UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIA EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

ROBERTO SOARES DE SOUZA

USO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NA TOMADA DE DECISÃO PARA FORMAÇÃO DA RESERVA DE EMERGÊNCIA

BELÉM/PA
2023

ROBERTO SOARES DE SOUZA

USO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NA TOMADA DE DECISÃO PARA FORMAÇÃO DA RESERVA DE EMERGÊNCIA

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. **Anderson D. S. Campelo**
Universidade Federal do Pará

BELÉM/PA
2023

ROBERTO SOARES DE SOUZA

USO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NA TOMADA DE DECISÃO PARA FORMAÇÃO DA RESERVA DE EMERGÊNCIA

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal do Pará.

DATA DE APROVAÇÃO: 20/12/2023

CONCEITO:

Prof. Dr. **Anderson D. S. Campelo**
Orientador - FACMAT/ICEN/UFPA

Profª. Dr. Rubia Gonçalves Nascimento
Membro - FACMAT/ICEN/UFPA

Prof. Me. Marcos Raylan Pinheiro de Araújo
Membro - FACMAT/ICEN/UFPA

BELÉM/PA
2023

AGRADECIMENTOS

É fácil lembrar das pessoas que me ajudaram nesta jornada, seja de forma direta ou indireta. Cada um teve o seu papel, uns mais que os outros, mas todos tendo sua importância.

Estarei em dívida pelo restante da minha vida com meus pais, Armando N. C. de Souza e Maria I. S. de Souza por estarem ao meu lado nos bons e maus momentos.

Para os meus amigos, André H. S. Oliveira e Renata F. de Araújo que vieram prestigiar minha apresentação, o meu mais sincero obrigado, não só por comparecerem à defesa, mas principalmente pelas boas risadas construídas ao longo do curso.

Além dos amigos, gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Dr. Anderson D. S. Campelo, que teve toda paciência do mundo com a minha pessoa. Obrigado, obrigado e obrigado por me orientar.

Para finalizar, gostaria de mencionar alguns professores da UFPA-ICEN que tenho carinho enorme, que são: Erissom Ulisses Silva Canto, Marcel Vinhas Bertolini, Rogelio Daniel Benavides Guzman, Rubia Goncalves Nascimento, Jose Augusto Nunes Fernandes, Manoel Silvino Batalha De Araujo, Aldo Vieira. Obrigado!

RESUMO

O trabalho em questão tem como objetivo mostrar como a matemática pode ajudar na tomada de decisão para criação da reserva de emergência, no entanto, é necessário o leitor ter certos conhecimentos sobre: economia, fundamentos da matemática financeira, conceito de reserva de emergência, títulos públicos e privados, além das taxas e impostos que incidem sobre os títulos. Desta forma, o leitor estará munido de conhecimento básico sobre o assunto. Isso é importante, pois pesquisas mostram que grande parte da população brasileira, não tinham qualquer reserva emergencial, fazendo o Estado agir injetando dinheiro na economia para "ajudar a população" no período pandêmico.

Palavras-chave: Reserva de emergência. Matemática financeira. Economia. Pandemia.

ABSTRACT

The work in question aims to show how mathematics can help in decision-making for creating an emergency fund. However, the reader needs to have certain knowledge about: economics, financial mathematics fundamentals, the concept of an emergency fund, public and private bonds, as well as the fees and taxes that apply to bonds. This way, the reader will be equipped with basic knowledge on the subject. This is important because research shows that a large part of the Brazilian population did not have any emergency fund, causing the State to act by injecting money into the economy to "help the population"during the pandemic period.

Keywords: Emergency reserve. Financial math. Economy. Pandemic.

LISTA DE SIGLAS

ANBIMA	Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais
CNI	Confederação Nacional da Indústria
BC	Banco Central do Brasil
CMN	Conselho Monetário Nacional
IPCA	Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo
SELIC	Sistema Especial de Liquidação e de Custódia
COPOM	Comitê de Política Monetária
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
FAC	Fator de Acumulação de Capital
FFC	Fator de Formação de Capital
FVA	Fator de Valor Atual
PV	"Present value" ou Valor Presente
FV	"Future value" ou Valor Futuro
ROI	"Return On Investiment" ou Retorno Sobre o Investimento
CBD	Certificado de Depósito Bancário
LTF	Letra Financeira do Tesouro
CDI	Certificado de Depósito Interbancário
FGC	Fundo Garantidor de Créditos
CPF	Cadastro de Pessoas Físicas
IR	Imposto de Renda
IOF	Imposto sobre Operações Financeiras

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A vida é repleta de imprevistos e nem sempre estamos preparados para eles. Um exemplo disso foi a pandemia do Covid-19, situação nunca antes vista ou vivida, que afetou o mundo e também o Brasil. Esta conjuntura expôs quão os brasileiros não estavam preparados para arcar financeiramente no período que foi decretado o confinamento (lockdown).

A pesquisa realizada em 2021 pela ANBIMA[1], aponta que por causa da pandemia, inflação alta e juros elevados (Taxa Selic) foi um período desafiador para os brasileiros,

> que muitos tiveram que lidar com perdas parciais ou mesmo totais de rendimentos, outros não conseguiram economizar e ainda tiveram que retirar dinheiro de aplicações ou mesmo se desfazer de alguns bens na tentativa de recompor a renda. (ANBIMA, 2022, p. 01).

A investigação ainda ressalta que a classe com menor renda foi a mais afetada.

Segundo pesquisa da CNI[2] (2020, p. 17), "quase um terço da população (32%) afirmou que conseguiu guardar mais dinheiro ou gastar menos do que antes da pandemia". Além disso, a pesquisa mostra que quanto maior o grau de instrução e renda dos entrevistados, maior o percentual dos que pouparam ou gastaram menos. Porém, "ainda é grande o percentual de brasileiros que não guarda dinheiro e nem investe: 69% da população." (ANBIMA, 2022, p. 31).

Diante dos fatos mencionados, a reserva de emergência é um assunto mais atual do que nunca na vida dos brasileiros, pois, dispor de uma parte da renda de forma a amenizar e/ou antecipar situações emergenciais como: doença, desemprego e desastres, ajuda o leitor/investidor a ter um tempo de tranquilidade e segurança perante situações adversas. Este trabalho tem como objetivo desenvolver nos leitores uma visão inicial, para compreender, analisar e identificar oportunidades que visam formar sua reserva de emergência. A metodologia envolve um estudo dos conceitos básicos da economia, das finanças e uma análise comparativa entre os títulos a serem estudados, utilizando as ferramentas disponibilizadas no site do Tesouro Direto.

[1] Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais
[2] Confederação Nacional da Indústria

2 CONCEITOS BÁSICOS DA ECONOMIA

O capítulo será dedicado a introduzir conceitos como inflação e taxa Selic, além de mencionar órgãos governamentais responsáveis por: determinar, controlar, fiscalizar e mensurar tais índices que afetam diretamente a população brasileira.

2.1 Inflação

De acordo com o BC[1] (2022b), "inflação é o aumento dos preços de bens e serviços. Ela implica diminuição do poder de compra da moeda. A inflação é medida pelos índices de preços". Segundo o Brasil (1999), "o índice de preços a ser adotado para os fins previstos neste Decreto será escolhido pelo CMN[2], mediante proposta do Ministério de Estado da Fazenda".

A inflação é uma meta do regime de política monetária, conforme previsto no art.1 do Decreto nº 3.088, de 21 de junho de 1999 . Sendo o CMN responsável por fixar e estipular intervalo de tolerância, por intermédio da proposta do Ministério de Estado da Fazenda. Cabendo ao BC executar as políticas necessárias para cumprimento das metas fixadas.

Então a meta de inflação faz parte da política monetária, com o qual o governo busca o crescimento da economia, sem prejudicar o poder de compra da população.

De acordo com Mira (2021), "para o governo, é importante que a inflação exista, se ela ficar abaixo da meta, pode gerar deflação". Significa um tardio investimento na economia por parte dos investidores, não fazendo a economia girar.

2.1.1 Causas da inflação?

A razão por trás da inflação, pode ser:

1. *Pressão de demanda*: é quando há mais pessoas querendo comprar, porém, o mercado não acompanha essa demanda;
2. *Pressão de custo*: aumento das matérias-primas, por sua vez, eleva os preços dos produtos;
3. *Inércia de custo*: é um reajuste automático de preços que se baseia na inflação passada e reflete nos preços presentes;
4. *Expectativa de inflação*: é quanto a inflação estará dentro da meta estabelecida pelo governo.

2.1.2 Consequências da inflação?

O aumento exagerado dos preços e serviços na economia, gera um sentimento de incerteza, desestimulando os investimentos e, assim prejudicando o crescimento econômico.

Essa distorção nos preços gera uma confusão, pois fica caótico avaliar se algo está barato ou caro. Sendo assim, afetando principalmente a população menos favorecida, "pois essas têm menos acesso a instrumentos financeiros para se defender da inflação." (BC, 2022b).

[1] Banco Central do Brasil
[2] Conselho Monetário Nacional

> A inflação mais alta também aumenta o custo da dívida pública, pois as taxas de juros da dívida pública têm de compensar não só o efeito da inflação, mas também têm de incluir um prêmio de risco para compensar as incertezas associadas com a inflação mais alta. (BC, 2022b).

2.1.3 Como a inflação é calculada?

O IBGE[3] é o órgão responsável por apurar o IPCA, este índice reflete o custo da "cesta de produtos e serviços" da família brasileira com renda entre 1 a 40 salários-mínimos. Essa cesta é composta por: alimentação, habitação, vestuário, transporte, saúde, despesas pessoais, educação e comunicação.

A coleta de informação é feita, em geral, do dia 1 a 30 do mês referente, sendo a pesquisa feita em 13 regiões: Belém, Fortaleza, Recife, Salvador, Belo Horizonte Vitória, Rio de Janeiro, São Paulo Curitiba, Porto Alegre, além do Distrito Federal e dos demais municípios de Goiânia e Campo Grande.

No entanto, o IPCA é uma aproximação da cesta dos brasileiros, significa que em regiões diferentes ou até mesmo nelas, a população pode sentir mais ou menos o impacto da inflação, isso vai depender do poder de compra do consumidor.

2.2 Taxa Selic

SELIC é a sigla para Sistema Especial de Liquidação e de Custódia. "A Selic é a taxa básica de juros da economia. É o principal instrumento de política monetária utilizado pelo BC para controlar a inflação." (BC, 2022c).

O COPOM[4] é o órgão do Banco Central que fica responsável por determinar a Selic. Este comitê é formado pelo presidente e diretores do COPOM, que se reúnem a cada 45 dias, totalizando 8 reuniões no ano, para definir a taxa básica de juros.

Como parâmetros para determinar a Selic, o COPOM considera em suas decisões: inflação, contas públicas, atividade econômica e cenário externo. Todavia, a inflação é o critério principal, pois o IPCA deve estar de acordo com a meta definida pelo CMN.

Figura 2.1 – Reunião do COPOM

Fonte: Banco Central do Brasil, 2022.

[3] Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
[4] Comitê de Política Monetária

“Uma vez definida a taxa Selic, o Banco Central atua diariamente por meio de operações de mercado aberto comprando e vendendo títulos públicos federais - para manter a taxa de juros próxima ao valor definido na reunião.” (BC, 2022a).

Para o BC (2022c), a taxa Selic são “operações de empréstimos de um dia entre as instituições financeiras que utilizam títulos públicos federais com garantia”.

Para se ter noção da importância dessa taxa, ela é o principal instrumento de política monetária à disposição do BC. Esse mecanismo afeta os preços da economia por meio do: consumo, do investimento, do crédito, da taxa de câmbio, do preço de ativos e das expectativas do mercado.

3 FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Este capítulo será dedicado ao estudo dos principais conceitos da matemática financeira, pois além de estar presente em nosso cotidiano, nas situações de aumentos e descontos de produtos e serviços, será fundamental para nossa análise referente aos títulos aqui estudados para formação da reserva de emergência.

3.1 Conceitos Básicos

Porcentagem é indicado por uma fração de denominador 100, "por esse motivo dizemos que a porcentagem é a razão centesimal" (SOUZA, 2017, p. 16). Sendo sua representação: p/100 ou p%, além disso, há representações equivalentes.

Quadro 1 – Formas de representar a porcentagem

Percentual	**Fracionário**	**Unitário**
15%	15/100	0,15
0,5%	0,5/100	0,005
0,01%	0,01/100	0,0001

Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Exemplo 1 *: No site de uma loja, um Smartphone custa* $R\$$ 2.300,00*; se o cliente pagar à vista, tem um desconto de* 11%*. Quando é o desconto?*

Para obter o valor do desconto, basta fazer uma regra de três simples.

$$\begin{array}{ccc} \text{Porcentagem} & & \text{Valor} \\ 100\% & \longrightarrow & 2300 \\ 11\% & \longrightarrow & x \end{array}$$

Fazendo a operação da proporção, encontra-se o valor de $R\$$ 253,00.

Para prosseguirmos em nosso estudo, é necessário apresentar outros conceitos, por exemplo: Capital, Juros, Tempo e Taxa de Juros. Eles estão melhor descrito abaixo:

Capital (C) também conhecido como valor inicial de uma operação financeira. Este valor pode ser expresso em moeda (dinheiro ou bens comercializáveis) à disposição no tempo. Para Souza (2017, p. 18), "o capital é sempre o valor inicial de uma aplicação financeira, ou um certo valor inicial de um empréstimo ou de um financiamento".

Juros (J) são a remuneração (a pagar ou a receber) do capital em um certo período de tempo, em uma determinada operação financeira, ou seja, é um aluguel pago pelo uso do dinheiro.

De acordo com Sobrinho (2011), existe a necessidade de avaliar alguns fatores ao emprestar dinheiro, que são os seguintes: riscos, despesas, inflação e ganhos (ou lucro). Dispor desses fatores, é de grande relevância para este trabalho, pois, "a receita de juros deve ser suficiente para cobrir o risco, as despesas e a perda do poder aquisitivo do capital, além de proporcionar um certo lucro ao seu aplicador." (SOBRINHO, 2011, p. 19).

Tempo (n) é o período em que um capital ficará empregado, este tempo pode estar em: diário, mensal, bimestral, anual, etc.

Taxa de Juros (i) é a razão entre Juros e o Capital, ou seja, $i = \dfrac{J}{C}$. Sendo a taxa de juros sempre relacionada a unidade de tempo (diário, mensal, bimestral, anual, etc).

Montante (M) é a soma do capital (emprestado ou aplicado) mais os juros de capitalização, podendo ser simples ou composta. Assim temos: $M = C + J$.

3.2 Regime de Capitalização Simples (Juro Simples)

Exemplo 2 *: Roberto emprestou um capital de R\$ 3.500,00 a Fernando, sendo regime de capitalização simples, com a taxa de 5% ao mês durante 4 meses, calcule os juros produzidos e o montante nesse período.*

Identificado o tipo de capitalização, nosso próximo passo é destacar os elementos: R\$ 3.500,00 é o ***capital inicial (C)***; a quantia paga pelo empréstimo são os ***juros (J)***; o período de 4 meses é o ***tempo (n)***; sendo 5% ao mês a ***taxa de juros (i)***; a soma do capital com os juros é chamado de ***montante (M)***. Assim temos:

$$\begin{aligned}
C &= R\$\ 3.500{,}00 \\
i &= 5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05 \\
n &= 4.
\end{aligned}$$

O acordo entre os dois amigos, a taxa de juros incide apenas sobre o capital inicial, ou seja, independente do tempo de aplicação, os juros obtidos continuam sempre iguais, caracterizando assim, um regime de capitalização simples.

Então para calcular o juro produzido mês a mês, basta fazer o produto do capital vezes a taxa de juros, tendo assim: $J = C \cdot i$.

Tabela 3.1 – Comportamento dos juros no regime de capitalização simples

Tempo (n)	**Capital (C)**	**Taxa (i)**	**Juros (J)**
1	R\$ 3.500,00	5%	R\$ 175,00
2	R\$ 3.500,00	5%	R\$ 175,00
3	R\$ 3.500,00	5%	R\$ 175,00
4	R\$ 3.500,00	5%	R\$ 175,00

Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

A soma dos juros da Tabela (3.1) em todo o período, obtemos um total de $R\$$ 700,00. De modo geral, o juro (J) a receber ao final de um tempo (n), a uma taxa (i) sobre um capital (C), é calculado por:

$$J = C \cdot i \cdot n. \tag{3.1}$$

O montante (M) é calculado por:

$$M = C + J. \tag{3.2}$$

Então para calcular os juros acumulados no período, utiliza-se a fórmula (3.1), como segue abaixo:

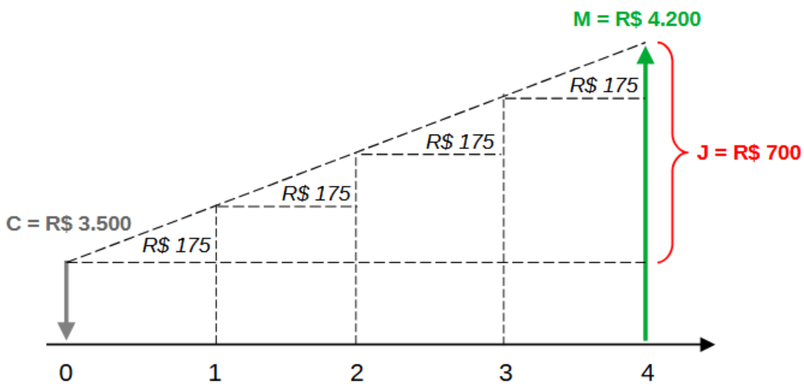
$$
\begin{aligned}
j &= C \cdot i \cdot n \\
J &= 3.500 \cdot 0{,}05 \cdot 4 \\
J &= 35 \cdot 5 \cdot 4 \\
J &= 35 \cdot 20 \\
J &= R\$\ 700{,}00.
\end{aligned}
$$

Totalizando um montante de $R\$$ 4.200,00. Este valor é obtido, manipulando a fórmula (3.2), conforme a resolução abaixo:

$$
\begin{aligned}
M &= C + J \\
M &= 3.500 + 700 \\
M &= R\$\ 4.200{,}00.
\end{aligned}
$$

A Figura (3.1) permite olhar o comportamento dos juros simples, isso remete a uma função polinomial de grau um, em que o gráfico é uma reta.

Figura 3.1 – Representação gráfica da Tabela 3.1



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

O regime de capitalização simples, é dificilmente utilizado em operações financeiras, pois comparado ao regime de capitalização composta, pode não ser interessante a quem empresta o dinheiro.

3.2.1 Taxa de Juros Equivalente Simples ou Proporcional

Conforme Souza (2017, p. 23), "duas taxas são ditas taxas equivalentes se fizerem com que um mesmo capital produza o mesmo montante no fim do mesmo prazo de aplicação". A taxa de juro equivalente/proporcional, também conhecida como *taxa nominal*, é usada em juros simples.

Sejam as taxas de juros i_1 e i_2 relativas aos tempos n_1 e n_2 são proporcionais quando, há uma relação de proporcionalidade, da forma:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{3.3}$$

Exemplo 3 : *Converta a taxa de juros de* 36% *ao ano, em taxa mensal.*

$$\frac{x}{36\%} = \frac{1}{12}$$
$$x = \frac{36\%}{12}$$
$$x = 2\%\ a.m.$$

Exemplo 4 *: Calcule qual foi o juro produzido por um capital de* $R\$$ 1.000,00 *aplicado por 7 meses à taxa de* 18% *ao ano, com capitalização simples mensal.*

$$\frac{x}{18\%} = \frac{1}{12}$$
$$x = \frac{18\%}{12}$$
$$x = 1{,}5\%\ a.m.$$

Portanto, 18% ao ano equivale a 1,5% ao mês. Obtido à taxa equivalente, vamos utilizar a Fórmula (3.1):

$$C = R\$\ 1.000{,}00$$
$$J = ?$$
$$n = 7$$
$$i = 1{,}5\% = 0{,}015$$

Assim temos:

$$J = C \cdot i \cdot n$$
$$J = 1.000 \cdot 0{,}015 \cdot 7$$
$$J = 15 \cdot 7$$
$$J = R\$\ 105{,}00.$$

Concluímos que a soma dos juros foi de $R\$$ 105,00.

Utilizamos essa proporcionalidade, quando taxa de juros e tempo estão em unidades de tempo diferentes.

3.3 Regime de Capitalização Composta (Juro Composto)

O regime de capitalização composta, os juros são calculados não apenas sobre o capital inicial, como ocorre nos juros simples, e sim sobre o capital acrescido dos juros vencidos, ou seja, os juros de cada mês é o produto da taxa de juros (i) sobre o montante do período anterior. (FILHO, 2016).

Com base no comportamento dos juros compostos descrito acima, podemos inferir a fórmula do montante, pois o juro de cada mês incide sempre no montante do mês anterior, como veremos a seguir.

Quando:

$$n = 1 \Rightarrow M_1 = C \cdot (1+i)$$
$$n = 2 \Rightarrow M_2 = M_1 \cdot (1+i) = C \cdot (1+i) \cdot (1+i)$$
$$n = 3 \Rightarrow M_3 = M_2 \cdot (1+i) = C \cdot (1+i) \cdot (1+i) \cdot (1+i).$$

Daí, para n períodos de tempo, temos a seguinte expressão:

$$M = C \cdot (1+i)^n; \tag{3.4}$$

em que $(1+i)^n$ é chamada de *fator de capitalização*. Com base nos conhecimentos que temos, vamos resolver o problema proposto abaixo.

Exemplo 5 *: Roberto deixou R\$ 800,00 aplicados por 5 meses em um fundo de investimento. Se o rendimento médio desse fundo foi de 1% ao mês, quanto Roberto tinha ao final desse período?*

Agora vamos extrair os dados que precisamos, que são:

$$C = R\$\ 800{,}00$$
$$i = 1\%\ a.m = \frac{1}{100} = 0{,}01$$
$$n = 5 \text{ meses}.$$

Neste instante, usaremos a expressão (3.4), para encontrar o montante.

$$M = C \cdot (1+i)^n = 800 \cdot (1+0{,}01)^5 = R\$\ 840{,}81.$$

Para calcular os juros produzidos no período, manipulamos a fórmula (3.2), obtendo $J = M - C$, segue então:

$$J = M - C = 840{,}81 - 800 = R\$\ 40{,}41.$$

Na Tabela (3.2), podemos reparar que os juros vão aumentando a cada mês, diferente da capitalização simples, que é sempre igual durante os períodos. Isso ressalta o motivo da capitalização composta ser dominante no mercado, pois seus ganhos são exponenciais.

Tabela 3.2 – Comportamento dos juros no regime de capitalização composta

Tempo (n)	Capital (C)	Taxa (i)	Juros (J	Montante (M)
0	R$ 800,00	1%	R$ 0,00	R$ 800,00
1	R$ 800,00	1%	R$ 8,00	R$ 808,00
2	R$ 808,08	1%	R$ 8,08	R$ 816,08
3	R$ 816,08	1%	R$ 8,16	R$ 824,24
4	R$ 832,48	1%	R$ 8,24	R$ 832,48
5	R$ 832,48	1%	R$ 8,32	R$ 840,81

Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Para calcular os juros separadamente, precisamos manusear as expressões (3.2) e (3.4):

$$\begin{cases} M = C + J \\ M = C \cdot (1+i)^n \end{cases}$$

Manipulando temos:

$$\begin{aligned} &C + j = C(1+i)^n \\ &j = C(1+i)^n - C \\ &j = C[(1+i)^n - 1]. \end{aligned}$$

3.3.1 Taxa de Juros Equivalente Composto

De acordo com Sobrinho (2011, p. 41), "duas ou mais taxas são ditas taxas referenciadas a períodos unitários distintos são equivalentes quando produzem o mesmo montante no final de determinado tempo pela aplicação de um mesmo capital inicial", ou seja:

$$M_1 \begin{cases} Capital(C) \\ tempo(n) \\ juros(i_a) \end{cases} \qquad M_2 \begin{cases} Capital(C) \\ tempo(n) \\ juros(i_m) \end{cases}$$

Sendo i_a e i_m, respectivamente taxa anual e taxa mensal, aplicados ao mesmo capital e período de tempo. Então concluímos:

$$\begin{aligned} &M_1 = M_2 \\ &C(1+i_a) = C(1+i_m)^{12} \\ &1 + i_a = \frac{C(1+i_m)^{12}}{C} \\ &1 + i_a = (1+i_m)^{12}. \end{aligned}$$

Neste exemplo, temos duas situações, que podem ser tomadas. Determinar à taxa anual, conhecendo a mensal:

$$i_a = (1+i_m)^{12} - 1;$$

ou estabelecer à taxa mensal, sabendo a anual:

$$\sqrt[12]{1+i_a} - 1 = i_m$$

$$(1+i_a)^{\frac{1}{12}} - 1 = i_m.$$

Para efeito de generalização da fórmula apresentada, temos: i_q = taxa que queremos; i_t = taxa que temos; q = prazo que queremos; t = tempo que temos. Sendo assim, ficando:

$$i_q = (1+i_t)^{\frac{q}{t}} - 1. \tag{3.5}$$

Para fixar o assunto, veja os exemplos abaixo, onde vamos utilizar a expressão (3.5).

Exemplo 6 *: Converta uma taxa de juros de* 10% *ao ano em:*

a) Taxa diária:

$$i_d = (1 + 0{,}01)^{\frac{1}{252}} - 1$$
$$i_d = 0{,}038\%\ a.d.$$

b) Taxa mensal:

$$i_m = (1 + 0{,}01)^{\frac{1}{12}} - 1$$
$$i_m = 0{,}797\%\ a.m.$$

c) Taxa trimestral:

$$i_{tr} = (1 + 0{,}01)^{\frac{1}{4}} - 1$$
$$i_{tr} = 2{,}411\%\ a.t.$$

d) Taxa semestral:

$$i_s = (1 + 0{,}01)^{\frac{1}{2}} - 1$$
$$i_s = 4{,}881\%\ a.s.$$

Os exemplos a seguir, faremos ao contrário.

Exemplo 7 *: Converta uma taxa de juros de* 1,5% *ao mês em:*
a) Taxa diária:

$$i_d = (1 + 0{,}015)^{\frac{1}{21}} - 1$$
$$i_d = 0{,}071\%\ a.d.$$

b) Taxa trimestral:

$$i_{tr} = (1 + 0{,}015)^{3} - 1$$
$$i_{tr} = 4{,}568\%\ a.t.$$

c) Taxa semestral:

$$i_s = (1 + 0{,}015)^{6} - 1$$
$$i_s = 9{,}344\%\ a.s.$$

d) Taxa anual:

$$i_a = (1 + 0{,}015)^{12} - 1$$
$$i_a = 19{,}5618\%\ a.a.$$

Conforme visto neste capítulo, o leitor foi munido de conhecimento sobre: porcentagem, regime de capitalização simples e composta, além das taxas equivalentes. Toda essa compreensão básica da matemática financeira será de grande valia nas próximas seções, levando em consideração a complexidade do próximo tópico.

4 SÉRIES DE PAGAMENTOS

O objetivo deste tópico é destacar as séries de pagamentos, que podemos interpretar sendo aportes mensais para criação da reserva emergencial. Portanto, será exposto exemplos que irão possibilitar assimilar tais comportamentos das séries.

De acordo com Sobrinho (2011, p. 66), “séries de pagamentos podem ser definidas como uma sucessão de pagamentos ou recebimentos $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$, e com vencimento sucessivos $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$”.

Para facilitar o entendimento do leitor, vejamos um fluxo de caixa, onde há previsto recebimentos e pagamentos determinados.

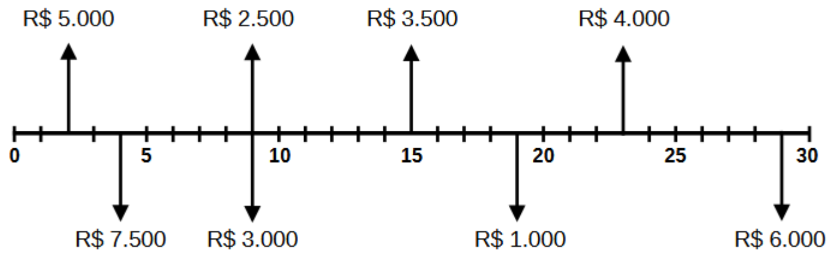
Tabela 4.1 – Fluxo de Caixa

Recebimento		**Pagamento**	
Dia	***Valor (R$)***	***Dia***	***Valor (R$)***
02	5.000,00	04	7.500,00
09	2.500,00	09	3.000,00
15	3.500,00	19	1.000,00
23	4.000,00	29	6.000,00

Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

A tabela acima, será representada por um fluxo temporal conforme a Figura (4.1), sendo o eixo horizontal o tempo em dias. Os recebimentos são representados por setas voltadas para cima, no eixo superior, enquanto os pagamentos, por setas abaixo do eixo, indicadas para baixo. Quando tiver entrada e saída no fluxo de caixa no mesmo dia, conforme no dia 9 (nove), representamos por duas setas, ou pela diferença dos valores, sendo assim, a seta voltada para baixo, pois pagaria $R\$$ 500,00.

Figura 4.1 – Linha do tempo do fluxo de caixa



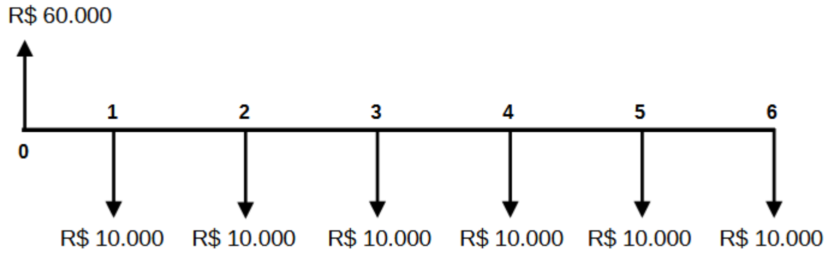
Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Porém, é importante salientar, que a análise do fluxo de caixa depende se estamos analisando do ponto de vista de quem paga ou de quem recebe os recursos. Vejamos o exemplo abaixo:

Exemplo 8 *: Anakin para construir a estrela da morte, precisou emprestar* $R\$$ 60.000,00 *de um banco, para pagamentos em 6 prestações iguais de* $R\$$ 10.000,00.

A representação do fluxo de caixa, com base na visão do tomador do empréstimo (Anakin) é a seguinte:

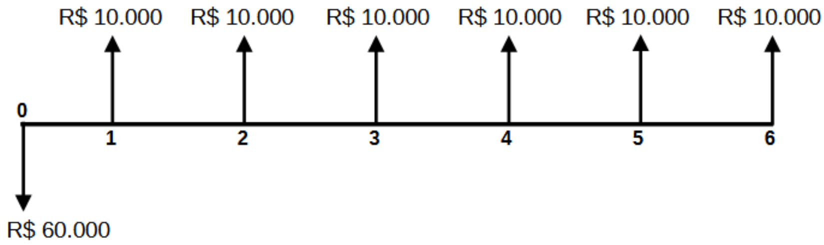
Figura 4.2 – Linha do tempo do fluxo de caixa do tomador



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Há uma entrada inicial no caixa, e posteriormente, seis saídas (parcelas) de $R\$$ 10.000,00 em cada mês. Enquanto do ponto de vista do banco, seria o seguinte:

Figura 4.3 – Linha do tempo do fluxo de caixa do emprestador



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Uma saída do caixa inicial de $R\$$ 60.000,00 e seis entradas de $R\$$ 10.000,00 nos meses subsequentes, conforme o contrato estipulado.

Vamos analisar os tipos e características das séries de pagamentos, que podem ser:

1. Séries de pagamentos iguais e com termos vencidos;
2. Séries de pagamentos iguais e com termos antecipados;
3. Séries de pagamentos variáveis com termos vencidos;
4. Séries de pagamentos variáveis com termos antecipados;

Neste primeiro momento vamos estudar as **séries de pagamentos iguais e com termos vencidos**.

4.1 Séries de Pagamentos Iguais e com Termos Vencidos

Nesta seção vamos estudar FAC[1] e FFC[2]. Quando trabalhamos com o FAC e FFC, temos algumas situações que são recorrentes nos cálculos:

- Dados R, i, n, achar S.
- Dados S, i, n, achar R.
- Dados R, S, i, achar n.
- Dados R, S, n, achar i.

Ambas as séries de pagamentos (FAC e FFC), utilizam a mesma fórmula, porém em situações específicas. Mas a priori, vamos demonstrar a expressão utilizada por ambas.

[1] Fator de Acumulação de Capital
[2] Fator de Formação de Capital

Enquanto o FVA[3], é utilizado para encontrar o valor de compra de um título, sendo dados S, i, n, achar o P (Preço de compra). Esse tipo de cálculo é bastante útil para quem compra títulos pré-fixados.

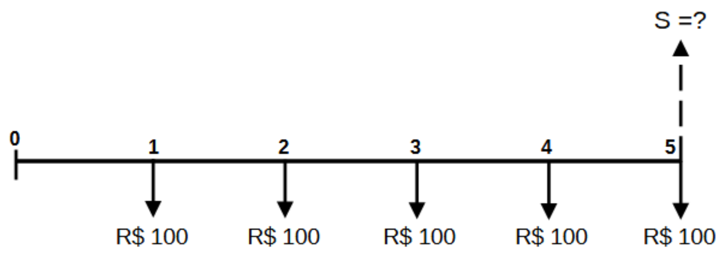
4.1.1 Fórmula utilizada para FAC e FFC

Para facilitar o entendimento do leitor, iremos demonstrar a fórmula utilizando um exemplo base, assim, demonstrando a expressão.

Alguns termos vamos reaproveitar aqui, outros serão acrescentados, como a letra "R" e "S", que representam respectivamente, *séries de pagamentos* ou *recebimento* e *soma total* (montante ou valor futuro).

Exemplo 9 *: Roberto fez uma série de pagamentos consecutivos mensais de R\$ 100,00, a uma taxa de 3% ao mês, durante 5 meses, sendo a primeira aplicação 30 dias da data tomada como (momento zero) e a última no momento do resgate. Quanto Roberto terá acumulado ao final do período?*

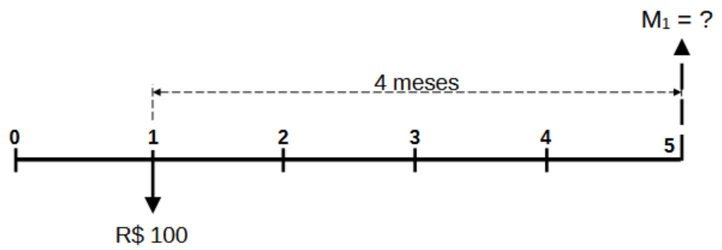
Figura 4.4 – Linha do tempo das aplicações feitas pelo Roberto



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Podemos calcular separadamente cada montante gerado a começar de cada pagamento feito, com a fórmula (3.4).

Figura 4.5 – Linha do tempo da primeira aplicação

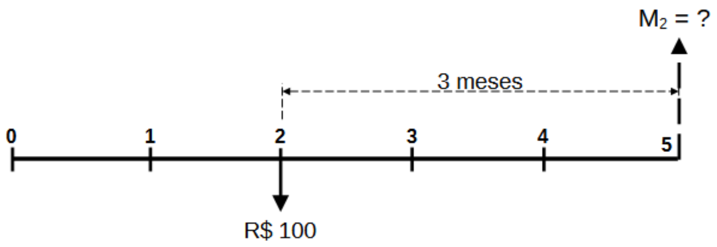


Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

$$M_1 = C(1+i)^n = 100(1+0{,}03)^4 = 100(1{,}03)^4 = 112{,}55.$$

[3]Fator de Valor Atual

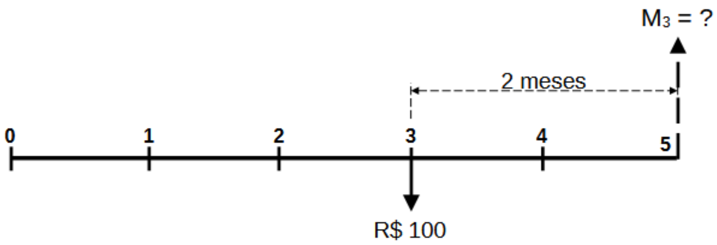
Figura 4.6 – Linha do tempo da segunda aplicação



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

$$M_2 = C(1+i)^n = 100(1+0{,}03)^3 = 100(1{,}03)^3 = 109{,}27.$$

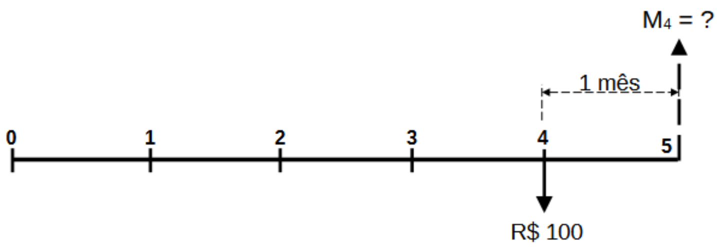
Figura 4.7 – Linha do tempo da terceira aplicação



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

$$M_3 = C(1+i)^n = 100(1+0{,}03)^2 = 100(1{,}03)^2 = 106{,}09.$$

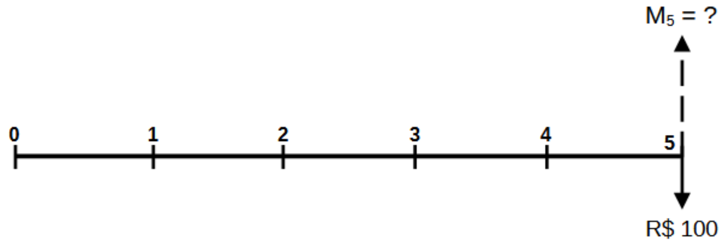
Figura 4.8 – Linha do tempo da quarta aplicação



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

$$M_4 = C(1+i)^n = 100(1+0{,}03) = 100(1{,}03) = 103{,}00.$$

Figura 4.9 – Linha do tempo da quinta aplicação



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

$$M_5 = C(1+i)^n = 100(1+0{,}03)^0 = 100{,}00.$$

Para calcular FAC, basta somar (S) os montantes (M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5), então temos:

$$\begin{aligned} S &= M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 \qquad (4.1)\\ S &= 112{,}55 + 109{,}27 + 106{,}09 + 103 + 100\\ S &= R\$\ 530{,}91. \end{aligned}$$

Desse modo, fazendo 5 aplicações mensais iguais e consecutivas de R$ 100,00, a uma taxa de 3% ao mês temos um montante total de $R\$$ 530,91.

Utilizando a fórmula (4.1) para demonstrar uma forma mais direta de se calcular, sem a necessidade de aplicar a expressão (3.4) para cada período.

$$S = 100(1{,}03)^4 + 100(1{,}03)^3 + 100(1{,}03)^2 + 100(1{,}03) + 100. \tag{4.2}$$

Subtraindo de ambos os lados por 100, e organizando de acordo com o expoente crescente, temos:

$$S - 100 = 100(1{,}03) + 100(1{,}03)^2 + 100(1{,}03)^3 + 100(1{,}03)^4. \tag{4.3}$$

Multiplicando de ambos os lados por 1,03 na expressão (4.2) ficando:

$$\begin{aligned} 1{,}03 \cdot S &= 1{,}03 \cdot [100(1{,}03)^4 + 100(1{,}03)^3 + 100(1{,}03)^2 + 100 \cdot 1{,}03 + 100]\\ 1{,}03 \cdot S &= 100(1{,}03)^5 + \underbrace{100(1{,}03)^4 + 100(1{,}03)^3 + 100(1{,}03)^2 + 100 \cdot 1{,}03}_{\text{expressão (4.3)}}\\ 1{,}03 \cdot S &= 100(1{,}03)^5 + S - 100\\ 1{,}03 \cdot S - S &= 100(1{,}03)^5 - 100\\ S[1{,}03 - 1] &= 100[(1{,}03)^5 - 1]\\ S &= \frac{100[(1{,}03)^5 - 1]}{[1{,}03 - 1]}\\ S &= \frac{100[(1{,}03)^5 - 1]}{0{,}03}. \end{aligned}$$

Verifique que o valor 100 foi nossa primeira aplicação, 1,03 a razão, 5 o número de períodos e 0,03 à taxa, logo podemos escrever a fórmula como uma PG[4].

[4]Progressão Geométrica

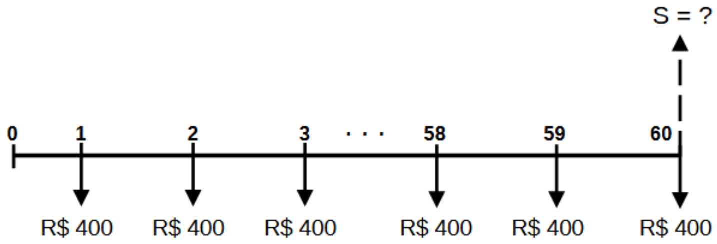
$$S = R \cdot \frac{[(1+i)^n - 1]}{i}. \tag{4.4}$$

Em que $\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$ é o Fator de Acumulação de Capital. Para facilitar cálculos futuros, vamos abreviar da seguinte forma $FAC(i{,}n)$, ou seja:

$$FAC(i,n) = \frac{[(1+i)^n - 1]}{i}. \tag{4.5}$$

Exemplo 10 *: Roberto pretende deixar uma boa herança para sua filha Sophia. Ele planeja aplicar* $R\$$ 400,00 *mensal, a uma taxa de* 2% *ao mês, por um período de 5 anos. Quanto terá ao final desse período?*

Figura 4.10 – Linha do tempo dos aportes feitos para a herança



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Dados:

R = $R\$$ 400,00
n = 5 ano = 60 meses
i = 2% a.m
S = ?

Substituindo na fórmula (4.4) temos:

$$S = 400 \cdot \frac{[(1{,}02)^{60} - 1]}{0{,}03} \approx R\$\ 45.620{,}62.$$

Em posse da fórmula FAC, podemos utilizá-la para encontrar FFC, nos quais são informados o montante, a taxa e o período, porém queremos saber o valor das parcelas a serem pagas, para obter o montante estipulado.

A fórmula é a mesma, no entanto, a incógnita dessa vez é o valor das prestações "R", então ficando:

$$R = S \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}, \tag{4.6}$$

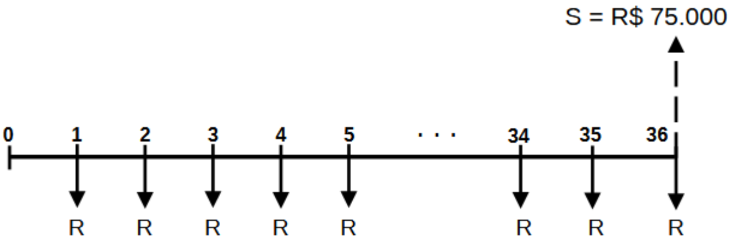
"em que $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$ é chamado de Fator de Formação de Capital." (SOBRINHO, 2011, p. 72).

Para utlização futuras, abreviaremos em $FFC(i,n)$, sendo:

$$FFC(i,n) = \frac{i}{(1+i)^n - 1}. \tag{4.7}$$

Exemplo 11 : *Roberto planeja viajar pelo Brasil daqui a 3 anos, ele fez os cálculos e projeções futuras de quanto precisará. Ele chegou ao valor de* $R\$$ 75.000,00*. Que quantia é necessário aplicar mensalmente no fundo de "Renda Fixa", pelo período de 36 meses a uma taxa de* 2% *ao mês?*

Figura 4.11 – Linha do tempo sendo a incógnita os aportes mensais



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Dados:

S = $R\$$ 75.000,00
n = 36 meses
i = 2% a.m
R = ?

Jogando na fórmula (4.6) os dados, temos: $R = 75000 \cdot \dfrac{0{,}02}{(1+0{,}02)^{36}-1}$, o valor aproximado é de $R\$$ 1.442,46. Significa que, Roberto necessita aplicar aproximadamente $R\$$ 1.442,46 durante os 36 meses a uma taxa de 2% a.m para obter o montante de $R\$$ 75.000,00.

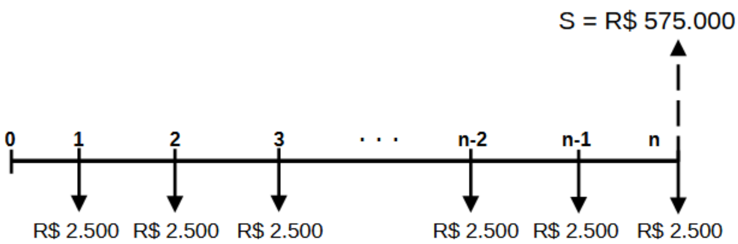
Podemos encontrar outras situações que envolva essa mesma fórmula, que são:

- Dados R, i, n, achar S (já visto).
- Dados S, i, n, achar R (já visto).
- Dados R, S, i, achar n.
- Dados R, S, n, achar i.

Veremos as duas situações que faltam, primeiro onde a incógnita é o tempo (n) e posteriormente quando for à taxa (i).

Exemplo 12 : *Qual o número de prestações de* $R\$$ 2.500,00 *Roberto deve aplicar trimestralmente, à taxa de* 3% *ao trimestre, para acumular um montante de* $R\$$ 575.000,00 *no final de certo prazo. Qual é este prazo?*

Figura 4.12 – Linha do tempo sem o período



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Dados:
n = ?
R = $R\$$ 2.500,00
i = 3% a.t
S = $R\$$ 575.000,00

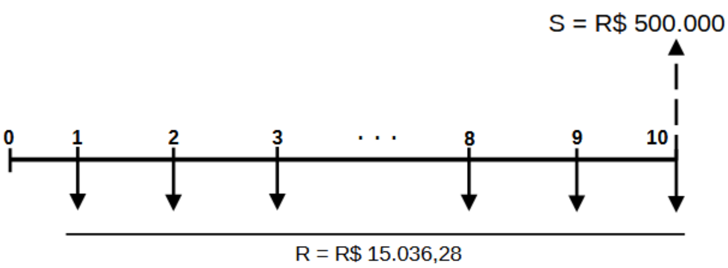
Substituindo os valores na expressão (4.4) e fazendo as devidas manipulações, obtemos:

$$575000 = 2500 \cdot \frac{[(1{,}03)^n - 1]}{0{,}03}$$
$$\frac{575000}{2500} = \frac{(1{,}03)^n - 1}{0{,}03}$$
$$230 \cdot 0{,}03 = (1{,}03)^n - 1$$
$$6{,}9 + 1 = (1{,}03)^n$$
$$7{,}9 = (1{,}03)^n$$
$$\log(7{,}9) = \log(1{,}03)^n$$
$$\frac{\log(7{,}9)}{\log(1{,}03)} = n$$
$$n = 70 \text{ prestações trimestrais.}$$

Isso significa, que Roberto precisaria de quase setenta prestações trimestrais de R$ 2.500,00 cada uma para obter o valor almejado, ou seja, levaria quase 18 anos.

Exemplo 13 *:Roberto deseja obter R$ 500.000,00, para isso, anualmente aplica R$ 15.036,28, pelo período de 10 anos, ou seja, dez prestações. Qual deve ser a taxa contratada?*

Figura 4.13 – Linha do tempo sem a taxa



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

É importante destacar que esse tipo de situação, onde o objetivo é encontrar a taxa de juros (i), não é tão simples como os exemplos anteriores, sendo obtida por "tentativa e erro".
Dados:
R = $R\$$ 15.036,28
S = $R\$$ 5000.000,00
i = ?
n = 10 (dez prestações anuais)

Continuaremos utilizando a fórmula (4.4), obtendo:

$$\begin{aligned}
500\,000 &= 15036{,}28 \cdot \frac{(1+i)^{10}-1}{i}\\
\frac{500000}{15036{,}28} &= \frac{(1+i)^{10}-1}{i}\\
33{,}2529056 &= \frac{(1+i)^{10}-1}{i}.
\end{aligned}$$

A partir daqui, começa tentativa e erro em substituir valores em $\boldsymbol{i}$, para que $\frac{(1+i)^{10}-1}{i}$ seja igual ou seja o mais próximo possível do valor $R\$$ 33,2529056. Para agilizar o resultado, optamos por usar calculadora financeira, obtendo a taxa de 25% ao ano.

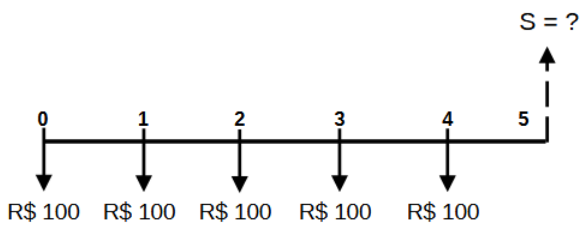
4.2 Séries de Pagamentos Iguais e com Termos Antecipados

De acordo com Sobrinho (2011, p. 115), "Nas séries com termos antecipados, os pagamentos ou recebimentos ocorrem no início de cada período unitário. Assim, a primeira prestação é sempre paga ou recebida no momento zero", ou seja, no momento da contratação você faz o pagamento.

Embora os exemplos aqui apresentados, sejam muito parecidos com os das séries de pagamentos vencidos, a fórmula é um pouco diferente, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 14 *: Roberto fez 5 aplicações iguais, mensais e consecutivas de* $R\$$ 100,00*, à taxa de* 2% *ao mês. Sabendo que a primeira aplicação é feita na data da contratação. Qual o montante que o mesmo vai obter ao final do* 5º *mês?*

Figura 4.14 – Linha do tempo da série pag. iguais e antecipados



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Para encontrar a fórmula que expressa esse comportamento, teremos que deslocar todos os pagamentos para o período 5 no nosso exemplo, para isso, vamos usar a fórmula (3.4). Então segue o mesmo raciocínio das séries de pagamentos de termos postecipados.

$$\begin{aligned}
M_1 &= 100 \cdot (1{,}02)^5\\
M_2 &= 100 \cdot (1{,}02)^4\\
M_3 &= 100 \cdot (1{,}02)^3\\
M_4 &= 100 \cdot (1{,}02)^2\\
M_5 &= 100 \cdot (1{,}02)
\end{aligned}$$

Agora vamos somar (S) os montantes (M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5), então temos:

$$S = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5$$
$$S = 100(1{,}02)^5 + 100(1{,}02)^4 + 100(1{,}02)^3 + 100(1{,}02)^2 + 100(1{,}02)$$
$$S = 100[(1{,}02)^5 + (1{,}02)^4 + (1{,}02)^3 + (1{,}02)^2 + 1{,}02].$$

Para tornar claro as ações que serão tomadas posteriomente, os valores entre os colchetes, serão ordenados, em ordem crescente do expoente, ficando:

$$S = 100 \cdot [\underbrace{1{,}02 + (1{,}02)^2 + (1{,}02)^3 + (1{,}02)^4 + (1{,}02)^5}_{\text{soma dos 5 primeiros termos da PG}}].$$

Ao examinar a expressão entre colchetes, é a soma dos 5 primeiros termos de uma Progressão Geométrica, sendo a fórmula:

$$S_{PG} = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q-1}; \tag{4.8}$$

em que, $a_1 = 1{,}02$; $q = 1{,}02$ e $n = 5$, então temos:

$$S = 100 \cdot S_{PG}$$
$$S = 100 \cdot \left[\frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q-1}\right]$$
$$S = 100 \cdot \left[\frac{1{,}02 \cdot (1{,}02)^5 - 1{,}02}{1{,}02 - 1}\right]$$
$$S = 100 \cdot \left[\frac{(1{,}02)\{(1{,}02)^5 - 1\}}{0{,}02}\right]$$
$$S = 100 \cdot 1{,}02 \cdot \left[\frac{[(1{,}02)^5 - 1]}{0{,}02}\right]$$
$$S = 100 \cdot 1{,}02 \cdot 5{,}20404016$$
$$S \approx R\$ \ 530{,}81.$$

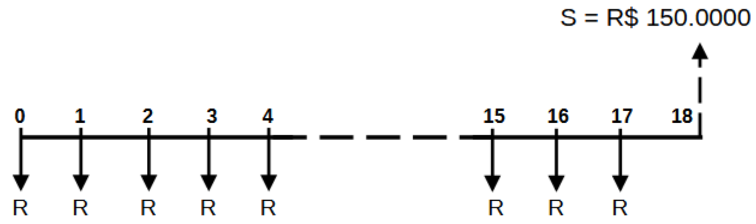
Substituindo na expressão os valores numéricos pelos respectivos símbolos, obtemos:

$$S = R \cdot (1+i) \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]. \tag{4.9}$$

Desta forma, podemos utilizar a expressão (4.5) da série de pagamentos postecipados, sendo necessário fazer o produto com $(1+i)$ sendo obtido a fórmula do termos anteriormente, ou seja: $S = R \cdot (1+i) \cdot FAC(i,n)$.

Exemplo 15 : *Roberto pretende aplicar em um fundo, hoje, pelo período de 18 meses, porém ao final desse tempo, deseja ter um montante de R\$ 150.000,00, sabendo que o rendimento é de 30% ao ano, e que as prestações são iguais e consecutivas, qual o valor das parcelas?*

Figura 4.15 – Linha do tempo sem as parcelas



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Dados:
S = $R\$$ 150.000,00
n = 18 meses
i = 30% a.m
R = ?

Taxa é o tempo estão em períodos diferentes, então utilizamos a fórmula (3.5), obtendo assim:

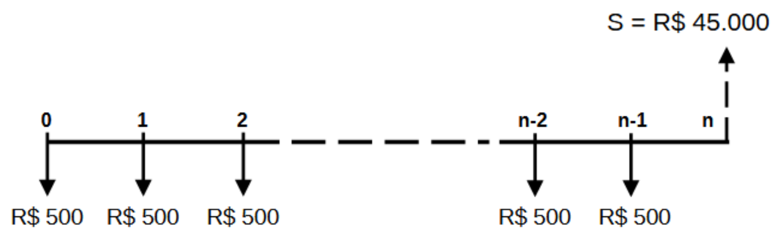
$$i_m = (1{,}3)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 2{,}21\%\ a.m.$$

Substituindo na expressão (4.9) e organizando conforme o que buscamos obter, temos:

$$R = 150000 \cdot \frac{1}{(1 + 0{,}021)} \left[\frac{0{,}0221}{(1 + 0{,}0221)^{18} - 1} \right] \approx R\$\ 6.727{,}32.$$

Exemplo 16 *: Roberto fará aplicações mensais de* $R\$$ 500,00, *para obter um montante de* $R\$$ 45.000,00. *Sendo à taxa de* 2% *ao mês, e que a primeira aplicação é feita na contratação e a última um mês antes do resgate daquele valor. Quantas aplicações serão necessárias?*

Figura 4.16 – Linha do tempo faltando encontrar o número de aplicações



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

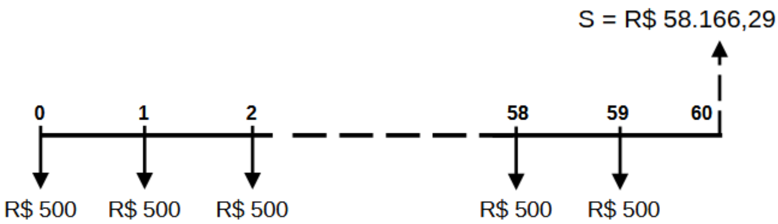
Dados:
R = $R\$$ 500,00
S = $R\$$ 45.000,00
i = 2% a.m
n = ?

Para resolver esse problema, optamos por resolver através de logaritmo, como segue:

$$
\begin{aligned}
&45000 = 500 \cdot (1+0{,}02)\left[\frac{(1+0{,}02)^n - 1}{0{,}02}\right]\\
&88{,}24 = \frac{(1{,}02)^n - 1}{0{,}02}\\
&1{,}76 + 1 = (1{,}02)^n\\
&2{,}76 = (1{,}02)^n\\
&\log(2{,}76) = \log(1{,}02)^n\\
&\log(2{,}76) = n \cdot \log(1{,}02)\\
&n = \frac{\log(2{,}76)}{\log(1{,}02)}\\
&n = 52 \text{ parcelas.}
\end{aligned}
$$

Exemplo 17 *: Um Fundo de Renda Fixa assegura, a quem aplica 60 parcelas iguais e mensais de R\$ 500,00, o resgate de um montante de R\$ 58.166,29 no final dos 60º meses. Sabendo-se que a primeira aplicação é feita na data do contrato, calcule à taxa de rendimento proporcionada pelo Fundo.*

Figura 4.17 – Linha do tempo da aplicação sem à taxa



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

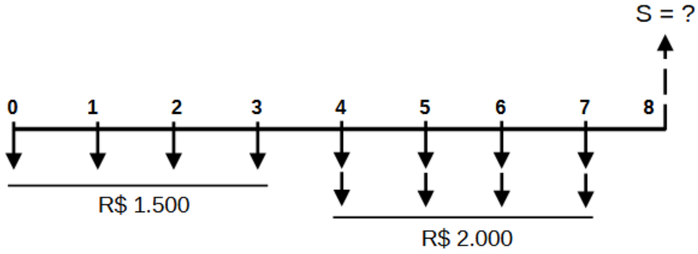
Dados:
R = R\$ 500,00
S = R\$ 58.166,29
n = 60 parcelas = 60 meses
i = ?

$$
\begin{aligned}
58166{,}29 &= 500 \cdot (1+i)\left[\frac{(1+i)^{60} - 1}{i}\right]\\
116{,}33258 &= (1+i)\left[\frac{(1+i)^{60} - 1}{0{,}02}\right].
\end{aligned}
$$

Todo problema que necessita encontrar à taxa, é um desafio, pois ou se resolve por tentativa e erro, ou interpolação linear. Para minimizar o trabalho desse cálculo, à taxa $i = 2\%$.

Exemplo 18 *: Roberto planeja fazer oito aplicações mensais e consecutivas, à taxa de 2% ao mês, sendo as 4 primeiras aplicações de R\$ 1.500,00 e as 4 últimas de R\$ 2.000,00 cada uma. Qual é o montante final, sabendo que se trata de uma série de pagamentos com termos antecipados?*

Figura 4.18 – Linha do tempo com parcelas diferentes



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Esta situação, será dividida em dois momentos, como segue abaixo:

1. Oito aplicações de $R\$$ 1.500,00 cada uma:

   Dados:

   $R_1 = R\$\ 1.500{,}00$

   $n_1 = 8$ prestações

   i = 2% ao mês

   $S_1 = ?$

   $$S_1 = 1500 \cdot (1{,}02) \left[\frac{(1{,}02)^8 - 1}{0{,}02}\right] \approx R\$\ 13.131{,}94.$$

2. Quatro aplicações de $R\$$ 500,00; pois $R\$$ 2.000,00 − $R\$$ 1.500,00:

   Dados:

   $R_2 = R\$\ 500{,}00$

   $n_2 = 4$ prestações

   i = 2% ao mês

   $S_2 = ?$

   $$S_2 = 500 \cdot (1{,}02) \left[\frac{(1{,}02)^4 - 1}{0{,}02}\right] \approx R\$\ 2.102{,}02.$$

Então o montante das das duas séries: $S = S_1 + S_2 = 17.509{,}26 + 6.306{,}06 = R\$\ 15.233{,}96$.

4.3 Séries de Pagamentos Variáveis com Termos Vencidos

Nesta seção, vamos trabalhar com séries de pagamentos variáveis com termos vencidos (pagamento ou recebimento), no entanto é bom destacar que pode ocorrer dois tipos de variações. Conforme Sobrinho (2011, p. 125):

a) "variação de acordo com uma lei de formação matemática (variação em progressão aritmética, geométrica etc.);
b) variação sem obediência a qualquer lei de formação matemática".

Nosso estudo ficará atrelado às séries de pagamentos variáveis em progressão aritmética, podendo ser crescente ou decrescente. Já as progressões geométricas não serão estudadas, pois não há aplicação aqui no Brasil de acordo com Sobrinho (2011).

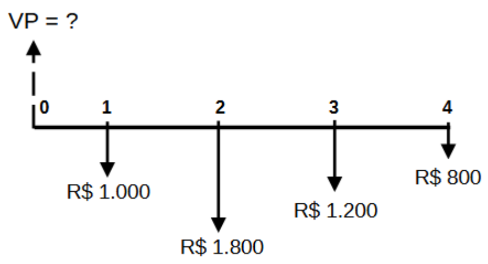
Os exemplos abaixo, são referentes às séries que não obedecem a qualquer padrão, onde vamos calcular o PV[5] e o FV[6].

[5]Present Value ou Valor Presente

[6]Future Value ou Valor Futuro

Exemplo 19 : *Dado uma série de 4 pagamentos consecutivos mensais de R\$ 1.000,00; R\$ 1.800,00; R\$ 1.200,00 e R\$ 800,00, considerando uma taxa de 2% ao mês. Calcule o valor presente da série.*

Figura 4.19 – Linha do tempo para calcular o valor presente



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Para resolver este tipo de problema, utilizamos a fórmula (3.4), no entanto, vamos só modificar M (Montante) por S (Soma) e C (Capital) por PV (Valor Presente), ficando $S = PV(1+i)^n$. Teremos que calcular para cada aplicação o valor presente e somar tudo.

Então ficando: $PV = PV_1 + PV_2 + PV_3 + PV_4$.

Dados:

S = R\$ 1.000,00; R\$ 1.800,00; R\$ 1.200,00; R\$ 800,00

n = 1, 2, 3, 4 meses

i = 2% a.m

PV = ?

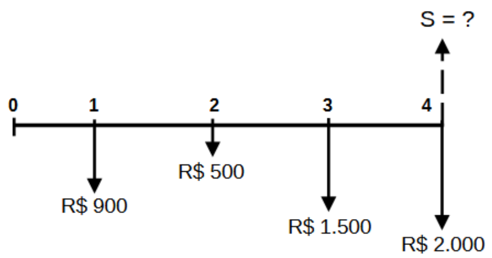
Temos a seguinte resolução:

$$PV = PV_1 + PV_2 + PV_3 + PV_4$$
$$PV = \frac{1000}{1{,}02} + \frac{1800}{(1{,}02)^2} + \frac{1200}{(1{,}02)^3} + \frac{800}{(1{,}02)^4}$$
$$PV \approx R\$\ 4.580{,}36.$$

Significa quanto um montante em dinheiro aplicado vale atualmente.

Exemplo 20 : *Qual o valor futuro, no final de 4 bimestre resultante da aplicação de 4 parcelas bimestrais de R\$ 900,00; R\$ 500,00; R\$ 1.500,00 e R\$ 2.000,00, a uma taxa de 3% ao bimestre, sendo a primeira aplicação feita do primeiro bimestre?*

Figura 4.20 – Linha do tempo para calcular o valor futuro



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Dados:
PV = $R\$$ 900,00; $R\$$ 500,00; $R\$$ 1.500,00; $R\$$ 2.000,00
n = 1, 2, 3, 4 bimestre
i = 3% a.b
S = ?

Nossa resolução:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$
$$S = 900(1{,}03)^3 + 500(1{,}03)^2 + 1500(1{,}03)^1 + 2000(1{,}03)^0$$
$$S \approx R\$\ 5.058{,}90.$$

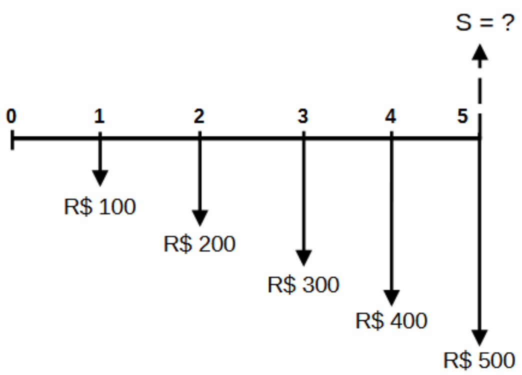
É importante destacar, que não iremos resolver problemas onde a incógnita seja à taxa, pois envolve uma complexidade maior.

4.3.1 Séries de Pagamentos Variáveis em Progressão Aritmética Crescente

Para resolver esse tipo de problema de maneira fácil, será necessário concluir duas fórmulas, uma sendo do valor futuro e a outra do valor atual, no entanto, para finalidade deste trabalho, destacamos só o valor futuro. Para isso, vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 21 *: Para determinar o montante no final de 5 aplicações mensais consecutivas de* $R\$$ 100,00*;* $R\$$ 200,00*;* $R\$$ 300,00*;* $R\$$ 400,00 *e* $R\$$ 500,00*, a uma taxa de* 3% *ao mês, em que a primeira aplicação ocorre no final do primeiro mês.*

Figura 4.21 – Linha do tempo da série pagamento variável em PA crescente



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Podemos resolver utilizando a fórmula (3.4) para cada aplicação. Além disso, é importante destacar que estamos utilizando conhecimentos já construídos até aqui, como segue:

$$S = 100(1{,}03)^4 + 200(1{,}03)^3 + 300(1{,}03)^2 + 400(1{,}03) + 500$$
$$S = 112{,}55 + 218{,}55 + 318{,}27 + 412 + 500$$
$$S = R\$\ 1.561{,}37.$$

No entanto, isso ficaria cansativo com uma grande quantidade de aplicações. Para resolver este problema, vamos extrair a expressão que representa o comportamento de tais aplicações.

Note que a cada aplicação anterior, há um aumento de $R\$$ 100,00, além disso, vamos utilizar a fórmula (4.5) da série de pagamentos iguais para cada série, no exemplo, são 5.

Temos assim:

$$\begin{aligned}
&S = R \cdot FAC(i, n)\\
&S_1 = 100 \cdot \frac{(1{,}03)^5 - 1}{0{,}03}\\
&S_2 = 100 \cdot \frac{(1{,}03)^4 - 1}{0{,}03}\\
&S_3 = 100 \cdot \frac{(1{,}03)^3 - 1}{0{,}03}\\
&S_4 = 100 \cdot \frac{(1{,}03)^2 - 1}{0{,}03}\\
&S_5 = 100 \cdot \frac{(1{,}03)^1 - 1}{0{,}03}.
\end{aligned}$$

Partindo da ideia acima, podemos deduzir o seguinte: $S_T = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$. Substituindo os valores na expressão temos:

$$\begin{aligned}
S_T &= 100 \cdot \frac{(1{,}03)^5 - 1}{0{,}03} + 100 \cdot \frac{(1{,}03)^4 - 1}{0{,}03} + ... + 100 \cdot \frac{(1{,}03) - 1}{0{,}03}\\
S_T &= \frac{100}{0{,}03}\left[(1{,}03)^5 + (1{,}03)^4 + (1{,}03)^3 + (1{,}03)^2 + 1{,}03 - 5\right]\\
S_T &= \frac{100}{0{,}03}\left[\underbrace{1{,}03 + (1{,}03)^2 + (1{,}03)^3 + (1{,}03)^4 + (1{,}03)^5}_{\text{Soma de uma PG em ordem crescente do expoente}} - 5\right].
\end{aligned}$$

Aplicando a fórmula (4.8), temos:

$$\begin{aligned}
S_T &= \frac{100}{0{,}03}\left[\frac{1{,}03[(1{,}03)^5 - 1]}{1{,}03 - 1} - 5\right]\\
S_T &= \frac{100}{0{,}03}\left\{1{,}03\left[\frac{(1{,}03)^5 - 1}{0{,}03}\right] - 5\right\}\\
S_T &\approx R\$\ 1.561{,}37.
\end{aligned}$$

Fazendo uma generalização na última equação, substituindo os valores pelos seus símbolos correspondentes, temos:

$$S = \frac{G}{i} \cdot \left[(1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]. \tag{4.10}$$

De acordo com Sobrinho (2011, p. 130), “G representa o valor dos pagamentos iguais nas séries uniformes, que na séries em gradientes constui-se na razão da PA”.

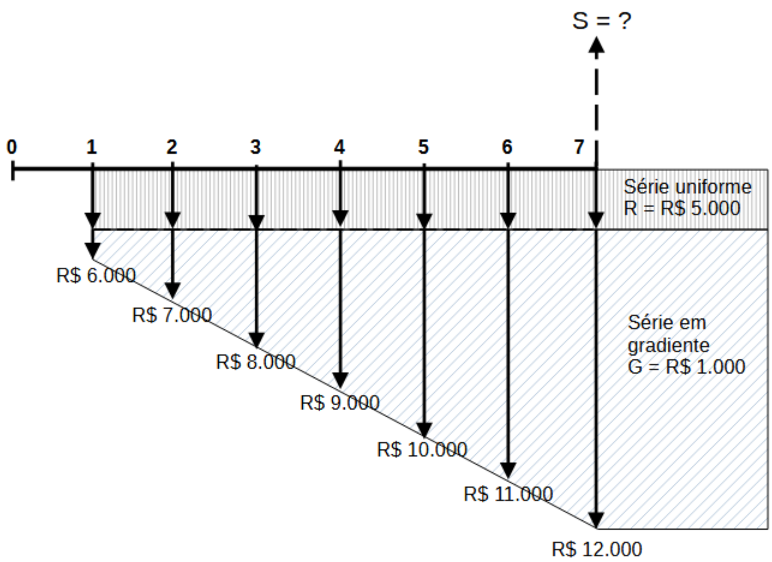
O Fator de Acumulação de Capital para séries em gradientes crescente, é representado por $FACg^{(+)}(i,n)$, sendo a expressão:

$$FACg^{(+)}(i,n) = \frac{1}{i}\left[(1+i)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i} - n\right]. \tag{4.11}$$

Podemos reescrever a expressão (4.10) na forma reduzida: $S = G \cdot FACg^{(+)}(i,n)$. Agora vejamos exemplos onde na prática o valor da primeira aplicação não coincidem com a razão da P.A.

Exemplo 22 *: Roberto deseja fazer 7 aplicações mensais e consecutivas, a uma taxa de 2% ao mês, realizada no final de cada período, sabendo-se que a primeira é de* $R\$$ 6.000,00 *e as demais, são valores crescente de razão* $R\$$ 1.000,00*. Qual o montante final?*

Figura 4.22 – Linha do tempo das setes aplicações em PA crescente



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

O esquema da linha do tempo acima, mostra que precisaremos separar o problema em duas partes, sendo as fórmulas (4.4) e (4.10) respectivamente utilizadas na *série de pagamentos iguais* e a outra *série em gradiente.*

É importante ressaltar que o "R" é obtido subtraindo da primeira aplicação (a_1) a razão, ou seja $R = a_1 - G$.

1ª Parte: Solução da Série de Pagamentos Iguais Vencidos:

R =$R\$$ 5.000,00

n = 7 meses

i = 2% ao mês

S_1 = ?

$$S_1 = 5000 \cdot \left[\frac{(1{,}02)^7 - 1}{0{,}02}\right]$$

$$S_1 = 5000 \cdot 7{,}43$$

$$S_1 \approx R\$\ 37.171{,}42.$$

2ª Parte: Solução da Série em Gradiente:
G = $R\$$ 1.000,00
n = 7 meses
i = 2% ao mês
$S_2 = ?$

$$S_2 = 1000 \cdot FACg^{(+)}$$
$$S_2 = 1000 \cdot 29{,}15$$
$$S_2 \approx R\$\ 29.148{,}45.$$

Realizado os cálculos acima, precisamos agora somar os resultados dos montantes: $S = S_1 + S_2 = 37.171{,}42 + 29.148{,}45 = R\$\ 66.319{,}87$.

Exemplo 23 *: Roberto querendo saber o valor da razão da série em gradiente de termos vencidos, à taxa é de* 3% *ao mês, o montante de* $R\$$ 720.600,50*, e que ele possui 38 termos.*

Dados:
S = $R\$$ 720.600,50
n = 38
i = 3% ao mês
G = ?

Será necessário fazer algumas manipulações, como segue abaixo:

$$S = G \cdot FACg^{(+)}(i, n)$$
$$G = S \cdot \frac{1}{FACg^{(+)}(i, n)}$$
$$G = 720300{,}5 \cdot \frac{1}{FACg^{(+)}(3\%, 38)}$$
$$G = 720600, 5 \cdot \frac{1}{1107{,}81}$$
$$G \approx R\$\ 650{,}47.$$

No exemplo que segue, falaremos sobre problemas que a primeira prestação não é igual a razão da PA, conforme trabalhamos nos exemplos anteriores. Nesse tipo de situação é necessário utilizar as expressões (4.4) e (4.10). Vejamos o exemplo abaixo.

Exemplo 24 *: Sabendo-se que o primeiro termo de uma série de 9 pagamentos mensais variáveis em PA é de* $R\$$ 8.000,00*, o montante de* $R\$$ 117.816,91*, e à taxa de* 2,5% *ao mês, calcula o valor da razão.*

Dados:
S = $R\$$ 117.816,91
n = 9 prestações
i = 2,5% ao mês
R = 8000 - G
G = ?

A solução é obtida através dessa expressão:

$$S = R \cdot FAC(i,n) + G \cdot FACg^{(+)}(i,n).$$

Segue a solução:

$$\begin{aligned}
&117816{,}91 = (8000 - G) \cdot FAC(2{,}5\%, 9) + G \cdot FACg^{(+)}(2{,}5\%, 9)\\
&117816{,}91 = (8000 - G) \cdot 9{,}95452 + G \cdot 48{,}13527\\
&117816{,}91 - 79636{,}16 = (48{,}13527 - 9{,}95452) \cdot G\\
&G = \frac{38180{,}75}{38{,}18075}\\
&G = R\$\ 1.000{,}00.
\end{aligned}$$

4.3.2 Séries de Pagamentos Variáveis em Progressão Aritmética Decrescente

Nesta seção, enfatizamos a resolução de problemas relacionados a série de pagamentos em série decrescente, então vamos apresentar a fórmula que nos proporcionará solucionar tais situações. Segue abaixo:

$$S = G \cdot \frac{1}{i} \cdot \left[n \cdot (1+i)^n - \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]. \tag{4.12}$$

Com um olhar mais atento, a expressão pode ser escrita como

$$S = G \cdot \frac{1}{i} \left[n \cdot (1+i)^n - FAC(i,n) \right],$$

sendo

$$\frac{1}{i} \left[n \cdot (1+i)^n - FAC(i,n) \right], \tag{4.13}$$

o Fator de Acumulação de Capital em séries descrentes em PA, vamos representar por $FACg^{(-)}(i,n)$, portanto podemos reescrever a fórmula (4.12) como: $S = G \cdot FACg^{(-)}(i,n)$.

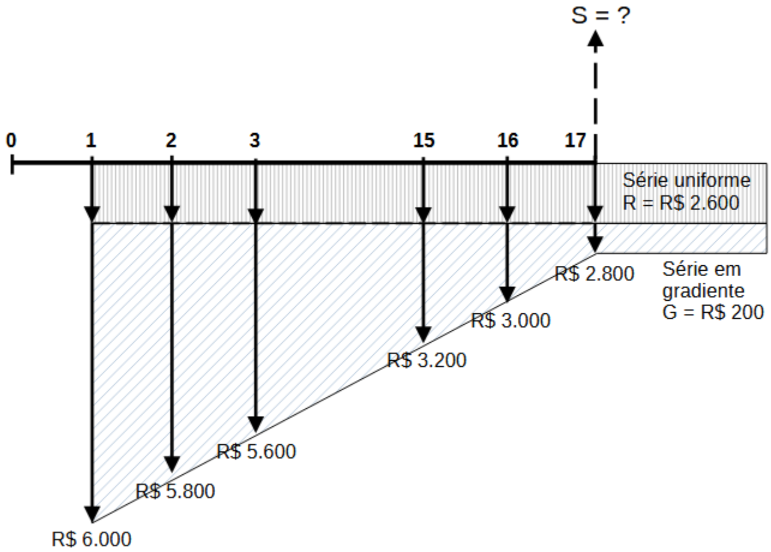
Exemplo 25 *: Foram realizadas 17 aplicações mensais por Roberto, à taxa de* 3,5% *ao mês. Sabendo-se que o valor da primeira parcela será de* $R\$$ 6.000,00 *e que as seguintes decresceram a uma razão constante de* $R\$$ 200,00*, calcular o montante no final do 17º mês.*

Este problema, resolveremos em duas etapas, uma em que usaremos série uniforme e a série em gradiente com termos decrescentes. No texto temos $a_1 = 6.000$, $n = 17$, $G = 200$ e precisaremos encontrar "R" que é o valor uniforme da série de pagamentos iguais.

$$a_1 = R + n \cdot G. \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
&6000 = R + 17 \cdot 200\\
&6000 = R + 3400\\
&6000 - 3400 = R\\
&R = R\$\ 2.600.
\end{aligned}$$

Figura 4.23 – Linha do tempo da série de pagamento variável em PA decrescente



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

1ª Parte: Solução da Série de Pagamentos Iguais Vencidos:
R = $R\$$ 2.600,00
n = 17 meses
i = 3,5% ao mês
$S_1 = ?$

$$S_1 = R \cdot FAC(i,n)$$
$$S_1 = 2600 \cdot FAC(3{,}5\%, 17)$$
$$S_1 = 2600 \cdot 22{,}70502$$
$$S_1 \approx R\$\ 59.033{,}04.$$

2ª Parte: Solução da Série em Gradiente Decrescente:
G = $R\$$ 200,00
n = 17 meses
i = 3,5% ao mês
$S_2 = ?$

$$S_2 = 200 \cdot FACg^{(-)}(i,n)$$
$$S_2 = 200 \cdot 222{,}98482$$
$$S_2 \approx R\$\ 44.596{,}96.$$

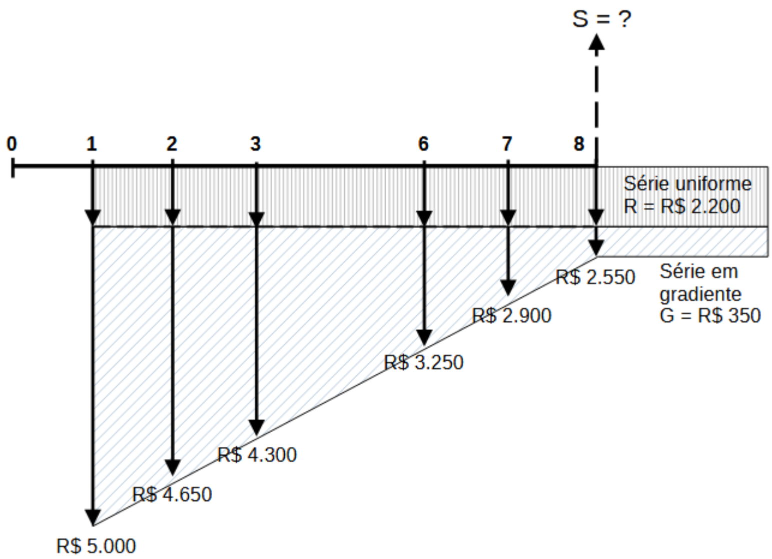
Somando os valores $S_1 = R\$$ 59.033,04 e $S_2 = R\$$ 44.596,96, obtemos o valor futuro de $R\$$ 103.630,00.

Exemplo 26 : *Em uma aplicação, a primeira parcela foi de $R\$$ 5.000,00 e as seguintes em uma PA decrescente de $R\$$ 350,00. Qual será o montante se Roberto resolver realizar 8 aplicações mensais à taxa de 1,5% ao mês.*

Para resolver o problema acima, vamos unir as partes das soluções em uma única, mas precisamos encontrar "R" da série uniforme. Veja abaixo:

$$a_1 = R + n \cdot G$$
$$5000 = R + 8 \cdot 350$$
$$5000 - 2800 = R$$
$$R = R\$ \text{ } 2.200{,}00.$$

Figura 4.24 – Linha do tempo das oito aplicações em PA decrescente



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Dados:
R = $R\$$ 2.200,00
G = $R\$$ 350,00
n = 8 meses
i = 1,5% ao mês

$$S = R \cdot FAC(i{,}n) + G \cdot FACg^{(-)}(i{,}n)$$
$$S = 2200 \cdot 8{,}43284 + 350 \cdot 38{,}60677$$
$$S = 18.552{,}25 + 13.512{,}37$$
$$S \approx R\$ \text{ } 32.064{,}62.$$

4.4 Séries de Pagamentos Variáveis com Termos Antecipados

De acordo com Sobrinho (2011, p. 146), "Os problemas de série de pagamentos variáveis com termos antecipados também podem ser resolvidos a partir das fórmulas definidas para série de pagamentos variáveis com termos postecipados, bastando multiplicá-las por $(1 + i)$".

No entanto para fins da proposta deste texto, destacamos só as fórmulas relacionadas o montante, seja da série gradiente crescente ou/e decrescente, que segue um deslumbre abaixo:

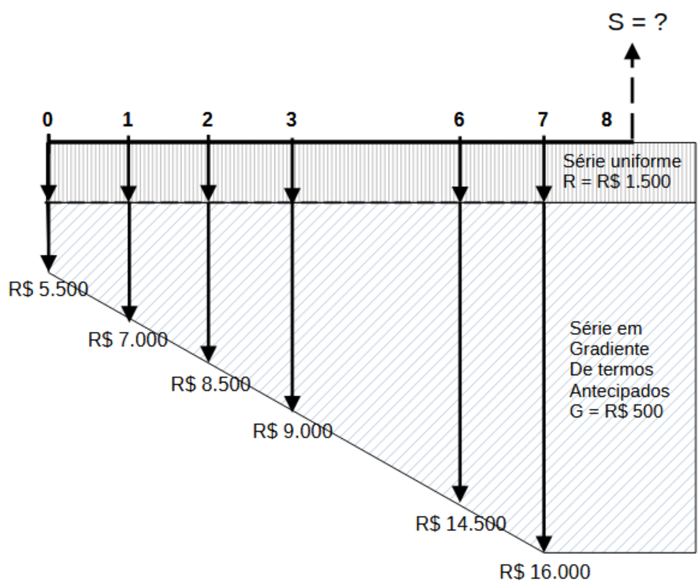
1. Para série em gradiente crescentes
   - Montante: $S = G \cdot (1+i) \cdot FACg^{(+)}(i,n)$.
2. Para série em gradiente decrescentes
   - Montante: $S = G \cdot (1+i) \cdot FACg^{(-)}(i,n)$.

Exemplo 27 : *Daqui há 8 meses, Roberto pretende fazer uma viagem, então decidiu investir por esse período de tempo. Ele fez 8 aplicações mensais crescente, a uma razão de* $R\$$ 500,00*, sabendo que a primeira parcela, no valor de* $R\$$ 5.500,00*, é aplicada hoje e que à taxa é de* 1,5% *ao mês. Qual o montante a ser resgatado?*

Dados:
G = $R\$$ 500,00
a_1 = $R\$$ 5.500,00
n = 8 parcelas mensais
i = 1,5% ao mês
R = ?
S = ?

Substituindo na expressão $a_1 = R + n \cdot G$, obtemos o valor de $R = R\$$ 1.500,00.

Figura 4.25 – Linha do tempo de oito aplicações antecipadas em uma PA crescente



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Utilizando a fórmula geral:

$$S = (1+i)\left[R \cdot FAC(i,n) + G \cdot FACg^{(+)}(i,n)\right]. \tag{4.15}$$

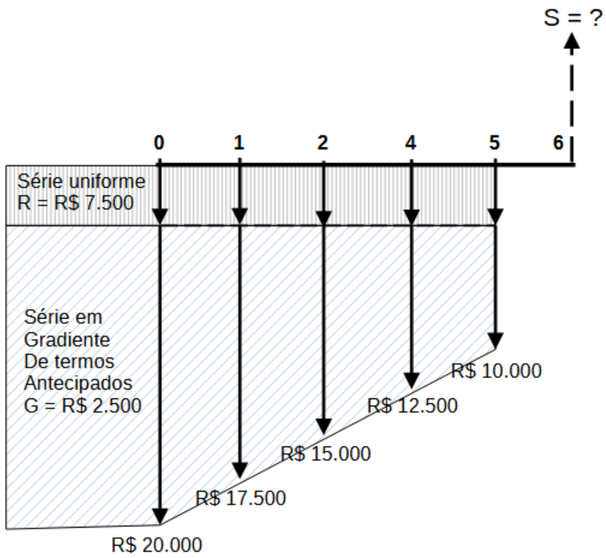
$$S = 1{,}015 \cdot [1500 \cdot 8{,}43284 + 500 \cdot 37{,}28878]$$
$$S = 1{,}015 \cdot [12649{,}26 + 18644{,}39] \approx R\$\ 31.763{,}05.$$

Exemplo 28 : *Roberto realiza 5 aplicações mensais decrescentes, sendo a razão de R\$ 2.500,00, em que a primeira parcela é no valor de R\$ 20.000,00, aplicado à uma taxa de 3% ao mês. Qual é o montante que Roberto irá receber ao final?*

Dados:
G = $R\$$ 2.500,00
a_1 = $R\$$ 20.000,00
n = 5 parcelas menais
i = 3% ao mês
R = ?
S = ?

$$
\begin{aligned}
& a_1 = R + n \cdot G \\
& 20000 = R + 5 \cdot 2500 \\
& 2000 = R + 12500 \\
& R = 20000 - 12500 = R\$\ 7.500{,}00.
\end{aligned}
$$

Figura 4.26 – Linha do tempo de cinco aplicações antecipadas em uma PA decrescente



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Agora vamos calcular o montante gerado com base na seguinte expressão:

$$S = (1+i)\left[R \cdot FAC(i,n) + G \cdot FACg^{(-)}(i,n)\right]. \tag{4.16}$$

$$
\begin{aligned}
& S = 1{,}03 \cdot [7500 \cdot 5{,}30914 + 2500 \cdot 16{,}24115] \\
& S = 1{,}03 \cdot [39818{,}52 + 40602{,}88] \\
& S \approx R\$\ 82.834{,}04.
\end{aligned}
$$

5 RESERVA DE EMERGÊNCIA

Este capítulo, antes de mais nada, tem o objetivo de explicar o que é reserva de emergência ou reserva financeira. E ao longo do texto vamos responder às seguintes perguntas: o que é uma reserva de emergência? Por que ter uma reserva? Quando utilizá-la? Quanto deixar nesta reserva? Quais são os investimentos adequados para ela? Além disso, iremos aprofundar sobre os tipos de ativos mencionados, visto que os capítulos anteriores, possibilitam uma base sobre economia e matemática financeira, deste modo, escolhendo um ativo "certo".

Antes de prosseguirmos, é necessário frisar que ao comprar um ativo (títulos, ações, cotas e etc), você está emprestando dinheiro, seja para o governo, banco ou empresa. Dependendo do tipo de ativo, pode-se combinar uma data de vencimento, na qual é preciso pagar o valor emprestado e mais um juro acordado entre as partes.

Para os planejadores e assessores financeiros, "a reserva de emergência é o ponto de partida para entrar no mundo dos investimentos com segurança." (MONEY, 2022).

5.0.1 O que é uma reserva de emergência ou reserva financeira?

"A reserva de emergência é uma economia realizada ao longo do tempo que seja capaz de bancar suas despesas mensais fixas por um determinado período." (MONEY, 2022).

Para a Riconnect "a reserva financeira é um dinheiro que deve ser aplicado em investimentos de curto prazo, que possibilitem o resgate imediato em casos de emergências financeiras." (RICO, 2022).

5.0.2 Por que ter uma reserva de emergência e quando usar?

Cedo ou tarde alguma situação inesperada acontece, e quase sempre envolvendo dinheiro. Ter uma reserva financeira, permite ao investidor ter uma certa segurança no futuro, em cenários não corriqueiros que possam tirar seu sono, ou seja, em situações extraordinárias que podem ser: acidente de carro, custo médico, perda do emprego, reforma emergencial da casa, pandemia e outros.

Então, significa que todo mundo deveria ter uma reserva de emergência? Sim. Mas também é importante orientar que o investidor precisa antes, ter o mínimo de organização financeira, para mensurar quanto dinheiro entra, quanto dinheiro sai, no que ele gasta e se é possível poupar.

Nesse raio-x da vida financeira é interessante avaliar a média do custo de vida mensal da família, que inclui conta de internet, água, luz, telefone, roupa e etc.

5.0.3 Qual o valor ideal para reserva financeira?

Agora chegamos a um ponto onde não há consenso entre os especialistas do assunto. Quanto de dinheiro deve dispor a reserva financeira? As recomendações são entre três a doze vezes o custo de vida mensal familiar.

De acordo com Money (2022), "para definir o tamanho da reserva de emergência, os especialistas recomendam considerar as condições específicas de cada um, entre elas": regularidade das receitas, empregabilidade, compromissos já assumidos, outros produtos financeiros e perfil do investidor.

Vamos imaginar uma família que tem um custo mensal médio de $R\$$ 2.000,00, então com base nas recomendações, essa família precisa ter no mínimo uma reserva de:

Tabela 5.1 – Reserva emergencial proporcional a renda familiar mensal

Meses	**Reserva emergencial**
3	R$ 6 000,00
4	R$ 8 000,00
5	R$ 10 000,00
6	R$ 12 000,00
...	...
12	R$ 24 000,00

Fonte: Elaborado pelo autor.

Muitos planejadores e assessores financeiros recomendam primeiro criar essa reserva, para depois fazer outros tipos de investimentos. E é neste ponto que discordo, pois o investidor pode estar perdendo oportunidades únicas no mercado, ao ficar "refém" de primeiro fazer a reserva. Porém, essa é uma discussão para trabalhos futuros.

5.0.4 Onde investir a reserva de emergência?

Já se sabe, que devemos levar em conta o custo mensal familiar para criação da reserva, mas onde investir a reserva de emergência? Para quem não está imerso no mercado financeiro, vai se deparar com várias opções no mercado, como ações, fundos imobiliários, títulos públicos ou privados e dentre outros.

Em concordância com a Money (2022), "para descobrir, você precisa saber quais são as duas principais características que devem existir nos investimentos aos quais destina sua reserva de emergência: alta liquidez e baixo risco". Além desses dois aspectos, há um terceiro, que é a rentabilidade.

Vamos entender cada concepção:

1. **Baixo Risco:** o emissor (que pode ser o governo, banco ou empresa) do ativo, tem o menor risco de dar um calote ao investidor.
2. **Alta Liquidez:** é a facilidade e velocidade de transformar ativo em dinheiro.
3. **Rentabilidade:** é a capacidade de um ativo de produzir rendimento, ou seja, o ROI [1].

Para tornar claro o conceito de rentabilidade nominal[2], vejamos o exemplo abaixo.

Exemplo 29 *: Roberto investiu R\$ 1.000,00 em um ativo. Seis meses depois ele decidiu vender, obtendo* $R\$$ 1.150,00. *Qual foi rentabilidade do investimento?*

Temos as seguintes informações:

$$\text{Preço de Compra } = R\$ \ 1.000{,}00$$
$$\text{Preço de Venda} = R\$ \ 1.150{,}00$$

[1] Return on Investment ou Retorno Sobre Investimento

[2] é o valor bruto gerado durante um período específico, ou seja, o rendimento total sem a dedução de taxas e impostos

Vamos usar a seguite fórmula

$$\text{Rentabilidade Nominal} = \frac{\text{Preço de Venda}}{\text{Preço de Compra}} - 1; \tag{5.1}$$

então temos:

$$\begin{aligned} RN &= \frac{1015}{1000} - 1 \\ RN &= 1{,}15 - 1 \\ RN &= 0{,}15 \\ RN &= 15\%. \end{aligned}$$

Quando formos aos exemplos reais, a rentabilidade varia conforme alguns fatores, por exemplo: expectativas do futuro, tipo de título, comportamento do indexador e data de vencimento.

> "É claro que a alta liquidez e o baixo risco têm um preço - e ele é cobrado na rentabilidade, que costuma ser menor do que a de produtos mais sofisticados. Por isso, o ideal é encontrar alternativas que ofereçam um retorno suficiente para, pelo menos, repor a inflação." (MONEY, 2022).

5.0.5 Quais títulos são apropriados para a reserva de emergência?

Com base nas informações acima, os produtos que são mais indicados para reserva financeira são: títulos públicos do Tesouro Nacional (Tesouro Selic); CDBs [3] com liquidez diária, Fundos de Renda Fixa (Fundos DI) e Letras de Câmbio (LC) com liquidez diária e etc.

Porém, para nosso estudo, utilizaremos o Tesouro Selic e CDB com liquidez diária, além da caderneta de poupança, pois é utilizada para guardar dinheiro.

5.1 Tesouro Selic

O Tesouro Selic (LFT)[4] é um título da dívida pública brasileira, emitido e garantido 100% pelo Tesouro Nacional[5], com o objetivo de financiar gastos e investimentos do governo. Ou seja, o investidor está comprando uma dívida do governo, e o mesmo, em contrapartida, "se compromete a devolver os valores corrigidos por uma taxa e em um prazo definido no momento da aplicação." (MONEY, 2022). A rentabilidade do título varia de acordo com a taxa Selic efetiva[6].

O LFT é um título pós-fixado, pois seu "valor é corrigido pelo seu indexador. Assim, a rentabilidade do título depende tanto do desempenho do seu indexador, quanto da taxa contratada no momento da compra." (TESOURO DIRETO, 2023).

> "Título pós-fixado cuja rentabilidade segue a taxa SELIC, a taxa de juros básica da economia. Sua remuneração é dada pela variação da taxa SELIC diária registrada entre a data de liquidação da compra e a data

---

[3] Certificados de Depósito Bancário

[4] Letra Financeira do Tesouro

[5] É um órgão do Ministério da Economia, responsável por garantir que os recursos arrecadados serão distribuídos conforme o orçamento

[6] A Selic efetiva, é mais ou menos 0,10% mais baixa que a Selic Meta que é estipulada pelo governo

> de vencimento do título, acrescida, se houver, de ágio ou deságio[7] no momento da compra." (TESOURO DIRETO, 2023).

"Como este título possui rendimento diário, o investimento no Tesouro Selic preserva o valor investido mesmo em caso de retirada antecipada. Por sinal, o Tesouro garante a recompra diária do título." (MONEY, 2022). Em outras palavras, tem uma alta liquidez, podendo o investidor ter em sua conta o dinheiro no dia útil seguinte ao pedido de resgate, ou seja, "D + 1", no jargão do mercado.

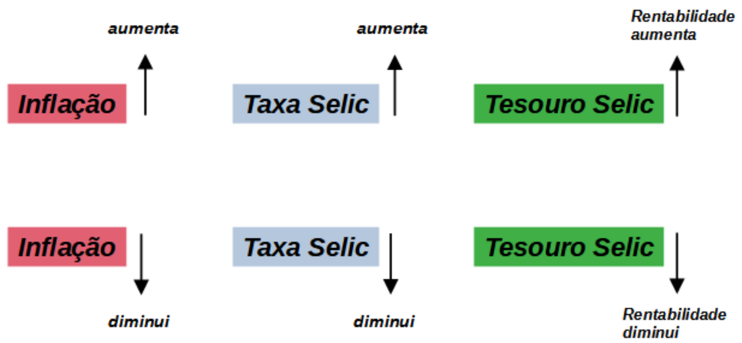
As principais características do título indexado à taxa Selic são:

- Indicado para o investidor que deseja uma rentabilidade pós-fixada indexada à taxa de juros da economia (Selic).
- O valor de mercado do Tesouro Selic (LFT) apresenta baixa volatilidade, evitando perdas no caso de venda antecipada.
- Sua rentabilidade tende a ser mais baixa que a dos demais títulos.

De acordo com site do Tesouro Direto (2023), este título tem as seguintes vantagens: é ideal para reserva de emergência, indicado para objetivos de curto prazo, dentre os títulos, é aquele que possui o menor risco em caso de venda antecipada. No entanto, alguns investidores veem desvantagens, que podem ser: a rentabilidade tende a ser baixa e o investidor paga o Imposto de Renda (IR) sobre os juros acumulados.

Então podemos resumir o comportamento desse título da seguinte forma:

Figura 5.1 – Comportamento do título de acordo com a Taxa Selic



Fonte: Elaborado pelo autor.

Se a inflação aumentar, então o governo aumenta a taxa Selic para frear a inflação, como o título do Tesouro Selic é indexado à Selic, logo os rendimentos são maiores, caso contrário, diminuem, porém, continua rendendo diariamente.

5.2 Certificados de Depósito Bancário (CDB)

Os CDBs são títulos emitidos por Bancos que têm como objetivo financiar as atividades de crédito do mesmo, ou seja, o investidor está emprestando dinheiro a uma instituição financeira, que vai remunerá-lo de acordo com o tipo de indexador (prefixado, pós-fixado ou indexado à inflação).

> O CDB é um dos instrumentos financeiros mais tradicionais do mercado brasileiro e o título de Renda Fixa mais adquirido pelo investidor pessoa física. Instituído pela Lei Nº 4.728, de 14 de junho de 1965, o papel é

[7] referente a condição de oferta e demanda do papel/título

> também uma importante fonte de captação de recursos para as instituições financeiras. (B3, 2023).

De acordo como o Money (2023), "os bancos captam dinheiro com os CDBs oferecendo em troca uma remuneração - os juros - aos investidores, por um determinado período". Esse dinheiro é usado para financiar empréstimos para pessoas ou empresas.

O investimento em CDBs são parecidos com os produtos de renda fixa, pois os indexadores podem ser: prefixado, pós-fixado e indexado à inflação. Além disso, deve-se ficar atento quanto ao prazo, "existem CDBs de liquidez diária, que podem ser resgatados a qualquer momento, e CDBs com prazo fixo, por exemplo, de 1 ou 2 anos, que só podem ser resgatados no final." (FONTES, 2017, p. 86). Dependendo, o investidor pode resgatar antes, porém o Banco cobra uma taxa em cima da rentabilidade obtida.

Para efeito do nosso estudo, vamos utilizar o CDB pós-fixado com liquidez diária, pois é muito parecido com o título do Tesouro Selic emitido pelo governo, só que enquanto o tesouro Selic seu indexador é a taxa Selic, do CDB pós-fixado é a taxa do CDI[8] (que anda lado a lado com a Taxa Selic), se o CDI subir ou cair ao longo do tempo da aplicação, a rentabilidade em reais poderá ser maior ou menor. Então o que muda neste título são: Emisor que no caso é o Banco e indexador.

Um aspecto fundamental a ser observado, diz respeito à rentabilidade prometida pelo papel. Dado que o CDB pós-fixado tem um rendimento atrelado ao CDI, indexado muito próximo à taxa Selic, então ao selecionar CDB é preciso que o retorno seja igual ou superior a 100% do CDI. Além disso, este título é garantido pelo FGC[9], em caso de problema (calote) com a instituição, este fundo devolve até R$ 250 mil do valor aplicado por CPF[10] e por instituição.

Aos escolher um CDB, deve-se responder às seguintes perguntas:

- Qual é a remuneração oferecida em cada caso?
- Qual é o prazo de vencimento do CDB?
- Qual é o sistema de liquidez?
- Qual é o nível de risco do emissor do CDB?

Isso o leitor/investidor deve averiguar atentamente, pois cada Banco tem suas regras em relação ao CDB oferecido no mercado.

5.3 Caderneta de Poupança

Por mais que a caderneta de poupança não seja um título, porém é popular como uma forma de guardar dinheiro para eventuais situações.

> "A caderneta de poupança é uma categoria de conta bancária em que é possível guardar dinheiro e receber juros em cima do montante aplicado. Também conhecida simplesmente como "poupança", ela pode ser usada como um investimento de renda fixa" (INVEST, 2022).

Segundo a ANBIMA (2022, p. 12), "dentre os investimentos que a população conhece, a caderneta de poupança é o produto financeiro mais utilizado entre os brasileiros, com 23% das menções". Apesar disso, oferece a pior rentabilidade do mercado comparado aos títulos aqui estudados.

[8] Certificado de Depósito Interbancário
[9] Fundo Garantidor de Créditos
[10] Cadastro de Pessoas Físicas

A poupança é um investimento de renda fixa, pois você sabe as regras do rendimento antes da aplicação, porém diferente dos títulos de renda fixa, a caderneta de poupança é usada para movimentação financeiras entre seus usuários.

Sua popularidade, deve-se à simplicidade de ter uma conta, seja por maiores ou menores de idade, outro fato é o objetivo já enraizado na população de guardar o dinheiro em um lugar seguro, porém sempre à disposição do mesmo. Isso torna a caderneta de poupança bastante atrativa, sem falar que o rendimento da poupança é igual em qualquer instituição financeira, então não há necessidade de ficar se preocupando qual Banco escolher com base no rendimento.

Um dos pontos favoráveis é que a poupança é isenta de custos, como IR[11], IOF[12] e taxa de administração ou de performance. No entanto, é necessário declarar o IR, desde que a aplicação seja igual ou maior que R$ 140,00.

A poupança conta com baixo risco, pois é garantido pelo FGC, que assegura contra calote ou quebra do Banco em até 250 Mil por CPF, ou CNPJ, mantido na instituição financeira. Outro fato, é sua alta liquidez diária, isso facilita resgatar a qualquer momento o dinheiro, sem complicação. No entanto, já a rentabilidade deixa a desejar.

De acordo com a legislação atual, a remuneração dos depósitos de poupança é composta de duas parcelas:

(I) a remuneração básica, dada pela Taxa Referencial (TR);
(II) a remuneração adicional, correspondente a:
   - 0,5% ao mês, enquanto a meta da taxa Selic ao ano for superior a 8,5%; ou
   - 70% da meta da taxa Selic ao ano, mensalizada, vigente na data de início do período de rendimento, enquanto a meta da taxa Selic ao ano for igual ou inferior a 8,5%.

Por mais que a liquidez seja diária, a remuneração é creditada mensalmente apenas na data de aniversário, que é o dia do mês que foi feito o depósito. Se resgatar antes disso, perderá o rendimento do período. Este fato também é um ponto negativo ao deixar o dinheiro na caderneta de poupança, além disso, tem a inflação que pode ser superior ao rendimento da poupança.

Para saber a remuneração básica e a adicional realizada pelos Bancos, o BC disponibiliza no seu site[13].

[11] Imposto de Renda
[12] Imposto sobre Operação Financeira
[13] https://www4.bcb.gov.br/pec/poupanca/poupanca.asp

6 INDEXADORES VS INFLAÇÃO

Este capítulo, tem como objetivo avaliar o desempenho dos indexadores atrelados ao Tesouro Selic, ao CDB e a Poupança, levando em conta a inflação, visto que, todo leitor/investidor que busca ganhos reais, ou seja, ganhos acima da inflação é obrigatório determinar a rentabilidade real dos seus investimentos ao longo do tempo.

Para facilitar nossa investigação, o período foi delimitado, sendo os dados de jan/95 a out/2023, disponibilizado no site do ipeadata[1].

Para avaliar o desempenho dos indexadores em relação à inflação, utiliza-se a fórmula do Juro Real:

$$Juro\ Real = \left[\frac{1+\dfrac{indexador}{100}}{1+\dfrac{infla\c{c}\tilde{a}o}{100}}\right] - 1; \tag{6.1}$$

o juro real representa o juro que sobra quando é deduzido a inflação.

Exemplo 30 *: No mês de setembro de 2023, a taxa Selic mensal foi de* 0,97%*, enquanto a inflação foi de* 0,26%*. Qual foi o desempenho dos títulos atrelados à Selic em relação à inflação no mês em questão?*

Para resolver esse tipo de situação, utilizamos a fórmula (6.1), com segue abaixo:

$$Juro\ Real = \left[\frac{1+\dfrac{0{,}97}{100}}{1+\dfrac{0{,}26}{100}}\right] - 1$$
$$Juro\ Real = 0{,}7082\%.$$

O leitor pode esbarrar em três situações possíveis, que são:

1. *Juro Real* > 0, o título atrelado ao indexador rendeu acima da inflação, ou seja, ouve ganhos reais do investidor.
2. *Juro Real* < 0, o título atrelado ao indexador rendeu abaixo da inflação, isto é, mesmo obtendo uma rentabilidade do título, no entanto, a desvalorização causada pela inflação foi maior.
3. *Juro Real* $= 0$, não teve perdas e nem ganhas.

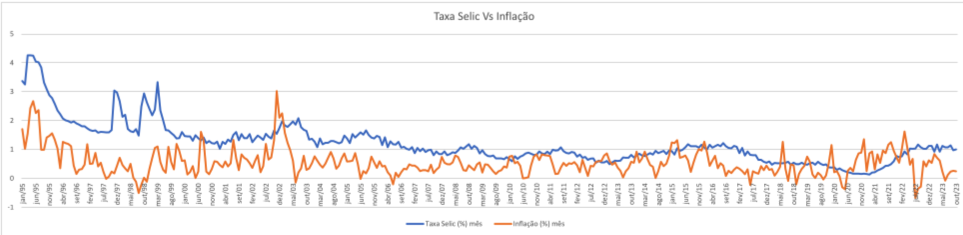
Então nesse período descrito no exemplo (30), o título rendeu acima da inflação, consequentemente os investidores ganharam dinheiro.

6.1 Taxa Selic vs Inflação

O gráfico comparativo da taxa Selic e o IPCA de janeiro de 1995, a outubro de 2023. Sendo a linha em azul (Selic) e em laranja (IPCA). Foram um total de 301 vezes nos meses em que a taxa Selic esteve acima da inflação, contra 45 abaixo da mesma e nenhuma vez igual. Isso aponta que 87% das vezes os títulos atrelados à Selic rendem acima da inflação. Esse é um bom indicador.

[1]http://www.ipeadata.gov.br/Default.aspx

Figura 6.1 – Taxa Selic vs Inflação

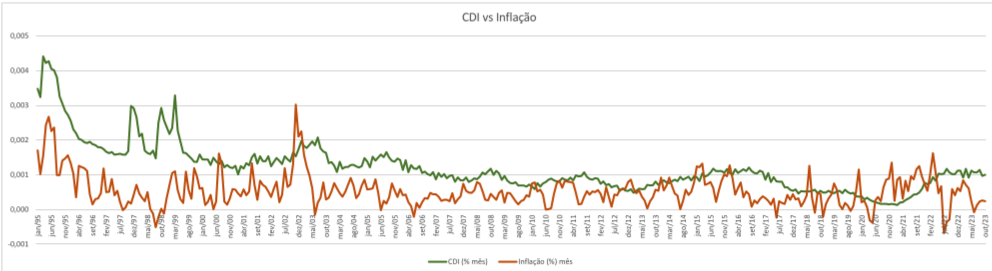


Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

6.2 CDI vs Inflação

Um ponto importante é a Figura (6.2), que compara o desempenho do CDI (linha em verde) a IPCA (linha em laranja), no período de jan/95 a out/2023. Comparando mês a mês, o CDI esteve 301 acima da inflação, contra 45 abaixo e nenhuma vez igual.

Figura 6.2 – CDI vs Inflação



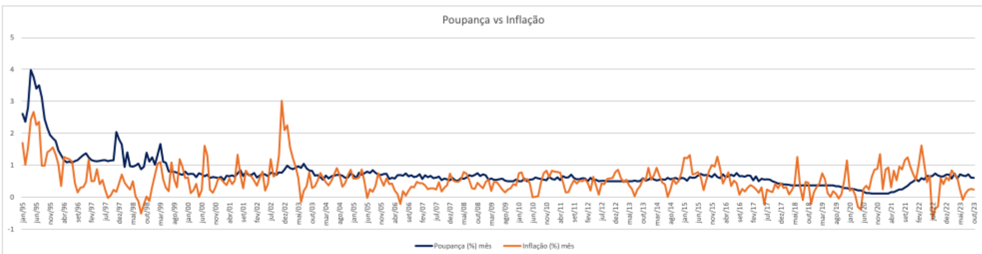
Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

O porcentual que o CDI esteve acima da inflação, é igual à comparação entre *Taxa Selic vs Inflação*, pois CDI acompanha lada a lada à taxa básica de juros, quase não tendo grandes diferenças.

6.3 Poupança vs Inflação

A caderneta de poupança (linha azul escuro), surpreendeu, pois, do período averiguado, ela esteve acima da inflação 242 vezes, enquanto 104 abaixo e nenhuma igual. Porém, há aplicações mais vantajosas no momento econômico que nos encontramos.

Figura 6.3 – Poupança vs Inflação



Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

7 TAXAS E IMPOSTOS

Neste capítulo, nosso objetivo é conhecer as taxas e impostos cobrados que incidem sobre os títulos aqui escolhidos para nossa reserva de emergência.

As taxas cobradas são *taxa de custódia* e *taxa de corretagem*. Já os impostos, temos, IOF[1] e IR[2], conforme apresentado nas Tabelas (7.1) e (7.2) respectivamente.

Tabela 7.1 – Tabela Regressiva do Imposto sobre Operação Financeira (IOF)

Nº de dias	Alíquota	Nº de dias	Alíquota	Nº de dias	Alíquota
1	96%	11	63%	21	30%
2	93	12	60%	22	26
3	90%	13	56%	23	23%
4	86%	14	53%	24	20%
5	83%	15	50%	25	16%
6	80%	16	46%	26	13%
7	76%	17	43%	27	10%
8	73%	18	40%	28	6%
9	70%	19	36%	29	3%
10	66%	20	33%	30	0%

Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Tabela 7.2 – Tabela do Imposto de Renda (IR)

Prazo do investimento	Alíquota
Até 180 dias (6 meses)	22,5%
De 181 até 360 dias (1 ano)	20%
De 361 dias até 720 dias (2 anos)	17,5%
Acima de 720 dias	15%

Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho.

Tanto o IFO quanto IR, são impostos regressivos que incidem sobre títulos do Tesouro Selic e CDBs. Enquanto a taxa de custódia cobrada pela B3 é de 0,2% a.a sobre o valor dos títulos, referente aos serviços de guardar dos títulos e às informações e movimentações dos saldos. O título do Tesouro Selic até $R\$$ 10.000,00 investidos são isentos a partir do dia 01/08/2020. Já os valores excedentes, será cobrado à taxa.

Além da taxa de custódia, dependendo da instituição financeira, a mesma pode ou não cobrar uma taxa de corretagem sobre a movimentação de compra e/ou venda, para conhecer quais instituições realizam a cobrança, acesse o site do Tesouro Direto ou verifique na própria instituição financeira.

[1]Imposto sobre Operação Financeira
[2]Imposto de Renda

8 FERRAMENTAS DO TESOURO DIRETO

Este capítulo tem como principal objetivo apresentar e utilizar duas ferramentas que estão disponíveis no site do Tesouro Direto[1], para simular algumas situações já mencionadas neste trabalho, além de permitir comparar títulos do mercado. As duas ferramentas são: *calculadora* e *simule os títulos*. Então aqui, vamos apresentar essas duas ferramentas, para que no próximo capítulo seja feito nossa análise utilizando as ferramentas.

8.1 Tesouro Direto

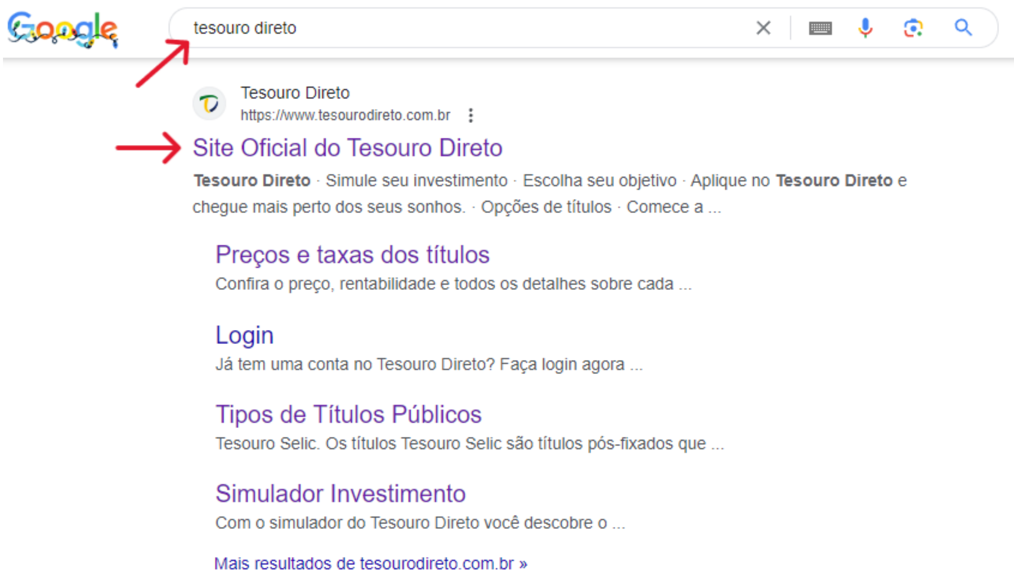
O Tesouro Direto foi lançado em 2002, com o objetivo de democratizar o acesso aos títulos públicos, permitindo assim, aplicações até de *R*$ 30,00 reais. Mas o que é o Tesouro Direto? É um Programa do Tesouro Nacional desenvolvido em parceria com a B3 para venda de títulos públicos federais para pessoas físicas, de forma 100% online. Já foi mencionado aqui, que a venda dos títulos públicos podem ser entendidos como um instrumento que o governo utiliza para se financiar.

8.2 Ferramenta Calculadora

Para facilitar a vida do leitor, faremos um passo-a-passo para encontrar, entender e utilizar a ferramenta em questão.

Digite no Google: "*tesouro direto*" e acesse o primeiro link, conforme na Figura (8.1). Já na próxima página, clique na opção *Títulos* e navegue até *Calculadora* como segue Figura (8.2).

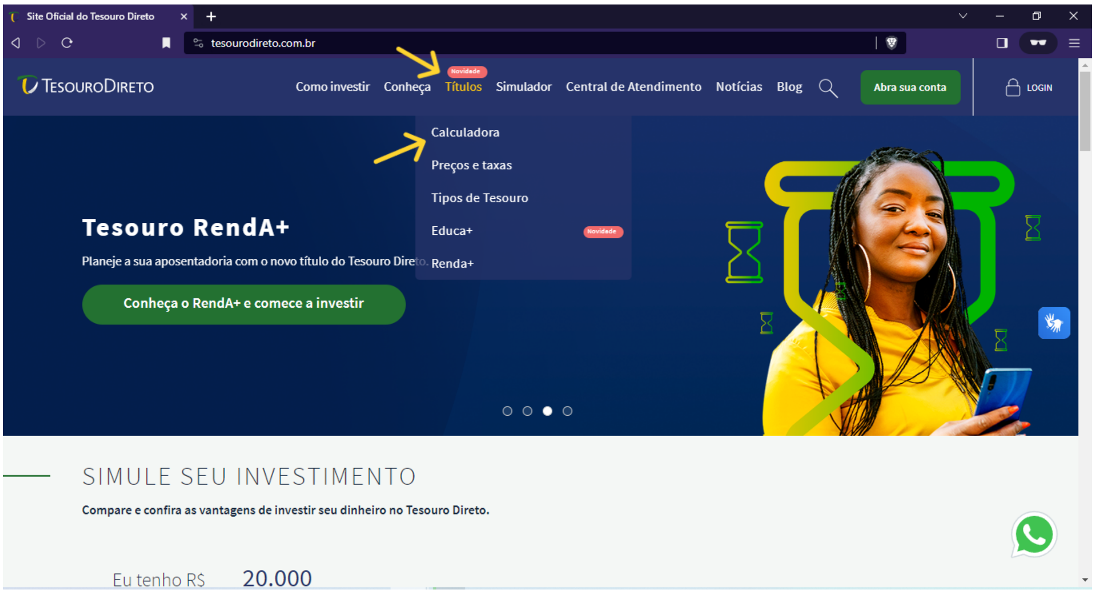
Figura 8.1 – Pesquisando no Google a palavra "tesouro direto"



Fonte: Google, 2023.

[1] https://tesourodireto.com.br

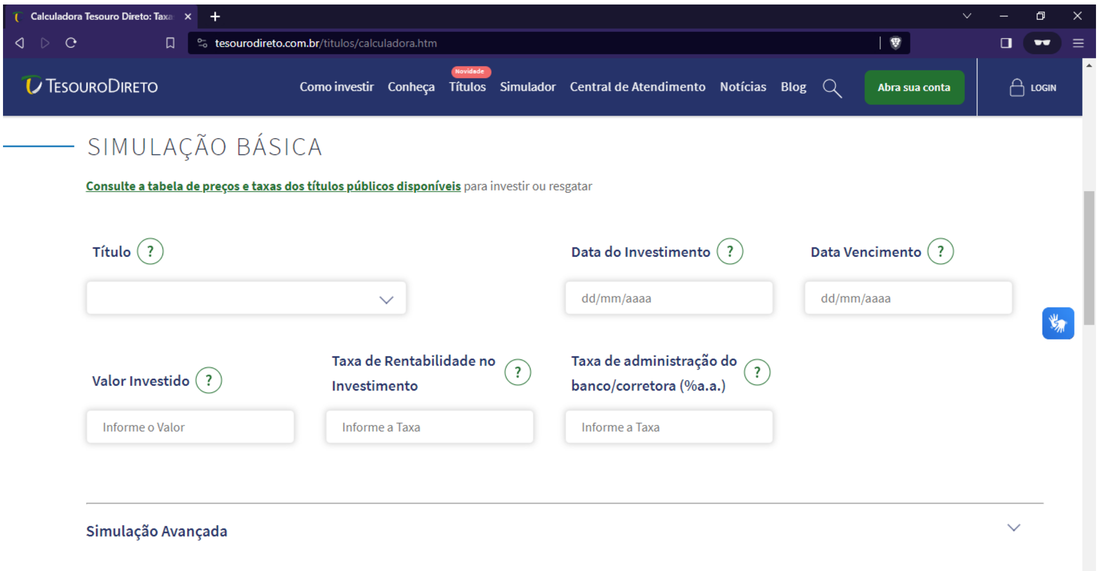
Figura 8.2 – Site do Tesouro Direto



Fonte: Tesouro Direto, 2023.

Rolando a página um pouco para baixo, você encontrará o simulador, em conformidade com a Figura (8.3).

Figura 8.3 – Calculadora do Tesouro Direto



Fonte: Tesouro Direto, 2023.

Por mais que seja bastante intuitivo o preenchimento dos campos, daremos uma breve explicação sobre.

1. O campo **Título** permite escolher os títulos que estão disponíveis no site do Tesouro Direto.
2. O campo **Data do Investimento**, já é bem sugestivo, refere-se ao dia que comprou o título.
3. Já o campo **Data Vencimento**, refere-se quando deseja resgatar o título. Ao escolher um título, ele é preenchido automaticamente, porém você pode mudar para antes do vencimento.

4. **Valor Investido** diz respeito quanto vai aplicar (aplicação única).
5. Enquanto a **Taxa de Rentabilidade no Investimento**, é referente ao ágio ou deságio do título, que no nosso exemplo é o Tesouro Selic 2026, com SELIC + 0,0222%, este 0,0222% é à taxa de rentabilidade no investimento.
6. **Taxa de administração do Banco/corretora**, se você comprou o título em outro lugar(Banco ou corretora) que não o site do Tesouro Direto, tem a chance de o Banco/correto cobrar uma taxa, porém, a maioria à taxa 0%.
7. Chegamos ao campo **Taxa Selic para o Período**, à taxa que irá inserir, deve ser 0,10% menor que à taxa divulgada pelo Banco Central, pois o mercado financeiro trabalha com valor abaixo, por exemplo, se o BC divulga 12,75% a.a, então o mercado financeiro utiliza nas suas transações 12,65% a.a.

Referente ao campo *Taxa Selic para o Período*, o leitor pode fazer simulações com outros valores da taxa Selic, possibilitando ter um olhar sobre situações que possam ocorrer se a taxa aumentar ou diminuir.

8.3 Simulador de Títulos

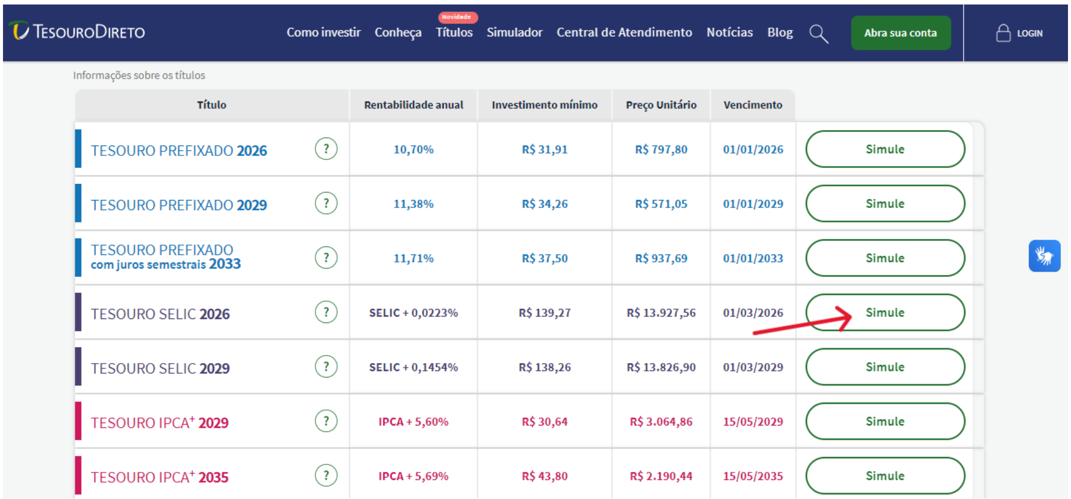
Já com acesso ao site do Tesouro Direto, no menu do site navegue até *Simulador* e depois *Simule os títulos*, de acordo com a Figura (8.4).

Figura 8.4 – Menu onde encontrar a ferramenta “Simule os títulos”

Fonte: Tesouro Direto, 2023.

Na Figura (8.5), o leitor vai notar uma variedade de títulos com vencimentos diferentes à compra, que são: Tesouro Prefixado (2026, 2029 e 2033), Tesouro Selic (2026 e 2029) e Tesouro IPCA (2029 e 2035). Então qual título utilizaremos para nossa simulação? Como este trabalho é sobre a criação da reserva emergencial, portanto o título a ser empregado será sempre o Tesouro Selic, neste momento procederemos apresentando a ferramenta, sem interesse nos exemplos, pois serão mostrados no próximo capítulo.

Figura 8.5 – Títulos disponíveis à simulação



Fonte: Tesouro Direto, 2023.

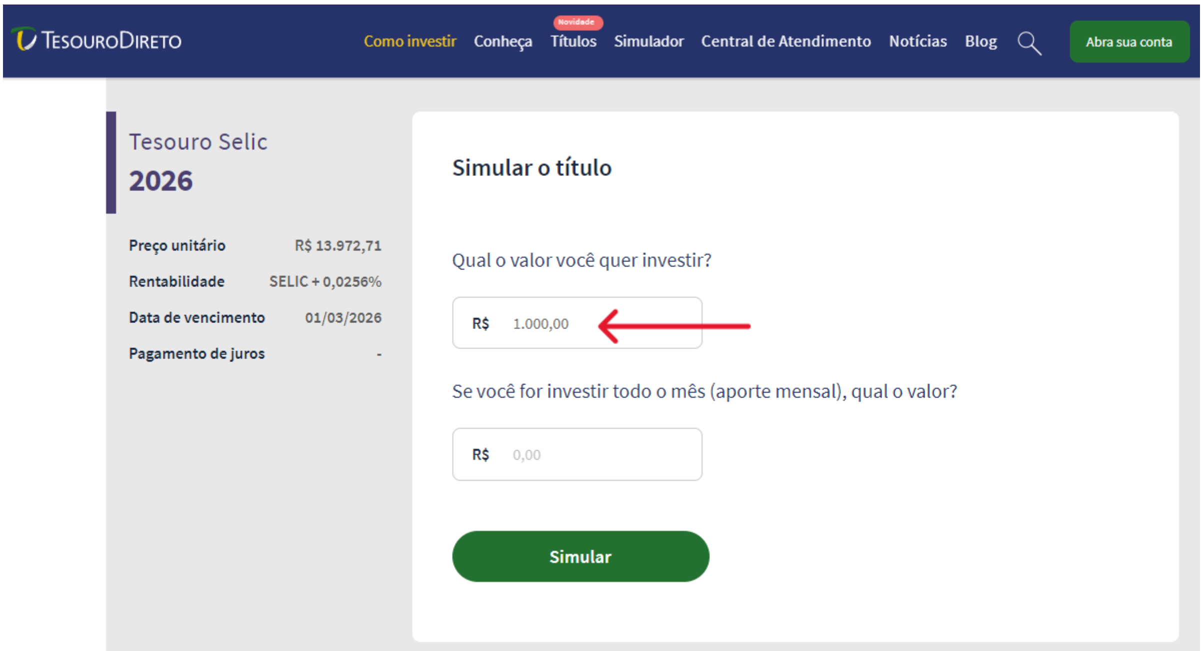
É apresentado na Figura (8.6), duas opções, qual delas escolher? Como reversa de emergência é para uma situação que não sabemos quando vai acontecer, então faz mais sentido escolher a opção: *Quanto quero investir hoje* do que *Quanto quero resgatar no futuro*.

Figura 8.6 – Escolhendo a opção "Quanto quero investir hoje" no simulador

Fonte: Tesouro Direto, 2023.

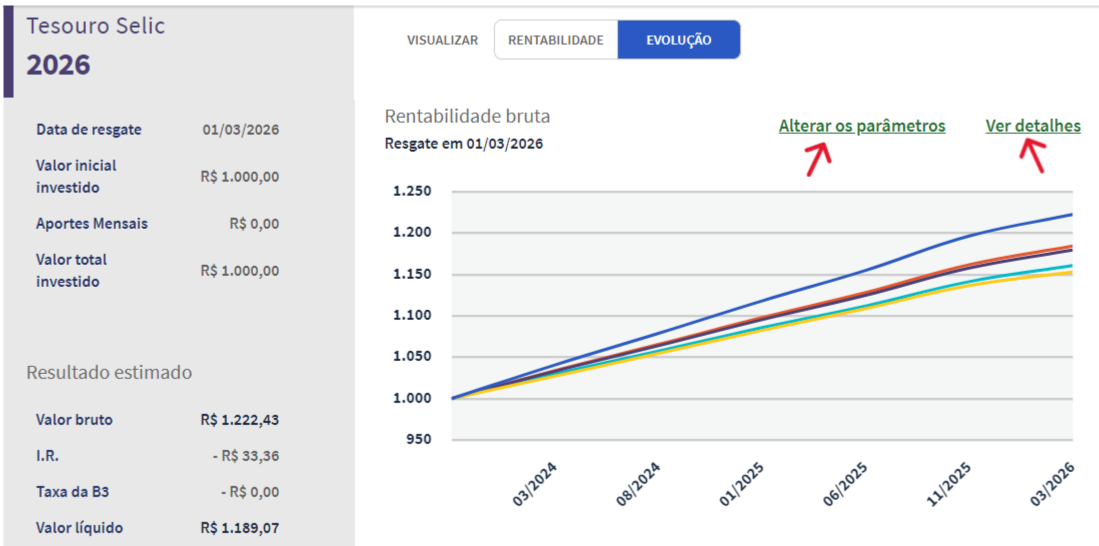
A Figura (8.7), onde será necessário só preencher os campos, *Qual o valor você quer investir?* e o campo *Se você for investir todo o mês (aporte mensal), qual o valor?* Se não for fazer aportes mensais, não é necessário preenchê-lo. Já a Figura (8.8) revela a rentabilidade bruta dos títulos.

Figura 8.7 – Preenchendo o campo do simulador de títulos



Fonte: Tesouro Direto, 2023.

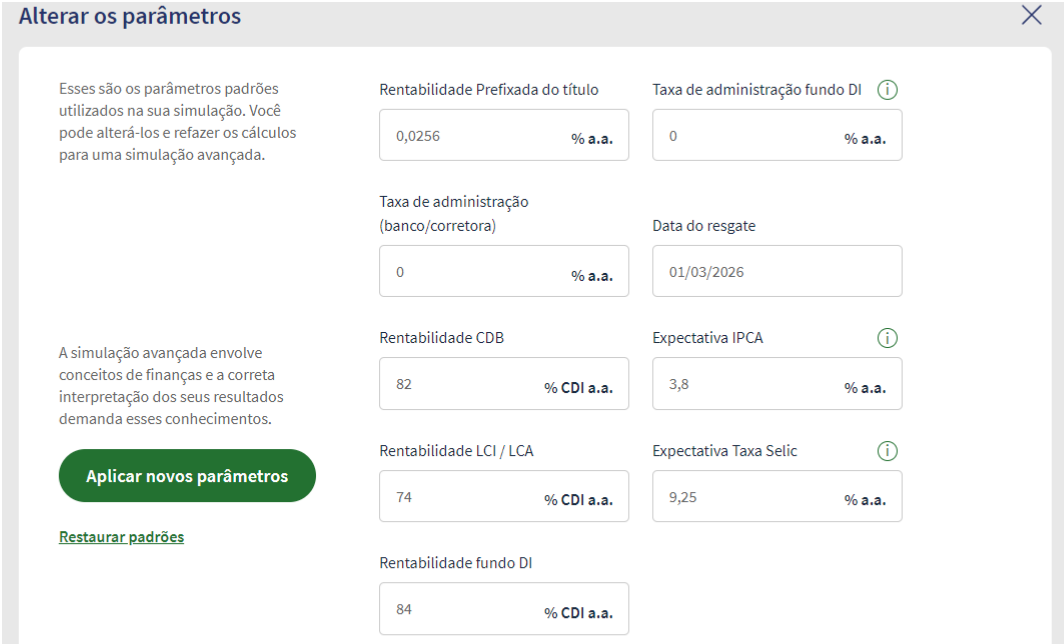
Figura 8.8 – Comparando com outros títulos



Fonte: Tesouro Direto, 2023.

Caso seja de interesse do leitor/investidor, o mesmo pode alterar os parâmetros e realizar uma nova simulação mais próxima do que realmente deseja, conforme a Figura (8.9). Além de possibilitar enxergar detalhes da simulação, de acordo com a Figura (8.10).

Figura 8.9 – Alterar os parâmetros da simulação



Fonte: Tesouro Direto, 2023.

Figura 8.10 – Vendo os detalhes da simulação


Simulação detalhada

TESOURO SELIC
2026

Data de resgate: 01/03/2026

Valor inicial investido: 1.000,00

Aportes Mensais R$ 0,00

Soma dos valores investidos (nominal): 1.000,00

Investimento	Valor bruto de resgate (R$)	Rentabilidade bruta (a.a.)	Custos (R$)	Valor do imposto de renda (R$)	Valor líquido de resgate (R$)	Rentabilidade líquida (a.a.)
Tesouro	1.222,43	8,90	0,00	33,36	1.189,07	7,63
Poupança	1.153,09	6,23	0,00	0,00	1.153,09	6,23
CDB	1.179,61	7,27	0,00	26,94	1.152,67	6,22
LCI/LCA	1.160,79	6,53	0,00	0,00	1.160,79	6,53
Fundo DI	1.184,42	7,45	0,00	27,35	1.155,15	6,31

Fonte: Tesouro Direto, 2023.

9 ANÁLISE DAS APLICAÇÕES

O objetivo deste capítulo é utilizar dos conhecimentos vistos até o momento, seja sobre economia, matemática financeira e os tipos de títulos. Examinar qual aplicação seria oportuna para reserva de emergência.

Para essas comparações entre os títulos, vamos utilizar as ferramentas **Calculadora** e **Simular o título** disponível do site no Tesouro Direto[1]. Tais ferramentas são de grande importância, pois permitirá simular o comportamento das aplicações, dessa forma, facilitando nossa análise.

Queremos destacar, que o título de comparação será o título do Tesouro Selic em relação aos outros que são mostrados na simulação da ferramenta.

9.1 Única Aplicação

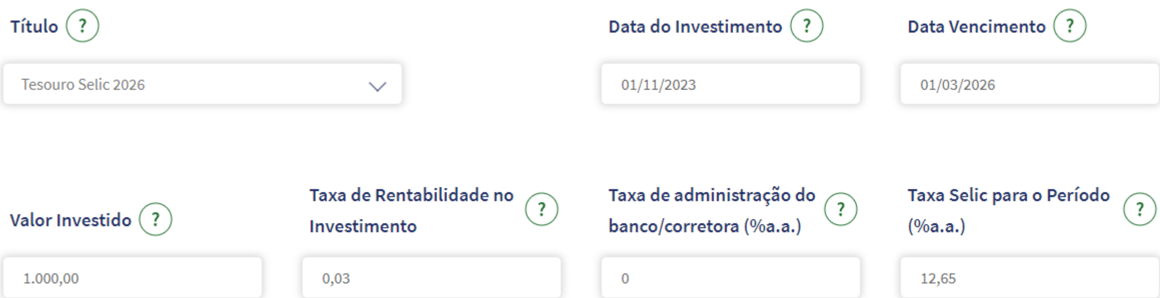
Neste exato momento a Taxa Selic encontra-se em 12,75% a.a, porém a taxa efetiva é 12,65% a.a, ou seja, a taxa que o mercado usa para suas transações.

No exemplo (31), será utilizado a taxa efetiva 12,65% para todo o período, já o exemplo (32) será a média das taxas dos períodos, ou seja, a expectativa do mercado que é de 9,35% a.a.

Exemplo 31 : *Roberto deseja criar sua reserva de emergência, para isso, faz uma única aplicação de R$ 1.000,00 no título do Tesouro Selic, no dia 1 de Novembro de 2023, sendo o vencimento no dia 1 de Março de 2026. Vamos imaginar que ele leve o título até seu vencimento. Qual o montante acumulado? Vale investir em comparação às outras aplicações?*

Neste exemplo, iremos utilizar a calculadora do Tesouro Direto, que vai permitir inserir alguns valores conforme a Figura (9.1) e obter outras informações.

Figura 9.1 – Escolhendo o título "Tesouro Selic 2026" para investir



Fonte: Tesouro Direto, 2023.

Chamando sua atenção para dois campos, "Taxa de Rentabilidade no Investimento", taxa referente ao ágio de deságio do título o outro "Taxa Selic para o Período", utilizamos a taxa SELIC 12,65% com mais 0,03% a rentabilidade fica em 12,68% para todo o período. Veja a Figura (9.2).

[1]https:tesourodireto.com.br

Figura 9.2 – Resumo do investimento

TÍTULO: TESOURO SELIC 2026	
Dias corridos entre a data do investimento e a de vencimento	849
Dias corridos entre a data do investimento e a data do resgate	849
Dias úteis entre a data do investimento e a de vencimento	585
Dias úteis entre a data de investimento e a data do resgate	585
Valor investido líquido	R$ 1.000,00
Rentabilidade bruta (a.a)	12,68%
Valor investido bruto	R$ 1.000,00
Valor bruto dos cupons e do resgate	R$ 1.319,45
Valor da taxa de custódia do resgate	R$ 0,00
Valor da taxa de administração do resgate	R$ 0,00
Alíquota média de imposto de renda	15,00%
Imposto de Renda	R$ 47,92
Valor líquido do resgate	R$ 1.271,53
Rentabilidade líquida após taxas e I.R.	10,90%

Fonte: Tesouro Direto, 2023.

Com base no que já estudamos neste trabalho, podemos entender as informações da Figura (9.2), além disso, obter outras, por exemplo: a rentabilidade bruta (nominal) do período e do ano, e como calcular a rentabilidade líquida do período e do ano, utilizando as seguintes fórmulas (5.1) e (3.5) para ambos respectivamente.

Vejamos como calcular a rentabilidade bruna do período e a do ano. Segue abaixo:

$$Rent.Bruta = \left(\frac{1319{,}45}{1000}\right) - 1$$
$$Rent.Bruta \approx 0{,}3195$$
$$Rent.Bruta \approx 31{,}95\% \text{ (do período).}$$

$$i_{a.a} = (1 + 31{,}95\%)^{\frac{252}{585}} - 1$$
$$i_{a.a} \approx 0{,}1268$$
$$i_{a.a} \approx 12{,}68\% \ a.a.$$

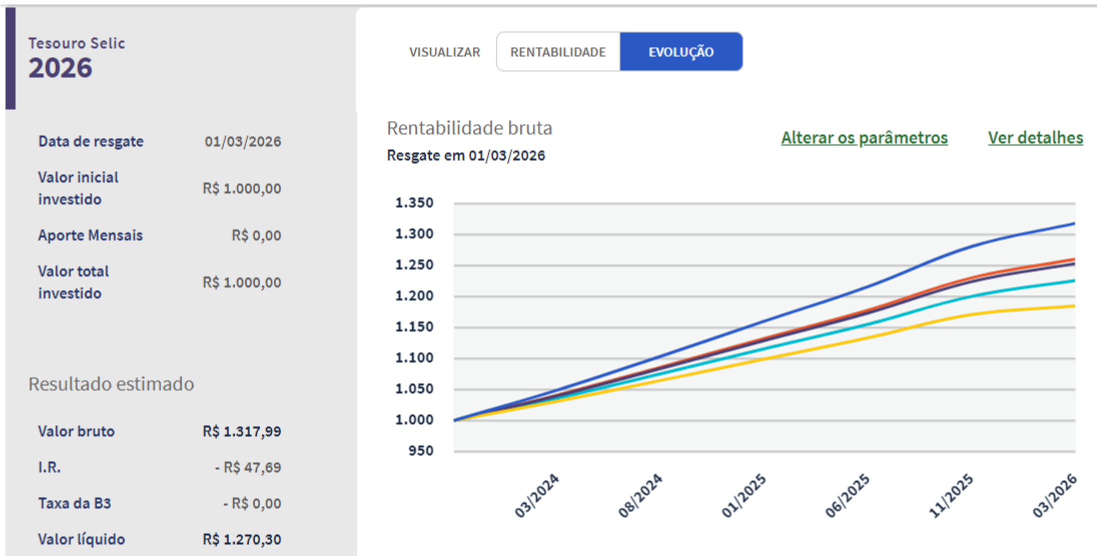
A rentabilidade líquida, segue o mesmo cálculo da rentabilidade bruta, a diferença que, já foram descontadas todas as taxas e impostos a serem pagas:

$$Rent.Líquida = \left(\frac{1271{,}53}{1000}\right) - 1$$
$$Rent.Líquida \approx 0{,}2715$$
$$Rent.Líquida \approx 27{,}15\% \text{ (do período).}$$

$$i_{a.a} = (1 + 27{,}15\%)^{\frac{252}{585}} - 1$$
$$i_{a.a} \approx 0{,}1090$$
$$i_{a.a} \approx 10{,}90\% \ a.a.$$

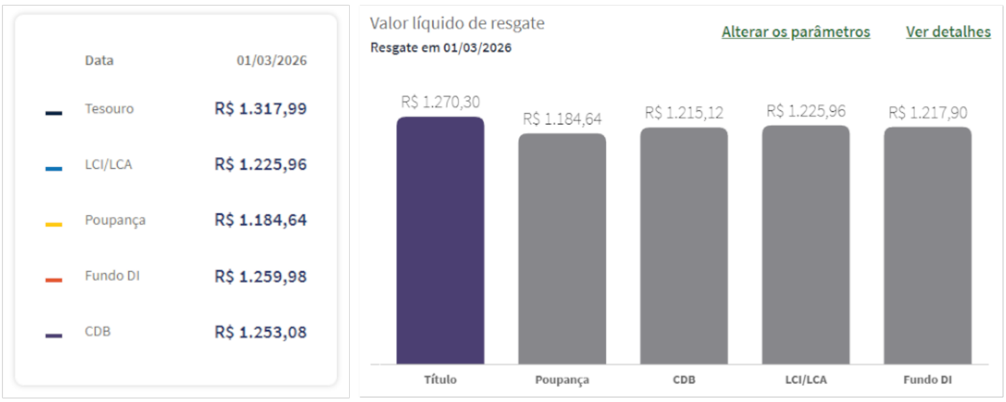
Para comparar as aplicações, vamos utilizar *Simule os títulos*, utilizando alguns parâmetros da Figura (9.2). Por mais que os valores inseridos sejam iguais, verá que há pequena diferença nos resultados, isso acontece pela parte programacional (código de programação).

Figura 9.3 – Rentabilidade bruta



Fonte: Tesouro Direto, 2023.

Figura 9.4 – Comparando os valores líquidos das aplicações



Fonte: Tesouro Direto, 2023.

Com base no que foi mostrado acima, o título do tesouro Selic mostrou-se uma boa opção, mesmo com os descontos das taxas e impostos. No entanto, é bom frisar que não é nenhuma recomendação de compra.

Exemplo 32 : *Roberto deseja criar sua reserva de emergência, para isso, faz uma única aplicação de R\$ 1.000,00 no título do Tesouro Selic, no dia 1 de Novembro de 2023, sendo o vencimento no dia 1 de Março de 2026, taxa de 9,35% a.a. Vamos imaginar que ele leve o título até seu vencimento. Quanto vai retornar se ele levar até o vencimento? A rentabilidade é melhor que nas outras aplicações?*

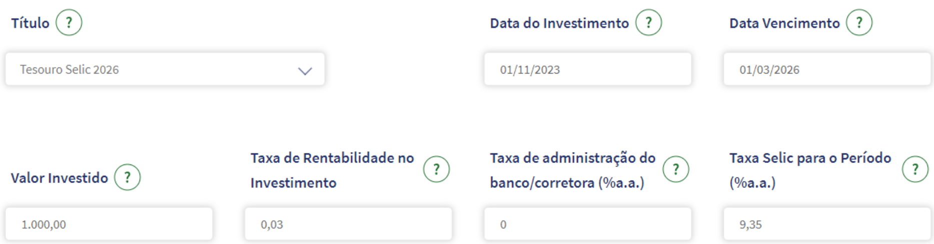
Figura 9.5 – Resumo da simulação do título

TÍTULO: TESOURO SELIC 2026	
Dias corridos entre a data do investimento e a de vencimento	849
Dias corridos entre a data do investimento e a data do resgate	849
Dias úteis entre a data do investimento e a de vencimento	585
Dias úteis entre a data de investimento e a data do resgate	585
Valor investido líquido	R$ 1.000,00
Rentabilidade bruta (a.a)	9,38%
Valor investido bruto	R$ 1.000,00
Valor bruto dos cupons e do resgate	R$ 1.231,45
Valor da taxa de custódia do resgate	R$ 0,00
Valor da taxa de administração do resgate	R$ 0,00
Alíquota média de imposto de renda	15,00%
Imposto de Renda	R$ 34,72
Valor líquido do resgate	R$ 1.196,73
Rentabilidade líquida após taxas e I.R.	8,04%

Fonte: Tesouro Direto, 2023.

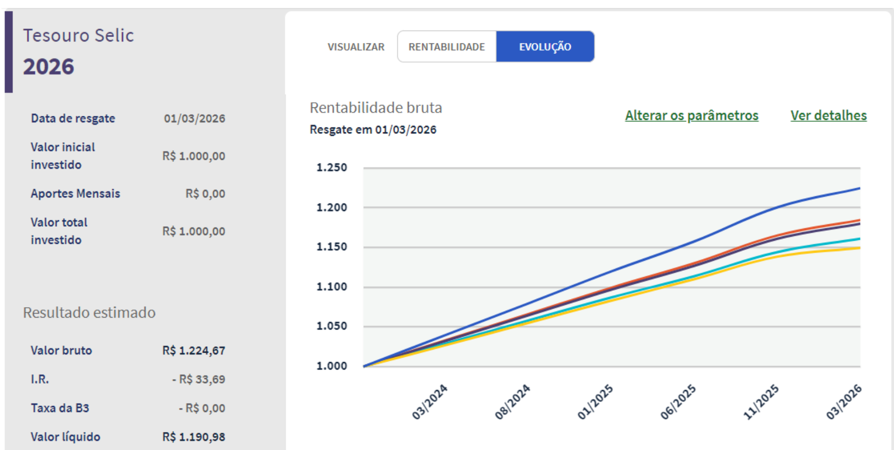
A rentabilidade bruta do período e do ano respectivamente é 23,15% e 9,38%, já a rentabilidade líquida do período e do ano nesta ordem é 19,67% e 8,04%.

Figura 9.6 – Escolhendo o título "Tesouro Selic 2026", sendo Taxa Selic média



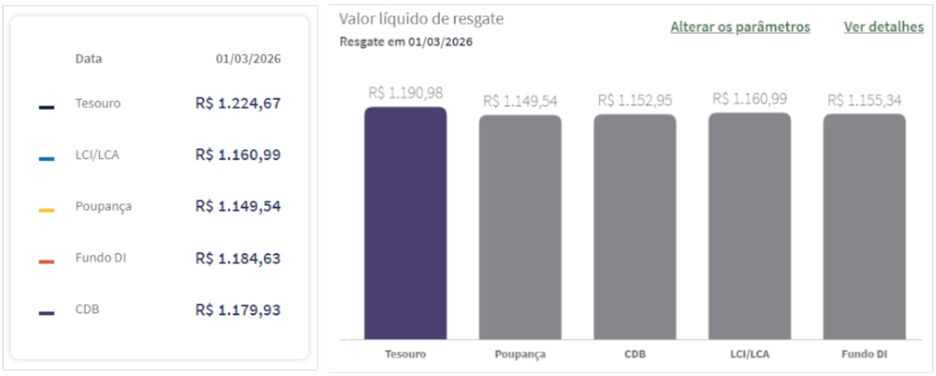
Fonte: Tesouro Direto, 2023.

Figura 9.7 – Gráfico da rentabilidade bruta dos títulos



Fonte: Tesouro Direto, 2023.

Figura 9.8 – Gráfico da rentabilidade líquida das aplicações



Fonte: Tesouro Direto, 2023.

Segundo a simulação, o título do tesouro Selic se mostrou mais vantajoso, porém é necessário validar tais informações, pois dependendo do Banco, o CDB pode está uma taxa mais agressiva para atrair mais clientes.

9.2 Aplicação Recorrente Mensal

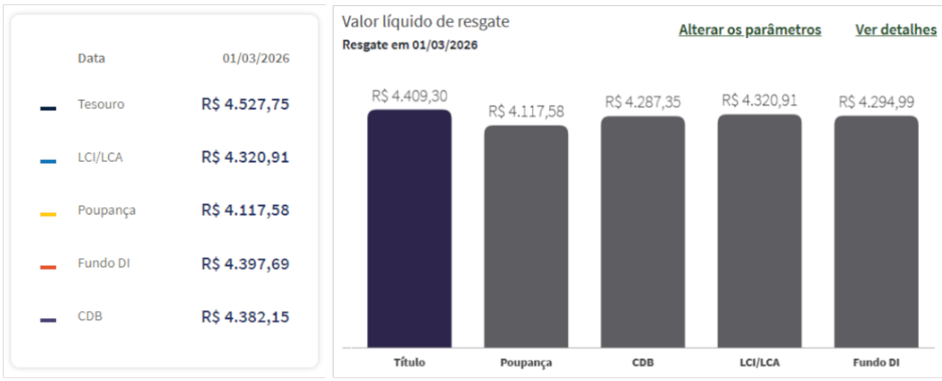
O leitor/investidor vai constatar que tanto o título atrelado à Selic e ao CDI, rendem mais que a caderneta de poupança. Isso já era de se esperar, porém, quando for escolher entre Tesouro Selic e algum CDB de um Banco, deve-se ter uma análise minuciosa, pois, cada Banco determina quanto CDB rende do CDI, que pode está acima ou abaixo da Selic.

Exemplo 33 : *Roberto aspira criar sua reserva de emergência, aplicar R\$ 1.000,00 no título do Tesouro Selic a uma taxa de 12,65%+0,03% = 12,68% a.a, no dia 1 de Novembro de 2023, sendo vencimento no dia 1 de Março de 2026. No entanto, ele fará aportes mensais no início de cada mês, sendo uma quantia fixa de R\$ 100,00. Vamos imaginar que ele leve o título até seu vencimento, qual será o montante e se em comparação às outras aplicações, é vantajoso?*

Figura 9.9 – Rentabilidade bruta dos títulos quando a aplicação é recorrente

Fonte: Tesouro Direto, 2023.

Figura 9.10 – Rentabilidade líquida das aplicações recorrentes



Fonte: Tesouro Direto, 2023.

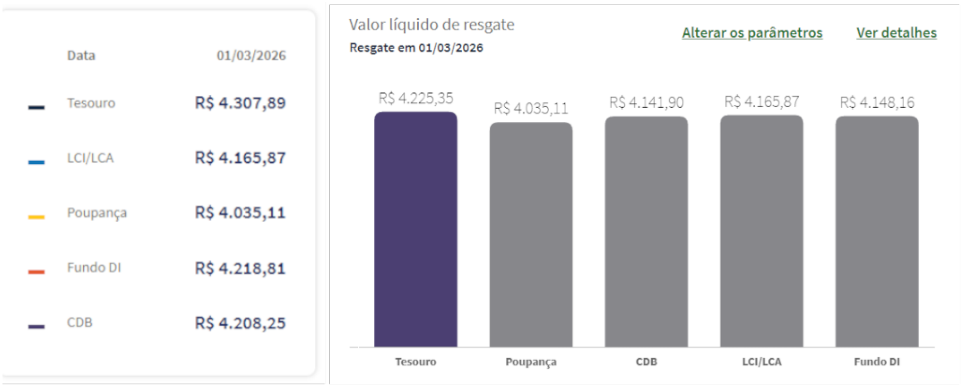
Analisando atentamente as informações acima, o leitor percebe que o Tesouro Selic, CDB e outros títulos aqui não mencionados são mais rentáveis que a poupança, no entanto, é indispensável ao leitor/investidor examinar de forma minuciosa tais aplicações e rentabilidade.

Exemplo 34 : *Roberto almeja criar sua reserva emergencial, para isso, aplica R\$ 1.000,00 no título do Tesouro Selic a uma taxa de* $9{,}35\% + 0{,}03\% = 9{,}38\%$ *a.a, no dia 1 de Novembro de 2023, sendo vencimento no dia 1 de Março de 2026. No entanto, ele fará aportes mensais no início de cada mês, sendo uma quantia fixa de R\$ 100,00. Vamos imaginar que ele leve o título até seu vencimento, qual será o montante gerado? Qual aplicação é mais proveitosa?*

Figura 9.11 – Rentabilidade bruta das aplicações recorrentes

Fonte: Tesouro Direto, 2023.

Figura 9.12 – Rentabilidade líquida das aplicações recorrentes



Fonte: Tesouro Direto, 2023.

Este capítulo revelou o que talvez já era de se esperar, o Tesouro Selic e o CDB sendo as melhores aplicações para criação da reserva emergencial, mesmo em projeções futuras onde a taxa básica de juros venha decrescer, conforme as projeções realizadas pelo BC disponibilizadas através do relatório/boletim FOCUS divulgada todas as segundas-feiras.

10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi elaborado visando mostrar como a matemática financeira pode auxiliar na tomada de decisão na construção da reserva de emergência, levando em conta o atual cenário econômico, além de salientar a importância da educação financeira para a população.

É notório a necessidade de uma abordagem mais profunda sobre o tema, analisando situações e situações, pois há muitas possibilidades a serem vistas que aqui não caberia prolongar. Mas é inegável como os conceitos básicos da matemática financeira, já possibilitam analisar possíveis situações que o leitor/investidor pode encontrar na construção da reserva emergencial.

No entanto, o leitor/investidor necessita munir-se de mais conhecimentos que vão além dos números e fórmulas, por exemplo: conceitos econômicos, sistema financeiro, títulos (públicos e privados) e outros. Como visto neste trabalho, são rapidamente compreendidos quando conectados de forma sequencial.

Além disso, o tema matemática financeira precisa ser mais trabalhado na Faculdade de Matemática (por professores e alunos), pois tendo em vista que assuntos como economia e matemática financeira ganharam um destaque na BNCC[1] e nos meios de comunicação. Isso revela que o licenciado em matemática, deve se inteirar desses assuntos, não só para ensinar, mas também para aplicar na sua vida.

Portanto, face ao acima exposto, este trabalho procurou explorar de forma simples, objetiva e didática, aspectos importantes que o autor acredita serem relevantes ao tema. Dessa forma, nosso objetivo é que este trabalho sirva de base ou guia para despertar o interesse de professores e alunos, tendo aplicações cada vez mais práticas. É claro, que em nenhum momento houve a pretensão de esgotar o assunto, considerando a grandiosidade do mesmo.

10.1 Trabalhos Futuros

- Notion como ferramenta de controle financeiro pessoal.
- Uso do Power BI como ferramenta de controle e tomadas de decisões financeiras.
- Educação financeira para alunos de Licenciatura em Matemática da UFPA.
- Projeto de pós-graduação em Educação Financeira na UFPA.

[1] Base Nacional Comum Curricular

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS ENTIDADES DOS MERCADOS FINANCEIROS E DE CAPITAIS (ANBIMA). **Raio X do investidor brasileiro**. 5. ed. Praia de Botafogo, 501, bloco II, conj. 704 - Botafogo, 2022. 44 p. Acessado: 10 out. 2022. Disponível em: <https://www.anbima.com.br/pt_br/especial/raio-x-do-investidor-2022.htm>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 47.

B3. **Certificado de Depóstito Bancário**. Praça Antonio Prado, 48 - São Paulo, 2023. Acessado: 15 jan. 2023. Disponível em: <https://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/registro/renda-fixa-e-valores-mobiliarios/certificado-de-deposito-bancario.htm>. Citado na página 47.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Comitê de Política Monetária (Copom)**. Brasília - DF, 2022. Acessado: 24 out. 2022. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/copom>. Citado na página 11.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Comitê de Política Monetária (Copom)**. Brasília - DF, 2022. Acessado: 13 out. 2022. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/copom?utm_campaign0=fb-20190604-audiencia-remarketing>. Citado na página 12.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **O que é a inflação**. Brasília - DF, 2022. Acessado: 24 out. 2022. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/oqueinflacao>. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Taxa Selic**. Brasília - DF, 2022. Acessado: 24 out. 2022. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/taxaselic>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 12.

BRASIL. CONGRESSO. SENADO. **Decreto-lei nº 3.088, de 21 de junho de 1999**. Brasília - DF, 1999. Acessado: 15 out. 2022. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto/d3088.htm>. Citado na página 10.

CONFEDERAÇÃO NACIONAL DA INDIÚSTRIA. Retrados da sociedade brasileira. Brasília - DF, v. 54 (dezembro 2020), n. 9, p. 19, 2020. ISSN 23177012. Disponível em: <https://www.portaldaindustria.com.br/estatisticas/rsb-54-poupanca-e-consumo/>. Citado na página 9.

FILHO, O. B. C. Matemática financeira no cotidiano — um estudo de caso. **Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**, Universidade Federal da Bahia, Salvador - Bahia, p. 55, abril 2016. Citado na página 16.

FONTES, M. Renda fixa não e fixa!: Saiba como obter com renda fixa retorno tão agressivos quanto com ações. Empiricus, p. 146, 2017. Citado na página 47.

GOOGLE. **Captura da tela pesquisando no Google**. 1600 Amphitheatre Parkway, Mountain View, CA, 2023. Acessado: 24 out. 2023. Disponível em: <https://www.google.com.br>. Citado na página 52.

INVEST, E. **Caderneta de poupança: o que é e como funciona?** [S.l.], 2022. Acessado: 17 mar. 2023. Disponível em: <https://exame.com/invest/guia/caderneta-de-poupanca-o-que-e-e-como-funciona/>. Citado na página 47.

MIRA, E. Por que o governo se beneficia com a alta da inflação. **Forbes Brasil**, Brasil, 2021. Acessado: 11 nov. 2022. Disponível em: <https://forbes.com.br/forbes-money/2021/07/eduardo-mira-por-que-o-governo-se-beneficia-com-a-alta-da-inflacao/>. Citado na página 10.

MONEY, I. **Saiba o que é reserva de emergência e por que você precisa ter uma**: A reserva de emergência é o ponto de partida para entrar no mundo dos investimento com segurança. entanda o como funciona. Brasil, 2022. Acessado: 10 jan. 2023. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/guias/reserva-de-emergencia/>. Citado 4 vezes nas páginas 43, 44, 45 e 46.

MONEY, I. **Renda Fixa**. Brasil, 2023. Acessado: 15 jan. 2023. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/guias/cdb/>. Citado na página 47.

RICO, T. **Passo a passo: construindo sua reserva financeira!** Av. Chedid Jafet, 75, Torre Sul - Vila Olímpia, São Paulo, SP, 2022. Acessado: 10 jan. 2023. Disponível em: <https://riconnect.rico.com.vc/blog/reserva-financeira/>. Citado na página 43.

SECRETARIA DO TESOURO NACIONAL DO BRASIL. **Características dos títulos públicos**. Esplanada dos Ministérios, Ed. Sede do Ministério da Economia, Bloco P - Brasília - DF, 2023. Acessado: 15 jan. 2023. Disponível em: <https://www.tesourodireto.com.br/>. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.

SOBRINHO, J. D. V. **Matemática financeira**. 7. ed. Rua Conselheiro Nébias, 1384 (Campos Elísios): São Paulo: Atlas, 2011. 409 p. Citado 8 vezes nas páginas 13, 18, 20, 25, 28, 32, 35 e 40.

SOUZA, F. H. d. A. Matemática financeira: Uma importante ferramenta no cotidiano. **Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**, Universidade Federal de Goiás, Campus Samambaia - GO, p. 50, Março 2017. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 15.

TESOURO NACIONAL. **Captura da tela do site do Tesouro Direto**. Esplanada dos Ministérios, Ed. Sede do Ministério da Economia, Bloco P - Brasília - DF, 2023. Acessado: 24 out. 2023. Disponível em: <https://www.tesourodireto.com.br/>. Citado 12 vezes nas páginas 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63 e 64.