não tinha uma ideia clara de como manipular os números negativos. Mas a partir das ideias de Cardano os números complexos começaram a ser vistos com outros olhos.

Em 1545 G.Cardano lança em seu livro *Ars magna* (Arte magna), um problema que consiste em dividir o número 10 em duas partes cujo produto é 40, ou seja, determinar as seguintes equações:

$$x + y = 10 \tag{1.1}$$

$$xy = 40 \tag{1.2}$$

Para resolver essas equações Cardano eleva a equação 1.1 ao quadrado e multiplica a equação 1.2 por 4, assim,

$$x^2 + 2xy + y^2 = 100 \quad (1.3)$$

$$4xy = 160 \quad (1.4)$$

Fazendo a subtração da equação 1.4 pela equação 1.3, temos

$$x^2 - 2xy + y^2 = -60 \quad (1.5)$$

E sabendo que $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$, e utilizando a regra de fatoração do trinômio do quadrado perfeito, iremos obter da equação 1.5,

$$(x - y)^2 = -60$$

Logo

$$x - y = \pm 2\sqrt{-15} \quad (1.6)$$

Formando então um novo sistema constituído pelas equações 1.1 e 1.6.

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = \pm 2\sqrt{-15} \end{cases} \quad (1.7)$$

$$(1.8)$$

Assim fazendo a soma entre as equações 1.7 e 1.8, formamos a seguinte equação $2x = 10 \pm 2\sqrt{-15}$. Que equivale a,

$$x = \frac{10 \pm 2\sqrt{-15}}{2}$$

Simplificando a equação temos,

$$x = 5 - \sqrt{-15} \quad \text{ou} \quad y = 5 + \sqrt{-15}$$

e também

$$x = 5 + \sqrt{-15} \quad \text{ou} \quad y = 5 - \sqrt{-15}$$

Onde as suas raízes correspondentes são $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$. Cardano ao multiplicar as raízes consegue encontrar o seguinte valor e encontra a solução.

$$(5 + \sqrt{-5})(5 - \sqrt{-5}) = 25 - (-15) = 40.$$

Esse problema foi um dos primeiros que surgiu no desenvolvimento dos números complexos e foi a partir dele que Cardano demonstrou abertamente o primeiro caso de raiz quadrada de um número negativo.

Porém a partir do momento que foi descoberto Cardano se deparou com outro problema que ficou conhecido como números sofisticados, ou seja, as raízes quadradas de números negativos e ele conclui que o resultado dessas raízes seriam números insignificantes e inúteis o que mas tarde seria desmitificado por outros matemáticos, os números negativos tiveram varias definições ao longo da sua evolução eram conhecidos como números imaginários, sofisticos, fictícios, impossíveis e por serem incompreensíveis ficaram algum tempo sem serem estudados. Mas foi através dos polinômios de 3ª grau que o estudo dos números complexos obteve sua evolução, quando Cardano ao tentar resolver a equação $x^3 - 15x + 4 = 0$, utilizando a fórmula conhecida pelo seu nome fórmula de Cardano (1.9)

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (1.6)$$

Alcançou os seguintes valores $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ a partir daí não soube resolver as expressões de modo que o valor obtido seja o número 4, que era uma das raízes do problema. Para tirar Cardano desse empecilho surge o matemático bolonhês Rafael Bombelli (1526 - 1573) que foi o precursor no desenvolvimento da regra que veio a facilitar a resolução de equações de números negativos e dos números complexos, foi ele que introduziu os números complexos na solução de equações de 3º grau.

Para resolver esse problema, Bombelli faz a substituição das raízes cúbicas por raízes quadradas de números negativos, e passa a adotar as seguintes equações $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ como se fosse $a + b\sqrt{-1}$ e $x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ como sendo $a - b\sqrt{-1}$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ ou seja, existem números reais a e b tais que:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-1} \text{ e } \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-1}.$$

Fazendo isso ele obteve $a = 2$ e $b = 1$.

Assim substituindo na equação temos,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4. \end{aligned}$$

Foi a partir desse método que Bombelli consegue encontrar a solução do seguinte problema. Mas a utilização da fórmula foi visto com desconfiança pelos matemáticos da época embora a utilização tenha sido aceita por demonstrar um resultado concreto mais que ninguém conseguia explicar. Bombelli avançou ainda mais nos seus estudos, em sua álgebra de (1572) surge um artigo inédito, ele apresenta a teoria dos números complexos de forma mediana, mas bem estruturada também utiliza uma notação específica: o número $3i$, por exemplo, era representado por $R[0 m .9]$ (R de raiz, m de menos), isto é, $R[0 m .9] = \sqrt{0 - 9}$.

A partir da ideia de Bombelli de como manipular os números complexos, foi necessário mais de dois séculos para que se conseguisse, por meio de Euler, ter o conhecimento necessário para extrair raízes de números complexos.

Entretanto ao longo dos anos os números complexos foram sendo incorporados na matemática, mais com certa aura de mistérios que perdurou até o século XVIII para o XIX. Nessa época a aceitação dos números complexos ainda era vista com certa desconfiança por outros matemáticos, a sua legalização só foi consolidada quando obtiveram a sua representação geométrica visto que até então o maior problema em admitir a sua existência era a dificuldade em demonstrar graficamente tal função.

Foi nesse sentido que surgem diferentes matemáticos, e juntos contribuem com suas ideias na organização e formação da estrutura dos números complexos foi através deles que os números complexos obtiveram sua representação geométrica e pode ser modelado para a forma que se em contra atualmente. Entre esses matemáticos temos:

O matemático suíço Leonharde Euler(1707-1783) sugeriu, em 1777, a substituição do número $\sqrt{-1}$ pelo símbolo i e progrediu nos seus estudos criando os três símbolos matemáticos e, π, i Euler descobriu ainda as raízes da equação $z^n = 1$ e definiu como sendo os vértices de um polígono regular de n lados e

determinou a função dos números complexos pela fórmula conhecida até hoje como identidade de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Carl Friedrich Gauss(1777-1855) foi o matemático que nomeou o termo números complexos e utilizou a sua representação geométrica através de pontos em um plano. Através dessa representação Gauss usa os complexos para obter resultados em relação à geometria plana, e sobre números reais e também os números inteiros. Ao utilizar o plano complexo Gauss demonstra que todo polinômio de coeficientes reais pode ser decomposto em fatores de grau máximo 2.

Jean Robert Argand(1786-1822) e Caspar Wessel (1745-1818), fizeram uso da representação dos números complexos como sendo uma estrutura que orienta e facilita a interpretação geométrica tendo uma grande aceitação no ambiente matemático. Foi por meio de Wessel e Argand que se percebeu que os números complexos podem ser trabalhados algebricamente empregando segmentos de reta orientados ou vetores coplanares. Mais foi no ano de 1800 com Argand e Gauss empregando um sistema de coordenadas retangulares que estabelece uma relação entre um complexo com um par ordenado, ou seja, $a + bi$ representado pelo par ordenado $(a; b)$, obteve uma maior aprovação pelos matemáticos da existência desses números. Assim com essas conversões um complexo $a + bi$ reproduz geometricamente um ponto (ou um vetor), no plano bidimensional que é conhecido hoje como plano de Argand-Gauss.

Contudo ainda havia um ponto importante a ser esclarecido: era entender como a expressão algébrica $a + bi$ de número complexo apresenta a soma de duas parcelas a e bi de naturezas completamente distintas. Quem resolveu esse problema foi o irlandês William Rowan Hamilton(1805-1865). Hamilton nasceu em Dublin Irlanda, era órfão de pai e mãe ainda criança, entretanto mesmo antes de ter ficado órfão sua educação fora concedida pelo seu tio, que era linguista. Talvez por conta disso sua incomum precocidade intelectual foi voltada inicialmente para o aprendizado de línguas, William aos 5 anos de idade lia grego, hebraico e latim; aos 8, francês e italiano; aos 10, árabe e sânscrito; aos 14, persa. Ao ter um contato relâmpago com um calculista poucos anos depois atizou o interesse já forte de Hamilton pela matemática. Sendo assim começou a ler os grandes clássicos da matemática como os principia de Newton e a Mecânica celeste de Laplace, no qual neste ultimo encontra um erro isso aos 18 anos de idade. Em 1824 entrou no Trinity College de Dublin, onde passaria a exercer o cargo de docente de astronomia em

1827 antes mesmo de se graduar. Por conta disso passa a ser, inclusive, o astrônomo real da Irlanda.

Em um artigo de 1833, apresentado à Academia Irlandesa, Hamilton introduziu uma álgebra formal de pares de números complexos no qual as regras de combinação são as que hoje utilizamos. Segundo Hamilton os números complexos passavam a ser vistos como pares ordenados (a, b) de números reais, onde se operava da seguinte forma

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

Segundo sua lógica, um par $(a, 0)$ representa o número real a ; sendo assim um par ordenado $(-1, 0) = -1$. Portanto fazendo $i = (0, -1)$, $i^2 = (0, -1) \cdot (0, -1) = (-1, 0) = -1$. Obtendo assim um esclarecimento lógico para o símbolo $\sqrt{-1}$.

Contudo Hamilton ao criar uma nova álgebra pretendia chegar mais longe e foi com esse intuito que ele desenvolve uma álgebra que fosse para os vetores do espaço tridimensional o mesmo que a álgebra dos números complexos é para os vetores de um plano. Portanto ele pensou que da mesma forma que um número complexo é escrito como par ordenado $(a, b) = a + bi$, uma nova expressão pode ser escrita como sendo $(a, b, c) = a + bi + cj$. Entretanto com essa nova descoberta Hamilton percebeu que a soma e a subtração era feita naturalmente mais em relação à multiplicação não obteve sucesso, o que levou a uma procura em vão que durou por mais de 10 anos para encontrar uma regra que viesse a multiplicar esses termos.

Mas no dia 16 de outubro de 1843 ao caminhar com sua mulher em direção ao conselho da Real Sociedade da Irlanda onde iria participar e presidir teve uma enxurrada de pensamentos onde se chegou à descoberta que tanto procurava a fórmula fundamental dos símbolos i, j, k onde $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, que contem a solução do problema. Nasciam assim os *quatérnions* $a + bi + cj + dk$, em que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$ e $ki = j = -ik$.

Com a descoberta da multiplicação definida dessa forma, o conjunto dos quatérnions estabelece o primeiro exemplo de anel não comutativo com divisão.

Essa descoberta foi de grande importância para Hamilton que ver a sua aplicação para o desenvolvimento da física.

2. NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS PROPRIEDADES

2.1. NÚMEROS COMPLEXOS

Nesta primeira parte do trabalho será feito um breve resumo dos números complexos e iremos apontar algumas propriedades importantes para elucidar e tornar mais fácil a compreensão dos capítulos subsequentes em especial problemas de geometria e as representações dos números complexos.

Será utilizado o símbolo i que o denominaremos como unidade imaginária, e será representado pela expressão $\sqrt{-1}$ estabelecendo a propriedade como sendo $i^2 = -1$. Desta forma a identificação dos números complexos estará obedecendo as seguintes definições.

Definição 1.1 Um número complexo é um número da forma $z = a + bi$, onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária.

Definição 1.2 Todo número complexo pode ser escrito de uma maneira única na forma $a + bi$ onde a e b são reais (a é chamado de parte real e b é chamado de parte imaginária do complexo $a + bi$). Usa-se a notação $Re(a + bi) = a$ e $Im(a + bi) = b$.

Onde $Re(z) = a$. Definiremos como sendo parte real a de z , $Im(z) = b$, b como sendo a parte imaginária de z . Sendo assim se o número complexo for da forma $z = a + bi$, $a = 0$, $b \in \mathbb{R}^*$, afirmamos que z é um número imaginário puro, também acontece se a expressão for $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b = 0$, nesse caso dizemos que z é um número real. Em seguida estabelecemos os requisitos para que dois números complexos sejam iguais.

Definição 1.3 Dois números complexos são iguais se exclusivamente suas partes reais e imaginárias forem exclusivamente iguais, isto é,

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \quad (2.1)$$

Portanto determinamos que $z_1 = z_2$ exclusivamente se $Re(z_1) = Re(z_2)$ e $Im(z_1) = Im(z_2)$.

2.2. OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS

Os números complexos formam um conjunto $\mathbb{C}$, onde estão definidas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão isso ocorre do mesmo modo para os números reais.

Sendo assim iremos mostrar como se apresenta as seguintes operações envolvendo números complexos. Considere dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$. Vamos definir as operações citadas para os elementos desse conjunto.

1. Adição e Subtração:

Com o objetivo de somarmos ou subtrairmos números complexos somamos ou subtraímos as partes reais e a parte imaginária separadamente. Assim sendo, $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, dois números complexos temos que:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad (2.2)$$

e

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \quad (2.3)$$

Exemplo 1: Considere dois números complexos $z = 10 + 2i$ e $x = 5 - 3i$, calcule $z + x$.

Solução: segundo as informações anteriores.

$$\begin{aligned} z + x &= (10 + 2i) + (5 - 3i) \\ &= 10 + 5 + (2 - 3)i \\ &= 15 + (-1)i \\ &= 15 - 1i \end{aligned}$$

Lembramos que a soma de um número complexo com seu conjugado é um número real.

2. Multiplicação:

Na multiplicação de números complexos utilizamos a regra da multiplicação de binômios. Assim sendo, $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, dois números complexos temos que:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci - bd$$

Logo:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad (2.4)$$

Exemplo 2: Considere dois números complexos $z_1 = 2 + 4i$ e $z_2 = 1 + 3i$, Calcule $z_1 \cdot z_2$.

Solução: E só multiplicarmos os binômios aplicando a propriedade distributiva da multiplicação.

$$z_1 z_2 = (2 + 4i)(1 + 3i) = 2 + 6i + 4i + 12i \cdot i^2 = -10 + 10i.$$

3. Divisão

Na divisão de dois números complexos precisamos inserir o conceito de conjugado de um número complexo onde $z = a + bi$, e o conjugado de z é $\bar{z} = a - bi$, para realizar a divisão colocamos o quociente na forma de fração e fazemos a racionalização, multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Assim temos,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \quad (2.5)$$

Exemplo 3: Considere dois números complexos $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 1 + i$. Calcular a divisão $\frac{z_1}{z_2}$.

Solução: sabemos que para dividir números complexos precisamos racionalizar o denominador então,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{1 + i}$$

Fazendo a racionalização, temos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{1+i} = \frac{3+2i}{1+i} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{3-3i+2i-2i^2}{1-i+i-i^2} = \frac{5-i}{2}$$

2.3. PROPRIEDADES DA ADIÇÃO

Para quaisquer z, v e $w \in \mathbb{C}$, onde $z = (x, y)$, $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$, a operação de adição estabelecida nos $\mathbb{C}$, abrange as propriedades a seguir:

1. Propriedade associativa

$$z + (v + w) = (z + v) + w. \quad (2.6)$$

2. Propriedade comutativa

$$z + v = v + z. \quad (2.7)$$

3. Propriedade do elemento neutro

$$z + 0 = z. \quad (2.8)$$

4. Existência do elemento simétrico

$$z + (-z) = 0. \quad (2.9)$$

De acordo com as propriedades acima iremos fazer as seguintes demonstrações:

1. Propriedade associativa

$$\begin{aligned} z + (v + w) &= (x, y) + [(a, b) + (c, d)] \\ &= (x, y) + (a + c, b + d) \\ &= (x + a + c, y + b + d). \end{aligned}$$

Utilizando a associatividade dos números reais, observamos que a ultima expressão equivale a:

$$((x + a) + c, (y + b) + d) = (x + a, y + b) + (c, d) = (z + v) + w).$$

2. Propriedade comutativa

$$z + v = (x, y) + (a, b)$$

$$= (x + a, y + b).$$

Utilizando a comutatividade dos números reais, observamos que a ultima expressão equivale a:

$$(a + x, b + y) = (a, b) + (x, y) = v + z.$$

3. Propriedade do elemento neutro

Considerando o número complexo v , temos $z + v = z$. Trocando estes números por coordenadas, obtemos:

$$(x, y) + (a, b) = (x, y) \Rightarrow$$

$$(x + a, y + b) = (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} x + a = x & \Rightarrow a = 0 \\ y + b = y & \Rightarrow b = 0. \end{cases}$$

De maneira que $v = (a, b) = (0, 0) = 0$, desta forma existe $(0, 0)$, denominado elemento neutro para adição, que ao se somar com qualquer número complexo z seu resultado será o próprio z , sendo assim $z + 0 = z$.

4. Propriedade do elemento simétrico

De acordo com o número complexo z , desejamos encontrar $v \in \mathbb{C}$ tal que $z + v = 0$. Trocando a equação por coordenadas, temos:

$$(x, y) + (a, b) = (0, 0) \Rightarrow$$

$$(x + a, y + b) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + a = 0 & \Rightarrow a = -x \\ y + b = 0 & \Rightarrow b = -y. \end{cases}$$

Sabendo que $v = (a, b) = (-x, -y)$, portanto existe $(-x, -y)$, chamado de $(-z)$ simétrico ou inverso aditivo de z , ou seja, $z + (-z) = 0$.

2.4. PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO

Para quaisquer z, v e $w \in \mathbb{C}$, onde $z = (x, y)$, $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$, a operação de multiplicação verifica as seguintes propriedades:

1. Propriedade associativa

$$(z \cdot v) \cdot w = z \cdot (v \cdot w). \quad (2.10)$$

2. Propriedade comutativa

$$z \cdot v = v \cdot z. \quad (2.11)$$

3. Propriedade do elemento neutro

$$z \cdot 1 = z. \quad (2.12)$$

4. Propriedade do elemento inverso

$$z \cdot z^{-1} = 1. \quad (2.13)$$

5. Propriedade Distributiva

$$z \cdot (v + w) = z \cdot v + z \cdot w. \quad (2.14)$$

Conforme observamos as seguintes propriedades, trataremos de fazer as suas demonstrações.

1. Propriedade associativa

$$\begin{aligned} (z \cdot v) \cdot w &= [(x, y) \cdot (a, b)] \cdot (c, d) \\ &= (xa - yb, xb + ya) \cdot (c, d) \\ &= [(xa - yb)c - (xb + ya)d, (xa - yb)d + (xb + ya)c]. \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade distributiva dos números reais, observamos que a última expressão é semelhante a:

$$\begin{aligned}
 & (xac - ybc - xbd - yad, xad - ybd + xbc + yac) \\
 &= [x(ac - bd) - y(bc + ad), x(ad + bc) + y(ac - bd)] \\
 &= (x, y)(ac - bd, ad + bc) \\
 &= (x, y)[(a, b)(c, d)] = z \cdot (u, w)
 \end{aligned}$$

2. Propriedade comutativa

$$\begin{aligned}
 z \cdot v &= (x, y)(a, b) \\
 &= (xa - yb, xb + ya).
 \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade comutativa dos números reais, observamos que a última expressão é semelhante a:

$$(ax - by, ay + bx) = (a, b)(x, y) = v \cdot z.$$

3. Existência do elemento neutro

Sabendo que o número complexo $z = (x, y)$. Vamos encontrar $v = (a, b) \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot v = z$. Logo:

$$\begin{aligned}
 (x, y)(a, b) &= (x, y) \Rightarrow (xa - yb, xb + ya) = (x, y) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} xa - yb = x \\ xb + ya = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

De modo que $v = (a, b) = (1, 0) = 1$ (já que designamos o número complexo $(1, 0)$ simplesmente por 1). Desse modo $(1, 0) = 1$ é o elemento neutro para a multiplicação.

4. Existência do elemento inverso

Seja $v = (a, b)$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, demonstraremos que existe o inverso multiplicativo (x, y) que é apresentado por v^{-1} ou $\frac{1}{v}$ tal que $v \cdot v^{-1} = 1$.

Escrevendo $v \cdot v^{-1} = 1$, em coordenadas:

$$(a, b)(x, y) = (1, 0) \Rightarrow (ax - by, ay + bx) = (1, 0).$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay - bx = 0, \end{cases}$

Obtemos

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad e \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Portanto concluímos que

$$v^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

5. Propriedade distributiva

Sejam os números complexos $z = (x, y)$, $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$, temos:

$$\begin{aligned} z \cdot (v + w) &= (x, y) \cdot [(a, b) + (c, d)] = (x, y) \cdot (a + c, b + d) \\ &= [x(a + c) - y(b + d), x(b + d) + y(a + c)]. \end{aligned}$$

Usando a distributiva dos números reais, temos que a ultima expressão é igual a:

$$[(xa + xc - yb - yd, xb + xd + ya + yc)].$$

Aplicando a associatividade dos números reais, temos:

$$\begin{aligned} &= [(xa - yb) + (xc - yd), (xb + ya) + (xd + yc)] \\ &= (xa - yb, xb + ya) + (xc - yd, xd + yc) \\ &= (x, y) \cdot (a, b) + (x, y) \cdot (c, d) = z \cdot v + z \cdot w. \end{aligned}$$

3. POTÊNCIAS DE i

O que caracteriza um número complexo é a sua unidade imaginária, definimos unidade imaginária e indicamos por i , do qual o seu valor algébrico é representado por $\sqrt{-1}$.

Ao criarmos as potências de expoentes naturais de i , reparamos que há uma repetição com um período de quatro unidades.

Considerando $z = 1$, temos:

$$i^0 = 1$$

$$i = \sqrt{-1} = i$$

$$i^2 = i \cdot i = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1})^2 = i \cdot (-1) = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1})^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i^1 = (\sqrt{-1})^4 \cdot (\sqrt{-1}) = 1 \cdot (\sqrt{-1}) = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = (\sqrt{-1})^4 \cdot (\sqrt{-1})^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = (\sqrt{-1})^6 \cdot (\sqrt{-1}) = (-1) \cdot i = -i$$

Isso mostra que o resultado se repete de forma cíclica ocasionando uma redundância, isto é, irá se repetir de acordo com o termo geral $i^n = i^{4q+r} = i^r$. Portanto a partir disso definimos a propriedade básica da unidade imaginária $i^2 = -1$.

Conforme observamos o termo geral das potências de i , podemos provar por indução que para qualquer inteiro positivo n teremos,

$$i^{4n} = 1; \quad i^{4n+1} = i; \quad i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i.$$

Assim, $i^n \in \{-1, 1, -i, i\}$ para todos os inteiros $n \geq 0$. Se n é um número negativo, logo,

$$i^n = (i^{-1})^{-n} = \left(\frac{1}{i}\right)^{-n} = (-i)^{-n}. \quad (3.1)$$

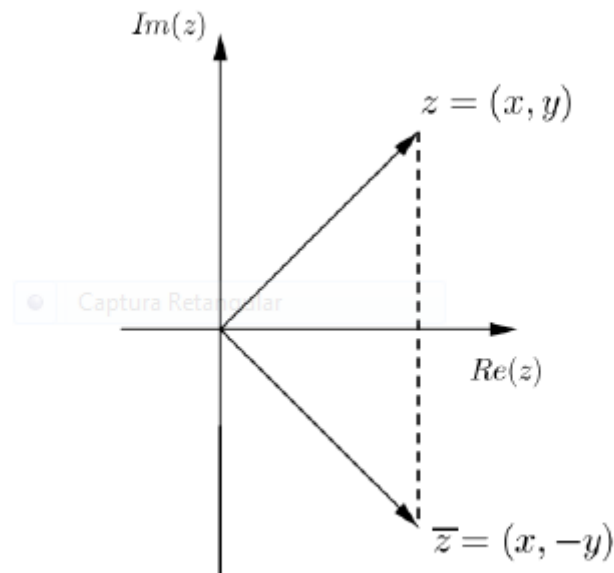
4. CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

O conjugado de um número complexo $z = (x, y) = x + yi$ é representado pelo número

$$\bar{z} = (x, -y) = x - yi$$

Assim o ponto $\bar{z}$ é a reflexão do ponto z no eixo x , ou seja, a localização do ponto $\bar{z}$ é simétrica a do ponto z em relação ao eixo x como mostra (Figura 1).

Figura 1- Representação gráfica do conjugado de z .



Fonte: ROCHA, Vitail 2014, p. 32 .

Veremos agora algumas propriedades do conjugado de um número complexo que satisfazem o conjunto $\mathbb{C}$.

$$1. \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}; \quad (4.1)$$

$$2. \overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}; \quad (4.2)$$

$$3. \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}; \quad (4.3)$$

$$4. \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, \text{ se } w \neq 0; \quad (4.4)$$

$$5. z = \bar{z} \Leftrightarrow z = \operatorname{Re}(z); \quad (4.5)$$

$$6. z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z); \quad (4.6)$$

$$7. z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z); \quad (4.7)$$

$$8. \bar{z}^n = \overline{z^n}, \text{ se } n \in \mathbb{N}. \quad (4.8)$$

De acordo com as propriedades acima faremos as seguintes demonstrações:

Considere dois números complexos $z = x + yi$ e $w = a + bi$, temos:

$$1) \overline{z + w} = \overline{(x + a) + (y + b)i} = (x + a) - (y + b)i = (x - yi) + (a - bi) = \bar{z} + \bar{w}.$$

$$2). \overline{z - w} = \overline{(x - a) + (y - b)i} = (x - a) - (y - b)i = (x - yi) - (a - bi) = \bar{z} - \bar{w}.$$

3) Temos:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (x + yi)(a + bi) \\ &= xa + xbi + ayi + abi^2 \\ &= xa - yb + (ay + xb)i, \\ \overline{z \cdot w} &= \overline{xa - yb + (ay + xb)i} \\ &= (xa - ayi) + (-xbi + ybi^2) \\ &= a(x - yi) - bi(x - yi) \\ &= (x - yi)(a - bi) = \bar{z} \cdot \bar{w} \end{aligned}$$

4) Temos que:

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{a + bi}$$

Por outro lado

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{w} \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Sendo assim,

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{a - bi} \text{ e } \frac{1}{w} = \frac{1}{w} \cdot \frac{w}{w} = \frac{a + bi}{a^2 + b^2} = \left(\frac{1}{w}\right)$$

Onde concluímos que:

$$\left(\frac{\bar{z}}{w}\right) = \bar{z} \cdot \frac{1}{\bar{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, \quad w \neq 0.$$

$$5) \quad z = \bar{z} \Leftrightarrow x + yi = x - yi, \text{ logo } y = -y, \text{ logo } y = 0.$$

$$6) \quad z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x + 0i = 2x = 2 \cdot \text{Re}(z).$$

$$7) \quad z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 0x + 2yi = 2yi = 2 \cdot \text{Im}(z).$$

$$8) \quad \overline{z^n} = \bar{z} \cdot \bar{z} \cdot \bar{z} \dots \bar{z} = \overline{z \cdot z \cdot z \dots z} = \overline{z^n}.$$

$$(5.2)$$

$$2. |z| = |\bar{z}|;$$

$$3. \operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \text{ e } \operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \quad (5.3)$$

$$4. |zw| = |z||w|; \quad (5.4)$$

$$5. \left| \frac{z}{w} \right| = \left| \frac{z}{w} \right| \text{ se } w \neq 0; \quad (5.5)$$

$$6. |z + w| \leq |z| + |w|; \quad (5.6)$$

$$7. |z + w| \geq ||z| - |w||. \quad (5.7)$$

De acordo com as propriedades subsequentes segue as suas demonstrações:

1) Sejam os números complexos $z = x + yi$ e $w = a + bi$, temos

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 \text{ e } |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

Assim

$$|z|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}.$$

Logo

$$z\bar{z} = |z|^2.$$

$$2) |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |\bar{z}|.$$

3) se $x \geq 0$, $x = |x|$ e se $x < 0$, $x < |x|$. Assim $x \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Dessa forma

$$x^2 \leq x^2 + y^2 \text{ e } |x|^2 = x^2$$

Portanto

$$|x| \leq |z|$$

Dessa forma podemos concluir que

$$x \leq |x| \leq |z|,$$

Onde concluímos

$$\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|.$$

Da mesma forma provamos para os $\operatorname{Im}(z)$.

4) Com base no item (1), temos que

$$|zw|^2 = zw \cdot \overline{zw} = zw \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} = z\bar{z} \cdot w\bar{w} = |z|^2 |w|^2$$

De onde concluímos que:

$$|zw| = |z||w|.$$

5) Conhecendo que

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} \right| = \left| \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \right| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

E sabendo que

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{|z|}$$

Logo

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \left| z \cdot \frac{1}{w} \right| = |z| \cdot \left| \frac{1}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$$

$$6) |z + w|^2 = (z + w) \overline{(z + w)}$$

$$\begin{aligned} &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}, \text{ mas } z\bar{w} + w\bar{z} = 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2. \end{aligned}$$

Como

$$|z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2,$$

E sabendo que

$$|z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2,$$

Isto é:

$$|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$$

Extraindo as raízes quadradas de ambos os lados da desigualdade, temos:

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

7) Utilizando a desigualdade triangular,

$$|z| = |(z + w) - w| \leq |z + w| + |-w| = |z + w| + |w|$$

Então

$$|z + w| \geq |z| - |w|$$

Trocando a ordem de z e w na desigualdade acima, temos:

$$|z + w| \geq |w| - |z|$$

Como

$$||z| - |w|| = |z| - |w| \quad \text{se} \quad |z| \geq |w|$$

e

$$||z| - |w|| = |w| - |z| \quad \text{se} \quad |w| \geq |z|,$$

Concluimos que em ambas as situações

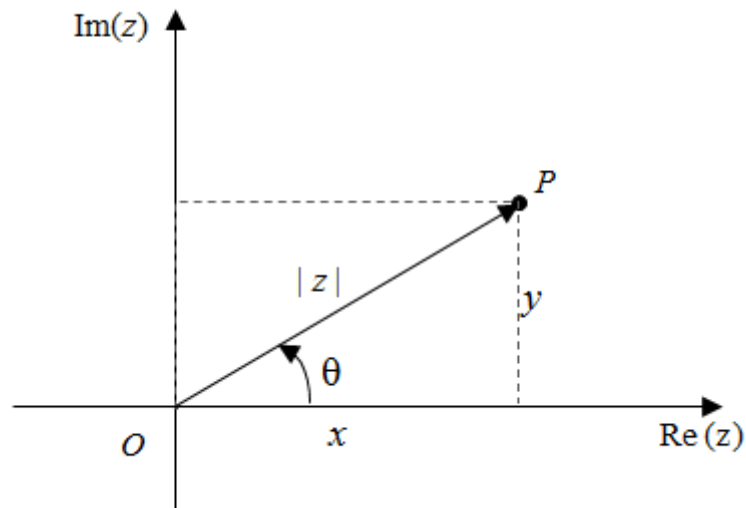
$$|z + w| \geq ||z| - |w||.$$

6. REPRESENTAÇÃO TRIGONOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

6.1. AS COORDENADAS POLARES NO PLANO

Dados as coordenadas polares r e θ do ponto representado por p , e sabendo que $r = |z|$ com base na (Figura 3), onde $r \geq 0$. Utilizando as relações trigonométricas do triângulo retângulo podemos obter as seguintes equações. Assim

Figura 3 – Representação geométrica de um número complexo.



Fonte: CARREIRA, Adelaide. (2012) WikiCiências.

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin \theta,$$

Fazendo

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta \quad (6.1)$$

Através das equações iremos escrever o número complexo z na forma polar, colocando r em evidência temos

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r \geq 0).$$

Lembremos que o raio do vetor r é representado por $\sqrt{x^2 + y^2}$, isto é, $r = |z|$.

O ângulo θ conhecido como argumento de z é apresentado como $\arg z$ quando $z \neq 0$, e refere-se ao ângulo que o vetor denominado por z faz com o eixo real medido no sentido anti-horário em radianos, e os valores de θ são obtidos através da equação ou da relação

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad (6.2)$$

Ou através da posição do ponto z em um determinado quadrante.

Faremos uma aplicação para entendermos melhor como se encontra essas coordenadas.

Exemplo 4: Dado o número complexo $z = \sqrt{3} + i$, determine:

- Obter o módulo de z .
- Obter o argumento de z .
- Obter o valor principal do argumento.
- Escrever z na forma polar.

Resolução das questões

- a) Para encontrar o modulo de z , temos

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2.$$

b) Para se obter o argumento z , iremos utilizar da definição de argumento então

$$\theta = \arg z = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \arctg \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Portanto

$$\arg z = \frac{\pi}{6} \pm k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

c) Para obtermos o valor principal do argumento será necessário o resultado da questão anterior, tomando-se $k = 0$; logo

$$\arg z = \frac{\pi}{6}$$

d) Para expressar a forma polar faremos

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

6.2. OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS NA REPRESENTAÇÃO POLAR

No seguinte tópico iremos mostrar como são feitas as multiplicações e a divisão dos números complexos na forma polar e mais adiante veremos que essa operação será muito importante para o cálculo de potências inteiras de um número complexo.

Tendo a forma polar dos números complexos iremos utilizar uma regra muito importante para a multiplicação. Assim

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

Dois números complexos quaisquer. Logo,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)], \end{aligned}$$

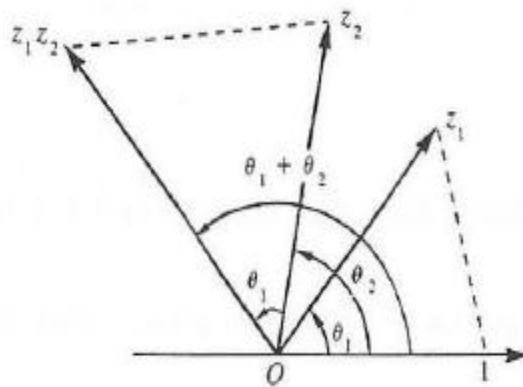
Sendo assim,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\sin(\theta_1 + \theta_2))]. \quad (6.3)$$

Observamos que o produto de dois números complexos é o número do qual o módulo é o produto dos fatores e cujo argumento é a soma dos argumentos dos fatores conforme a (

Figura 4), nessa figura os triângulos cujo vértice são representados por $0, 1, z_1$ e $0, z_2, z_1 z_2$ são parecidos o que ajuda na elaboração do produto $z_1 z_2$ de acordo com os dados $0, 1,$ e z_2 .

Figura 4 - Multiplicação de dois números complexos na forma polar.



Fonte: AVILA, Geraldo. (2008, p.10)

Exemplo 5: Sejam $z_1 = \sqrt{3} + i$ e $z_2 = 3\sqrt{2}(1 + i)/2$. Antes de iniciar a multiplicação é necessário ter graficamente o número complexo $z_1 \cdot z_2$. Para fazermos a multiplicação de $z_1 \cdot z_2$, primeiro escreveremos os números complexos na forma

Polar então,

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

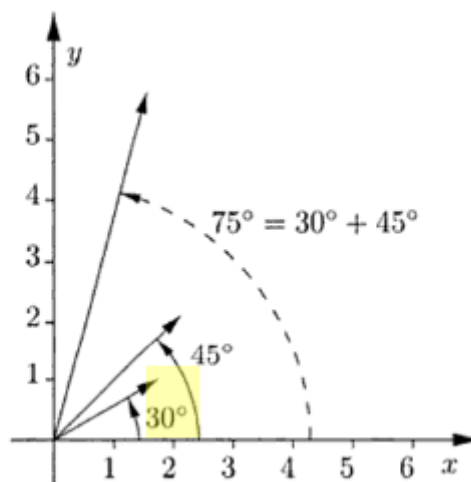
$$z_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

Para formar o produto $z_1 \cdot z_2$ devemos multiplicar os módulos e adicionar os argumentos, conforme a (

Figura 5) Se fizermos questão do argumento principal e a soma dos argumentos ultrapassar 2π radianos, devemos subtrair um múltiplo inteiro de 2π radianos do argumento $\theta_1 + \theta_2$. Então os valores dados de z_1 e z_2 , o resultado será

$$z_1 \cdot z_2 = 6 \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right).$$

Figura 5 - Produto de dois números complexos.



Fonte: Oliveira, C, E.(2005, p.14)

Conforme foi feito na construção do produto dos números complexos, iremos encontrar um resultado similar para a divisão na forma polar. Então

$$\frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{(\cos \theta - i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)} = \cos \theta - i \sin \theta$$

Logo,

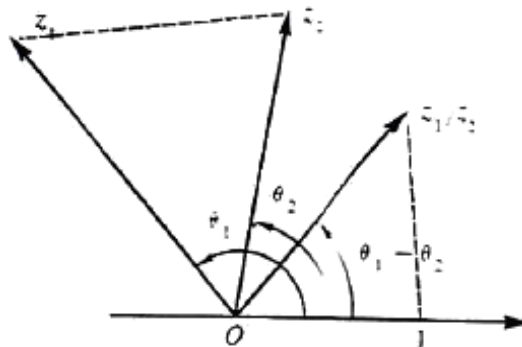
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \theta_1 + i \sin \theta_1}{\cos \theta_2 + i \sin \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2} [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \quad (6.4)$$

Portanto na divisão dos números complexos e só calcular o quociente dos módulos e a diferença dos argumentos (Figura 6), observamos que semelhante ao caso do produto, a estrutura do quociente é formada tendo como base a semelhança dos triângulos de vértices 0, 1, $\frac{z_1}{z_2}$ e 0, $z_2 \cdot z_1$.

Figura 6 - Divisão de dois números complexos na forma polar.



Fonte: AVILA, Geraldo. (2008, p.11)

Exemplo 6: Escrever na forma $z = x + iy$ o quociente:

$$\frac{z_1}{z_2} \text{ onde } z_1 = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) \text{ e } z_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$$

Assim o módulo de $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{3}{1} = 3$ e seu argumento ficara, $\operatorname{arg} z_1 - \operatorname{arg} z_2 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$, portanto podemos escrever da forma

$$z = \frac{z_1}{z_2} = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right), \text{ ou se preferir na forma algébrica } z = \frac{3\sqrt{2}(1+i)}{2}.$$

7. FÓRMULA DE DE MOIVRE

A fórmula de De Moivre é uma consequência da interpretação geométrica do produto dos números complexos, ela é importante para determinar a potência de expoentes naturais de um número complexo quando estiver na forma trigonométrica.

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx),$$

Na fórmula o n representa um inteiro positivo e analisando geometricamente podemos notar que ao multiplicar o complexo unitário $\cos x + i \operatorname{sen} x$ por ele mesmo n vezes, representa que irá dar n voltas contínuas com o ângulo x .

Uma das vantagens da fórmula de De Moivre é calcular $\cos nx$ e $\operatorname{sen} nx$, sem a necessidade de utilizar a fórmula da adição. Como exemplo iremos calcular $\cos 3x$, utilizando a fórmula anterior:

$$\begin{aligned} \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x &= (\cos x + i \operatorname{sen} x)^3 = \\ &= \cos^3 x + 3 \cos x i^2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos x^2 i \operatorname{sen} x + i^3 \operatorname{sen}^3 x = \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x \operatorname{sen}^2 x + i(3 \cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x), \end{aligned}$$

Fazendo a junção das partes reais e imaginárias temos:

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos^3 x - 3 \cos x \operatorname{sen}^2 x, \\ \operatorname{sen} 3x &= 3 \cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x. \end{aligned}$$

Exemplo 7: Calcular o número complexo $(1 + i)^{1000}$.

Solução: Escrevendo na forma polar o número $1 + i$ então

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right).$$

Utilizando a fórmula de De Moivre, obtemos

$$\begin{aligned}
(1+i)^{1000} &= \sqrt{2}^{1000} \left(\cos 1000 \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} 1000 \frac{\pi}{4} \right) \\
&= 2^{500} (\cos 250\pi + i \operatorname{sen} 250\pi) \\
&= 2^{500} (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 2^{500}.
\end{aligned}$$

A fórmula De Moivre também é utilizada para calcular as raízes de um número complexo ela possibilita encontrar as n raízes de índice n de um número complexo, não nulo, escrito na forma trigonométrica.

7.1. RAÍZES DE NÚMEROS COMPLEXOS

Em um número complexo z as raízes n – ésima de z são representadas por $\sqrt[n]{z}$ e pode ser escrito da forma $w^n = z$. Analisando matematicamente temos que

$$\sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow w^n = z$$

Diante disso faremos o uso da equação matemática $z^n = z_0$ para simplificar o nosso raciocínio e atentaremos em resolvê-las da seguinte forma

$$z^n = z_0 \tag{7.1}$$

Sabendo que $n \in \mathbb{N}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ a maneira mais fácil de resolver este problema é utilizando a forma polar de representação dos números complexos, para começar analisaremos a equação (7.1)

Se $z_0 = 0$ logo a equação (7.1) indica a seguinte solução $z = 0$.

Colocando na forma polar $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e $z_0 = r_0(\cos \theta_0 + i \operatorname{sen} \theta_0)$ percebe-se que é formado uma equação da forma

$$r^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) = r_0 (\cos \theta_0 + i \operatorname{sen} \theta_0) \tag{7.2}$$

Essa equação apresenta uma igualdade de números complexos o que implica que devemos separar a parte real da parte imaginária então

$$r^n \cos(n\theta) = r_0 \cos \theta_0 \quad \text{e} \quad r^n \sin(n\theta) = r_0 \sin \theta_0.$$

Reparem que na igualdade de complexos os módulos são iguais e os argumentos são congruentes, desta forma:

$$r^n = r_0 \Rightarrow r = \sqrt[n]{r_0} \quad \text{e} \quad n\theta = \theta_0.$$

Fazendo a substituição θ_0 por $\theta_0 + 2k\pi$, já que a função seno e cosseno possuem período 2π , e k é um número inteiro positivo, negativo ou nulo.

Assim,

$$n\theta = \theta_0 + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad \text{para } k = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

E interessante perceber que $\sqrt[n]{r_0}$ corresponde a raiz n -ésima positiva do número real positivo r_0 .

Na equação

$$\theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

Notemos que independente do valor de $k \in \mathbb{Z}$ irá resultar em um número diferente para θ e fica mais explícito o raciocínio quando escrevemos a equação na forma

$$\theta_k = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \tag{7.3}$$

Aplica-se da mesma maneira na fórmula

$$z_k = \sqrt[n]{r_0}(\cos \theta_k + i \sin \theta_k) \tag{7.4}$$

Portanto podemos concluir que se $z_0 = r_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$ for $\neq 0$ a equação (7.1) possui n soluções ou raízes diferentes que serão encontradas através da fórmula

$$z_k = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (7.5)$$

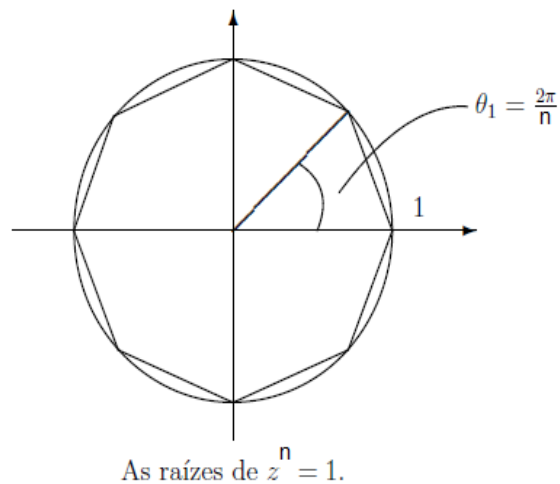
Para entendermos melhor como serão encontrado essas raízes faremos uma análise dessa expressão utilizando alguns valores para k .

$$\begin{aligned} k = 0 &\Rightarrow \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \frac{\theta_0}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta_0}{n} \right) \\ k = n &\Rightarrow \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \left(\frac{\theta_0}{n} + 2\pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_0}{n} + 2\pi \right) \right) \\ k = 1 &\Rightarrow \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \left(\frac{\theta_0 + 2\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_0 + 2\pi}{n} \right) \right) \\ k = n + 1 &\Rightarrow \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \left(\frac{\theta_0 + 2n\pi + 2\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_0 + 2n\pi + 2\pi}{n} \right) \right) \\ &= \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \left(\frac{\theta_0 + 2\pi}{n} + 2\pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_0 + 2\pi}{n} + 2\pi \right) \right) \end{aligned}$$

Essa fórmula conhecida como segunda fórmula de De Moivre nos mostra que qualquer valor que atribuímos a k resultara em uma raiz distinta cujo módulo será o mesmo. Sendo o mesmo módulo geometricamente falando significa que suas imagens no plano de Argand-Gauss estarão sobre uma mesma circunferência. Podemos observar também que para qualquer valor inteiro de k iremos encontrar argumentos que são arcos côngruos o que nos resulta em uma repetição de raízes, os argumentos que aparecem na expressão também varia de acordo com os valores de k , é interessante notar que á medida que forem atribuindo valores para k eles formaram uma (P.A), isto é eles estarão igualmente espaçados, estaremos sempre somando $\frac{2\pi}{n}$ cada vez que atribuirmos um valor para k como sendo uma unidade maior que a anterior. Podemos concluir depois desse raciocínio que se eles estão igualmente espaçados dentro do plano de Argand Gaus apresentando a imagem sobre a mesma circunferência, nós estaremos formando com esses vértices um polígono regular de n lados (

).

Figura 7- Polígono regular de n lados



Fonte: ZANI, Sérgio. (2001, p. 22)

Faremos agora uma aplicação da fórmula de De Moivre nos exemplos a seguir:

Exemplo 8. Calcule as raízes cúbicas de i .

Resolução:

Sabendo que $z = i$, logo $r_0 = 1$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. Utilizando a segunda fórmula de De Moivre, temos:

$$z_k = \sqrt[3]{1} \left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) \right], \text{ e } k \in \{0, 1, 2\},$$

Que corresponde a:

$$z_k = 1 \left[\cos\left(\frac{\pi + 4\pi k}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 4\pi k}{6}\right) \right], \quad k \in \{0, 1, 2\}.$$

$$k = 0, \quad \text{equivale } z_0 = 1 \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 1, \quad \text{equivale } z_1 = 1 \left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right] = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 2, \quad \text{equivale } z_2 = 1 \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] = -i$$

Logo as raízes cúbicas de i são:

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot i; \quad z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot i; \quad z_2 = -i.$$

Exemplo 9. Calcule as raízes cúbicas de $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Resolução:

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

O número complexo z na forma trigonométrica equivale a:

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$$

Usando a fórmula de De Moivre temos

$$z_k = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) \right) \quad e \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1} \left[\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right) \right] \quad e \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

Que corresponde a:

$$\sqrt[3]{z} = 1 \left[\cos\left(\frac{2\pi + 6k\pi}{9}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi + 6k\pi}{9}\right) \right], \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

$$k = 0 \text{ equivale } z_0 = 1 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}\right) \right] = \cos 40^\circ + i \operatorname{sen} 40^\circ$$

$$k = 1 \text{ equivale } z_1 = 1 \left[\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{9}\right) \right] = \cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ$$

$$k = 2 \text{ equivale } z_2 = 1 \left[\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{14\pi}{9}\right) \right] = \cos 280^\circ + i \operatorname{sen} 280^\circ$$

8. SOFTWARE MATHEMATICA

O MATHEMATICA é um programa responsável por fazer uma junção entre combinação simbólica, cálculo numérico e cálculo gráfico, foi desenvolvido em meados da década de 80 por Stephen Wolfram um cientista inglês conhecido por inúmeros trabalhos ligados à área da física, matemática e da computação. Esse programa permite ao usuário realizar cálculos computacionais simples até problemas de grande complexidade como cálculos de derivadas, integrais, desenvolvimentos em séries, manipulações algébricas entre outros. Ele poderá realizar gráficos de alto desempenho que podem ser impressos ou exportados para outros programas.

Essas ações quando realizadas manualmente podem consumir bastante tempo o que acarretaria em uma perda inestimável para o profissional da área de ciências exatas. Com uma sofisticada linguagem de programação e de fácil manuseio o MATHEMATICA se tornou uma das principais ferramentas utilizadas por cientistas, professores e alunos do mundo todo, se mostrando capaz de atender a todas as exigências a ele submetidas.

O MATHEMATICA apresenta um núcleo e uma interface com o usuário, esse núcleo foi atribuído para fornecer as mesmas soluções em todos os computadores. Ele tem a finalidade de armazenar as funções responsáveis pelo cálculo. Embora o seu desempenho possa ser alterado devido a diferença em relação à memória utilizada em certos computadores, quanto maior for a memória naturalmente ele

realizara operações mais complexas e os mais rápidos fornecerão a resposta em um tempo menor. O MATHEMATICA foi desenvolvido para trabalhar com os mais recentes sistemas operacionais e hardwares, portanto pode ser utilizado em qualquer sistema que seja melhor para o usuário.

Iremos usar o software MATHEMATICA nas operações envolvendo o cálculo das raízes complexas e faremos a demonstração da propriedade geométrica dessas raízes.

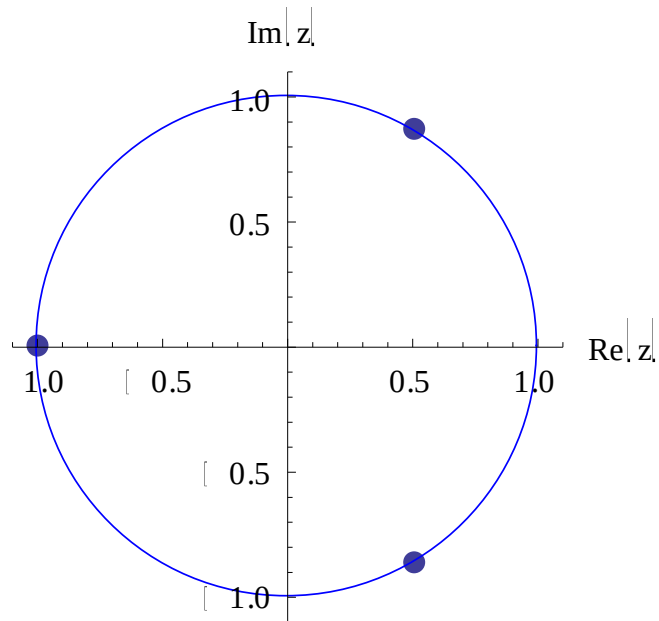
Calculo das raízes dos números complexos exemplos

1) $\sqrt[3]{-1}$

```
root = ComplexExpand[Solve[z3 == -1, z]]
```

$$\{ \{z \rightarrow -1\}, \{z \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\}, \{z \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\} \}$$

```
Module[{root, rootplot}, root = Solve[z3 == -1, z]; rootplot  
= ListPlot[{Re[z], Im[z]}/. root, PlotRange -> {{-1.1, 1.1}, {-1.1, 1.1}}, AxesLabel  
-> {"Re[z]", "Im[z]"}, AspectRatio -> 1, PlotStyle  
-> PointSize[0.04]]; Show[rootplot, Graphics[{Blue, Circle[{0, 0}, 1]}]]]
```

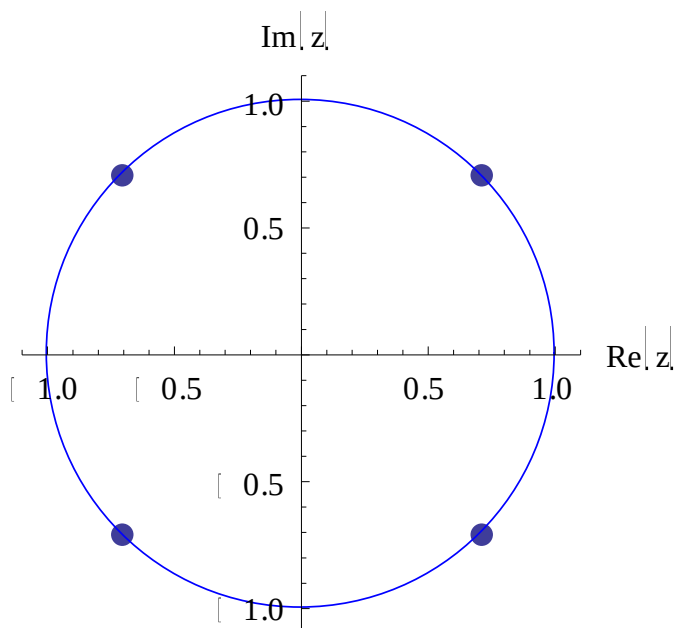
2) $\sqrt[4]{-1}$

```
root = ComplexExpand[Solve[z^4 == -1, z]]
```

```
{{z -> -1 + I}, {z -> 1 + I}, {z -> 1 - I}, {z -> -1 - I}}
```

```
Module[{root, rootplot}, root = Solve[z^4 == -1, z]; rootplot
```

```
= ListPlot[{Re[z], Im[z]}/. root, PlotRange -> {{-1.1, 1.1}, {-1.1, 1.1}}, AxesLabel  
-> {"Re[z]", "Im[z]"}, AspectRatio -> 1, PlotStyle  
-> PointSize[0.04]]; Show[rootplot, Graphics[{Blue, Circle[{0, 0}, 1]}]]
```

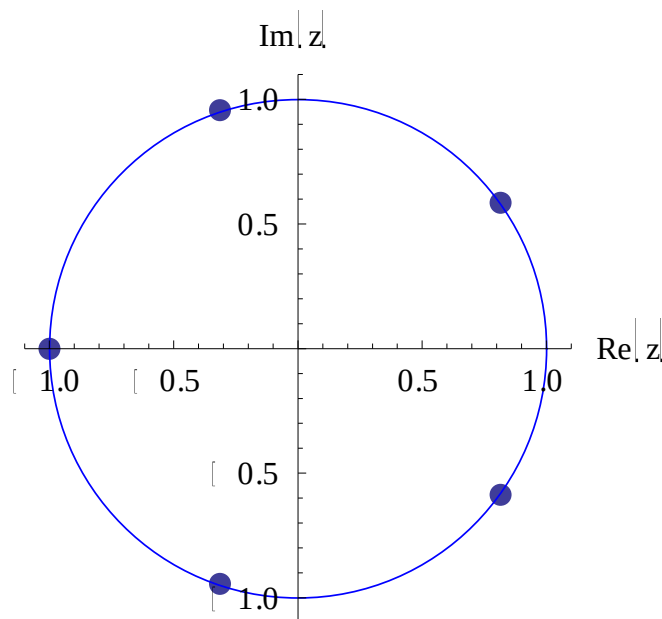


3) $\sqrt[5]{-1}$

```
root = ComplexExpand[Solve[z^5 == -1, z]]
```

$$\{\{z \rightarrow -1\}, \{z \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}\}, \{z \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} - i\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}\}, \{z \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}\}, \{z \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} - i\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}\}\}$$

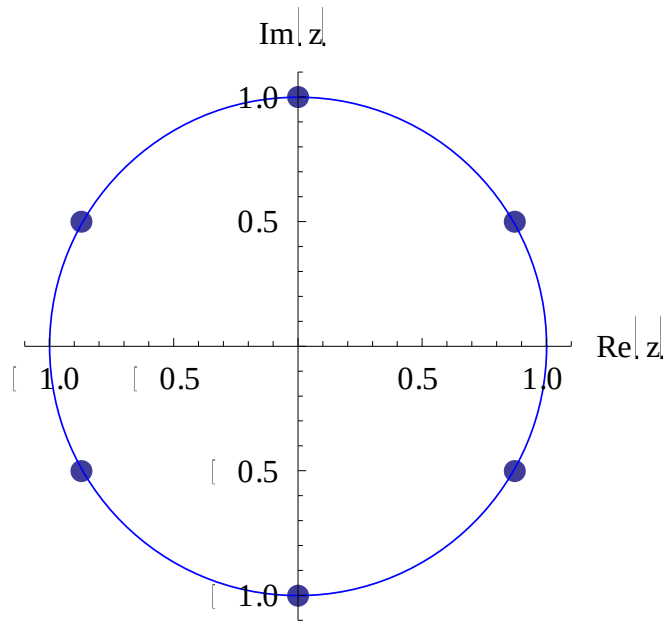
```
Module[{root, rootplot}, root = Solve[z^5 == -1, z]; rootplot
= ListPlot[{Re[z], Im[z]}/. root, PlotRange -> {{-1.1, 1.1}, {-1.1, 1.1}}, AxesLabel
-> {"Re[z]", "Im[z]"}, AspectRatio -> 1, PlotStyle
-> PointSize[0.04]]; Show[rootplot, Graphics[{Blue, Circle[{0, 0}, 1]}]]
```

4) $\sqrt[6]{-1}$

```
root = ComplexExpand[Solve[z^6 == -1, z]]
```

$$\{\{z \rightarrow -i\}, \{z \rightarrow i\}, \{z \rightarrow -\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\}, \{z \rightarrow \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\}, \{z \rightarrow -\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\}, \{z \rightarrow \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\}\}$$

```
Module[{root, rootplot}, root = Solve[z^6 == -1, z]; rootplot
= ListPlot[{Re[z], Im[z]}/. root, PlotRange
-> {{-1.1, 1.1}, {-1.1, 1.1}}, AxesLabel -> {"Re[z]", "Im[z]"}, AspectRatio -> 1, PlotStyle
-> PointSize[0.04]]; Show[rootplot, Graphics[{Blue, Circle[{0, 0}, 1]}]]
```



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como propósito fazer uma aplicação dos números complexos no cálculo das raízes utilizando o software MATHEMATICA. Para isso, foi necessário fazer um levantamento do aspecto histórico do surgimento dos números complexos, seguido da sua definição e suas propriedades onde definimos a unidade imaginária i e suas aplicações.

Isso foi importante para podermos trabalhar com mais clareza na resolução das equações e entender como se representa no plano de Argand-Gaus as expressões dos números complexos.

De um modo geral, os resultados obtidos utilizando o software MATHEMATICA permitiu se ter uma ótima visualização do gráfico das raízes complexas além de facilitar o cálculo da mesma, trouxe agilidade no processo de desenvolvimento das operações que envolvem as raízes complexas. Com isso o procedimento utilizado para a resolução das equações foi beneficiado com a utilização desse software, o que gerou bastante confiança e disposição na hora de realizar tarefas envolvendo cálculos de raízes complexas, assim ficou evidente que os objetivos na aplicação do software MATHEMATICA nas operações com números complexos foram alcançados.

Nesse sentido o objetivo do trabalho foi mostrar como calcular as raízes complexas utilizando o software MATHEMATICA, e os resultados foram bem sucedidos, tanto do aspecto visual como da otimização na hora de executá-los.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. **Variáveis complexas e aplicações**. 3.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. da universidade de São Paulo, 1974.

BEIRIGO, Thiago. **Números complexos**: uma metodologia baseada na história para obtenção de conceito / Thiago Beirigo. 1 ed. Confresa, Mato Grosso: Ed. do Autor, 2016.

CHURCHILL, R. V. **variáveis complexas e aplicações**. São Paulo: McGraw-Hill, 1975.

DO CARMO, P. M., MORGADO, A. C. WAGNER, E. **Trigonometria e números complexos**, Coleção do professor de Matemática. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 1992.

PUHL, Scott Cassiano. Origem dos números complexos. Disponível em: <<https://sites.google.com/site/matematicacomplexa/iniciodoprojeto/origem-dos-numeros-complexos>>. Acesso em: 06 de agosto de 2017.

SILVEIRA, Francisco Alberto Rheingantz. **Utilização do Mathematica como ferramenta de apoio ao ensino de matemática**. 1998. 129f. Diss. (Mestrado) – Inst. de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, (PUCRS).

WIKIPEDIA-**Números complexos**. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complexo> . Acesso em: 21 de setembro de 2017.

