



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO MARAJÓ BREVES
FACULDADE DE CIÊNCIAS NATURAIS

DAVID M. FARIAS MEDEIROS

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO NO PLANO COMPLEXO E FUNÇÕES DE GREEN

BREVES-PA

2024

DAVID M. FARIAS MEDEIROS

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO NO PLANO COMPLEXO E FUNÇÕES DE GREEN

Trabalho de conclusão de curso, apresentado à faculdade de Ciências Naturais da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciado em Ciências Naturais, pela Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Oliveira do Nascimento

Coorientador: Prof. Dr. Sílvio Carlos F. Pereira Filho

Breves-PA

2024

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

F224i Farias Medeiros, David Matheus.
Introdução ao cálculo no plano complexo e funções de Green /
David Matheus Farias Medeiros. — 2024.
52 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. Leandro Oliveira do Nascimento
Coorientador(a): Prof. Dr. Sílvio Carlos Ferreira Pereira Filho
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade
Federal do Pará, Campus Universitário de Breves, Faculdade de
Ciências Naturais, Breves, 2024.

1. Função de Green . 2. Teorema do Resíduo . 3. Função
delta de Dirac. 4. Transformada de Fourier . I. Título.

CDD 530.15

DAVID M. FARIAS MEDEIROS

**INTRODUÇÃO AO CÁLCULO NO PLANO COMPLEXO E FUNÇÕES
DE GREEN**

Trabalho de conclusão de curso, apresentado à faculdade de Ciências Naturais da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciado em Ciências Naturais, pela Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Oliveira do Nascimento

Coorientador: Prof. Dr. Sílvio Carlos F. Pereira Filho

Data de aprovação: 28/02/2024

Conceito: Excelente

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Leandro Oliveira do Nascimento
ICEN/UFPA (Orientador)

Prof. Dr. Sílvio Carlos F. Pereira Filho
FACIN – CUMB/UFPA (Coorientador)

Prof. Dr. Manolo Cleiton Costa de Freitas
FACIN – CUMB/UFPA (Examinador)

Prof. Dr. Vanilson Gomes Pereira
FAMAT– CUMB/UFPA (Examinador)

RESUMO

O presente trabalho explora o teorema dos resíduos e as funções de Green, destacando sua aplicação em problemas envolvendo integrais impróprias de variáveis reais e equações diferenciais. O estudo revela a profundidade e versatilidade desses conceitos, demonstrando sua importância na resolução de problemas físicos e matemáticos complexos. Além disso, introduz as funções de Green e a função delta de Dirac, mostrando sua aplicabilidade em equações diferenciais relevantes para a física. Destaca-se também o uso da transformada de Fourier para simplificar equações diferenciais, exemplificadas na resolução de problemas como o oscilador harmônico e a equação de Schrödinger. Este estudo oferece uma introdução valiosa ao conteúdo de física matemática, ressaltando sua utilidade na compreensão e solução de problemas físicos. A metodologia usada nesta pesquisa consiste em uma revisão da literatura matemática vinculada ao tema.

Palavras-chave: teorema do resíduo; função de green; função delta de dirac; transformada de fourier.

ABSTRACT

The present work explores the residue theorem and Green's functions, highlighting their application in problems involving improper integrals of real variables and differential equations. The study reveals the depth and versatility of these concepts, demonstrating their importance in solving complex physical and mathematical problems. Additionally, it introduces Green's functions and the Dirac delta function, showing their applicability in relevant differential equations for physics. The use of the Fourier transform to simplify differential equations is also emphasized, exemplified in solving problems such as the harmonic oscillator and the Schrödinger equation. This study provides a valuable introduction to the field of mathematical physics, emphasizing its utility in understanding and solving physical problems. The methodology used in this research consists of a literature review of mathematical literature related to the topic.

Keywords: residue theorem; green function; dirac delta function; fourier transform

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	5
2	SÉRIE DE LAURENT E RESÍDUOS.....	7
2.1	Série de Laurent.....	7
2.2	Resíduos	9
2.3	O Teorema do Resíduo	9
2.4	Resíduos em Pólo Simples	11
2.5	Resíduo em Pólo Composto.....	12
3	TEOREMA DO RESÍDUO APLICADO AO CÁLCULO DE INTEGRAIS IMPRÓPRIAS.	13
3.1	Integrais Impróprias de Funções Racionais.....	13
3.2	Integrais Impróprias Envolvendo Funções Trigonômicas.....	17
3.3	Integrais Definidas de Funções Trigonômicas	22
4	FUNÇÃO DE GREEN	27
4.1	Função Delta de Dirac	27
4.2	Transformada de Fourier	29
4.2.1	Propriedades da Transformada de Fourier.....	30
4.2.2	Uma Representação para a Delta.....	35
4.3	Método da Função de Green.....	36
4.4	Aplicação da Função de Green e Transformada de Fourier	38
5	CONCLUSÃO	50
	REFERÊNCIAS	51

1 INTRODUÇÃO

A matemática desempenha um papel fundamental na Física, fornecendo ferramentas necessárias para entender e descrever os fenômenos físicos que ocorrem ao nosso redor. Dentre os diversos ramos da Matemática, o cálculo diferencial, o cálculo vetorial e o cálculo no plano complexo são especialmente relevantes para diferentes áreas da Física. Uma dessas áreas é a mecânica clássica, onde cálculo diferencial é essencial para descrever o movimento dos corpos e as forças que atuam sobre eles. Por sua vez, o cálculo vetorial fornece ferramentas e conceitos essenciais para o estudo do eletromagnetismo, como as equações de Maxwell que descrevem como os campos elétricos e magnéticos interagem e se propagam.

Ainda nesse contexto, temos o cálculo no plano complexo, originado das funções de variáveis complexas, o qual desempenha um papel fundamental na Física Quântica. Dentro do cálculo no plano complexo, destaca-se um resultado crucial conhecido como o teorema dos resíduos, o qual possui implicações profundas em diversas áreas da Física, incluindo a teoria quântica de campos, a teoria da relatividade e a mecânica estatística. Este teorema desempenha uma função essencial na resolução de integrais complexas, permitindo-nos calcular integrais de funções complexas utilizando apenas as singularidades isoladas presentes nessas funções. Tais integrais aparecem frequentemente em problemas envolvendo a eletrodinâmica quântica, por exemplo. O referido teorema estabelece que a integral de uma função analítica em uma região fechada é igual a 2π vezes a soma dos resíduos das singularidades contidas nessa região (Brown; Churchill, 2009). Isso se converte em uma ferramenta matemática altamente eficaz para calcular integrais impróprias de funções racionais, bem como integrais impróprias ou definidas que contenham funções trigonométricas.

Além do cálculo no plano complexo, outra ferramenta matemática importante na Física, são as chamadas funções de Green. As funções de Green são em geral soluções particulares de problemas envolvendo equações diferenciais não-homogêneas sujeitas a condições iniciais ou condições de contorno (Braga, 2006). Essas funções podem ser entendidas de maneira física como a resposta de um sistema físico a um impulso, e a abordagem de analisar um sistema físico reunindo essas respostas aos impulsos é conhecida como método da função de Green (Feynman; Leighton; Sands, 2008). Isso simplifica o processo de resolução de problemas complexos em muitas áreas da Física e Engenharia, incluindo a teoria quântica de campos, eletrodinâmica e teoria estatística de campos.

O Teorema dos resíduos e as Funções de Green são conteúdos estudados na área de Física- Matemática que é um ramo da Física- Teórica. Disciplina que se localiza na intersecção

da Física e Matemática, seu foco reside em esclarecer com precisão matemática, através de teoremas e demonstrações o significado dos conceitos fundamentais da teoria física (Dyson, 1992). O primeiro contato do autor com esses temas foi durante a iniciação científica (PIBIC), o que despertou um grande interesse pelos conteúdos e motivou o desenvolvimento deste trabalho. Assim, procuramos repassar os conhecimentos adquiridos sobre Cálculo no plano complexo e Funções de Green neste trabalho, onde o mesmo pode ser utilizado como recurso didático-teórico em notas de aula sobre os referidos assuntos. Portanto, este trabalho fornece uma introdução valiosa a conteúdos estudados na área da Física-Matemática, ressaltando sua utilidade na compreensão e solução de problemas físicos.

O Objetivo Geral deste trabalho é estudar o Teorema do Resíduo e a Função de Green com o objetivo específico de aplicá-los em problemas envolvendo integrais impróprias de funções racionais e trigonométricas e na resolução de equações diferenciais importantes para Física.

O trabalho está dividido em 4 capítulos. O primeiro capítulo é composto pela introdução. No capítulo 2 apresentamos uma introdução a Série de Laurent para só então introduzirmos o Teorema do Resíduo para preparar o leitor para as aplicações do mesmo. O capítulo 3 é destinado as aplicações do Teorema do Resíduo em três casos de integrais reais. Começamos o capítulo 4 introduzindo a função delta de Dirac e logo após apresentamos uma pequena introdução à Transformada de Fourier e suas propriedades para então introduzir a Função de Green e em seguida aplicamos o método em dois problemas envolvendo equações diferenciais.

2 SÉRIE DE LAURENT E RESÍDUOS

Neste capítulo o objetivo é apresentar o Teorema do Resíduo. Primeiramente apresentaremos a série de Laurent e seu respectivo teorema. O teorema da série de Laurent nos é importante pois ele nos diz que uma função analítica pode ser representada por séries de potências positivas e negativas de $(z - z_0)$.

Os conceitos, teoremas e demonstrações desta seção foram baseados nas referências Ávila (2008), Arfken e Weber (2007), Brown e Churchill (2009).

2.1 Série de Laurent

Teorema 2.1. *Seja f uma função analítica no domínio anelar D definido por $r < |z - z_0| < R$. Então para todo número complexo z nessa região, $f(z)$ é representada por uma série de potências positivas e negativas de $(z - z_0)$.*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (2.1)$$

Onde os coeficientes a_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \quad (2.2)$$

Sendo C um contorno fechado totalmente contido em $r < |z - z_0| < R$ e envolvendo z_0 uma vez no sentido positivo. A série em (2.1) é chamada de série de Laurent.

Exemplo 2.1. Obtenha a série de Laurent para a função $f(z) = e^{(-z)}/z^2$, no domínio $0 < |z| < \infty$

Solução. Sabemos que,

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{e^{-z}}{z^2} &= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} = \frac{1}{z^2} \left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} - \dots \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{e^{-z}}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{n-2}}{n!}$$

$$\frac{e^{-z}}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{(n+2)!}$$

Exemplo 2.2. Obtenha a série de Laurent para a função $f(z) = 1/z(1+z^2)$ centrada em $z_0 = 0$.

Solução.

$$\frac{1}{z(1+z^2)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(1+z^2)}$$

$$\frac{1}{(1+z^2)} = \frac{1}{1-(-z^2)}$$

Dado que $|-z^2| = |z|^2 < 1$ se $|z| < 1$, então podemos utilizar a série geométrica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (z)^n$$

Temos,

$$\frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n-1}$$

Expandindo a nova série encontrada, temos

$$= \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \dots = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{2n+1}, 0 < |z| < 1$$

2.2 Resíduos

Seja z_0 uma singularidade isolada de uma função f . Existe uma vizinhança na qual f é analítica, exceto no próprio ponto z_0 , $0 < |z - z_0| < r$. Então, nesta região, a função pode ser representada pela série de Laurent.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

Onde os coeficientes a_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \quad (2.3)$$

Sendo C um contorno fechado totalmente contido em $0 < |z - z_0| < r$ e envolvendo z_0 uma vez no sentido positivo.

Na fórmula (2.3) para os coeficientes da série de Laurent, substituindo a variável complexa ξ pelo símbolo usual z , vemos que, se tomarmos $n = -1$, temos que

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz \rightarrow \oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1} \quad (2.4)$$

Onde o coeficiente a_{-1} acima é chamado de resíduo de f no ponto z_0 , e escrevemos $a_{-1} = \text{Res}\{f(z), z_0\}$. Por sua vez z_0 é chamado de pólo de $f(z)$. O que acabamos de encontrar será importante no teorema que veremos a seguir.

2.3 O Teorema do Resíduo

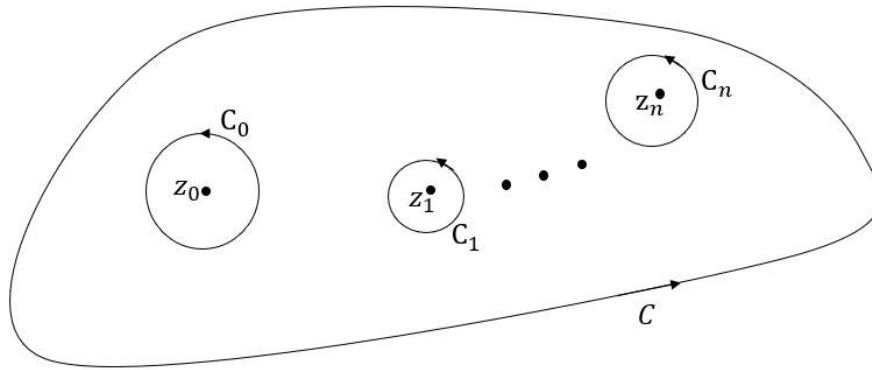
No que se segue apresentamos o **Teorema do Resíduo**. O teorema do resíduo nos diz que em dadas circunstâncias, podemos calcular integrais complexas $\int_C f(z) dz$ somando os resíduos em singularidades isoladas de f no interior do contorno fechado C e multiplicando por $2\pi i$. Veremos nas próximas seções aplicações desse teorema. Por ora, precisamos demonstrá-lo.

Teorema 2.2. *Seja C um caminho fechado simples orientado positivamente. Se uma função f for analítica no interior de C exceto num número finito de pontos singulares z_0, z_1, \dots, z_n no interior de C . Então*

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\text{res}\{f(z), z_0\} + \text{res}\{f(z), z_1\} + \dots + \text{res}\{f(z), z_n\}]$$

Demonstração. Para demonstrar esse teorema, vamos considerar caminhos C_k fechados orientados positivamente. Os caminhos C_k são traçados em torno de cada ponto singular z_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), de forma que cada um dos caminhos C_k sejam interiores a C . Os caminhos C_k , juntamente com o caminho C , formam a fronteira de uma região fechada na qual f é analítica e cujo interior é um domínio multiplamente conexo.

Figura 1 — Região fechada multiplamente conexa com os caminhos C e C_k



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo Princípio da deformação de caminhos [5], temos

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_0} f(z) dz + \oint_{C_1} f(z) dz + \dots + \oint_{C_n} f(z) dz$$

Como f é analítica no interior de e sobre C_k , exceto no próprio z_k , então as hipóteses do **Teorema 2.1**, são satisfeitas, logo

$$\text{Res}\{f(z), z_k\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_k} f(z) dz$$

$$\oint_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}\{f(z), z_k\}$$

Então,

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}\{f(z), z_0\} + \text{Res}\{f(z), z_1\} + \dots + \text{Res}\{f(z), z_n\}]$$

No caso em que C é uma única singularidade em z_0 a fórmula se reduz a

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}\{f(z), z_0\}] \quad (2.5)$$

Que é equivalente a expressão (2.4).

2.4 Resíduos em Pólo Simples

Vamos considerar que $a_n = 0$ para qualquer $n \leq -2$ para $f(z)$. Nesse caso, dizemos que a função $f(z)$ tem pólo simples. Assim, a série de Laurent na Eq. (2.1) fica

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + g(z), \quad (2.6)$$

No qual

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

Como queremos isolar a_{-1} na Eq. (1.6) Então multiplicamos toda essa equação por $(z-z_0)$. Em seguida, fazemos o limite $z \rightarrow z_0$. Dessa forma, encontramos o resíduo simples de $f(z)$ dado por

$$a_{-1} = \text{Res}\{f(z), z_0\} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z) \quad (2.7)$$

Notemos que o $\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)g(z) = 0$.

Exemplo 2.3: Considere a função

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 4} = \frac{e^{iz}}{(z+2i)(z-2i)}$$

Encontre os pólos e o resíduo,

Solução. Para encontrar o pólo, devemos igualar o denominador a zero, logo $z^2 + 4 = 0$, então $z = \pm 2i$. Para cada pólo, temos um resíduo associado.

Sendo assim,

$$\text{Res}\{f(z), 2i\} = \lim_{z \rightarrow 2i} (z-2i) \frac{e^{iz}}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{e^{-2}}{4i}$$

e

$$\text{Res}\{f(z), -2i\} = \lim_{z \rightarrow -2i} (z+2i) \frac{e^{iz}}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{e^2}{-4i}$$

Pelo teorema do resíduo, considerando uma curva C que engloba os dois pólos (no sentido anti-horário), então

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z^2 + 4} dz = 2\pi i \left(\frac{e^{-2}}{4i} - \frac{e^2}{4i} \right)$$

Note que a integral total é a soma de todas as contribuições de todos os resíduos.

Note que qualquer função do tipo

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} \quad (2.8)$$

Com $g(z)$ analítica (sem pólo) e $n = 1$ tem pólo e resíduo simples.

Existem fórmulas alternativas para o cálculo do pólo e resíduos simples já que nem sempre será fácil resolver o limite em (2.7) se f não for uma função racional. Em particular, suponhamos que f possa ser escrita como um quociente $f(z) = g(z)/h(z)$, sendo g e h funções analíticas em $z = z_0$. Se $g(z_0) \neq 0$ e se a função h tiver um zero de ordem 1 em z_0 , f terá um pólo simples em $z = z_0$ e

$$\text{Res}\{f(z), z_0\} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \quad (2.9)$$

Este resultado nos diz que podemos resolver problemas envolvendo pólo e resíduos simples apenas derivando o denominador dado as condições impostas.

2.5 Resíduo em Pólo Composto

Vamos assumir um pólo de ordem m , isso significa que a série de Laurent de $f(z)$ é

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + g(z) \quad (2.10)$$

É possível mostrar que

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

Primeiramente expandimos a equação (2.10)

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots, a_{-m} \neq 0$$

Multiplicando toda a igualdade por $(z - z_0)^m$, temos

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + a_1(z - z_0)^{m+1} + \dots$$

Derivando $(m - 1)$, obtemos

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] = a_{-1}(m - 1)! + m! a_0(z - z_0) + \dots$$

Ao passarmos o limite quando $z \rightarrow z_0$, encontramos a seguinte fórmula

$$a_{-1} = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

Note que qualquer função do tipo

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

Com $g(z)$ analítica (sem pólo) e $n \geq 2$ inteiro tem pólo e resíduo composto. Na física é mais comum o caso de resíduo simples.

3 TEOREMA DO RESÍDUO APLICADO AO CÁLCULO DE INTEGRAIS IMPRÓPRIAS.

Veremos agora como o teorema do resíduo pode ser utilizado para calcular certos tipos de integrais de funções reais. Mostraremos três casos que ilustram alguns métodos convenientes para essas integrais.

3.1 Integrais Impróprias de Funções Racionais

Consideremos integrais reais do tipo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

Onde p e q são polinômios e o grau de q é maior do que o grau de p , por no mínimo duas unidades de diferença, e q não possui zeros reais.

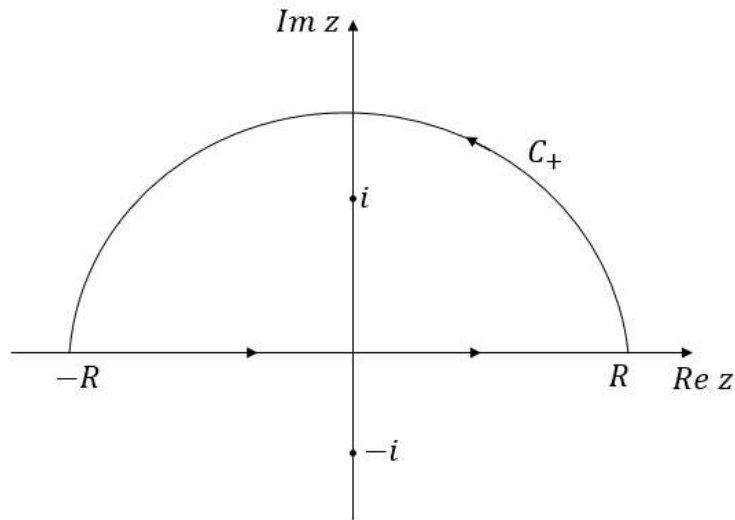
Exemplo 3.1. Seja calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \pi$$

O primeiro passo é fazer uma extensão analítica do plano real para o plano complexo. Esquemáticamente, podemos escrever $x \rightarrow z$, ou seja, saímos da variável x real para a variável z complexa. Isso nos permite escrever a função analítica $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ em um contorno C (Figura 2), constituído do intervalo $[-R, +R]$ no eixo real, seguido pelo semicírculo C_+ , localizado no semiplano onde $Im z > 0$ de raio R , suficientemente grande para que todos os pólos do denominador se encontrem dentro do semicírculo de orientação positiva.

Igualando o denominador de $f(z)$ a zero, temos $z^2 + 1 = 0$, logo os pólos simples estão em $z = \pm i$ (no eixo imaginário de z). Dessa forma, sabemos que de acordo com o teorema do resíduo, temos

Figura 2 — Contorno $C = [-R, R] \cup C_+$ com os pólos i e $-i$



Fonte: Elaborado pelo autor

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$$

Logo,

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-R}^{+R} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{C_+} \frac{1}{1+z^2} dz = 2\pi i a_{-1}.$$

Sendo que C_+ é um semicírculo de raio R no plano superior de z (onde $Im z > 0$) e $z = Re^{i\theta}$.

Dessa forma,

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-R}^{+R} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^\pi \frac{Re^{i\theta} i d\theta}{1+R^2 e^{2i\theta}} = 2\pi i a_{-1}$$

Agora, calculamos o limite $R \rightarrow \infty$ da equação acima. Note que a integral na curva C_+ vai a zero, pois R^2 vai ao infinito mais rápido do que R , nos levando então ao fato de que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 2\pi i a_{-1}$$

Mas note que a_{-1} é o resíduo $z = i$ (o único que está contornado por C). Sendo assim,

$$a_{-1} = \text{Res}\{f(z), i\} = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{1}{(z - i)(z + i)} = \frac{1}{2i}$$

Com isso, concluímos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$$

De acordo com Ávila (2008), o procedimento que descrevemos acima, que envolve adicionar o caminho de integração C_+ ao intervalo $[-R, R]$, é comumente conhecido como dobrar o caminho de integração. Basicamente, o que fizemos foi dobrar o caminho de integração $[-R, R]$ ao longo do semicírculo superior, incluindo também o contorno C_+ .

Exemplo 3.2. Calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

Solução. A integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

Tomemos,

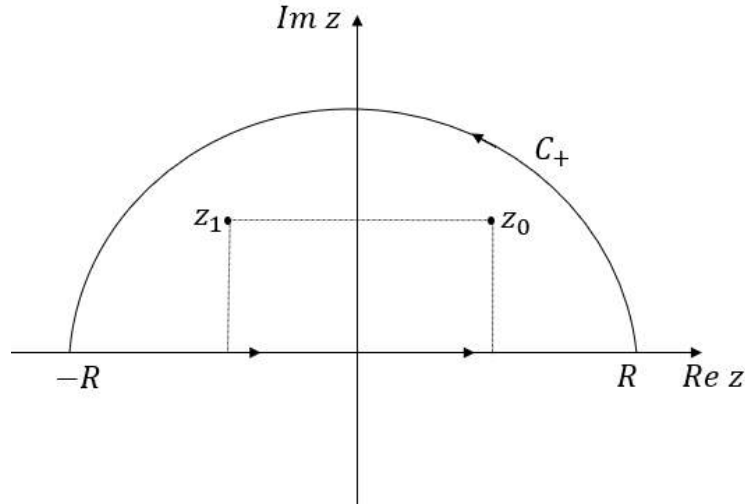
$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$$

Onde os pólos simples são dados por $z_k = e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4})}$ com $k = 0, 1, 2, 3$. Pelo teorema do resíduo, temos

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-R}^{+R} \frac{x^2}{1+x^4} dx + \int_{C_+} \frac{z^2}{1+z^4} dz = 2\pi i \sum_j [\text{Res}\{f(z), (z_j)\}]$$

No qual C_+ é um semicírculo de raio $R > 1$ no semiplano superior de z .

Figura 3 — Contorno $C = [-R, R] \cup C_+$ com os pólos z_0 e z_1



Fonte: Elaborado pelo autor

Logo,

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-R}^{+R} \frac{x^2}{1+x^4} dx + \int_0^\pi \frac{R^3 e^{3i\theta} id\theta}{1+R^4 e^{4i\theta}} = 2\pi i \sum_j [\text{Res}\{f(z), (z_j)\}]$$

Passando o limite quando $R \rightarrow \infty$, a integral em C_+ vai a zero, e obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i \sum_j [\text{Res}\{f(z), (z_j)\}]$$

Note que apenas os pontos singulares isolados presentes no interior do semiplano superior C_+

são os pólos simples $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Usando que $\text{Res}\{f(z), z_0\} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$ da equação (2.9), temos

$$\text{Res}\{f(z), z_0\} = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0} = \frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$\text{Res}\{f(z), z_1\} = \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4z_1} = \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

Que nos leva a,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i [\text{Res}\{f(z), (z_0)\} + \text{Res}\{f(z), (z_1)\}]$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi i \left[\frac{1}{4} \left(e^{-\frac{i\pi}{4}} + e^{-\frac{i3\pi}{4}} \right) \right] \\
&= \frac{\pi i}{2} \left(e^{-\frac{i3\pi}{4}} + e^{-\frac{i\pi}{4}} \right) \\
&= \frac{\pi i}{2} \left(e^{-\frac{i3\pi}{4}} + e^{-\frac{i\pi}{4}} \cdot e^{i\pi} \cdot e^{-i\pi} \right) \\
&= \frac{\pi i}{2} \left(e^{-\frac{i3\pi}{4}} - e^{\frac{i3\pi}{4}} \right) \\
&= \pi \left(\frac{e^{\frac{i3\pi}{4}} - e^{-\frac{i3\pi}{4}}}{2i} \right)
\end{aligned}$$

Já que $\operatorname{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ pela fórmula de Euler, concluímos que

$$= \pi \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

3.2 Integrais Impróprias Envolvendo Funções Trigonômétricas

O próximo caso de integral que pode ser resolvida por meio de integrais curvilíneas e do teorema do resíduo, necessita antes de um importante resultado, o **Lema de Jordan**, muito útil para resolução do tipo de integral que trataremos agora.

Lema 3.1 (Lema de Jordan). Seja C_+ o semicírculo $z = Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), situado no semiplano onde $\operatorname{Im} z > 0$ e a e R constantes reais positivas. Suponhamos que f seja uma função analítica em C_+ e no interior de C_+ exceto num número finito de singularidades isoladas, e que $|f(z)| \leq M_R$ tal que, qualquer que seja o ponto z de C_+ e $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$. Então

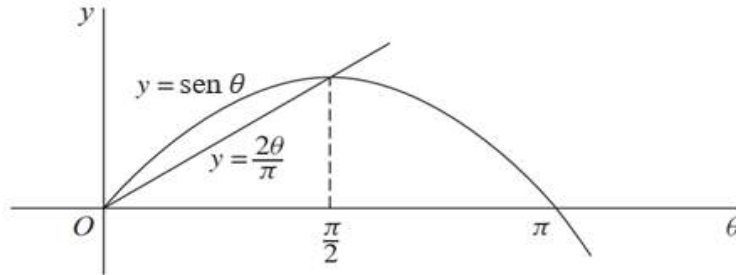
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_+} e^{iaz} f(z) dz = 0 \quad (3.1)$$

Demonstração: A prova é baseada na desigualdade de Jordan [5, 6, 11]

$$\int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta < \frac{\pi}{R} \quad (R > 0) \quad (3.2)$$

Para verificar isto, observamos primeiramente o gráfico das funções $y = \text{sen } \theta$ e $y = \frac{2\theta}{\pi}$, e que $\text{sen } \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$, quando $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Figura 4 — Gráficos de $y = \text{sen } \theta$ e $y = \frac{2\theta}{\pi}$



Fonte: BROWN, J. W.; CHURCHILL, R.V. [2015].

Como $R > 0$, se multiplicarmos a desigualdade $\text{sen } \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$, por $-R$, teremos

$$-R \text{sen } \theta \leq -\frac{2R\theta}{\pi}$$

$$e^{-R \text{sen } \theta} \leq e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}, \text{ quando } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Portanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \text{sen } \theta} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} d\theta \quad (3.3)$$

Resolvendo a integral à direita em (3.3), temos

$$-\frac{\pi}{2R} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = -\frac{\pi}{2R} (e^{-R} - 1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} d\theta = \frac{\pi}{2R} [1 - e^{-R}] < \frac{\pi}{2R} \quad (R > 0)$$

Retornando à desigualdade

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \text{sen } \theta} d\theta \leq \frac{\pi}{2R} \quad (3.4)$$

Entretanto, isso é uma outra forma da desigualdade em (3.2). Notemos que o gráfico de $\text{sen } \theta$ é simétrico em relação a linha vertical $\theta = \frac{\pi}{2}$ no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, logo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\text{sen}\theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-R\text{sen}\theta} d\theta$$

Então,

$$\int_0^{\pi} e^{-R\text{sen}\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\text{sen}\theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-R\text{sen}\theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\text{sen}\theta} d\theta$$

Ou seja, por essa simetria a integral no intervalo $[0, \pi]$ é igual a duas vezes a integral no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Então pela estimativa em (3.4) temos,

$$\int_0^{\pi} e^{-R\text{sen}\theta} d\theta \leq \frac{\pi}{R}$$

Continuando a demonstração do lema, temos que $z = Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), é uma parametrização para o semicírculo C_+ . Com isso,

$$\int_{C_+} e^{iaz} f(z) dz = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) e^{ia(Re^{i\theta})} Rie^{i\theta} d\theta$$

Sabemos por hipótese que $|f(z)| = |f(Re^{i\theta})| \leq M_R$ e que,

$$e^{ia(Re^{i\theta})} = e^{iaR(\cos\theta + i\text{sen}\theta)} = e^{-aR\text{sen}\theta + iaR\cos\theta}$$

$$\left| e^{ia(Re^{i\theta})} \right| = e^{-aR\text{sen}\theta}$$

Então,

$$\left| \int_{C_+} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq \int_0^{\pi} M_R e^{-aR\text{sen}\theta} R d\theta = M_R \cdot R \int_0^{\pi} e^{-aR\text{sen}\theta} d\theta \leq \frac{M_R \pi}{a}$$

Já que por hipótese $M_R \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$, percebemos que $\left| \int_{C_+} e^{iaz} f(z) dz \right| \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$.

O que implica que,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz = 0$$

Exemplo 3.3. Calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{x^2 + 1} dx$$

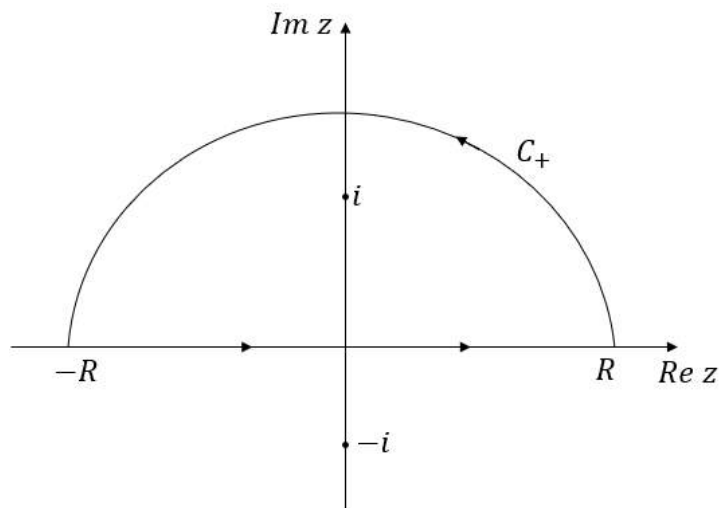
Como $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{Im} e^{ix}$, podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{x^2 + 1} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx$$

O integrando $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+1}$ tem pólos simples nos pontos singulares isolados $z_0 = i$ e $z_1 = -i$.

Considerando a integral de $-R$ a R seguida da integral sobre C_+ no semiplano superior, obtemos pelo teorema dos resíduos

Figura 5 — Contorno $C = [-R, R] \cup C_+$ com o pólo i



Fonte: Elaborado pelo autor

$$\int_{-R}^{+R} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx + \int_{C_+} \frac{z e^{iz}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i [\operatorname{Res}\{f(z), (z_0)\}]$$

Temos,

$$\operatorname{Res}\{f(z), z_0\} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} = \frac{ie^{i^2}}{2i} = \frac{e^{-1}}{2}$$

Segue que,

$$\int_{-R}^{+R} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx + \int_{C_+} \frac{z e^{iz}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2}$$

Passando o limite quando $R \rightarrow \infty$ na expressão e fazendo uso do lema de Jordan, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{x^2 + 1} dx = \frac{i\pi}{e}$$

Entretanto, queremos

$$\operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx$$

Ou seja, a parte imaginária da integral, com isso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e}$$

Exemplo 3.4. Mostre que

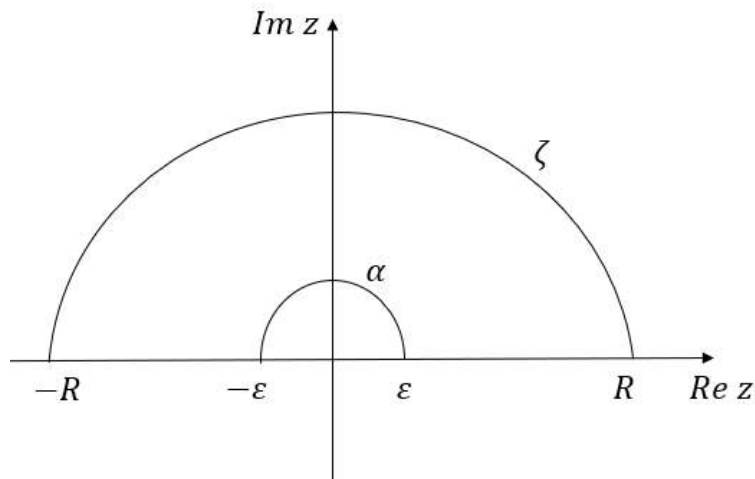
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Solução. Definimos a função $f(z)$, tal que

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

Precisamos escolher um contorno conveniente, observe que $z = 0$ é como um pólo, o chamamos de singularidade removível, mas para fins de facilitar o entendimento vamos considerá-lo como um pólo para contorná-lo. O semicírculo α tem o papel de evitar que o caminho passe pela singularidade do quociente e^{iz}/z .

Figura 6 — Contorno $C = [-R, R] \cup \zeta \cup \alpha \cup [-\varepsilon, \varepsilon]$



Fonte: Elaborado pelo autor

Dados $\varepsilon, R > 0$ com $\varepsilon < R$, consideramos o contorno (Figura 6).

$$\int f(z)dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\alpha}^{\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\zeta}^{\alpha} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \right]$$

Podemos reescrever e tomar $z = \varepsilon e^{i\theta}$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\pi}^0 \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta + \int_{\zeta}^{\alpha} \frac{e^{iz}}{z} dz \right]$$

Fazendo todas as manipulações convenientes e multiplicando a primeira integral por $\frac{2i}{2i}$, temos,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[2i \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} dx - \int_0^{\pi} i \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{1} d\theta + \int_{\zeta}^{\alpha} \frac{e^{iz}}{z} dz \right]$$

Pela fórmula de Euler a primeira integral fica,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\text{sen}x}{x} dx - i \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta + \int_{\zeta}^{\alpha} \frac{e^{iz}}{z} dz \right]$$

Tomando os limites vemos que a integral na curva ζ pelo Lema de Jordan vai a zero quando tomamos o limite em que $R \rightarrow \infty$, como era de se esperar.

Sendo assim,

$$2i \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx - i\pi = 0 \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

3.3 Integrais Definidas de Funções Trigonômicas

O último caso que iremos tratar de integrais reais que podem ser calculadas por resíduos, são integrais da forma

$$\int_0^{2\pi} F(\text{sen}\theta, \text{cos}\theta) d\theta \quad (3.5)$$

Onde F é uma função racional de polinômios $\operatorname{sen}\theta$ e $\operatorname{cos}\theta$. O fato de θ variar entre 0 a 2π nos leva a considerar θ como um argumento de um ponto z de um círculo unitário $z = e^{i\theta}$ orientado positivamente e centrado na origem. Podemos escrever

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad (3.6)$$

$$\operatorname{cos}\theta = \frac{z + z^{-1}}{2} \quad (3.7)$$

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = izd\theta \quad (3.8)$$

E a integral (3.3) passa a ser uma integral complexa de uma função racional de z ao longo do círculo unitário e que pode ser calculada pelo teorema dos resíduos, desde que conheçamos os zeros do polinômio no denominador.

Exemplo 3.5. Calcule a integral definida

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \operatorname{cos}\theta}$$

Solução. Fazendo $\operatorname{cos}\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$ e $d\theta = \frac{dz}{iz}$ temos

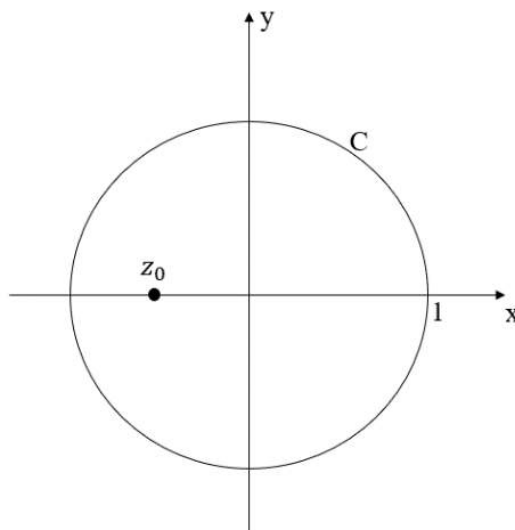
$$\begin{aligned} I &= \int_C \frac{dz}{iz(2 + \frac{1}{2}(z + z^{-1}))} = \\ &= \int_C \frac{dz}{i(2z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2})} \\ &= \frac{2}{i} \int_C \frac{dz}{(z^2 + 4z + 1)} \end{aligned}$$

O integrando $f(z) = 1/z^2 + 4z + 1$ tem pólos simples nos pontos $z_0 = -2 + \sqrt{3}$ e $z_1 = -2 - \sqrt{3}$

$$\frac{2}{i} \int_C \frac{dz}{(z + 2 - \sqrt{3})(z + 2 + \sqrt{3})}$$

Como C é o círculo $|z| = 1$, o único pólo dentro do contorno C é $z_0 = -2 + \sqrt{3}$. Pelo teorema do resíduo

Figura 7 — Contorno $|z| = 1$



Fonte: Elaborado pelo autor

Daí,

$$\text{res}\{f(z), +2 - \sqrt{3}\} = \lim_{z \rightarrow +2 - \sqrt{3}} (z + 2 - \sqrt{3}) \frac{1}{(z + 2 - \sqrt{3})(z + 2 + \sqrt{3})}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$I = \frac{2}{i} 2\pi i \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Exemplo 3.6. Mostre que

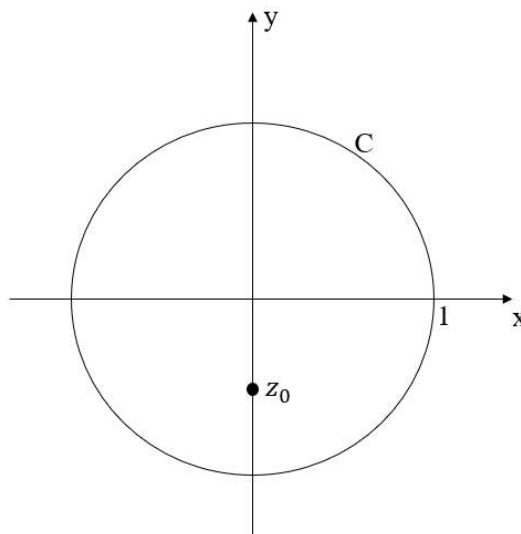
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \operatorname{sen}\theta} = \frac{2\pi}{3}$$

Solução. Fazendo $\operatorname{sen} \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$ e $d\theta = \frac{dz}{iz}$ temos

$$\begin{aligned} I &= \int_C \frac{dz}{iz(5 + \frac{2}{i}(z - z^{-1}))} \\ &= \int_C \frac{dz}{2z^2 + 5iz - 2} \\ &= \int_C \frac{dz}{2(z + 2i)(z + \frac{i}{2})} \end{aligned}$$

O denominador tem pólos em $z_0 = -2i, z_1 = -\frac{i}{2}$, notemos que o único ponto singular interior ao círculo unitário C é o pólo simples $z_0 = -\frac{i}{2}$

Figura 8 — Contorno $|z| = 1$



Fonte: Elaborado pelo autor

Encontrando o resíduo, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left\{f(z), -\frac{i}{2}\right\} &= \lim_{z \rightarrow -\frac{i}{2}} \left(z + \frac{i}{2}\right) \frac{1}{2(z + 2i)\left(z + \frac{i}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{3i} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \cdot \frac{1}{3i} = \frac{2\pi}{3} \\ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \operatorname{sen}\theta} &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Com esses exemplos, através do teorema do resíduo, apresentamos algumas técnicas para resolver integrais impróprias que além das aplicações na matemática, algumas dessas integrais, principalmente aquelas envolvendo senos e cossenos, tem grande importância para Física e Engenharia.

4 FUNÇÃO DE GREEN

Nesta seção apresentaremos as funções de Green e suas aplicações na resolução de equações diferenciais. Antes iremos apresentar a função delta de Dirac e a Transformada de Fourier, pois estão diretamente relacionadas ao estudo das funções de Green.

Vale ressaltar que as funções de Green tratadas no trabalho são um caso particular em que utilizamos a transformada de Fourier para encontrar as funções.

4.1 Função Delta de Dirac

A função delta de Dirac, também conhecida como função impulso não é uma função no sentido usual, mas uma distribuição, porém a priori será mantida a ideia de função. A delta é rigorosamente estudada na Teoria das Distribuições que está fora do escopo deste trabalho. As propriedades da função delta de Dirac são de grande importância na representação de impulsos instantâneos em sistemas físicos. Por exemplo, modelar um impulso de força aplicado em sistema mecânico.

As definições mostradas nesta subseção foram baseadas nas referências Maia (2000) e Nascimento (2022).

A função delta de Dirac é definida por

$$\delta(t - a) = \begin{cases} 0, & t \neq a \\ \infty, & t = a \end{cases} \quad (4.1)$$

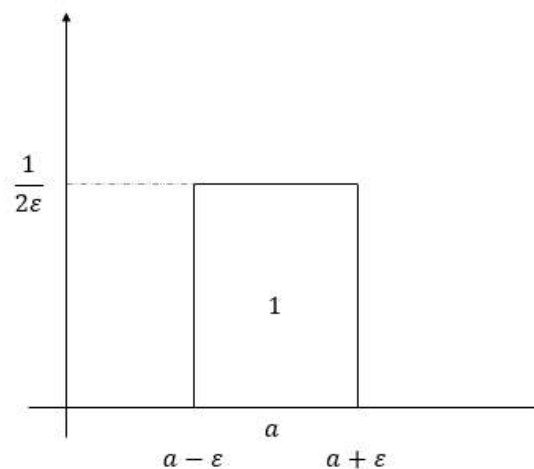
Ou seja, $\delta(t - a)$ é zero, exceto em $t = a$, onde ela é infinita.

Para observarmos melhor o que está acontecendo, consideremos a função

$$f_\varepsilon(t - a) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & a - \varepsilon \leq t < a + \varepsilon \\ 0, & \forall t \neq a \end{cases} \quad (4.2)$$

A função tem o gráfico,

Figura 9 — Gráfico da função f_ε



Fonte: Elaborado pelo autor

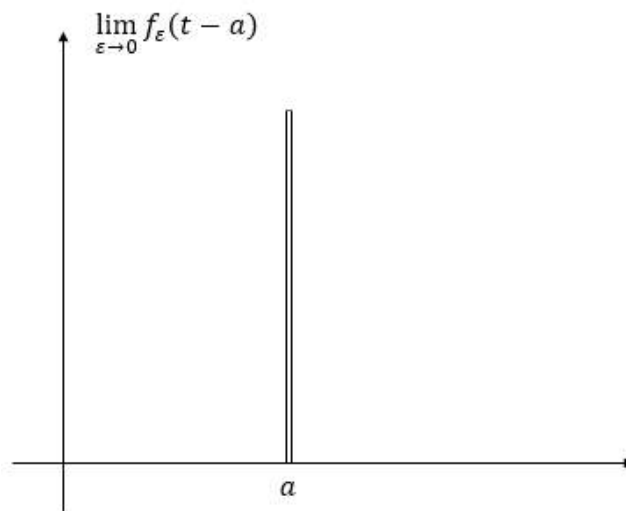
Se utilizarmos a interpretação da integral como a área sob o gráfico da função, vemos que

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dt = 1$$

a função tem área igual a unidade, agora se tomarmos o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a base do retângulo da função f_ε tende para a e a altura cresce infinitamente, de maneira que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t - a) = \begin{cases} 0, & t \neq a \\ \infty, & t = a \end{cases}$$

Figura 10 — Gráfico da função f_ε com $\varepsilon \rightarrow 0$



Fonte: Elaborado pelo autor

que é a própria definição da função delta de Dirac dada em (3.1), ou seja

$$\delta(t - a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t - a) \quad (4.3)$$

a delta então é tratada como um caso limite da função f_ε . Disso, podemos definir o seguinte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dt \quad (4.4)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} dt = \frac{1}{2\varepsilon} 2\varepsilon = 1$$

Ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) dt = 1 \quad (4.5)$$

Podemos pensar na delta como um retângulo infinitamente estreito e infinitamente alto, com área igual a unidade.

Uma propriedade importante da delta é a chamada propriedade de filtragem, onde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a)f(t)dt = f(a) \quad (4.6)$$

Para mostrar isso, usemos a igualdade (3.4) e suponhamos que F seja primitiva de f . Então, dado $\varepsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a)f(t)dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(t)dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} [F(a + \varepsilon) - F(a - \varepsilon)] \\ &= F'(a) = f(a) \end{aligned}$$

Essa propriedade nos diz que o valor da integral da delta multiplicado pela f resulta na própria função avaliada no ponto de impulso.

4.2 Transformada de Fourier

Nesta subseção veremos brevemente a técnica da transformada de Fourier e suas propriedades. A transformada de Fourier é usada em muitos campos da ciência, como física, acústica, oceanologia, óptica e processamento de sinais. As aplicações da transformada de Fourier são tão amplas que caberia fazer um trabalho somente sobre elas.

As definições e propriedades mostradas nesta subseção foram baseadas na referência Bassalo e Cattani (2010)

Definição 4.1. Seja $f(t)$ uma função definida no intervalo $(-\infty, \infty)$ e absolutamente integrável ou seja.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < \infty$$

A nova função definida por

$$F\{f(t)\} \equiv F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4.7)$$

é chamada de transformada de Fourier da função $f(t)$. Assim, a transformada de Fourier é uma transformação integral de uma função no domínio do tempo para a frequência.

Outra transformação que associa uma função absolutamente integrável a uma nova função é dada por

$$\bar{F}\{F(\omega)\} \equiv f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t} dt \quad (4.8)$$

É chamada de transformada inversa de Fourier, antitransformada ou conjugada, neste caso a transformação integral vai do domínio da frequência para um domínio do tempo.

É necessário observar que diferentes fontes podem fornecer definições que diferem da escolha dada do coeficiente na frente da integral, bem como o sinal (-) no expoente. Todas as propriedades neste caso serão semelhantes, embora a aparência de algumas fórmulas possa mudar.

Como por exemplo:

Transformada de Fourier

$$F\{f(t)\} \equiv F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \quad (4.9)$$

Transformada inversa de Fourier

$$\bar{F}\{F(\omega)\} \equiv f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} dt \quad (4.10)$$

Neste trabalho intercalaremos entre as definições apresentadas.

4.2.1 Propriedades da Transformada de Fourier

A ampla gama de aplicações da transformada de Fourier baseia-se em várias propriedades úteis, nesta subseção mostraremos algumas das principais propriedades utilizadas.

Propriedade 4.2.1. Linearidade:

Considerando a seguinte função

$$f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$$

Calculamos a transformada de Fourier

$$\begin{aligned} F\{f(t)\} &= F\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dt [a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] \\ &= a_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{i\omega t} dt + a_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{i\omega t} dt \end{aligned}$$

Logo,

$$F[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F\{f_1(t)\} + a_2 F\{f_2(t)\}$$

Ou seja, a transformada de Fourier é linear.

Propriedade 4.2.2. Mudança de Escala:

Se a é real e diferente de zero, então

$$F\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Pela definição de transformada de Fourier

$$F\{f(at)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{i\omega t} dt$$

Façamos a seguinte mudança de variável: $at = \tau$

$$F\{f(at)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{i\omega \frac{\tau}{a}} d\frac{\tau}{a}$$

Fazendo $\tau = t$

$$F\{f(at)\} = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{i\frac{\omega}{a}t} dt$$

Se $a > 0$, então

$$F\{f(at)\} = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{i\frac{\omega}{a}t} dt = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Se $a < 0$, então

$$F\{f(at)\} = -\frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{i\frac{\omega}{a}t} dt = -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Essa propriedade é também chamada de Transformada de Fourier de uma dilatação.

Propriedade 4.2.3. Translação:

A propriedade que veremos agora também é chamada de deslocamento do domínio do tempo.

Se $F\{f(t)\} = F(\omega)$, então:

$$F\{f(t \pm t_0)\} = e^{\pm i\omega t_0} F(\omega)$$

Se t_0 é positivo então a função do tempo é retardada e se t_0 é negativo a função do tempo é adiantada.

Pela definição (4.7) de transformada de Fourier, podemos escrever

$$F\{f(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-i\omega t} dt$$

Fazendo $t - t_0 = \tau$, temos:

$$\begin{aligned} &= F\{f(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega(\tau+t_0)} d\tau \\ &= F\{f(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} e^{-i\omega t_0} d\tau \\ &= F\{f(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

Fazendo $\tau = t$, temos:

$$F\{f(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Portanto,

$$F\{f(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0} F(\omega)$$

O mesmo vale para

$$F\{f(t + t_0)\} = e^{i\omega t_0} F(\omega)$$

Logo,

$$F\{f(t \pm t_0)\} = e^{\pm i\omega t_0} F(\omega)$$

Propriedade 4.2.4. Translação no domínio da frequência:

$$F\{f(t)e^{\pm i\omega_0 t}\} = F(\omega \mp \omega_0)$$

Isto é, multiplicar a função no domínio do tempo por uma exponencial complexa leva a uma mudança no argumento de sua transformada de Fourier.

Pela definição de transformada de Fourier

$$F\{f(t)e^{-i\omega t_0}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i(\omega+\omega_0)t} dt$$

$$F\{f(t)e^{-i\omega t_0}\} = F(\omega + \omega_0)$$

Analogamente

$$F\{f(t)e^{i\omega t_0}\} = F(\omega - \omega_0)$$

E de fato,

$$F\{f(t)e^{\pm i\omega_0 t}\} = F(\omega \mp \omega_0)$$

Propriedade 4.2.5. Derivação:

Seja $f(t)$ contínua e absolutamente integrável em \mathbb{R} a transformada de Fourier da primeira derivada de $f(t)$ assume a forma:

$$F\{f'(t)\} = (i\omega)F(\omega)$$

Pela definição de Transformada de Fourier podemos escrever:

$$F\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-i\omega t} dt$$

Integramos por partes, na qual

$$u = e^{-i\omega t} \Rightarrow du = -i\omega e^{-i\omega t} dt$$

$$dv = \left[\frac{df(t)}{dt} \right] dt \Rightarrow v = f(t)$$

Substituindo na primeira igualdade temos o seguinte:

$$F\{f'(t)\} = [f(t)e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

Como $f(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \pm\infty$, o primeiro termo após a igualdade vai a zero. Então:

$$F\{f'(t)\} = i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = (i\omega)F(\omega)$$

A relação encontrada pode ser generalizada para toda as derivadas de $f(t)$. Assim, para a derivada n de $f(t)$ é válida o seguinte:

$$F\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = i\omega^n F(\omega)$$

Propriedade 4.2.6. Transformada de Fourier de uma convolução:

Definição 4.2.1. A convolução $(f * g)(t)$ entre duas funções $f(t)$ e $g(t)$ absolutamente integráveis, é a função definida por,

$$f(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx$$

Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções absolutamente integráveis. Se $F\{f(t)\} = F(\omega)$ e $G\{f(t)\} = G(\omega)$, então:

$$F\{(f * g)(t)\} = F(\omega)G(\omega)$$

Pela definição de transformada de Fourier, podemos escrever

$$F\{(f * g)(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx \right] e^{-i\omega t} dt$$

Podemos mudar a ordem de integração, assim teremos

$$F\{(f * g)(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-x)e^{-i\omega t} dt \right] dx$$

Usando a propriedade 3 da Transformada de Fourier, temos:

$$F\{(f * g)(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) [e^{-i\omega t} G(\omega)] dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega t} dx G(\omega)$$

Logo,

$$F\{(f * g)(t)\} = F(\omega)G(\omega)$$

4.2.2 Uma Representação para a Delta

Podemos encontrar uma representação para a função delta de Dirac via transformada de Fourier, tal representação nos será útil quando tratarmos da resolução de equações diferenciais.

Pela definição da Transformada de Fourier, temos

$$F\{\delta(t-a)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)e^{-i\omega t} dt$$

Pela propriedade de filtragem do delta, temos

$$F\{\delta(t-a)\} = e^{-i\omega a}$$

Usando a Transformada de Fourier inversa

$$\bar{F}F\{\delta(t-a)\} = \delta(t-a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-a)} dt \quad (4.11)$$

Que é a representação integral da delta de Dirac.

4.3 Método da Função de Green

No que segue apresentamos o método da função de Green. A função de Green é geralmente usada na resolução de equações diferenciais e amplamente aplicada em áreas da física como eletromagnetismo, mecânica quântica e teoria das ondas. A função de Green permite calcular a resposta de um sistema físico ao um estímulo externo, fornecendo informações como a distribuição de cargas e a propagação de ondas. Aqui iremos definir e enunciar dois teoremas referentes a função de Green.

Os teoremas a seguir podem ser encontrados nas referências Braga (2006) e Maia (2000).

Teorema 4.1. *A função de Green do operador D é a solução da equação diferencial parcial linear não-homogênea*

$$Df(x) = g(x) \quad (4.12)$$

Onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções definidas sobre um domínio aberto Ω de \mathbb{R}^n , pode ser resolvida com o auxílio de uma função $G(x, x')$ de dois pontos $x, x' \in \Omega$, ao substituirmos g por $\delta(x - x')$, então

$$D_x G(x, x') = \delta(x - x') \quad (4.13)$$

Onde D_x indica que D opera sobre a função de x ficando x' um ponto fixo. E qualquer solução particular de (3.12) se escreve,

$$f(x) = \int_{\Omega} G(x, x') g(x') dx' \quad (4.14)$$

Uma vez que,

$$\begin{aligned} Df(x) &= \int_{\Omega} DG(x, x') g(x') dx' \\ &= \int_{\Omega} \delta(x - x') g(x') dx' = g(x) \end{aligned}$$

Portanto, dizemos que $G(x, x')$ é uma possível função de Green para equação (4.12) ou para o operador D . Em outras palavras, a solução para (4.12) pode ser determinada pela integral na equação (4.14) e o problema se reduz a encontrar soluções para (4.13).

De acordo com Braga (2006) e Maia (2000) podemos interpretar (4.13) da seguinte maneira: Sabemos que os termos não homogêneos de uma equação diferencial podem ser interpretados como estímulos externos adicionais, estes estímulos podem ser forças muito grandes agindo em intervalos de tempo muito pequenos, como uma moeda parada que recebe petelecos, ou seja, uma força quase instantânea, que a põe em movimento. Quando substituímos a não homogeneidade pela função delta de Dirac, estes termos tornam-se pontuais (no ponto x'). Daí, dizemos que a função de Green de um problema representa a solução do mesmo, quando a fonte é substituída por uma fonte pontual.

Teorema 4.2. *Seja D um operador diferencial parcial com coeficientes constantes e consideramos a equação*

$$DG(x, x') = \delta(x - x')$$

Duas funções de Green da mesma são diferentes apenas por uma solução da parte homogênea $h(x, x')$ da equação. Portanto, uma função de Green de um problema de contorno pode ser decomposta em uma combinação

$$G(x, x') = G_1(x, x') + h(x, x')$$

de uma função de Green qualquer, que depende apenas das diferenças entre as variáveis x, x' (Logo, podemos tomar $x' = 0$) e uma solução da parte homogênea da equação.

$$Dh(x, x') = 0$$

Uma solução particular da equação

$$DG_1(x) = \delta(x)$$

Em todo o espaço \mathbb{R}^n pode ser obtida através da transformada de Fourier, que converte a equação diferencial em uma equação algébrica [4]

$$P(K)G_1(K) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}$$

Onde $G_1(K)$ é a transformada de Fourier n -dimensional de $G_1(x)$ e $P(K)$ é um polinômio nas variáveis K determinado pelo operador D .

$$G_1(K) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} G_1(x) dx = F\{G_1(x)\}$$

A transformada de Fourier da função $\delta(x)$ é

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} \delta(x) dx = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}$$

Se $P(K)$ não tiver zeros reais, a solução da equação é a seguinte

$$G_1(K) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{P(K)}$$

E a função de Green $G_1(x)$ será obtida pela transformação de Fourier inversa de $G_1(K)$

$$G_1(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iKx} G_1(K) dx \quad (4.15)$$

Mesmo que $P(K)$ tenha zeros reais, em certos casos pode ser dado um sentido a integral em (4.15) usando certas convenções.

O teorema acima é muito útil pois, como já mencionado ele converte a equação diferencial da função de Green em uma equação algébrica, ainda sim resolver a equação algébrica e a integral que surgirá dela não é uma tarefa simples. Na próxima subsecção veremos dois exemplos da aplicação desse método

4.4 Aplicação da Função de Green e Transformada de Fourier

Como primeiro exemplo de aplicação do método da função de Green utilizaremos o exemplo da equação diferencial do oscilador harmônico forçado.

Exemplo 4.1. Encontre a solução para a equação diferencial.

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = f(t) \quad (4.16)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m} = F(t) \quad (4.17)$$

Sabemos que a solução geral da equação acima é obtida da soma da solução homogênea com uma solução particular da equação não-homogênea.

Pelo **Teorema 4.1** a solução particular se escreve,

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t') f(t') dt' \quad (4.18)$$

Substituindo na equação (4.17)

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right] \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t') f(t') dt' &= F(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\ddot{G} + \omega_0^2 G) f(t') dt' = F(t) \end{aligned}$$

Chamando $\ddot{G} + \omega_0^2 G$ de $K(t, t')$, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(t, t') f(t') dt' = F(t)$$

Pela propriedade de filtragem da função delta de Dirac, $K(t, t') = \delta(t - t')$, então

$$\ddot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t - t') \quad (4.19)$$

Agora, iremos utilizar a transformada de Fourier em $G(t, t')$, de maneira que,

$$G(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK}{2\pi} e^{iK(t-t')} G(K)$$

Em que,

$$\frac{d^2}{dt^2} G(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK}{2\pi} e^{iK(t-t')} G(K) (iK)^2$$

Substituindo na equação (4.19), temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK}{2\pi} e^{iK(t-t')} G(K) [(iK)^2 + \omega_0^2] = \delta(t - t')$$

Note que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-t')} \frac{dK}{2\pi} = \delta(t - t')$$

é a representação da função Delta, o que nos leva a concluir que $G(K) [(iK)^2 + \omega_0^2] = 1$, logo

$$G(K) = \frac{-1}{K^2 - \omega_0^2}$$

Então,

$$G(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK}{2\pi} e^{iK(t-t')} \frac{-1}{K^2 - \omega_0^2} \quad (4.20)$$

Precisamos resolver a integral em (4.20), para isso vamos igualar o denominador a zero para encontrar os pólos do denominador, portanto, $K^2 - \omega_0^2 = 0$, ou seja, $K = \pm|\omega_0|$. Devemos agora adotar algum tipo de prescrição para o pólos, de maneira que possamos deslocar os pontos singulares para uma região do plano complexo. Existem três prescrições famosas [14]: Função de Green retardada, obtida de $K \rightarrow K - i\varepsilon$; Função de Green avançada, obtida de $K \rightarrow K + i\varepsilon$; Função de Green de Feynman, obtida de $K^2 \rightarrow K^2 + i\varepsilon$. Em todos esses casos temos $\varepsilon \rightarrow 0$.

Vamos adotar a Função de Green de Feynman para este caso, usando $K^2 \rightarrow K^2 + i\varepsilon$ e dobrar o caminho de integração fazendo $K \rightarrow z$

$$G(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2\pi} e^{iz(t-t')} \frac{-1}{z^2 - \omega_0^2 + i\varepsilon}$$

Igualando o denominador a zero, temos

$$z^2 - \omega_0^2 + i\varepsilon = 0$$

$$z^2 = \omega_0^2 - i\varepsilon$$

$$z = \pm(\omega_0^2 - i\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$$

Usando que $\left(1 - \frac{i\varepsilon}{\omega_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{i\varepsilon}{2\omega_0^2}$, temos que

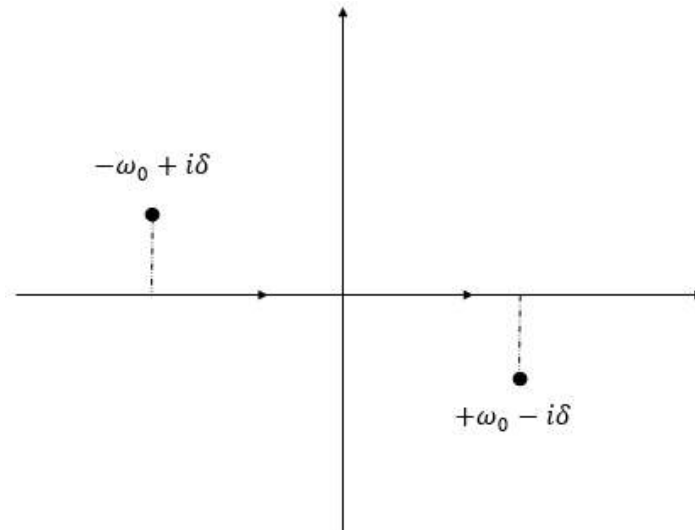
$$z = \pm|\omega_0|\left(1 - \frac{i\varepsilon}{2\omega_0^2}\right)$$

$$z = \pm|\omega_0|(1 - i\delta), \text{ com } \delta \rightarrow 0$$

Rearranjando os termos, temos

$$z = \pm|\omega_0| \mp i\delta \text{ (Prescrição de Feynman)}$$

Figura 11 — Localização dos pólos pela prescrição de Feynman



Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos decompor $G(t, t')$ em dois regimes:

(I) Para $t > t'$

(II) Para $t < t'$

$$e^{iz(t-t')} = e^{iz\Delta t} = e^{iR\Delta t e^{i\theta}}$$

sendo $z = Re^{i\theta}$

Calculando o módulo quadrático de $e^{iz\Delta t}$, temos

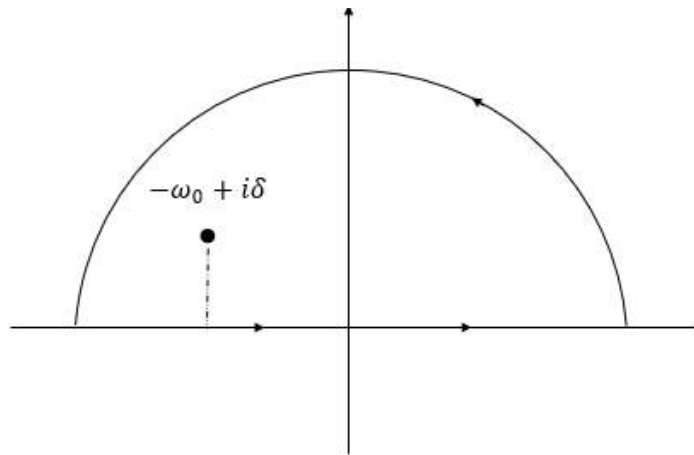
$$|e^{iz\Delta t}|^2 = e^{-2R\text{Im}z\Delta t}$$

Se $\Delta t > 0 \rightarrow \text{Im} z > 0$

Se $\Delta t < 0 \rightarrow \text{Im} z < 0$

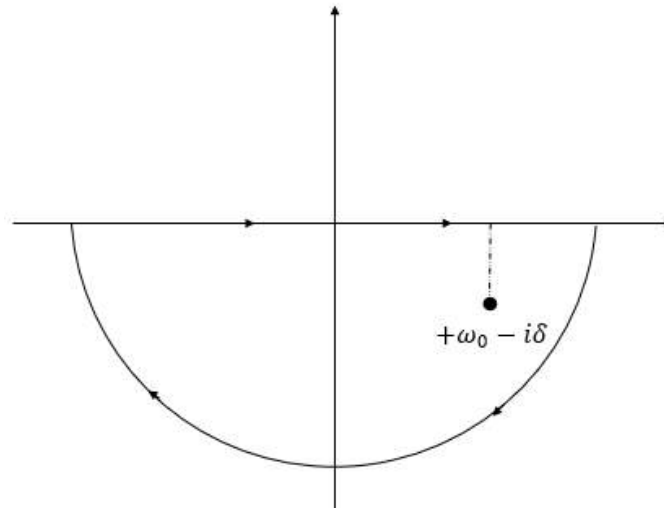
Isso significa que um dos pólos está na região $\text{Im} z > 0$, pois $\Delta t > 0$, e outro pólo se encontra na região $\text{Im} z < 0$, pois $\Delta t < 0$. Escolhemos um semiplano anti-horário (orientação positiva) e um horário (orientação negativa).

Figura 12 — Contorno de orientação positiva com o pólo $z_0 = -\omega_0 + i\delta$



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 13 — Contorno de orientação negativa com o pólo $z_0 = +\omega_0 - i\delta$



Fonte: Elaborado pelo autor

Pelo teorema dos resíduos, temos

$$\oint f(z) dz = \pm 2\pi i \text{Res}\{f(z), z_0\}$$

Onde o resíduo de $f(z)$ em z_0 é

$$\text{Res}\{f(z), z_0\} = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)$$

Para $\Delta t > 0$, temos

$$\text{Res}\{f(z), z_0\} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^{iz\Delta t}(z + z_0)}{(z - z_0)(z + z_0)} = \frac{e^{-i|\omega_0|\Delta t}}{-2|\omega_0|}$$

onde $z_0 = -|\omega_0| + i\delta$ com $\delta \rightarrow 0$

$$\oint f(z)dz = +2\pi i \frac{e^{-i|\omega_0|\Delta t}}{-2|\omega_0|} = -\frac{\pi i}{|\omega_0|} e^{-i|\omega_0|\Delta t}$$

Ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK}{2\pi} e^{iK(t-t')} \frac{-1}{K^2 - \omega_0^2 + i\varepsilon} = \frac{i}{2|\omega_0|} e^{-i|\omega_0|\Delta t}$$

Para $\Delta t < 0$, temos

$$\text{Res}\{f(z), z_0\} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^{iz\Delta t}(z - z_0)}{(z - z_0)(z + z_0)} = \frac{e^{i|\omega_0|\Delta t}}{2|\omega_0|}$$

onde $z_0 = +|\omega_0| - i\delta$ com $\delta \rightarrow 0$

Ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK}{2\pi} e^{iK(t-t')} \frac{-1}{K^2 - \omega_0^2 + i\varepsilon} = \frac{i}{2|\omega_0|} e^{i|\omega_0|\Delta t}$$

O que nos leva a,

$$G(t, t') = \theta(t - t')G_>(t, t') + \theta(t' - t)G_<(t, t')$$

Onde,

$$G(t, t') = \begin{cases} G_>(t, t'), & \text{se } \Delta t > 0 \\ G_<(t, t'), & \text{se } \Delta t < 0 \end{cases}$$

Logo,

$$G(t, t') = \theta(t - t') \frac{i}{2|\omega_0|} e^{-i|\omega_0|\Delta t} + \theta(t' - t) \frac{i}{2|\omega_0|} e^{i|\omega_0|\Delta t}$$

Que é a função de Green de Feynman para um oscilador harmônico clássico forçado.

Exemplo 4.2. Forma integral da equação de Schrödinger.

Vamos considerar a seguinte equação

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi \quad (4.21)$$

A equação (4.21) é a forma diferencial da equação de Schrödinger independente do tempo.

Vamos multiplicar a equação (4.21) por $(-\frac{2m}{\hbar^2})$, obtendo

$$\nabla^2 \psi - \frac{2m}{\hbar^2} V \psi = -\frac{2m}{\hbar^2} E \psi$$

Chamando $(-\frac{2m}{\hbar^2} V \psi)$ de Q e $(-\frac{2m}{\hbar^2} E)$ de k^2 , temos

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{r}) = Q(\vec{r}) \quad (4.22)$$

Essa notação tem a forma superficial da equação de Helmholtz; observe, entretanto, que o próprio termo não-homogêneo (Q) depende de ψ . Suponha que possamos encontrar uma função $G(\vec{r})$ que resolva a equação de Helmholtz com uma “fonte” função delta

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r}) = \delta^3(\vec{r}) \quad (4.23)$$

Sabemos pelo **Teorema 4.1** que podemos expressar a solução como uma integral contendo a função de Green, então a solução $\psi(\vec{r})$ é

$$\psi(\vec{r}) = \int G(\vec{r} - \vec{r}_0) Q(\vec{r}_0) d^3 \vec{r}_0 \quad (4.24)$$

A função de onda $\psi(\vec{r})$ definida na equação (4.24) satisfaz a equação de Helmholtz em (4.22), basta multiplicar o operador $(\nabla^2 + k^2)$ a $\psi(\vec{r})$, para verificar que $\psi(\vec{r})$ é solução.

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{r}) = \int (\nabla^2 + k^2)G(\vec{r} - \vec{r}_0) Q(\vec{r}_0) d^3 \vec{r}_0 \quad (4.25)$$

Note que o produto $(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r} - \vec{r}_0)$ é igual a função delta. Então, pelas propriedades da delta, a integral em (4.25) é bem simples,

$$\int \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) Q(\vec{r}_0) d^3 \vec{r}_0 = Q(\vec{r})$$

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{r}) = Q(\vec{r})$$

Precisamos ainda encontrar a função de Green da equação (4.23). Para isso vamos expressar as funções $G(\vec{r})$ e $\delta^3(\vec{r})$, em suas respectivas transformadas de Fourier. Usando a transformada de Fourier na $G(\vec{r})$ e $\delta^3(\vec{r})$, temos

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int g(\vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{q}$$

$$\delta^3(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r})} d^3 \vec{q}$$

Logo,

$$(\nabla^2 + k^2) \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int g(\vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r})} d^3 \vec{q} \right] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r})} d^3 \vec{q}$$

O operador age na exponencial nos dando,

$$(\nabla^2 + k^2) e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r})} = (-q^2 + k^2) e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r})}$$

Então,

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int g(\vec{q}) (-q^2 + k^2) e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r})} d^3 \vec{q} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r})} d^3 \vec{q}$$

Para que as equações sejam iguais temos que fazer com que,

$$g(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} (k^2 - q^2)}$$

Então,

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r})} \frac{1}{(k^2 - q^2)} d^3 \vec{q}$$

Para resolver a integral devemos tomar \vec{r} fixo no diz respeito a integração em \vec{q} , e então podemos escolher coordenadas esféricas (q, θ, φ) com o eixo polar ao longo de \vec{r} . Então $\vec{q} \cdot \vec{r} = q \cdot r \cos\theta$. Temos que,

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{iq \cdot r \cos\theta} \frac{q^2}{(k^2 - q^2)} \text{sen} \theta dq d\theta d\varphi$$

A integral em φ é trivial 2π , então

$$\frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} \int_0^\pi e^{iq \cdot r \cos\theta} \frac{q^2}{(k^2 - q^2)} \text{sen} \theta d\theta dq$$

e a integral em θ é

$$\int_0^\pi e^{iq.r \cos\theta} \text{sen}\theta d\theta$$

$$\frac{d}{d\theta} [e^{iq.r \cos\theta}] = -iqr \cdot \text{sen}\theta e^{iq.r \cos\theta}$$

$$\text{sen}\theta e^{iq.r \cos\theta} d\theta = d \left[-\frac{e^{iq.r \cos\theta}}{iqr} \right]$$

$$\int_0^\pi d \left[-\frac{e^{iq.r \cos\theta}}{iqr} \right] = -\frac{e^{iq.r \cos\theta}}{iqr} \Big|_0^\pi = \frac{2\text{sen}(qr)}{qr}$$

Então,

$$G(\vec{r}) = \frac{2\pi}{2\pi^3 r} \int_0^{+\infty} \frac{2\text{sen}(qr)}{qr} \frac{q^2}{(k^2 - q^2)} dq$$

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^{+\infty} q dq \frac{\text{sen}(qr)}{(k^2 - q^2)}$$

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} q dq \frac{\text{sen}(qr)}{(k^2 - q^2)}$$

Façamos a seguinte substituição, $\text{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ na integral,

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} q dq \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{2i(k^2 - q^2)}$$

$$G(\vec{r}) = \frac{i}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} q dq \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{(q^2 - k^2)} \quad (4.26)$$

Precisamos resolver a integral em (4.25) para isso vamos igualar o denominador a zero para encontrar os pólos do denominador, portanto $-k^2 + q^2 = 0$, ou seja $q = \pm k$. Devemos agora adotar algum tipo de prescrição para os pólos. Vamos utilizar a prescrição de Feynman, obtida por $q^2 \rightarrow q^2 + i\epsilon$ e vamos estender a integral para um domínio complexo de forma que $q \rightarrow z$, e a integral em (4.26) fica,

$$\oint \frac{e^{izr} - e^{-izr}}{(-k^2 + z^2 + i\varepsilon)} z dz \quad (4.27)$$

Igualando o denominador a zero, temos

$$-k^2 + z^2 + i\varepsilon = 0$$

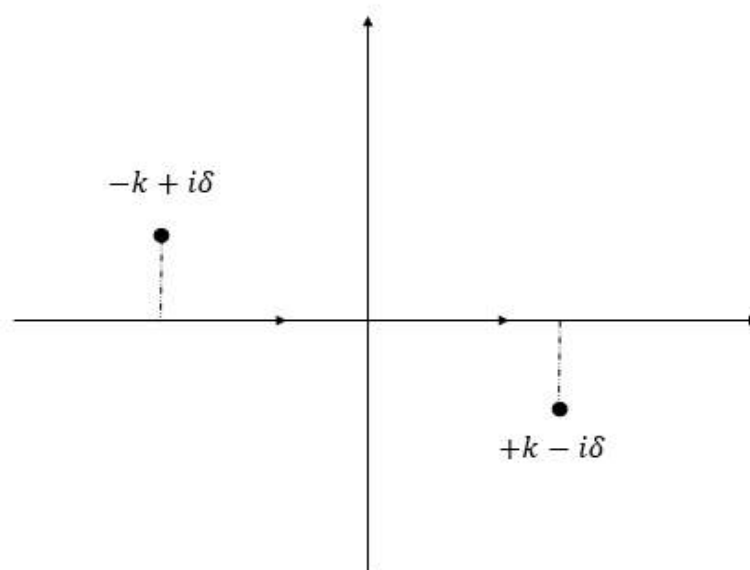
$$z^2 = k^2 - i\varepsilon$$

$$z = \pm(k^2 - i\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$$

Usando que $\left(1 - \frac{i\varepsilon}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{i\varepsilon}{2k^2}$

$$\pm k \left(1 - \frac{i\varepsilon}{2k^2}\right) \rightarrow \begin{cases} z_+ = k - i\delta \\ z_- = -k + i\delta \end{cases} \text{ Com } \delta \rightarrow 0$$

Figura 14 — Localização dos pólos.



Fonte: Elaborado pelo autor

Como $r > 0$, para e^{izr} temos,

$$e^{izr} = e^{ir(Re^{i\theta})} = e^{irR\cos\theta} \cdot e^{-irR\sin\theta}$$

$$|e^{izr}|^2 = e^{-2rR\sin\theta}, \sin\theta > 0 \text{ quando } R \rightarrow \infty \quad (4.28)$$

Ou seja, o contorno pode ser fechado no semi-plano superior, e para e^{-izr} , temos

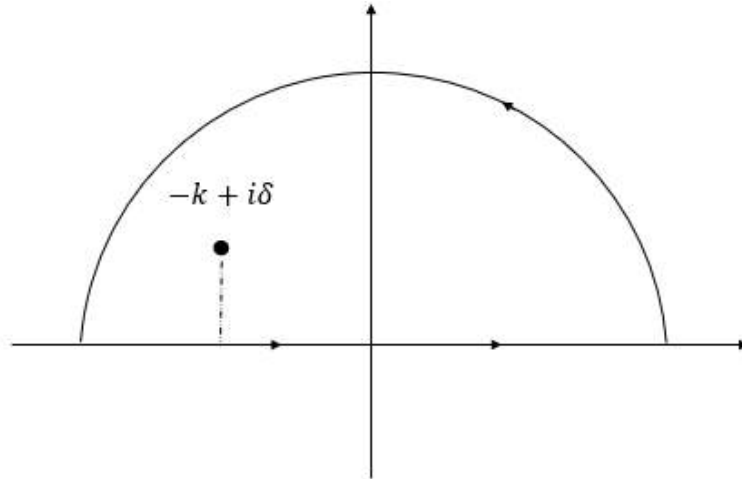
$$e^{-izr} = e^{-ir(Re^{i\theta})} = e^{-irR(\cos\theta + i\sin\theta)} = e^{-irR\cos\theta} \cdot e^{+irR\sin\theta}$$

$$|e^{-izr}|^2 = e^{2rR\sin\theta}, \sin\theta < 0 \text{ quando } R \rightarrow \infty \quad (4.29)$$

Então, para e^{-izr} o contorno pode ser fechado no semi-plano inferior.

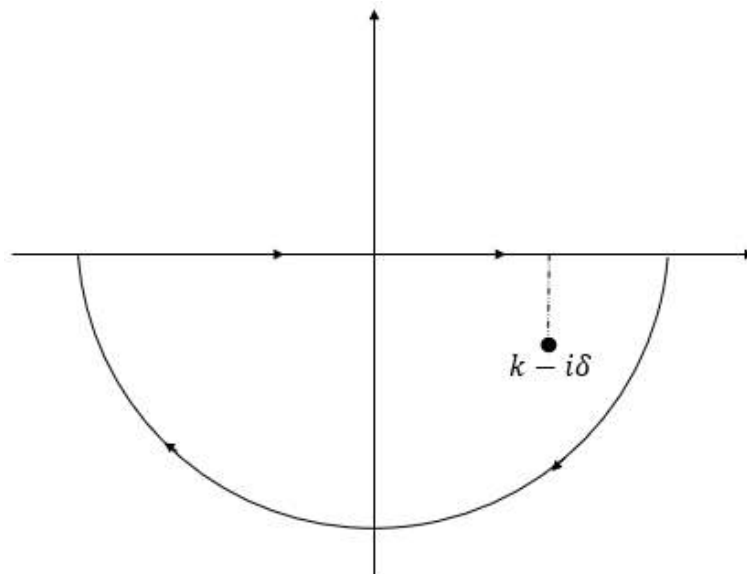
Isso significa que um dos pólos está na região $Im z > 0$, pois $\sin\theta > 0$, e outro polo se encontra na região $Im z < 0$, pois $\sin\theta < 0$.

Figura 15 — Contorno de orientação positiva com o pólo $z_- = -k + i\delta$



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 16 — Contorno de orientação negativa com o pólo $z_+ = k - i\delta$



Fonte: Elaborado pelo autor

Então pelo teorema dos resíduos

$$\oint f(z)dz = \pm 2\pi i a_{-1}$$

Onde a_{-1}

Para $z_- = -k + i\delta$

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{ze^{izr}(z - z_-)}{(z - z_-)(z - z_+)} = \frac{e^{-ikr}}{2} \quad (4.30)$$

$$\oint \frac{ze^{izr}}{k^2 - z^2 + i\varepsilon} dz = 2\pi i \left(\frac{e^{ikr}}{2} \right) = \pi i e^{-ikr} \quad (4.31)$$

Para $z_+ = k - i\delta$

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{ze^{-izr}(z - z_+)}{(z - z_-)(z - z_+)} = \frac{e^{ikr}}{2} \quad (4.32)$$

$$\oint \frac{ze^{-izr}}{k^2 - z^2 + i\varepsilon} dz = -2\pi i \left(\frac{e^{ikr}}{2} \right) = -\pi i e^{-ikr} \quad (4.33)$$

Portanto,

$$G(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{i}{8\pi^2 r} [(\pi i e^{-ikr}) - (-\pi i e^{-ikr})] = -\frac{e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}_0|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad (4.34)$$

Essa é a função de Green para equação de Helmholtz, a solução para a equação (4.23). Podemos acrescentar qualquer função $G_0(\vec{r} - \vec{r}_0)$ que satisfaça a equação de Helmholtz homogênea

$$(\nabla^2 + k^2)G_0(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad (4.35)$$

Ou seja, o resultado $(G + G_0)$ ainda satisfaz a equação (4.23)

Retornando à equação (4.24), a solução geral para equação de Schrödinger tem a forma

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} V(\vec{r}_0)\psi(\vec{r}_0)d^3\vec{r}_0 \quad (4.36)$$

Em termos simples, a equação (4.36) é uma forma alternativa de expressar equação de Schrödinger, mas é igualmente válida. Embora possa parecer uma solução direta para a equação de Schrödinger, a forma integral é especialmente útil para resolver problemas de espalhamento na mecânica quântica. Para lidar com esses problemas de espalhamento, é comum utilizar uma solução do tipo onda plana (exponencial complexa para partícula livre) no lado direito da equação, o que é conhecido como a aproximação de Born. Essa abordagem é muito poderosa e adequada para esses tipos de problema.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, exploramos a poderosa interseção entre o cálculo no plano complexo e as funções de Green, duas áreas fundamentais da Matemática que desempenham papéis cruciais em diversas disciplinas da Física, desde a mecânica clássica a Física quântica. Ao longo do estudo, investigamos o teorema do resíduo e sua aplicação em integrais impróprias de funções racionais e trigonométricas, revelando a profundidade e a versatilidade desses conceitos.

Além disso, introduzimos as funções de Green e a função delta de Dirac, demonstrando sua aplicabilidade em equações diferenciais importantes para física. Em particular, destacamos um caso especial do método da função de Green, onde a transformada de Fourier é empregada para converter equações diferenciais em equações algébricas mais gerenciáveis. Essa técnica foi aplicada com sucesso na equação diferencial que rege um oscilador harmônico clássico forçado, bem como na obtenção da forma integral da equação de Schrödinger, um marco fundamental na mecânica quântica.

O estudo deste tema proporcionou um conhecimento introdutório de um conteúdo distante da realidade matemática abordada nas disciplinas de Física do curso de licenciatura em Ciências Naturais, uma vez que o curso inclui apenas uma breve introdução ao cálculo diferencial e integral. Naturalmente, este conhecimento é particularmente relevante para licenciandos em ciências naturais que planejam avançar para uma especialização ou mestrado na área de Física no futuro. Nesse sentido, este trabalho ilustra de forma inequívoca como assuntos matematicamente mais complexos podem ser explorados e compreendidos, desde que haja interesse em aprofundar-se tanto na Matemática quanto na Física.

Em suma, este estudo destaca não apenas a beleza matemática subjacente ao cálculo no plano complexo e as funções de Green, mas também sua profunda utilidade na resolução de problemas envolvendo equações diferenciais que regem o mundo físico. Espera-se que este trabalho contribua significativamente em estudos posteriores daqueles interessados em aprofundar-se no tema abordado. Como sugestão para pesquisas futuras, sugerimos um estudo aprofundado da Teoria das distribuições.

REFERÊNCIAS

- [1] ÁVILA, Geraldo. **Variáveis Complexas e Aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- [2] ARFKEN, George B.; WEBER, Hans J. **Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física**. 6. ed. Rio de Janeiro: Campus, 2007.
- [3] BASSALO, José Maria Filardo; CATTANI, Mauro Sérgio Dorsa. **Elementos de Física Matemática**. Vol.1. São Paulo: Livraria da Física, 2010.
- [4] BRAGA, Carmen Lys Ribeiro. **Notas de Física Matemática: Equações diferenciais, Funções de Green e Distribuições**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- [5] BROWN, James Ward; CHURCHILL, Ruel V. **Complex Variables and Applications**. 8. ed. New York: Megraw-hill, 2009.
- [6] BROWN, James Ward; CHURCHILL, Ruel V. **Variáveis Complexas e suas Aplicações**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2015.
- [7] JESUS, Daynitti Ventura de. **Aplicações do Teorema dos Resíduos**. 2007. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Departamento de Matemática, Florianópolis, 2007.
- [8] BUTKOV, Eugene. **Física Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1978.
- [9] FEYNMAN, Richard P; LEIGHTON, Robert B; SANDS, Matthew. **Lições de Física: The Feynman Lectures on Physics**, 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- [10] FREEMAN, Dyson. **De Eros a Gaia**. O dilema ético da civilização em face da tecnologia. 1.ed. São Paulo: Editora Best Seller, 1992.
- [11] GUALBERTO, Mateus Medeiros. **Teorema do Resíduo e Aplicações**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, Patos-PB, 2018.
- [12] GRIFFITHS, David J. **Mecânica Quântica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Universidades, 2011.
- [13] MAIA, Marcos D. **Introdução aos métodos da Física – Matemática**. 1. ed. Brasília: UNB, 2000.
- [14] NASCIMENTO, Leandro Oliveira do. **Short-Course: Introduction to Path Integrals, BCS Model, and Topological Insulators**. Notas de aula – Universidade Federal do Pára, 2018.
- [15] NASCIMENTO, Victor Antônio Lima do. **Introdução à Função de Green**. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, 2022.



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO MARAJÓ - BREVES
FACULDADE DE CIÊNCIAS NATURAIS

ATESTADO

Eu, **Leandro Oliveira do Nascimento**, matrícula SIAPE 1053983, professor adjunto lotado no Instituto de Ciências Exatas e Naturais, venho por meio deste informar à Faculdade de Ciências Naturais do CUMB que o acadêmico **David Matheus Farias Medeiros**, número de matrícula 201814140025, discente do curso de Ciências Naturais, concluiu sob minha orientação o trabalho de conclusão de curso intitulado **INTRODUÇÃO AO CÁLCULO NO PLANO COMPLEXO E FUNÇÕES DE GREEN**, tendo sido aprovado com conceito **EXCELENTE**, no dia **28 de Fevereiro de 2024**. Atesto ainda que o discente implementou as sugestões solicitadas em sua versão final, a qual eu **aprovo** para ser entregue a FACIN-CUMB, dando desta forma prosseguimento a solicitação de Outorga de Grau, confecção de diploma e, com isso, a conclusão do curso em favor do mesmo.

Breves/PA, 30 de março de 2024.

Leandro Oliveira do Nascimento
Professor Adjunto do ICEN/UFPA
SIAPE 1053983



Ministério da Educação
Universidade Federal do Pará
Sistema de Bibliotecas

DECLARAÇÃO DE AUTORIA

Autor(a): David Mathews Farias Medeiros

Afiliação do(a) autor(a): _____

Instituição de vínculo empregatício do(a) autor(a)

CPF: 05253419276

Matrícula: 201814140025

Telefone: (11) 992954796

E-mail: DavidMathews964@gmail.com

Curso/Programa: Ciências Naturais - Licenciatura

Orientador(a): Prof. Dr. Leandro Oliveira do Nascimento

Coorientador(a): Prof. Dr. Sílvio Carlos F. Pereira Filho

Título/Subtítulo: Introdução ao cálculo no Plano complexo e Funções de Green.

Data da Defesa: 28/02/2024

Tipo do documento: TCC¹ () TCCE² () Dissertação () Tese () Artigo Científico () Livro () Capítulo de livro () Outro:

- Declaro que, para os devidos fins, o presente trabalho é de minha autoria e que estou ciente;
- Dos Artigos 297 a 299 do Código Penal, Decreto-Lei n. 2.848 de 7 de dezembro de 1940;
- Da Lei n. 9.610, de 19 de fevereiro de 1998, que dispõe sobre os Direitos Autorais;
- Do Regimento Interno da Universidade Federal do Pará;
- Da lei 12.527 de novembro de 2011, que trata da Lei de Acesso à Informação;
- Da utilização da licença pública internacional *Creative Commons* 4.0;
- Que plágio consiste na reprodução de obra alheia e submissão da mesma como trabalho próprio ou na inclusão, em trabalho próprio, de ideias, textos, tabelas ou ilustrações transcritos de obras de terceiros sem a devida e correta citação referencial.

Breves-Pa 30/03/2024

Local e Data

David Mathews Farias Medeiros

Assinatura do(a) autor(a)

¹Trabalho de Conclusão de Curso

²Trabalho de Conclusão de Especialização



Ministério da Educação
Universidade Federal do Pará
Sistema de Bibliotecas

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO E DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO EXCLUSIVA PARA
PUBLICAÇÃO DIGITAL NO PORTAL INSTITUCIONAL DE ACESSO ABERTO DA UFPA**

1. Tipo de documento: TCC¹ () TCCE² () Dissertação () Tese () Artigo Científico
() Livro () Capítulo de Livro () Trabalho Apresentado em evento

2. Informações sobre a obra:

Autor(a): David Mathews Farias Medeiros
RG: 8499612 CPF: 05253419276 E-mail: dauidmathews964@gmail.com
Telefone: (91) 992954796 Curso/Programa: Ciências Naturais - Licenciatura
Orientador(a): Prof. Dr. Leandro Oliveira do Nascimento
Coorientador(a): Prof. Dr. Sílvio Carlos Ferreira Pereira Filho
Título do documento: Introdução ao cálculo no Plano complexo e
Função de Green

Data da defesa: 28/02/2024 Área do Conhecimento (tabela do CNPq): Ciências exatas e da terra
Área de Concentração: Física Geral Linha de pesquisa: Métodos Matemáticos da Física
Agência de Fomento (se houver): _____

3. Informação de disponibilização do documento:

Restrição para publicação: () Total () Parcial Sem restrição

Justificativa de restrição total*: _____

Em caso de restrição parcial, especifique os capítulos restritos: _____

A partir de qual data esse documento poderá ser disponibilizado: 30/03/2024

4. Permissões³

Permite o uso comercial da obra? () Sim Não

Permitir modificações na obra? () Sim Não

O documento está sujeito a patentes? () Sim Não

5. T&D defendidas fora da instituição

É Tese ou Dissertação defendida fora da UFPA? () Sim Não

Breves-Pa 30/03/2024

Local e Data

David M. Farias Medeiros

Assinatura do(a) autor(a)

¹Trabalho de Conclusão de Curso

²Trabalho de Conclusão de Curso em Especialização

³Creative Commons Internacional 4.0



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO MARAJÓ/ BREVES
BIBLIOTECA PROF. RICARDO TEIXEIRA DE BARROS

DECLARAÇÃO

Declaramos, para os fins a que se fizerem necessários, que **David Matheus Farias Medeiros** sob o número de matrícula 201814140025, discente do curso de Ciências, não possui pendência de empréstimos de livros nesta biblioteca Prof. Ricardo Teixeira de Barros, do Campus Universitário do Marajó-Breves - Universidade Federal do Pará.

Breves, 25 de Março de 2024.

Assinatura manuscrita em tinta azul da Diretora da Biblioteca do Campus Universitário Marajó-Breves.

IZABEL CRISTINA DE CARVALHO MENDES

Diretora da Biblioteca do Campus Universitário Marajó-Breves