



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

MARJENNY AMÉLIA RODRÍGUEZ DE MELO.

O PROCESSO DE CAYLEY-DICKSON E AS ÁLGEBRAS DE JORDAN.

Belém

2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

MARJENNY AMÉLIA RODRÍGUEZ DE MELO

O PROCESSO DE CAYLEY-DICKSON E AS ÁLGEBRAS DE JORDAN.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como requisito parcial para a obtenção do
grau de Licenciado em Matemática da Facul-
dade de Matemática da Universidade Federal
do Pará.

Orientadora: Prof^ª Dr^ª JOELMA MOR-
BACH.

Belém

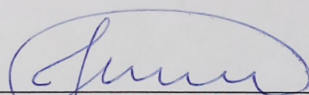
2022

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

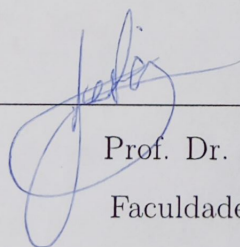
MARJENNY AMELIA RODRÍGUEZ DE MELO

O PROCESSO DE CAYLEY-DICKSON E AS ÁLGEBRAS DE JORDAN.

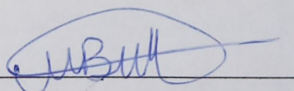
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como requisito parcial para a obtenção do
grau de Licenciado em Matemática da Facul-
dade de Matemática da Universidade Federal
do Pará e avaliado pela seguinte banca exa-
minadora:



Prof. Dr.ª. JOELMA MORBACH (orientadora)
Faculdade de Matemática, UFPA



Prof. Dr. JEAN LELIS (Membro)
Faculdade de Matemática, UFPA



Prof. Me. MAYARA SILVIA BRITO DA SILVA (Membro)
Faculdade de Matemática, UFPA

DATA DA DEFESA: 14/07/2022

Conceito: Excelente

À todas que vieram antes de mim.

AGRADECIMENTOS.

À minha família, pai José Rodríguez, mãe Marlete Melo, irmão Máximo Gustavo por todo incentivo e suporte aos estudos. Em especial à minha *vó* Alda Maria que, desde que chegou ao seu conhecimento sobre minha aprovação no curso, começou sua incessante busca por um anel de formatura bonito e de pedra azul. À Felipe Neves pelo apoio emocional e paciência ao me acompanhar nesta trajetória.

À todos os meus amigos, em especial Pedro Souza e Rafael Barbosa que se dedicaram a me ensinar quando tive dificuldades. À Prof^a Mayara Brito por se disponibilizar para sanar minhas constantes dúvidas ao fazer consultas bibliográficas.

À minha orientadora Prof^a Joelma Morbach por toda confiança, pelos ensinamentos, pelos seminários realizados e pelas oportunidades de exposições em eventos nacionais e internacionais.

Ao CNPq pelo apoio financeiro através de bolsa de Iniciação Científica do PICMe.

À UFPA e à todas instituições públicas de ensino que fizeram parte de minha formação apesar de suas estruturas sucateadas.

Por fim, à todos que fizeram parte da minha história até aqui, obrigada por me deixarem apoiar em seus ombros.

*“A beleza da matemática só se mostra aos
seus seguidores mais pacientes.”*

Maryam Mirzakhani.

RESUMO.

Neste trabalho apresentaremos um algoritmo que nos permite fazer a construção de álgebras, chamado de processo de Cayley-Dickson e, com ele, veremos que é possível construir as álgebras dos Reais ($\mathbb{R}$), Complexos ($\mathbb{C}$), Quatérnios ($\mathbb{H}$) e Octônios ($\mathbb{O}$), de dimensões 1, 2, 4 e 8, que representam todas as álgebras de divisão normadas e com composição, a menos de isomorfismos. Em seguida, introduziremos o conceito de Álgebras de Jordan, que foram apresentadas à matemática pelo físico Pascual Jordan na tentativa de descobrir uma nova configuração algébrica para Mecânica Quântica. Falaremos especialmente sobre as Álgebras de Jordan Formalmente Reais. Por fim, faremos uma análise apresentando resultados que associa diretamente estas álgebras.

PALAVRAS-CHAVE: Cayley-Dickson, Algebras, Complexos, Quatérnios, Octônios, Álgebras de Jordan.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.	10
2	NOÇÕES PRELIMINARES.	12
2.1	Matrizes.	12
2.1.1	Matrizes Reais.	12
2.1.2	Matrizes Complexas.	16
2.2	Estruturas Algébricas.	19
2.3	Funções Especiais.	21
3	COMPLEXOS, QUATÉRNIOS E OCTÔNIOS.	25
3.1	Complexos.	25
3.2	Quatérnios.	27
3.3	Octônios.	29
4	O PROCESSO DE CAYLEY-DICKSON.	32
4.1	Construção de Álgebra.	32
4.2	Exemplos de Álgebras de Cayley-Dickson.	36

4.2.1	São As Únicas Álgebras de Divisão Normadas e com Composição que Conseguimos Construir?	39
5	INTRODUÇÃO ÀS ÁLGEBRAS DE JORDAN	41
5.1	Definições e Exemplos	42
5.2	Classificações de Álgebras de Jordan	44
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	49
	Referências Bibliográficas.	49

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO.

Durante seus estudos sobre números complexos, Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865) desenvolveu uma álgebra que permitia trabalhar com os vetores no plano, o que lhe despertou o desejo de estender as propriedades descobertas para um sistema algébrico de três dimensões. Por volta de 1843 descobriu que isso não era possível, e que, na verdade, era possível estender para números de quatro dimensões através de uma nova multiplicação, o que deu origem ao conjunto dos Quatérnios, se tornando o primeiro exemplo de anel não comutativo e com divisão. Baseados nos estudos de Hamilton, John T. Graves (1806 – 1870) e Arthur Cayley (1821 - 1895) desenvolveram independentemente o conjunto dos Octônios e logo percebeu-se que a álgebra dos Octônios era de divisão, normada e desprovida de comutatividade e associatividade. Além disso, os matemáticos Arthur Cayley e Leonard Eugene Dickson (1874 - 1954) publicaram um trabalho em que apresentaram um algoritmo, chamado *Processo de Cayley-Dickson* para as álgebras de dimensão 2^n , e provando que as únicas álgebras com composição possuem dimensões 1, 2, 4 e 8.

Por outro lado, o conceito de Álgebra de Jordan foi originalmente criado por Pascual Jordan, John von Neumann e Eugene Wigner [9] por volta de 1930, na tentativa de encontrar um sistema algébrico para a Mecânica Quântica através de matrizes hermitianas. Por um tempo essas tentativas foram falhas pois nenhuma estrutura desenvolvida se tornava

compatível com estruturas hermitianas. Percebeu-se que o múltiplo λx de um elemento hermitiano não seria também hermitiano a não ser que o escalar λ fosse um número real, e o produto matricial xy seria não-hermitiano a não ser que x e y comutassem. Essa percepção foi um passo importante para que Jordan pudesse chegar ao seu famoso produto anticomutador (posteriormente chamado de *Produto de Jordan*), que por fim satisfazia a condição de comutatividade e a sua versão debilitada de associatividade (chamada hoje de *Identidade de Jordan*).

Este trabalho tem como objetivo apresentar as álgebras dos Quatérnios e Octônios, bem como estudar os passos do Processo de Cayley-Dickson e construir as álgebras de dimensão 2^n de forma generalizada. Em seguida continuaremos os estudos sobre as definições e classificações de Álgebras de Jordan. Ao final veremos resultados associando-as especificamente às álgebras obtidas no processo anterior. Para tanto, este trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 2 trazemos alguns conceitos preliminares que consideramos básicos para o entendimento do assunto. Falaremos a respeito de matrizes, desde a sua definição até algumas de suas propriedades e em seguida veremos sobre estruturas algébricas. Também abriremos uma seção para lembrar sobre as definições de funções específicas que faremos uso posteriormente.

No terceiro conheceremos o contexto histórico dos Complexos, Quatérnios e Octônios, partiremos do surgimento até o modo como os conhecemos hoje. Dividiremos este capítulo em seções, uma para cada um destes números e, ao final delas, falaremos a respeito de suas definições.

Já no capítulo 4 conheceremos o Processo de Cayley-Dickson e faremos a descrição de cada passo necessário para se chegar até as álgebras de dimensão 2^n , assim como as construiremos como exemplos. Ao final faremos uma análise quanto a elas e as álgebras tratadas no capítulo anterior.

Por fim, no quinto capítulo começaremos falando a respeito de Álgebras de Jordan através definições e exemplos. Já na seção seguinte conheceremos suas classificações, especialmente sobre Álgebras de Jordan formalmente reais. Não nos aprofundaremos muito no assunto, pois não nos cabe neste momento. No entanto, pretendemos continuar nossos estudos a respeito deste tema e, assim, se for conveniente, o traremos com maior profundidade.

CAPÍTULO 2

NOÇÕES PRELIMINARES.

2.1 Matrizes.

Vamos conhecer algumas álgebras que nos interessam e, posteriormente, buscar construí-las de forma generalizada através do Processo de Cayley-Dickson. Porém, antes de entendermos estas estruturas, precisamos conhecer e/ou relembrar algumas noções a respeito de matrizes, funções e álgebra que faremos uso. Para isso, este capítulo se dedica inteiramente à elas e à resultados necessários.

2.1.1 Matrizes Reais.

Definição 1 (Matriz) *Denominamos matriz a um conjunto de números reais, dispostos em linhas e colunas, numa certa ordem, e colocados entre parênteses (ou colchetes). Assim, uma matriz real, que vamos denotar por A , com m linhas e n colunas é representada da forma*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Temos que cada elemento $a_{ij} \in \mathbb{R}$ é chamado de elemento da matriz A e os índices indicam a posição na linha e na coluna, respectivamente.

Como esta matriz possui m linhas e n colunas, dizemos que esta matriz é de ordem $m \times n$. Denotaremos o conjunto das matrizes reais de ordem $m \times n$ por $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Quando $m = 1$ temos uma matriz linha. Quando $n = 1$ temos uma matriz coluna. E, caso $m = n$, diremos a matriz é quadrada de ordem n . Para simplificar a notação, indicaremos uma matriz por $A = (a_{ij})$ (lemos "matriz A com elementos a_{ij} ").

Exemplo 1 *Matriz de ordem 3×2*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2 *Matriz de ordem 3*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se todos os elementos a_{ij} de uma matriz A são nulos, diremos que A é uma matriz nula.

Definição 2 (Matriz Transposta) *Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A = (a_{ij})$. Obtemos a transposta da matriz A trocando-se as linhas pelas colunas e a denotamos por A^t .*

$$A^t = (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3 Considere a matriz $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ como sendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Temos que sua transposta será a matriz $A^t \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ dada por

$$A^t = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que a diagonal principal de uma matriz quadrada se mantém na mesma posição que a matriz original quando transpomos.

Vamos agora conhecer algumas matrizes com formas específicas de matrizes quadradas de ordem n .

- A **Matriz Diagonal** se caracteriza por todos os elementos exteriores à diagonal principal serem nulos. Ou seja, $d_{ij} = 0$ quando $i \neq j$.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

- A **Matriz Identidade** é uma matriz diagonal que se caracteriza por todos os elementos da diagonal principal serem iguais a 1. Ou seja, $a_{ij} = 1$ quando $i = j$ e $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

- Dizemos que uma Matriz A é **Simétrica** quando ela é igual sua transposta A^t . Denotamos por $Sym_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes simétricas de ordem n .
- Uma matriz A será **Anti-simétrica** quando $A = -A^t$

Definição 3 (Operações com matrizes) Considere $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ (isto é, de mesma ordem) e $\lambda \in \mathbb{R}$, as operações de soma entre matrizes e produto por escalar são dadas, respectivamente, por

$$i) A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij});$$

$$ii) \lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}).$$

Nota-se que, ao realizar estas operações, obtemos novas matrizes de mesma ordem. Além disso, é fácil ver que a soma entre matrizes reais é comutativa, associativa, admite inverso aditivo e elemento neutro.

Exemplo 4 Considere as matrizes $A, B \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ como sendo $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B =$

$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e o escalar $\lambda = 3$. Logo, de acordo com a definição anterior podemos realizar as operações da seguinte forma

$$3A + B = 3 \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 7 + 6 & 3 \cdot 3 + 3 \\ 3 \cdot 1 + 2 & 3 \cdot 0 + 4 \\ 3 \cdot 1 + 0 & 3 \cdot 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 12 \\ 5 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Definição 4 (Multiplicação entre Matrizes) Considere as matrizes $A = (a_{il}) \in M_{m \times k}(\mathbb{R})$, $B = (b_{lj}) \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$. A multiplicação entre elas é dada por

$$A \times B = (a_{il}) \times (b_{lj}) = \left(\sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj} \right).$$

Temos que cada elemento $\sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj}$ resultará em um novo elemento c_{ij} e a matriz resultante pertencerá ao conjunto das matrizes reais de ordem $m \times n$. A definição parece um pouco confusa, talvez no exemplo fique mais fácil entender.

Exemplo 5 Tomemos as matrizes $A \in M_{1 \times 2}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Assim, temos a multiplicação entre elas dada por

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3 + (-2).5 & 1.4 + (-2).1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Devido a sua condição a respeito de linhas e colunas, percebemos que a multiplicação entre matrizes não é comutativa. No exemplo acima, se formos tentar fazer BA a operação se torna impossível. As únicas matrizes que assumem a comutatividade sempre como verdade são a Diagonal e a Identidade, ou seja $AI = IA$ e $DA = AD$. Mas especialmente $AI = A$, portanto I é o elemento neutro da multiplicação entre matrizes.

2.1.2 Matrizes Complexas.

Consideremos as mesmas definições apresentadas anteriormente a respeito de matrizes reais como válidas também para matrizes complexas. Denotaremos este conjunto por $M_{m \times n}(\mathbb{C})$. Daremos continuidade conchendo alguns tipos específicos de matrizes complexas.

Definição 5 (Matriz Conjugada) Considere $A = (a_{ij})$ uma matriz complexa de ordem $m \times n$. A matriz obtida substituindo cada elemento de A por seu conjugado é chamada matriz conjugada da matriz A , que denotamos por $\bar{A}$.

Dessa forma, $\bar{A} = (\overline{a_{ij}})$.

Exemplo 6 Consideremos a seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 7i & i \\ 3 + i & 7 + 0i \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, segundo a definição anterior

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 + 7i & -i \\ 3 - i & 7 - 0i \end{pmatrix}.$$

Definição 6 (Matriz Transposta Conjugada) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz complexa de ordem $m \times n$. Definimos a transposta conjugada da matriz A , que denotamos por A^* , como sendo a matriz $A^* = (\overline{a_{ji}})$ de ordem $n \times m$. Assim, $A^* = (\overline{A})^t$.

Exemplo 7 Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 + 8i & i - 4 \\ 10 + i & 9 + i \\ 2 + 5i & 1 - 2i \end{pmatrix},$$

temos que a sua transposta conjugada será

$$A^* = \begin{pmatrix} 7 - 8i & 10 - i & 2 - 5i \\ i + 4 & 9 - i & 1 + 2i \end{pmatrix}.$$

Definição 7 (Matriz Hermitiana) Dizemos que uma matriz $A = (a_{ij})$ complexa de ordem n é Hermitiana se $(\overline{A})^t = A$, isto é, se $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ para todos i, j . Geralmente indica-se $A^* = A$ para denotar uma matriz Hermitiana.

Exemplo 8 Se tomarmos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5i \\ -5i & 6 \end{pmatrix},$$

e sua transposta conjugada

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 5i \\ -5i & 6 \end{pmatrix},$$

percebemos que $A = A^*$. Logo, esta é uma matriz hermitiana.

Definição 8 (Matriz Anti-hermitiana) Dizemos que uma matriz $A = (a_{ij})$ complexa de ordem n é anti-Hermitiana se $(\overline{A})^t = -A$, isto é, se $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$, para todos i, j . Geralmente indica-se $A^* = -A$ para denotar uma matriz anti-hermitiana.

Exemplo 9 Se considerarmos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2i & -2+i \\ 2+i & -i \end{pmatrix},$$

temos que

$$A^* = \begin{pmatrix} -2i & 2-i \\ -2-i & i \end{pmatrix}.$$

Em decorrência do que foi visto até aqui e das propriedades dos números complexos, temos o teorema abaixo.

Teorema 1 Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes complexas de mesma ordem e λ um escalar complexo. Então,

$$(a) \quad (A^*)^* = A$$

$$(b) \quad (A+B)^* = A^* + B^*$$

$$(c) \quad (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$$

Demonstração. (a): Basta tomarmos a transposta conjugada da transposta conjugada de uma matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$, assim

$$\begin{aligned} (A^*)^* &= ((a_{ij})^*)^* \Rightarrow (A^*)^* = (\overline{a_{ji}})^* \\ &\Rightarrow (A^*)^* = \overline{(\overline{a_{ij}})} \\ &\Rightarrow (A^*)^* = (a_{ij}) = A \end{aligned}$$

(b): Dadas $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ e considerando a transposta conjugada da soma temos

$$\begin{aligned} (A+B)^* &= ((a_{ij}) + (b_{ij}))^* \Rightarrow (A+B)^* = (a_{ij} + b_{ij})^* \\ &\Rightarrow (A+B)^* = \overline{(a_{ji} + b_{ji})} \\ &\Rightarrow (A+B)^* = (a_{ij})^* + (b_{ij})^* = A^* + B^* \end{aligned}$$

(c): Dado $\lambda \in \mathbb{C}$ e $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$, então

$$\begin{aligned}
(\lambda A)^* &= (\lambda a_{ij})^* \Rightarrow (\lambda A)^* = (\overline{\lambda a_{ji}}) \\
&\Rightarrow (\lambda A)^* = \bar{\lambda}(\overline{a_{ji}}) \\
&\Rightarrow (\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*
\end{aligned}$$

□

Temos também a seguinte proposição a respeito de Matrizes Hermitianas.

Proposição 1 *Seja A uma matriz complexa de ordem $m \times n$. As matrizes AA^* e A^*A são Hermitianas.*

Demonstração. Seja $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$, temos que $A^* = (\overline{a_{ji}})$, assim:

$$\begin{aligned}
A^*A &= \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\
A^*A &= \begin{pmatrix} \sum \overline{a_{m1}}a_{m1} & \sum \overline{a_{m1}}a_{m2} & \cdots & \sum \overline{a_{m1}}a_{mn} \\ \sum \overline{a_{m2}}a_{m1} & \sum \overline{a_{m2}}a_{m2} & \cdots & \sum \overline{a_{m2}}a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum \overline{a_{mn}}a_{m1} & \sum \overline{a_{mn}}a_{m2} & \cdots & \sum \overline{a_{mn}}a_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Teremos que, como os número complexos são comutativos,

$$A^*A = (A^*A)^*,$$

Portanto, A^*A é uma matriz Hermitiana. A verificação para AA^* é análoga.

□

2.2 Estruturas Algébricas.

Conhecemos agora a definição de algumas estruturas algébricas que usaremos neste trabalho e que também são muito usuais em toda a matemática.

Definição 9 (Espaço Vetorial) *Seja A um conjunto não-vazio formado por elementos de um corpo $\mathbb{K}$. Temos que A será um Espaço Vetorial se nele estão definidas as operações de soma e produto por escalar que satisfazem as condições abaixo para $x, y, z \in A$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*

$$(A1) \quad x + y = y + x;$$

$$(A2) \quad (x + y) + z = x + (y + z);$$

$$(A3) \quad \exists 0_A \in A \text{ tal que } x + 0_A = 0_A + x = x;$$

$$(A4) \quad \forall x \in A, \exists (-x) \in A \text{ tal que } x + (-x) = (-x) + x = 0_A.$$

$$(P1) \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x);$$

$$(P2) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$$

$$(P3) \quad \exists 1 \in \mathbb{K} \text{ tal que } 1x = x1 = x.$$

Exemplo 10 *O conjunto das matrizes (complexas ou reais) é um espaço vetorial.*

Definição 10 (Álgebra Sobre um Corpo $\mathbb{K}$) *Seja A um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ onde está definida uma operação $\cdot$ que satisfaz*

$$(a) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z;$$

$$(b) \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z;$$

$$(c) \quad \alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y),$$

para quaisquer $x, y \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Dizemos que A é uma $\mathbb{K}$ -álgebra (ou simplesmente uma álgebra).

Exemplo 11 *Os reais e os complexos são exemplos de álgebras.*

Definição 11 (Anel) *Seja A um conjunto com um elemento 0 e duas operações binárias soma $(+)$ e multiplicação $(\times)$ que satisfazem*

$$(S1) \quad x + y = y + x;$$

$$(S2) \quad (x + y) + z = x + (y + z);$$

$$(S3) \quad x + 0 = 0 + x = x;$$

$$(S4) \quad \forall x \in A, \exists (-x) \in A \text{ tal que } x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

$$(M1) \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z);$$

$$(M2) \quad x \times (y + z) = x \times y + x \times z \text{ e } (x + y) \times z = x \times z + y \times z;$$

$$(M3) \quad \exists 1 \in A \text{ tal que } 1x = x1 = x.$$

para $x, y, z \in A$.

Exemplo 12 *O conjunto das matrizes (complexas ou reais) é um anel.*

Definição 12 (Ideal) *Seja A um anel com $(A, +)$ sendo um grupo abeliano, isto é, um grupo com comutatividade, um subconjunto I de A é chamado ideal à direita se*

- $(I, +)$ é um subgrupo de $(A, +)$;
- xr está em I para todo $x \in I$ e $r \in A$.

A definição para ideal à esquerda é análoga.

Exemplo 13 *Considerando o anel dos inteiros e o grupo $(\mathbb{Z}, +)$, o subconjunto $2\mathbb{Z} := \{2x/x \in \mathbb{Z}\}$ será um ideal de $\mathbb{Z}$.*

2.3 Funções Especiais.

Nesta seção veremos certos tipos de funções que precisaremos ao longo deste trabalho.

Definição 13 (Função involutiva) *Seja A uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{K}$, a função $\rho : A \rightarrow A$ é uma involução se para*

$$\rho(a) = b,$$

temos

$$\rho(b) = a.$$

Para qualquer $a, b \in A$.

Exemplo 14 Dada uma álgebra unitária A , isto é, uma álgebra com unidade, temos que a função $\rho : A \rightarrow A$ definida como

$$\rho(a) = \bar{a}, \forall a \in A.$$

é uma involução, pois

$$\rho(a) = \bar{a} \rightarrow \rho(\bar{a}) = \overline{(\bar{a})} = a.$$

Definição 14 (Formas bilineares) Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma forma bilinear sobre V é uma função $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ que satisfaz:

$$(a) \quad f(\lambda x_1 + x_2, y_1) = \lambda f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1);$$

$$(b) \quad f(x_1, \lambda y_1 + y_2) = \lambda f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2).$$

Para todos $x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$

Exemplo 15 Seja $\langle, \rangle : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$, um produto interno sobre A , com A sendo um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. $\langle, \rangle$ será uma forma bilinear. Em particular, o produto interno usual sobre $\mathbb{R}^n$, $\langle (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$, é uma forma bilinear sobre o $\mathbb{R}^n$.

Definição 15 (Forma bilinear não-degenerada) Seja f uma forma bilinear sobre o espaço vetorial V , f é dita não-degenerada (ou não-singular) se sua matriz em relação a alguma (ou toda) base ordenada de V é uma matriz não-singular, ou seja, $\text{Posto}(f) = n$, onde n é a ordem da matriz.

Exemplo 16 O próprio produto interno é uma forma bilinear não-degenerada.

Definição 16 (Formas bilineares simétricas) Seja f uma forma bilinear sobre o espaço vetorial V . Dizemos que f é simétrica se

$$f(x, y) = f(y, x), \forall x, y \in V$$

Exemplo 17 Considere W o espaço vetorial dos complexos e a forma bilinear $f : W \times W \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z, w) = (zw)^2, \forall z, w \in \mathbb{W}$. Como o produto entre números complexos é comutativo, temos que $f(z, w) = (zw)^2 = (wz)^2 = f(w, z)$.

Definição 17 (Forma quadrática) Seja $\mathbb{K}$ um corpo e V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, $\eta : V \rightarrow \mathbb{K}$ é uma forma quadrática se

$$(a) \quad \eta(\lambda x) = \lambda^2 \eta(x) \text{ para todo } x \in V \text{ e } \lambda \in \mathbb{K}$$

$$(b) \quad f_\eta : A \times A \rightarrow \mathbb{K} \text{ definida por } f_\eta(x, y) = \eta(x + y) - \eta(x) - \eta(y) \text{ é uma forma bilinear.}$$

Exemplo 18 Considere o V como o espaço vetorial dos reais. A aplicação $\eta : V \rightarrow \mathbb{R}$, definida como $\eta(x) = 2x^2$ é uma forma quadrática.

Se a forma bilinear simétrica associada à $\eta(x)$ é não-degenerada dizemos que η é estritamente não-degenerada. Por sua vez, η é não-degenerada se

$$\eta(x) = 0, f(x, a) = 0 \quad \forall a \in V \Rightarrow x = 0.$$

Tomando f como uma forma bilinear simétrica sobre o espaço vetorial V , a forma quadrática associada a f é a função η de V em $\mathbb{K}$ definida por

$$\eta(x) = f(x, x).$$

Dizemos que uma forma quadrática admite composição quando preserva o produto do domínio na imagem, isto é,

$$\eta(xy) = \eta(x)\eta(y).$$

Se η está definida em uma álgebra A , dizemos que A admite composição se

- η admite composição;
- η for estritamente não degenerada;
- Existe um elemento identidade $1 \in A$.

Agora temos as ferramentas para entender o processo de construção das álgebras através do algoritmo que gostaríamos de apresentar.

CAPÍTULO 3

COMPLEXOS, QUATÉRNIOS E OCTÔNIOS.

Dedicaremos este capítulo à história dos números Complexos, Quatérnios e Octônios, assim como também mostraremos suas formas algébricas. Nosso objetivo aqui é contextualizar a forma como estes números foram originalmente construídos e, mais à frente, conheceremos suas formas generalizadas construídas de uma outra maneira.

3.1 Complexos.

Por muito tempo uma equação foi vista como uma representação matemática de um problema real e que não podia passar disto. Então, ao chegar em raízes quadradas de números negativos, logo se admitia que a equação não tinha solução. Mas, pelo início do século XVI, na tentativa de encontrar um método para resolver equações do terceiro grau, os matemáticos chegaram até os números complexos. Apesar deste ser o momento de “criação” deste conjunto, há registros antigos de raízes quadradas de números negativos, isto é, soluções de equações que nos levam até os números complexos.

Gerônimo Cardano (1501-1576) foi o primeiro estudioso a trabalhar, de fato, com raiz

quadrada de números negativos. Ele publicou a obra *Ars Magna*, onde resolve o seguinte problema: *dividir o número 10 em duas partes cujo produto é 40*. Essa questão nos leva à equação $x(10 - x) = -x^2 + 10x = 40$, de raízes $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$. Cardano teve dúvidas entre admitir as operações algébricas por si mesmas ou tentar dar uma justificativa geométrica para elas.

Em 1572, o italiano Rafael Bombelli (1526-1572) publicou a obra *L'Algebra*, onde considerou $(\sqrt{-1})^2 = -1$ para a resolução de problemas. Ele não acreditava que números negativos possuíam raiz quadrada, mas admitiu sua utilidade para fins algébricos e desenvolveu regras para as operações. É a partir daí que se começa a utilizar números da forma $a + b(\sqrt{-1})^2$ na resolução de equações do terceiro grau. A ideia não foi muito recebida pelos matemáticos do século XVI em relação a geometria já que não conseguiam dar um significado geométrico. Mas com o tempo perceberam que o uso destes números não conduzia a uma contradição. Foi René Descartes (1596-1650), em 1637, que acabou nomeando as raízes quadradas de valores negativos, como números imaginários: *“nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias”*.

John Wallis (1616-1703) em 1685 foi o primeiro matemático a buscar uma interpretação geométrica para a raiz quadrada de números negativos, mas não obteve sucesso. Em seguida vieram Caspar Wessel (1745-1818), Jean Robert Argand (1768-1822) e Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), de forma independente um do outro. Em 1797, Wessel encaminha à Academia Real Dinamarquesa de Ciências um artigo intitulado *Sobre a Representação Analítica de Direção*, onde propunha uma representação analítica para segmentos de retas no plano e para representar os números complexos como pontos do plano.

Veremos a seguir a forma algébrica destes números.

Definição 18 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, os números da forma $z = a + bi$, onde $i^2 = -1$, formam o conjunto dos números complexos, denotado por $\mathbb{C}$. Temos neste conjunto a soma de dois elementos e a multiplicação por escalar dadas por*

$$a) (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$b) \lambda(a + bi) = \lambda a + \lambda bi,$$

para $(a + bi), (c + di) \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Portanto temos um espaço vetorial. Podemos, agora, definir uma operação de multiplicação dada por

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

E, assim, temos a Álgebra dos Complexos.

3.2 Quatérnios.

William Rowan Hamilton era um físico Irlandês que desenvolveu uma álgebra que permitia trabalhar com os vetores do plano. Isso o motivou a buscar formas de trabalhar com os vetores no espaço e estudou o tema por dez anos e não conseguiu alcançar seu objetivo. Esperava ainda que o comprimento do produto de vetores fosse igual ao produto dos comprimentos, isto é, que $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$, fato que chamou lei dos módulos.

Hamilton intuitivamente considerava $i^2 = j^2 = -1$, mas sua dificuldade começava quando pensava em um resultado para ij e ji . Foi a tentativa de preservar a lei dos módulos que lhe conduziu trabalhar com uma dimensão a mais, o que causava muita estranheza a ele. No entanto, assumiu um terceiro símbolo imaginário k diferente de i e j , mas que também tinha seu quadrado igual a -1 . Assim, definiu os quatérnios como números da forma $a + bi + cj + dk$, ou ainda, (a, b, c, d) .

Mesmo com esse avanço, o físico ainda se inquietava quanto à multiplicação entre esses elementos descobertos por ele. Mas em 16 de outubro de 1843 escreve em uma carta a seu filho contando sua nova ideia.

“era uma segunda-feira e dia de reunião do Conselho da Real Sociedade da Irlanda, eu ia andando para participar e presidir, e tua mãe andava comigo, ao longo do Royal Canal, embora ela falasse comigo ocasionalmente, uma corrente subjacente de pensamento estava acontecendo na minha mente, que finalmente teve um resultado, cuja importância senti imediatamente. Pareceu como se um circuito elétrico tivesse se fechado; e saltou uma faísca, o heraldo de muitos anos vindouros de pensamento e trabalho dirigidos, por mim, se poupado, e de

qualquer forma por parte de outros, se eu vivesse o suficiente para comunicar minha descoberta. Nesse instante eu peguei uma libreta de anotações que ainda existe e fiz um registro naquela hora. Não pude resistir ao impulso tão não filosófico quanto possa ser de gravar com um canivete numa pedra da ponte de Brougham, quando a cruzamos, a fórmula fundamental dos símbolos i, j, k .” (EVES, 2011) [1].

Essa gravura na pedra com o canivete feito por Hamilton infelizmente se desgastou. No entanto, há um memorial na ponte Brougham com uma réplica do que teria sido este registro.

A fórmula da qual falava na carta era seguinte: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. A partir desta ideia podemos retirar o produto vetorial de cada uma das componentes que, inclusive, implica que o produto entre dois quatérnios é não comutativo. Este resultado será registrado mais a frente quando formos falar sobre a definição algébrica dos quatérnios.

Com isso Hamilton também conseguiu pensar na forma conjugada $\bar{q}$ de um quatérnio $q = a + bi + cj + dk$ e colocou da seguinte forma

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk.$$

E também definiu o módulo como

$$||q|| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Com todas essas afirmações a respeito desses números, o conjunto dos quatérnios se tornou o primeiro exemplo de anel não comutativo e com divisão. Essa classificação não foi dada de imediato, mas Hamilton logo percebeu a importância de sua descoberta, especialmente pelas suas implicações para o desenvolvimento da física.

Com tudo isso em mente, Hamilton logo quis contar a seu amigo John T. Graves, então escreveu-lhe uma carta. Hamilton estudou sobre quatérnios o resto de sua vida para encontrar aplicações. Ele introduziu termos como vetor, versor, tensor, escalar. Como resultado deste trabalho publicou em 1853 suas *Lectures on Quaternions* e, em 1866, se editou em forma póstuma um trabalho em dois volumes chamados *Elements of Quaternions*. Em

homenagem Hamilton, denotamos o conjunto dos quatérnios por $\mathbb{H}$.

Agora que conhecemos um pouco de sua história, vamos entender como funciona a forma algébrica de um quatérnio.

Definição 19 *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Os números da forma $q = a + bi + cj + dk$ formam o conjunto dos quatérnios, denotado por $\mathbb{H}$ e as operações de soma e produto por escalar dadas, respectivamente, por*

$$a) (a + bi + cj + dk) + (e + fi + gj + hk) = (a + e) + (b + f)i + (c + g)j + (d + h)k;$$

$$b) \lambda(a + bi + cj + dk) = \lambda a + \lambda bi + \lambda cj + \lambda dk,$$

para $(a + bi + cj + dk), (e + fi + gj + hk) \in \mathbb{H}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo temos um espaço vetorial.

Considere o produto vetorial das componentes dado por

$\times$	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Assim, o produto entre dois quatérnios está definido como

$$(a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk) = (ae - bf - cg - dh) + (af + be + cf + dg)i + (af + ce + df - bh)j + (ah + de + bg - cf)k.$$

$$\forall a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}.$$

Portanto, os quatérnios junto com a multiplicação acima são uma álgebra.

3.3 Octônios.

Mencionamos na seção anterior que Hamilton enviou uma carta ao seu amigo John T. Graves logo após sua descoberta, em outubro 1843. Em dezembro do mesmo ano, Graves

respondeu com outra carta descrevendo os octônios, que ele chamou oitavas, com propriedades muito parecidas as dos quatérnios, definindo, inclusive, conjugado e módulo. No entanto, Graves não publicou sobre isso até 1845, pouco depois de ter lido descoberta dos octônios de Arthur Cayley. Por esta razão, os octônios também são conhecidos como números de Cayley. Hoje os créditos desta descoberta são dados para ambos independentemente de quem publicou primeiro.

Por muitos anos após a inserção dos octônios no mundo matemático, poucos estudiosos se atreveram a estudá-los devido a sua não-associatividade. Acreditava-se que não haviam muitas aplicações com eles, mas desde o início se notou que era uma álgebra de divisão normada. Atualmente, a quantidade de pessoas que os vem estudando está crescendo e muitos deles estão chegando a ideias interessantes, como a física Cohl Furey, que se intrigou ao descobrir ligação entre os octônios e a força forte em 1973, durante seu programa de pós-graduação na Universidade de Yale (EUA). Ela conseguiu um pós-doutorado na Universidade de Cambridge e, desde então, produziu uma série de resultados ligando os octônios ao Modelo Padrão, especialistas chamam essas descobertas de curiosas, elegantes e inovadoras.

Vamos agora conhecer a forma algébrica destes números.

Definição 20 *Sejam $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{R}$, um octônio é um número da forma $o = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7$. Denotamos por $\mathbb{O}$ o conjunto dos números octônios. Temos definidas as operações de soma e produto por escalar, dadas por*

- a) $(x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7) + (y_0 + y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 + y_4e_4 + y_5e_5 + y_6e_6 + y_7e_7) = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1)e_1 + (x_2 + y_2)e_2 + (x_3 + y_3)e_3 + (x_4 + y_4)e_4 + (x_5 + y_5)e_5 + (x_6 + y_6)e_6 + (x_7 + y_7)e_7;$
- b) $\lambda(x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7) = \lambda x_0 + \lambda x_1e_1 + \lambda x_2e_2 + \lambda x_3e_3 + \lambda x_4e_4 + \lambda x_5e_5 + \lambda x_6e_6 + \lambda x_7e_7,$

para $(x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7), (y_0 + y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 + y_4e_4 + y_5e_5 + y_6e_6 + y_7e_7) \in \mathbb{O}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Portanto temos um espaço vetorial.

Agora considere o conjunto $\{e_0 = 1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ e a seguinte tabela com o produto vetorial entre as componentes.

$\times$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Assim, temos o produto entre dois octônios o_1, o_2 dado por

$$\begin{aligned}
o_1 \cdot o_2 &= (x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7) \\
&\quad (y_0 + y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 + y_4 e_4 + y_5 e_5 + y_6 e_6 + y_7 e_7) \\
&= (x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 - x_5 y_5 - x_6 y_6 - x_7 y_7) + \\
&\quad (x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_4 + x_3 y_7 - x_4 y_2 + x_5 y_6 - x_6 y_5 - x_7 y_3) e_1 + \\
&\quad (x_0 y_2 - x_1 y_4 + x_2 y_0 + x_3 y_5 + x_4 y_1 - x_5 y_3 + x_6 y_7 + x_7 y_1) e_2 + \\
&\quad (x_0 y_3 + x_1 y_7 - x_2 y_5 + x_3 y_0 + x_4 y_6 + x_5 y_2 - x_6 y_4 + x_7 y_1) e_3 + \\
&\quad (x_0 y_4 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_3 y_2 + x_4 y_0 + x_5 y_7 + x_6 y_3 - x_7 y_5) e_4 + \\
&\quad (x_0 y_5 - x_1 y_6 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_4 y_7 + x_5 y_0 + x_6 y_1 + x_7 y_4) e_5 + \\
&\quad (x_0 y_6 + x_1 y_5 - x_2 y_7 + x_3 y_4 - x_4 y_3 - x_5 y_1 + x_6 y_0 + x_7 y_2) e_6 + \\
&\quad (x_0 y_7 + x_1 y_3 + x_2 y_6 - x_3 y_1 + x_4 y_5 - x_5 y_4 - x_6 y_2 + x_7 y_0) e_7.
\end{aligned}$$

Temos, então, que o espaço vetorial dos octônios junto com a multiplicação acima são uma álgebra.

No capítulo a seguir trataremos de algumas questões preliminares necessárias para entender nosso trabalho. Em seguida, apresentaremos o Processo de Cayley-Dickson e levantaremos a discussão sobre a associação das álgebras construídas com estas até aqui apresentadas.

CAPÍTULO 4

O PROCESSO DE CAYLEY-DICKSON.

Certamente já estamos em condições de começar a contruir álgebras de dimensão 2^n . Neste capítulo apresentaremos os passos que Arthur Cayley e Leonard Dickson descreveram para se construir estas álgebras. Em seguida apresentaremos exemplos das únicas álgebras normadas e com divisão que podemos construir aplicando este processo.

4.1 Construção de Álgebra.

Seja A uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{K}$ que tem o elemento 1 como identidade. Definimos em A uma involução $\rho(a) = \bar{a}$ tal que $a + \bar{a}, a\bar{a} \in \mathbb{K}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ fixo. Considere o conjunto $(A, \alpha) := \{(a_1, a_2); a_1, a_2 \in A\}$ onde estão definidas as seguintes operações

- (a) $(a_1, a_2) + (a_3, a_4) = (a_1 + a_3, a_2 + a_4);$
- (b) $(a_1, a_2)(a_3, a_4) = (a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2, \bar{a}_1a_4 + a_3a_2);$
- (c) $\lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2),$

para $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Notemos que (A, α) com as operações (a), (b) e (c) é uma álgebra com unidade $(1, 0)$.

Consideremos agora o conjunto $A' := \{(a, 0); a \in A\}$. Temos que, dados $(a, 0), (b, 0) \in A'$

$$(a, 0)(b, 0) = (ab + \alpha 0, 0 + 0) = (ab, 0) \in A'.$$

Portanto A' é uma subálgebra de (A, α) . Além do mais, $A \cong A'$ pela função linear

$$\begin{aligned} \phi : A &\rightarrow A' \\ a &\mapsto (a, 0) \end{aligned}.$$

Temos que ϕ é sobrejetora pois cada elemento de A' é imagem de um elemento de A . Agora, seja $a, b \in A$ tal que $a \neq b$, temos $(a, 0) \neq (b, 0)$, logo $\phi(a) \neq \phi(b)$, portanto ϕ é injetora. Assim, podemos afirmar que ϕ é bijetora.

ϕ também preserva o produto, pois

$$\phi(ab) = (ab, 0) = (a, 0)(b, 0) = \phi(a)\phi(b),$$

assim, a função ϕ leva a álgebra A na subálgebra A' de (A, α) .

Agora considere $v \in (A, \alpha)$ tal que $v = (0, 1)$, assim

$$v^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 + \alpha, 0 + 0) = (\alpha, 0) = \alpha(1, 0)$$

e

$$v(a, 0) = (0, 1)(a, 0) = (0 + \alpha 0, 0 + a) = (0, a),$$

logo, $vA' := \{(0, a); a \in A\}$ é um subespaço, mas não uma subálgebra pois, dados $(0, a_1), (0, a_2) \in vA'$, temos $(0, a_1)(0, a_2) = (\alpha a_2 \overline{a_1}, 0) \in A'$. Além disso

$$(A, \alpha) \equiv A' \oplus vA' := \{a_1 + va_2; a_1, a_2 \in A\}.$$

Assim, dado um elemento $(a_1, a_2) \in (A, \alpha)$ temos que $(a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2) = a_1 + va_2$. Portanto, temos que o produto de $(a_1 + va_2), (a_3 + va_4) \in (A, \alpha)$ será dado por

$$(a_1 + va_2)(a_3 + va_4) = (a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2) + v(\bar{a}_1a_4 + a_3a_2).$$

Agora, sejam $x = a_1 + va_2$ e $\bar{x} = a_1 - va_2$ pertencentes a (A, α) , temos uma involução $x \mapsto \bar{x}$ definida em (A, α) . Por fim, dados $\mathbb{K}$ um corpo e A uma álgebra com composição, então existe uma forma quadrática $\eta : A \rightarrow \mathbb{K}$ estritamente não-degenerada. Tomando $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ a forma bilinear associada, temos que $a \mapsto \bar{a} = f(1, a) - a$ é uma involução com $a + \bar{a}, a\bar{a} \in \mathbb{K}$, e a forma quadrática $\eta(a) = a\bar{a}$. Aplicando o processo de Cayley Dickson, obtemos a álgebra (A, α) , a involução $x \mapsto \bar{x}$ e a forma quadrática $\eta(x) = x\bar{x}$. Vamos ver agora o seguinte resultado a respeito da composição de η .

Lema 1 *A forma quadrática η admite composição se e somente se o produto em A é associativo.*

Demonstração. De fato, sejam $x, y \in (A, \alpha)$ com $x = a_1 + va_2$ e $y = a_3 + va_4$. Notemos que

$$\eta(x) = a_1\bar{a}_1 - \alpha a_2\bar{a}_2 = \eta(a_1) - \alpha\eta(a_2),$$

e

$$\eta(y) = a_3\bar{a}_3 - \alpha a_4\bar{a}_4 = \eta(a_3) - \alpha\eta(a_4).$$

Assim

$$\begin{aligned} \eta(xy) - \eta(x)\eta(y) &= \eta((a_1 + va_2)(a_3 + va_4)) - [\eta(a_1) - \alpha\eta(a_2)] \\ &\quad [\eta(a_3) - \alpha\eta(a_4)] \\ &= \eta(a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2 + v(\bar{a}_1a_4 + a_3a_2)) \\ &\quad - (\eta(a_1)\eta(a_3) - \alpha\eta(a_1)\eta(a_4) - \alpha\eta(a_2)\eta(a_3) \\ &\quad + \alpha^2\eta(a_2)\eta(a_4)) \\ &= \eta(a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2) - \alpha\eta(\bar{a}_1a_4 + a_3a_2) \\ &\quad - (\eta(a_1)\eta(a_3)) - \alpha\eta(a_1)\eta(a_4) - \alpha\eta(a_2)\eta(a_3) \\ &\quad + \alpha^2\eta(a_2)\eta(a_4). \end{aligned}$$

Observe que $\eta(\bar{a}) = \bar{a} \bar{a} = \overline{a\bar{a}} = a\bar{a} = \eta(a)$ desse modo $f(x, y) = \eta(x + y) - \eta(x) - \eta(y)$,
 assim

$$f(a_1a_3, \alpha a_4\bar{a}_2) = \eta(a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2) - \eta(a_1a_3) - \eta(\alpha a_4\bar{a}_2),$$

portanto

$$\begin{aligned} \eta(a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2) &= \eta(a_1a_3) + \eta(\alpha a_4\bar{a}_2) + \alpha f(a_1a_3, a_4\bar{a}_2) \\ \eta(a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2) &= \eta(a_1a_3) + \alpha^2\eta(a_4\bar{a}_2) + \alpha f(a_1a_3, a_4\bar{a}_2) \\ &= \eta(a_1)\eta(a_3) + \alpha^2\eta(a_4)\eta(\bar{a}_2) + \alpha f(a_1a_3, a_4\bar{a}_2) \\ &= \eta(a_1)\eta(a_3) + \alpha^2\eta(a_4)\eta(a_2) + \alpha f(a_1a_3, a_4\bar{a}_2). \end{aligned}$$

De forma análoga teremos

$$-\alpha\eta(\bar{a}_1a_4 + a_3a_2) = -\alpha\eta(a_1)\eta(a_4) - \alpha\eta(a_3)\eta(a_2) - \alpha f(\bar{a}_1a_4, a_3a_2).$$

Assim

$$\begin{aligned} \eta(xy) - \eta(x)\eta(y) &= \eta(a_1)\eta(a_3) + \alpha^2\eta(a_4)\eta(a_2) + \alpha f(a_1a_3, a_4\bar{a}_2) \\ &\quad - \alpha f(\bar{a}_1a_4, a_3a_2) - \alpha\eta(a_1)\eta(a_4) - \alpha\eta(a_3)\eta(a_2) \\ &\quad - \eta(a_1)\eta(a_3) + \alpha\eta(a_1)\eta(a_4) + \alpha\eta(a_2)\eta(a_3) \\ &\quad - \alpha^2\eta(a_2)\eta(a_4) \\ &= \alpha[f(a_1a_3, a_4\bar{a}_2) - f(\bar{a}_1a_4, a_3a_2)]. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} f(xy, zw) + f(xw, zy) &= f(x, z)f(y, w) \\ f(xy, zw) &= -f(xw, zy) + f(x, z)f(y, w) \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
f(a_1 a_3, a_4 \overline{a_2}) &= f(a_1 a_3 \cdot 1, a_4 \overline{a_2}) \\
&= -f(a_1 a_3 \overline{a_2}, a_4) + f(a_1 a_3, a_4) f(1, \overline{a_2}) \\
&= -f(a_1 a_3 \overline{a_2}, a_4) + f(f(1, \overline{a_2}) a_1 a_3, a_4) \\
&= f(f(1, \overline{a_2}) a_1 a_3 - a_1 a_3 \overline{a_2}, a_4) \\
&= f(a_1 a_3 (f(1, \overline{a_2}) - \overline{a_2}), a_4) \\
&= f(a_1 a_3 a_2, a_4).
\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}
0 = \eta(xy) - \eta(x)\eta(y) &= \alpha[f(a_1 a_3 \cdot a_2, a_4) - f(a_1 \cdot a_3 a_2, a_4)] \\
&= \alpha f(a_1 a_3 \cdot a_2 - a_1 \cdot a_3 a_2, a_4).
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\eta(xy) - \eta(x)\eta(y) = 0 &\Leftrightarrow \alpha f(a_1 a_3 \cdot a_2 - a_1 \cdot a_3 a_2, a_4) = 0 \\
&\Leftrightarrow a_1 a_3 \cdot a_2 - a_1 \cdot a_3 a_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (a_1 a_3) \cdot a_2 = a_1 \cdot (a_3 a_2).
\end{aligned}$$

Logo, A é associativo. □

A seguir veremos os exemplos de Álgebras de composição.

4.2 Exemplos de Álgebras de Cayley-Dickson.

I) Consideremos a álgebra $\mathbb{R}$ sobre o próprio corpo dos reais, e sejam $\alpha \mapsto \alpha$ a involução em $\mathbb{R}$, $\eta(\alpha) = \alpha^2$ a forma quadrática (η é estritamente não degenerada) e $f(\alpha, \beta) = \eta(\alpha + \beta) - \eta(\alpha) - \eta(\beta) = (\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 2\alpha\beta$. Veja que se $f(\alpha, \beta) = 0$ para todo $\beta \in \mathbb{R}$, ou seja, $2\alpha\beta = 0$ para todo $\beta \in \mathbb{R}$ então $\alpha = 0$, e $\eta(\alpha\beta) = (\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 = \eta(\alpha)\eta(\beta)$.

Portanto, $\mathbb{R}$ é uma álgebra com composição.

II) Seja $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $4\mu + 1 \neq 0$ e $K(\mu) := \{(\alpha_1, \alpha_2); \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ com as operações

$$(i) \quad (\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2);$$

$$(ii) \quad \lambda(\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2);$$

$$(iii) (\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1\beta_1 + \mu\alpha_2\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_1).$$

Notemos que $K(\mu)$ é uma álgebra comutativa, associativa e com unidade $(1, 0)$. Seja $A' := \{(\alpha, 0); \alpha \in \mathbb{R}\}$, veremos que A' é subálgebra de $K(\mu)$. Dados $(\alpha, 0), (\beta, 0) \in A'$, temos que $(\alpha, 0)(\beta, 0) = (\alpha\beta, 0) \in A'$. Considere $v_1 = (0, 1)$, temos que $v_1^2 = (\mu, 1)$ e $(\alpha, 0)v_1 = (0, \alpha)$, portanto $A'v_1 := \{(0, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$ e, assim, $K(\mu) = A' \oplus A'v_1$. Fazendo $A' \equiv \mathbb{R}$ dado por $(\alpha, 0) \equiv \alpha$, temos que $K(\mu) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}v_1$, logo, $v_1^2 = (\mu, 1)$ implica $v_1^2 = \mu + v_1$. Dados $a, b \in K(\mu)$ onde $a = \alpha_1 + \alpha_2v_1$ e $b = \beta_1 + \beta_2v_1$, temos o produto dado como $ab = (\alpha_1\beta_1 + \mu\alpha_2\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_1)v_1$, a involução $\bar{a} = \overline{\alpha_1 + \alpha_2v_1} = (\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_2v_1$ e a forma quadrática como $\eta(\alpha_1 + \alpha_2v_1) = (\alpha_1 + \alpha_2v_1)(\overline{\alpha_1 + \alpha_2v_1})$. Omitiremos a verificação de que η é de, fato, uma forma quadrática. Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \eta(\alpha_1 + \alpha_2v_1) &= (\alpha_1 + \alpha_2v_1)((\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_2v_1) \\ &= \alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2v_1 + \alpha_2\alpha_1v_1 + \alpha_2^2v_1 - \alpha_2^2v_1^2 \\ &= (\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 - \mu\alpha_2^2) + (-\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 + \alpha_2^2 - \alpha_2^2)v_1 \\ &= (\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 - \mu\alpha_2^2). \end{aligned}$$

Além disso, $\eta((\alpha_1 + \alpha_2v_1)(\beta_1 + \beta_2v_1)) = \eta(\alpha_1 + \alpha_2v_1)\eta(\beta_1 + \beta_2v_1)$. Considerando o polinômio $g(x) = x^2 - x - \mu \in \mathbb{R}[x]$, temos que $g(v_1) = v_1^2 - v_1 - \mu = \mu + v_1 - v_1 - \mu = 0$. Como $1 + 4\mu \neq 0$, temos que o polinômio não possui raiz real ou possui duas raízes reais distintas. Caso não possua raiz real, temos que $g(x)$ será irredutível sobre $\mathbb{R}$. Logo, $K(\mu)$ é um corpo.

Agora, se x_1 e x_2 forem as duas raízes reais, temos que $x_1 + x_2 = 1$ e $x_1x_2 = -\mu$. Considere $b = \frac{1}{x_1 - x_2}(-x_1 + v_1) = \frac{v_1 - x_1}{x_1 - x_2}$, note que $b^2 = b$, portanto b é um elemento idempotente, e, assim, $\{1, b\}$ é base de $K(\mu)$. Dados $(\alpha_1 + \alpha_2b), (\beta_1 + \beta_2b) \in K(\mu)$, temos o produto entre eles dado por

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2b)(\beta_1 + \beta_2b) &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2b + \alpha_2\beta_1b + \alpha_2\beta_2b^2 \\ &= \alpha_1\beta_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2)b \end{aligned}$$

Desse modo, com $\{1, b\}$ temos $K(\mu) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}v_1$. Dado $v = -\frac{1}{2} + v_1 \in K(\mu)$, temos

$$v^2 = (-\frac{1}{2} + v_1)^2 = \frac{1}{4} - v_1 + v_1^2 = \frac{1}{4} - v_1 + \mu + v_1 = \frac{1}{4} + \mu = \frac{1}{4}(1 + 4\mu) \neq 0.$$

Fazendo $v^2 = \alpha$, temos $\alpha \neq 0$. Considerando $(\mathbb{R}, \alpha) := \{\alpha_1 + \alpha_2 v; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ e o produto

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2 v)(\beta_1 + \beta_2 v) &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 v + \alpha_2 \beta_1 v + \alpha_2 \beta_2 v^2 \\ &= (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \alpha) + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) v. \end{aligned}$$

Para seguir, precisamos lembrar da seguinte definição.

Definição 21 (Característica De Um Corpo) *Dado um anel $\mathbb{K}$ com identidade $1_{\mathbb{K}}$, pode ser que exista alguma soma $1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + \cdots + 1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$, onde $0_{\mathbb{K}}$ é o elemento neutro aditivo. A menor quantidade de parcelas que fazem a soma dar zero é chamada de característica do anel. Caso esta soma não seja possível resultar em zero, dizemos que o anel tem característica zero.*

Assim, dado o corpo $\mathbb{R}$ com $\text{car}(\mathbb{R}) \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \neq 0$, então $(\mathbb{R}, \alpha) := \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}v$, onde $v^2 = \alpha$, o que implica $v = (0, 1)$. Tome $v_1 = \frac{1}{2} + v$, logo $\{1, v\}$ é base de $(\mathbb{R}, \alpha)$ e, assim, $(\mathbb{R}, \alpha) := \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}v_1 := \{\alpha_1 + \alpha_2 v_1; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$, daí

$$v_1^2 = \left(\frac{1}{2} + v\right)^2 = \frac{1}{4} + v + v^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + v_1 + \alpha = -\frac{1}{4} + v_1 + \left(\frac{1}{4} + \mu\right) = \mu + v_1.$$

Além disso, $4\mu + 1 = 4(\alpha - \frac{1}{4}) + 1 = 4\alpha \neq 0$. Agora, $(\alpha_1 + \alpha_2 v_1)(\beta_1 + \beta_2 v_1) \in K(\mu)$, dessa forma $(\mathbb{R}, 0) = K(\mu)$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_1 + \alpha_2 v_1} &= \overline{\alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{1}{2} + v\right)} \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 \frac{1}{2} - \alpha_2 v \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 \frac{1}{2} - \alpha_2 \left(-\frac{1}{2} + v_1\right) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_2 v_1 \end{aligned}$$

que coincide com a involução em $K(\mu)$.

III) Seja $\beta \in \mathbb{R}$, onde $\beta \neq 0$, construímos $Q(\mu, \beta) := (K(\mu), \beta)$ tal que $Q(\mu, \beta) = K(\mu) + \omega K(\mu)$, em que $\omega^2 = \beta$, logo

$$Q(\mu, \beta) := \{(\alpha_1 + \alpha_2 v) + \omega(\alpha_3 + \alpha_4 v); \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

Temos o produto de $[(\alpha_1 + \alpha_2 v) + \omega(\alpha_3 + \alpha_4 v)], [(\beta_1 + \beta_2 v) + \omega(\beta_3 + \beta_4 v)] \in Q(\mu, \beta)$ dado por

$$\begin{aligned} & [(\alpha_1 + \alpha_2 v) + \omega(\alpha_3 + \alpha_4 v)][(\beta_1 + \beta_2 v) + \omega(\beta_3 + \beta_4 v)] \\ &= [(\alpha_1 + \alpha_2 v)(\beta_1 + \beta_2 v) + \beta(\beta_3 + \beta_4 v)(\overline{\alpha_3 + \alpha_4 v}) + \\ & \quad \omega[(\alpha_1 + \alpha_2 v)(\beta_3 + \beta_4 v) + (\beta_1 + \beta_2 v)(\alpha_3 + \alpha_4 v)]]. \end{aligned}$$

$Q(\mu, \beta)$ não é comutativa, pois, para $v = [(0+1v)+\omega(0+0v)]$ e $\omega = [(0+0v)+\omega(1+0v)]$ temos $v\omega = -\omega v$. Porém, $Q(\mu, \beta)$ será associativa, a verificação pode ser encontrada em [3].

IV) Seja $\gamma \in \mathbb{R}$ com $\gamma \neq 0$, aplicando o processo de Cayley-Dickson na álgebra $Q(\mu, \beta)$ obtemos $C(\mu, \beta, \gamma) := (Q(\mu, \beta), \gamma)$. Tomando $z^2 = \gamma$, temos

$$\begin{aligned} C(\mu, \beta, \gamma) &:= Q(\mu, \beta) + zQ(\mu, \beta) \\ &= [(\alpha_1 + \alpha_2 v) + \omega(\alpha_3 + \alpha_4 v)] + z[(\beta_1 + \beta_2 v) + \omega(\beta_3 + \beta_4 v)]. \end{aligned}$$

Como $Q(\mu, \beta)$ não é comutativa, temos que $C(\mu, \beta, \gamma)$ também não será. Além disso, $C(\mu, \beta, \gamma)$ também não será associativa, pois, para $v = [(0 + 1v) + \omega(0 + 0v)] + z[(0 + 0v) + \omega(0 + 0v)]$, $\omega = [(0 + 0v) + \omega(1 + 0v)] + z[(0 + 0v) + \omega(0 + 0v)]$ e $z = [(0 + 0v) + \omega(0 + 0v)] + z[(1 + 0v) + \omega(0 + 0v)]$, temos que $(v\omega)z = z(\omega v)$ e $v(\omega z) = -z(\omega v)$. A verificação deste fato encontra-se em [3].

4.2.1 São As Únicas Álgebras de Divisão Normadas e com Composição que Conseguimos Construir?

Vamos entender melhor o que são álgebras de divisão normadas.

Bom, seja A uma álgebra com norma definida, diremos que ela é de divisão se, para qualquer $a \in A$ diferente de zero, temos $\|a\| = a\bar{a} \neq 0$ e existe $a^{-1} = \bar{a} \frac{1}{\|a\|}$. Isso faz com que as equações do tipo $ax = b$ e $ya = b$, com $a \in A$ tenham soluções únicas $x = a^{-1}b$ e $y = ba^{-1}$.

Por outro lado, temos uma a álgebra A admite composição se seu produto é conservado para a norma, isto é,

$$||ab|| = ||a|| ||b||.$$

Isto implica diretamente a igualdade

$$\left(\sum_{p=0}^n a_p^2\right) \left(\sum_{p=0}^n b_p^2\right) = \left(\sum_{p=0}^n c_p^2\right), n \in \{1, 2, 4, 8\}.$$

A expressão acima se traduz por: O produto da soma de quadrados resulta em uma nova soma de quadrados. A questão levantada é se essas igualdades acima valem, de fato, apenas para $n = 1, 2, 4, 8$.

Esta pergunta foi respondida em 1898 por Adolf Hurwits (1859 - 1919). Ele afirmou que sim, essas igualdades valem apenas para estes valores de n , que correspondem, respectivamente às álgebras $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$. No entanto, ainda não existe uma prova, tanto sobre a afirmação quanto sobre a negação, a respeito de $n = 3$, sendo ainda um problema em aberto.

CAPÍTULO 5

INTRODUÇÃO ÀS ÁLGEBRAS DE JORDAN

Neste capítulo falaremos sobre as Álgebras de Jordan, que possuem relação com muitas áreas da Matemática, já foram aplicadas em Geometria Projetiva, Teoria dos Números, Análise Complexa, Otimização, entre outros campos. Como mencionado anteriormente, essas álgebras foram introduzidas pelo alemão Pascual Jordan em uma tentativa de formular a base da Mecânica Quântica através de matrizes hermitianas e, para isso, desenvolveu um produto diferente do produto associativo usual.

Sabemos que as operações básicas de matrizes ou operadores são: multiplicação por escalar, adição, multiplicação de matrizes (ou composição de operadores) e a formação da matriz complexa conjugada transposta (operador adjunto). Mas essas operações de matrizes não são observáveis, isto é, os resultados não podem ser demonstrado por uma função de valor real no conjunto de todos os possíveis estados do sistema. Por isso, Jordan buscava uma nova configuração algébrica que estaria livre da dependência de uma estrutura matricial metafísica determinante e invisível, mas ainda iria desfrutar de todos os benefícios algébricos.

5.1 Definições e Exemplos

Vamos conhecer agora no que consistem as Álgebras de Jordan.

Definição 22 (Álgebras de Jordan) *Uma álgebra $\mathcal{J}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ é chamada de Álgebra de Jordan se seu produto satisfaz a condição de comutatividade*

$$xy = yx,$$

*para todo $x, y \in \mathcal{J}$, e também satisfaz o que chamamos de **identidade de Jordan**, dada por*

$$(x^2y)x = x^2(yx),$$

para todo $x, y \in \mathcal{J}$.

Considerando uma álgebra $\mathcal{A}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, podemos definir no espaço vetorial de $\mathcal{A}$ um novo produto $\odot$ entre os elementos $x, y \in \mathcal{A}$ da seguinte forma

$$x \odot y = \frac{1}{2}(xy + yx),$$

onde xy representa o produto usual de $\mathcal{A}$. Chamaremos a álgebra $\mathcal{A}$ com o produto $\odot$ de $\mathcal{A}^{(+)}$. Temos que $\mathcal{A}^{(+)}$ será uma álgebra de Jordan, pois

$$x \odot y = \frac{1}{2}(xy + yx) = \frac{1}{2}(yx + xy) = y \odot x$$

e também

$$\begin{aligned}
(x^2 \odot y) \odot x &= \left(\frac{1}{2}(x^2y + yx^2)\right) \odot x \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2}(x^2y + yx^2)\right)x + x\left(\frac{1}{2}(x^2y + yx^2)\right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2yx + \frac{1}{2}yx^3 + \frac{1}{2}x^3y + \frac{1}{2}xyx^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2yx + \frac{1}{2}xyx^2 + \frac{1}{2}yx^3 + \frac{1}{2}x^3y \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[x^2 \left(\frac{1}{2}yx + \frac{1}{2}xy \right) + \left(\frac{1}{2}yx + \frac{1}{2}xy \right) x^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[x^2(y \odot x) + (y \odot x)x^2 \right] \\
&= x^2 \odot (y \odot x).
\end{aligned}$$

Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan. Um subespaço vetorial $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{J}$ que satisfaz $\mathcal{S}\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$ é chamado de subálgebra de $\mathcal{J}$. Se um subespaço $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ satisfaz a condição $\mathcal{J}\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$, então $\mathcal{I}$ será um Ideal da álgebra de Jordan $\mathcal{J}$.

Definição 23 (Álgebras de Jordan Especiais) *Uma álgebra de Jordan que é isomorfa a uma subálgebra $A^{(+)}$ para alguma álgebra associativa A é chamada de especial. As álgebras de Jordan que não são especiais são chamadas de excepcionais.*

Definição 24 (Álgebra unitária) *Se uma álgebra A possui um elemento identidade, então essa álgebra é chamada de unitária (ou unital).*

Um elemento e de uma álgebra A é chamado de identidade (unidade) quando, para algum $x \in A$, temos

$$ex = xe = x.$$

Definição 25 (Álgebras de Jordan Formalmente Reais) *Uma álgebra de Jordan é formalmente real se*

$$x_1^2 + \cdots x_n^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0,$$

para x_i pertencentes à álgebra de Jordan.

Definição 26 (Álgebra de Potências Associativas) *Seja A uma álgebra. Se para todo $x \in A$ com as potências definidas por*

$$x^1 = x$$

$$x^{i+1} = x^i x, \forall i \in \mathbb{N}$$

tivermos

$$(x^r)^s = x^{rs}$$

$$x^r x^s = x^{r+s}$$

para $r, s \in \mathbb{N}$, dizemos que A é de potências associativas.

Definição 27 *Seja A uma álgebra de potências associativas. As potências de $a \in A$ estão bem definidas para $a^1 = a, \dots, a^{n+1} = a^n a$. Dizemos que a é nilpotente se existe um inteiro positivo k tal que $a^k = 0$.*

Definição 28 *Quando todos os elementos de A (de um ideal I de A) são nilpotentes, dizemos que A é uma nilálgebra (I é um nilideal).*

Toda álgebra de potências associativas contém um único ideal maximal $Nil(A)$ tal que a álgebra quociente $A \setminus Nil(A)$ não contém nilideais não-nulos. Este ideal $Nil(A)$ é denominado nilradical de A .

Toda álgebra de Jordan $\mathcal{J}$ é de potências associativas, logo o $Nil(\mathcal{J})$ está bem definido.

5.2 Classificações de Álgebras de Jordan

Definição 29 *Uma $\mathbb{K}$ -álgebra de Jordan de dimensão finita $\mathcal{J}$ é chamada de*

1. *Simples se 0 e $\mathcal{J}$ são os únicos ideais de $\mathcal{J}$ e, além disso, $\mathcal{J} \neq 0$.*
2. *Semissimples se $\mathcal{J}$ é uma soma direta finita de álgebras simples.*
3. *Simples Central se $\mathcal{J}_K$ é simples para toda extensão K de $\mathbb{K}$.*
4. *Separável se $\mathcal{J}_K$ é semissimples para toda extensão K de $\mathbb{K}$.*

Observamos que toda álgebra $\mathcal{J}$ simples central é simples e toda álgebra $\mathcal{J}$ separável é semissimples.

Exemplo 19 (Álgebra de Jordan simples) *Consideremos a álgebra de Jordan $\mathbb{R}$. Sabemos que $\mathbb{R}^2 \neq 0$. Agora, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathcal{I}$, onde $\mathcal{I}$ é um ideal de $\mathcal{J}$, temos que*

$$ax = y \Rightarrow y \in \mathcal{I}.$$

Ao multiplicarmos a equação pelo número real $\frac{1}{a}$ teremos

$$\frac{1}{a}ax = \frac{1}{a}y \Rightarrow x = \frac{1}{a}y.$$

Logo, $x \in \mathcal{I}$ e, assim, $\mathcal{I} = \mathbb{R}$.

Agora, consideremos o subespaço vetorial $0_{\mathbb{R}}$. Seja $x \in \mathbb{R}$ qualquer e $0 \in 0_{\mathbb{R}}$. Temos

$$x0 = 0 \in 0_{\mathbb{R}}.$$

Logo, $0_{\mathbb{R}}$ é um ideal de $\mathbb{R}$. Temos então que $\mathbb{R}$ é uma álgebra de Jordan simples.

Agora vejamos mais um exemplo.

Exemplo 20 (Álgebra de Jordan Simples) *Consideremos a álgebra de Jordan $M_n(\mathbb{R})Sym$ das matrizes simétricas de orden n com coeficientes reais. Seja $\mathcal{I}$ um ideal de $M_n(\mathbb{R})Sym$, $A \in M_n(\mathbb{R})Sym$ e $B \in \mathcal{I}$. Temos*

$$A \odot B = C \Rightarrow C \in \mathcal{I}.$$

Vamos multiplicar a equação pela matriz $B^{-1} \in M_n(\mathbb{R})Sym$, assim

$$A \odot B \odot B^{-1} = C \odot B^{-1} \Rightarrow A = C \odot B^{-1}.$$

Logo, $A \in \mathcal{I}$, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})Sym$. Portanto $\mathcal{I} = M_n(\mathbb{R})Sym$.

Agora, consideremos o subespaço vetorial 0_M de $M_n(\mathbb{R})Sym$ e $A \in M_n(\mathbb{R})Sym$, temos

$$A0 = 0 \in 0_M.$$

Portanto 0_M é um ideal de $M_n(\mathbb{R})Sym$. Logo, $M_n(\mathbb{R})Sym$ é uma álgebra de Jordan simples.

Qualquer álgebra associativa A sobre os reais podem gerar uma álgebra de Jordan $A^{(+)}$ com a quasi-multiplicação $x \odot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$, que é um produto comutativo e satisfaz a identidade de Jordan $(x^2 \odot y) \odot x = x^2 \odot (y \odot x)$.

Uma álgebra de Jordan é chamada de especial se puder ser escrita como uma subálgebra de Jordan de alguma álgebra $A^{(+)}$.

Exemplo 21 (Álgebra de Jordan Hermitiana) *Seja A uma álgebra de Jordan com uma involução $*$. Então no subespaço dos elementos hermitianos $x^* = x$ e $y^* = y$ temos*

$$(x \odot y)^* = y^* \odot x^* = y \odot x = x \odot y.$$

Portanto formam uma álgebra de Jordan especial $\mathcal{H}(A, *)$.

Exemplo 22 *O conjunto das matrizes auto-adjuntas reais, complexas ou quatêrnicas com o produto de Jordan formam uma Álgebra de Jordan especial.*

Exemplo 23 *O conjunto das matrizes auto-adjuntas 3×3 octônicas com o produto de Jordan forma uma álgebra de Jordan Excepcional de dimensão 27.*

Jordan chamou as álgebras que satisfizessem sua identidade, seu produto e fossem formalmente reais de *r-sistema*.

a seguir veremos um importante resultado a respeito de Álgebras de Jordan.

Teorema 2 *Todos os r-sistemas de dimensão finita podem ser escritos como uma soma direta dos cinco blocos a seguir*

1. Matrizes simétricas $Sym_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$.

2. Matrizes hermitianas sobre os complexos, $Her_n(\mathbb{C})$, $n \geq 3$.
3. Matrizes hermitianas sobre os quatérnios, $Her_n(\mathbb{H})$, $n \geq 3$.
4. Álgebra de Albert das matrizes hermitianas sobre os octônios, $Her_3(\mathbb{O})$.
5. Os fatores spin.

Os r –sistemas de 1 a 4 são construídos com o produto de Jordan e a verificação deste teorema se encontra em [9]

□

Teorema 3 *Cada álgebra de Jordan simples de dimensão finita é isomorfa a uma álgebra de um dos seguintes tipos*

1. Hermitiana.
2. de Clifford.
3. de Albert.

Este teorema foi verificado por Efim Zelmanove em 1970 e publicado em [13].

□

Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan de dimensão finita. O nilradical $Nil(\mathcal{J})$ é nilpotente e a álgebra quociente $\mathcal{J} \setminus Nil(\mathcal{J})$ é isomorfa à uma soma direta finita de álgebras simples.

Teorema 4 *Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$. Então $\mathcal{J}$ é isomorfa a uma das seguintes álgebras*

- $\mathbb{K}$
- $\mathcal{J}(V, f)$, em que f é não-degenerada e V é um espaço vetorial de dimensão finita e maior que 1.
- $H(A_n)$, $n \geq 3$, em que A é uma álgebra com composição e A é associativa para $n > 3$.

Demonstração: A demonstração deste teorema encontra-se em [12].

□

Teorema 5 *Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan simples. Então $\mathcal{J}$ é isomorfa a uma das seguintes álgebras*

- $\mathcal{J}(V, f)$, em que f é não-degenerada.
- $A^{(+)}$, em que A é uma álgebra associativa simples.
- $H(A, *)$, em que A é uma álgebra associativa simples com involução $*$.
- Uma álgebra de Albert.

Demonstração: A demonstração deste resultado se encontra em [14].

□

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Percebemos, então que as Álgebras de Jordan possuem uma relação direta com as álgebras de Cayley-Dickson e, ao estudar mais profundamente encontramos resultados interessantes, como os mencionados no capítulo anterior. É muito curioso que tenham encontrado álgebras com características tão surpreendentes e instigantes.

Neste trabalho focamos especialmente em apresentar todos estes conceitos estudados ao longo da graduação e encaminhar suas associações para estudos futuros. Mais a frente pretendemos nos aprofundar no assunto e esperamos trazer novas produções, visto que as aplicações destes resultados vem ganhando força, o que nos motiva ainda mais a continuar nossos estudos.

Pretendemos continuar este caminho em cima dos resultados das classificações mostradas, pois ainda há muito o que desbravar e, para isso, temos excelentes referências para nos lapidar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Eves, H., Introdução à História da Matemática. Editora da Unicamp, 2011.
- [2] Pulino, P., Álgebra Linear e Suas Aplicações - Notas de Aula. UNICAMP, 2012.
- [3] Silva, M.S.B., Solução não-clássica de equações elípticas totalmente não lineares via álgebras não associativas. UFPA, 2019.
- [4] de Brito Lima, C.A., Sobre Álgebras de Jordan e Cones Simétricos. UFPA, 2021.
- [5] Martin, M.E., Deformações e Isotopias de Álgebras de Jordan. USP, 2013.
- [6] Santos, D.J., A Álgebra Dos Complexos/Quatérnios/Octônios e a Construção de Cayley-Dickson. UFG, 2016.
- [7] Torezani, W. F., Álgebras Com Composição e Álgebras Com Pseudo-Composição. IME-USP, 1998.
- [8] McCrimmon, K.; A Taste of Jordan Algebras. Springer, 2000.
- [9] Jordan, P.; Neumann, J. Von; Wigner, E.; On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism. Ann. Math. 35. 29-64. 1934.
- [10] Nadirashvili, N.; Tkachev, V.; Vladut, S., *Nonlinear Elliptic Equations and Nonassociative Algebras*. AMS, 2014.

- [11] Zhevlakov, K.A.; Slin'ko, A.M.; Shestakov, I.P.; Shirshov, A.I.; Rings That Are Nearly Associative, Academic Press, 1982.
- [12] Jacobson, N., Structure and Representations of Jordan Algebras; vol. 39 of American Mathematical Society Colloquium Publications, American Mathematical Society, Providence, 1968.
- [13] Zelmanov, E.I.; Primary Jordan Algebras. Algebra and Logic 18. 1979.
- [14] Zelmanov, E.I.; On Prime Jordan Algebras II. Sib. Math. J. 24: 73-85. 1983.