

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITARIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Mike Jhonatan Dias Lopes

**História da Matemática: Construção da Integral de Riemann e
Aplicações no Geogebra.**

Castanhal - PA

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITARIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Mike Jhonatan Dias Lopes

História da Matemática: Construção da Integral de Riemann e Aplicações no Geogebra.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial a obtenção do título de graduado no curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Pará, *campus* -universitário de castanhal.

Orientador: Prof. José Geraldo Gonçalves da Silva

Castanhal - PA

2018

**História Da Matemática: Construção Da Integral De Riemann E Aplicações No
Geogebra.**

Este trabalho foi julgado em _____ adequado para a obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática, e aprovado na sua forma final pela banca examinadora que atribuiu o conceito _____.

Prof. M. Eng. José Geraldo Gonçalves da Silva

Orientador – FACMAT/CUNCAST/UFGA

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Rozal

Membro – FACMAT/CUNCAST/UFGA

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família por sempre está ao meu lado nos momentos em que mais preciso, em especial a minha mãe por nunca ter deixado falta nada em minha vida, além disso tudo isso ainda ter conseguido me proporcionados condições para que eu tivesse o melhor estudo possível no qual estava no seu alcance, e sempre me apoiado em todos esses anos até este momento de grande importância na minha vida.

Agradeço bastante ao meu primo Carlos Willian por ter usando um pouco de seu tempo disponível para me ajudar em alguns detalhes da minha pesquisa e também na tradução do resumo, fazendo o Abstract.

Agradeço muito a Titia Leonice que é uma excelente Professora de Português, por ter reservado em seus dias disponíveis momentos para me auxiliar na correção ortográfica da minha pesquisa.

Agradeço aos meus amigos, Josué Augusto, Jobson Franco e Luciano Teran. Uma amizade que aconteceu na UFPA e iremos levar para o resto da vida, pois nesses quatro anos estivemos sempre unidos, nos apoiando e nos ajudado em momentos difíceis encontrados nessa caminhada da graduação.

Agradeço ao meu antigo professor de matemática, Jhonatan Lima, no qual acabou se tornando um grande amigo e me ajudou tirando algumas dúvidas que surgiu no decorrer da graduação.

Agradecimento especial ao meu orientador no qual, me acolheu e me auxiliou na construção deste trabalho.

LISTA DE SÍMBOLOS

a.C.: Simbologia para: Antes de Cristo.

IV: Simbologia para: Século quatro.

XVII: Simbologia para: Século dezessete.

XVIII: Simbologia para: Século dezoito.

XIX: Simbologia para: Século dezenove.

XXI: Simbologia para: Século vinte e um.

Δx : Simbologia para: Variação nos valores de x .

Δy : Simbologia para: Variação nos valores de y .

∞ : Simbologia para: Infinito.

$>$: Simbologia para: Maior que.

$\geq$: Simbologia para: Maior ou igual.

$<$: Simbologia para: Menor que.

$\leq$: Simbologia para: Menor ou igual.

$=$: Simbologia para: Igual

$\neq$: Simbologia para: Diferente.

$\rightarrow$: Simbologia para: Tende a.

$\Rightarrow$: Simbologia para: Implica que.

$a * b$: Simbologia para: Produto entre dois elementos, multiplica a por b .

$\frac{a}{b}$: Simbologia para: Fração entre dois elementos, dividir a quantidade a para b .

...: Simbologia para: Reticências, repetição de um determinado processo.

ΔABC : Simbologia para: Triângulo de vértices A B e C.

AP : Simbologia para: Área do polígono.

AP_i : Simbologia para: Área do polígono inscrito.

AP_c : Simbologia para: Área do polígono circunscrito.

AQ : Simbologia para: Área do quadrado.

AQ_p : Simbologia para: Área do quadrado pequeno.

AQ_g : Simbologia para: Área do quadrado grande.

AR : Simbologia para: Área do retângulo.

AT : Simbologia para: Área do triângulo.

$\overline{AB}$: Simbologia para: Segmento de reta A ate B.

$f(x)$: Simbologia para: Função em relação a x .

$\int_b^a$: Simbologia para: Integral definida de a até b .

$\int_{-a}^b$: Simbologia para: Integral Inferior.

$\int_a^{-b}$: Simbologia para: Integral superior.

$[a, b]$: Simbologia para: Intervalo a ate b .

Df : Simbologia para: Domínio da função.

$|x|$: Simbologia para: Modulo de x .

L e $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$: Simbologia para: Limite de uma função.

ε e δ : Simbologia para: Um número pequeno.

(x_1, x_2) : Simbologia para: Coordenadas de um ponto no plano cartesiano.

$\sum_{i=1}^n (x + y)$: Simbologia para: Somatória de $i = 1$ até o numero n da expressão: $x + y$.

$S(f, P)$: Simbologia para: Soma superior da função particionada.

$s(f, P)$: Simbologia para: Soma inferior da função particionada.

ABNT Associação Brasileira de Normas Técnicas

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Mostrar a ideia dos gregos de como calcular as áreas de polígonos.	17
Figura 2 – Mostrar a comparação de área de um quadrado com um círculo.	18
Figura 3 – Mostrar a comparação de área de um pentágono com um círculo.	19
Figura 4 – Mostrar a comparação de área de um hexágono com um círculo.	19
Figura 5 – Mostrar a ilustração do que a Proposição 1 de Euclides se tratar.	21
Figura 6 – Mostrar a ilustração do que a Proposição 3 de Euclides se tratar.	22
Figura 7 – Mostrar a ilustração do que a Proposição 19 de Euclides se tratar.	22
Figura 8 – Mostrar a ilustração do que a Proposição 21 de Euclides se tratar.	23
Figura 9 – Mostra a propriedade de Euclides de semelhança de triângulos.	24
Figura 10 – Mostrar a ilustração de triângulos inscritos dentro de um segmento parabólico.	25
Figura 11 – Mostrar a primeira situação de existência de Limite.	31
Figura 12 – Mostrar a segunda situação de existência de Limite.	32
Figura 13 – Mostrar a terceira situação de existência de Limite.	32
Figura 14 – Mostrar a quarta situação de existência de Limite.	32
Figura 15 – Mostrar a ideia de coeficiente angular.	34
Figura 16 – Mostrar a construção de uma reta tangente ao gráfico.	35
Figura 17 – Mostrar a noção de integral.	37
Figura 18 – Mostrar como é uma partição de um intervalo $[a, b]$	39
Figura 19 – Mostrar a soma de retângulos que possuem bases extremamente pequena.	40
Figura 20 – Mostrar a soma de retângulos inferiores a função.	41

Figura 21 – Mostrar a soma de retângulos que ultrapassam a função, também conhecida como soma superior.	41
Figura 22 – Mostrar o gráfico que representa a função $y = x^2 + 1$ para auxiliar na demonstração do Teorema 3.5	47
Figura 23 – Mostrar o gráfico da função que representa a função $y = 1$ para auxiliar na demonstração do Teorema 3.5	47
Figura 24 – Mostrar o gráfico da função que representa a função $y = x^2$ para auxiliar na demonstração do Teorema 3.5	47
Figura 25 – Mostrar o gráfico que representa a função $y = x$ para auxiliar na demonstração do Teorema 3.6	48
Figura 26 – Mostrar o gráfico que representa a função $y = 2x$ para auxiliar na demonstração do Teorema 3.6	48
Figura 27 – Mostra a vizinhança de um ponto c , para auxiliar a compreensão sobre vizinhança, necessária na demonstração do Teorema 3.10	51
Figura 28 – Mostrar a tela inicial do programa GeoGebra.	55
Figura 29 – Mostrar a Animação da função $f(x) = x^2$ no GeoGebra.	55
Figura 30 – Mostrar a barra de entrada do GeoGebra, nela escrito o seguinte comando: “SomaDeRiemannSuperior”.	56
Figura 31 – Mostrar a animação da Soma Superior com 5 retângulos.	57
Figura 32 – Mostrar a animação da Soma Superior com 15 retângulos.	58
Figura 33 – Mostrar a barra de entrada do GeoGebra, nela escrito o seguinte comando: “SomaDeRiemannInferior”.	59
Figura 34 – Mostrar a animação da Soma Inferior com 5 retângulos.	59
Figura 35 – Mostrar a animação da Soma Inferior com 15 retângulos.	60

RESUMO

Este trabalho visa apresentar com uma linguagem simples para que os alunos que estejam iniciando ou já cursando Licenciatura Plena em Matemática, consigam compreender sem muitas dificuldades como se deu a construção histórica do cálculo de área desde os primeiros métodos conhecido pela humanidade até chegar no que é conhecido hoje como Integral de Riemann. Abordou-se assuntos como o Método da Exaustão, Quadratura da Parábola, noções de limite e derivada, *cálculo de área delimitada embaixo da curva*, método da INTEGRAL DE RIEMANN e suas respectivas proposições e teoremas. Noções sobre o programa Geogebra também foram utilizadas como ferramenta adicional para se ensinar em sala de aula bem como a relevância deste trabalho. Portanto, os alunos e professores que lerem o mesmo poderão aprender e resolver problemas envolvendo a Integral de Riemann além de conhecer a história sobre o *Cálculo integral*.

Palavras-chaves: Cálculo, Proposições, Teoremas, Integral de Riemann, Geogebra, Método, Área.

ABSTRACT

This work aims to present in a simple language for students that are starting or already initiating the full degree in Mathematics can understand without much difficult how the historical construction of calculus of area was made, until the first methods to the nowadays known as RIEMANN's integral. Topics such as the Exhaustion Method, Parabola Quadrature, notions of limit and derivative, calculation of the area delimited under the curve and RIEMANN's integral methods and their respective propositions and theorems were discussed. Notions about the Geogebra program were also used as an additional tool to teach in the classroom as well as the relevance of this work. Therefore, students and teachers who read this will be able to learn and solve problems involving the Integral of Riemann besides knowing the history on the integral Calculus.

Keywords: Calculus, Propositions, Theorems, RIEMANN's integral, Geogebra, Area.

Sumário

Introdução	12
Motivação do Trabalho	14
Objetivo Geral.....	14
Objetivos Específicos	14
Organização do Texto.....	15
Capítulo 1	16
1.1 Lema de Eudoxo.....	17
1.2 Quadratura do círculo	18
1.3. Arquimedes de Siracusa	21
1.4. Quadratura da Parábola.	21
Capítulo 2	30
2.1 Teorema Fundamental do Cálculo.	31
2.2 Noção de limite.	31
2.3 Noção de Derivada.	33
2.4 Noção de Integral.	36
Capítulo 3.....	39
3.1 Motivação de Riemann.....	39
3.2 Somas inferiores e superiores.....	40
3.3 Critérios de integrabilidade.	42
3.4 Propriedades da integral.	46
3.5 Soma de Riemann	52
Capítulo 4.....	54
4.1. Soma de Riemann no Geogebra.....	55
4.2. Soma inferior de Riemann no GeoGebra.....	59
Considerações Finais	62
Sugestões para Trabalhos Futuros.....	64
Referências	65

INTRODUÇÃO

O cálculo de área como muitos outros elementos da matemática nasceram da necessidade humana. Segundo Herôdoto historiador grego (viveu em torno de 484 – 420 a.C.) “a geometria de medições teria nascido no Egito”: em um determinado época do ano o Rio Nilo enchia e após um certo período ele secava, sendo necessário que os egípcios fizessem a separação das terras novamente, sempre após a seca do rio Nilo. Essa divisão era preciso, por quê? Como o homem já vivia em sociedade viu-se obrigado a medir e demarcar terras, com o intuito de evitar conflitos entre vizinhos separando cada lote para seus devidos donos mostrando-lhes até aonde ficava o início e o fim de cada propriedade.

A demarcação dessas terras não era apenas para evitar conflitos entre os vizinhos, mas também para beneficiar o estado: esse cálculo de área era bem mais importante e lucrativo, pois naquele tempo o governo obrigava os comerciantes, os moradores, a população em geral, a pagar impostos. Logo precisava saber quanto era o total daquele espaço que cada habitante tinha em sua propriedade ou comércio, objetivando utilizar esses dados para calcular o valor que cada cidadão deveria pagar, quanto maior a propriedade, maior era o valor do imposto.

Historicamente esse relato do cálculo de área que se deu no Egito, envolvia apenas áreas quadradas e retangulares. Métodos esses que se aprofundaram no século IV a.C., na Grécia com o estudo das áreas circulares.

O século IV a.C. é marcado por um fato muito importante, a morte de Sócrates que era o mestre de Platão. Este acabou se tornando a nova inspiração para a matemática desse século fazendo inúmeras realizações, sendo a principal, a Academia de Platão em Atenas que se tornou o centro das atividades matemáticas na época. Segundo Boyer (2ª edição, página 58) sobre a porta da escola lia-se: “Que ninguém que ignore a geometria entre aqui”. Platão tinha um alto conhecimento matemático que havia recebido de Sócrates, porém não ficou conhecido como matemático e sim como: “criador de matemáticos”. A sua academia recebia os mais brilhantes matemáticos da época.

Em uma viagem a Sicília houve um contato de Platão com uma figura geométrica: o dodecaedro, e o matemático considerou-o, o quinto e último sólido regular, fez uma junção desse sólido e os já existentes e atribuiu-lhes o nome de Sólidos Platônicos. Com os estudos

sobre os Sólidos Platônicos ficou conhecidas as suas áreas, como áreas comuns, e as que possuíam curvas, áreas incomuns. Outro problema parecido foi a comparação de curvas com retilíneas que foi apresentado para a academia de Platão. O matemático Eudoxo de Cnido (morreu por volta de 355 a.C.) foi muito importante na resolução deste problema.

EUDOXO DE CNIDO

Eudoxo de Cnido (408-355? a.C.) estudou na Academia Platônica e torna-se um dos discípulos de Platão e também um dos mais célebres matemáticos desta época.

Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando, equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos equimúltiplos, considerados em ordem correspondente. [Boyer tradução da 3ª edição Americana, p.80].

Esta citação fala sobre um dos maiores feitos de Eudoxo: a definição da teoria das proporções que trouxe uma solução para a crise dos incomensuráveis (grandezas que não possuem um valor comum). Hipócrates foi um matemático que veio antes de Eudoxo e provou que as áreas de círculos e os diâmetros dos quadrados estão interligadas de alguma maneira entre si. Suspeita-se que ele teria conseguido através de algum artifício envolvendo proporções e igualdade de razões. Talvez Hipócrates possa ter antecipado Eudoxo, entretanto esse foi quem trouxe consigo uma nova definição de razões iguais.

Segundo BOYER, em História da Matemática, a definição de Eudoxo obedece o seguinte: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, somente se, dados inteiros m e n sempre que $m * a < n * b$, então $m * c < n * d$; ou se $m * a = n * b$, então $m * c = n * d$; ou se $m * a > n * b$, então $m * c > n * d$.

Esta definição é bastante semelhante ao processo que é utilizado no Século XXI sobre multiplicações cruzadas:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow a * d = b * c$$

Com essa definição Eudoxo trouxe solução para a crise dos incomensuráveis, porém a partir dela surgiram outros problemas a serem solucionados como a comparação de curvas a

retilíneas. O matemático então produz métodos para solucionar essa problemática, solução essa que é de grande valia para a nossa pesquisa (que será aprofundado no capítulo 1 deste trabalho).

Motivação do Trabalho

A criação deste trabalho deu-se pela curiosidade de conhecer a história do cálculo integral, e as motivações de como se criaram os primeiros métodos de cálculos de áreas. Estas que na antiga Grécia ficou dividida em duas: áreas comuns e não comuns: as que não fossem quadradas, retangulares ou triangulares. No curso de Licenciatura Plena em Matemática, acaba-se deparando com a *Integral de Riemann* no qual é um método utilizado para efetuar cálculos de área delimitada embaixo da curva, entretanto na Universidade não ensinam a história da construção do mesmo, e se outros métodos o antecederam. Então, este trabalho objetiva mostrar não só a definição Integral de Riemann, mas também toda sua trajetória histórica desde o *Método de Exaustão* passando pela *Quadratura da Parábola* até a *Integral de Riemann*, para que futuros discentes conheçam a essência da Integral. Assim como oferece uma ferramenta computacional que ilustra o método que poderá ser utilizado no ensino da integral.

Objetivo Geral

Estudar e investigar a história da matemática, do cálculo e a construção do método Integral de Riemann e ao final da pesquisa ilustra-lo em um programa computacional.

Objetivos Específicos

No intuito de alcançar o objetivo geral, é necessário contemplar os seguintes objetivos específicos:

- Conhecer o contexto histórico e a motivação no qual levou o homem a calcular áreas.
- Conhecer os primeiros métodos utilizados para o cálculo de área.
- Conhecer Limite, Derivada e Integral.
- Conhecer a integral de Riemann.
- Conhecer o programa Geogebra.
- Ilustrações da *Integral de Riemann* no Geogebra.

Organização do Texto

O texto está organizado em quatro capítulos os quais exploram diferentes aspectos relacionados ao tema estudado.

O primeiro capítulo se passa na Grécia antiga, apresentando os primeiros métodos conhecidos e os criadores dos mesmos, que tiveram participação fundamental na construção do cálculo integral, no qual esses métodos têm como resolver problemas de cálculos de áreas não comuns.

No capítulo 2 serão apresentados um pouco o contexto histórico do século XVII até o início do século XIX, no qual foram criados conceitos fundamentais que são a base do Cálculo diferencial e integral. Conceitos estes que são de suma importância para introduzir a Integral de Riemann.

O capítulo 3 é destinado a apresentar a construção da definição de Integral de Riemann, como as demonstrações de alguns teoremas que dizem respeito: a fundamentação da motivação de Riemann, aos critérios de integrabilidade e propriedades da integral.

O capítulo 4 está destinado para apresentar o programa computacional Geogebra e mostrar algumas aplicações da integral de Riemann no mesmo, com breves comparações computacional.

Ao final, serão apresentadas as considerações finais acerca do presente trabalho, enumerando seus pontos de relevância para a vida acadêmica, e pontos de continuidade para futuros trabalhos.

CAPÍTULO 1

MÉTODO DE EXAUSTÃO

O método da exaustão foi um dos primórdios utilizado pelo homem para calcular problemas relacionados as áreas não comuns: as que não fossem triângulos, quadrados ou polígonos (os gregos calculavam área de polígonos dividindo-os em vários triângulos). Logo, as áreas não comuns seriam as de figuras que possuísem curvaturas.

Após a colaboração de Eudoxo sobre o problema de incomensuráveis, começou a ser possível fazer demonstrações satisfatória sobre teorema que falavam sobre proporções. A partir dessa descoberta os gregos depararam-se a um assunto que era um tabu para a sociedade da época, *o conjunto infinito*. Junto a esse tabu surge outro problema a ser resolvido que era o de *comparação de curvas com retilíneas*.

O matemático, Eudoxo de Cnido (408-355? a.C.), surge novamente e fornece a chave para a solução desse problema. Os Matemáticos anteriores a Eudoxo, já haviam sugeridos ideias envolvendo essa comparação: se tentasse inscrever e circunscrever figuras retilíneas na parte de dentro da figura curva e também por fora dessa figura na qual se estava tentando compará-las; e de alguma forma multiplicar indefinidamente o número de lados. Porém, não conseguiram terminar o argumento devido não ter noção de conjunto infinito e nem noção de limite.

Nota-se que nessa época os matemáticos já tinham conhecimentos de como se calcular a área de quadrados, a de retângulos, a de triângulos e a de polígonos.

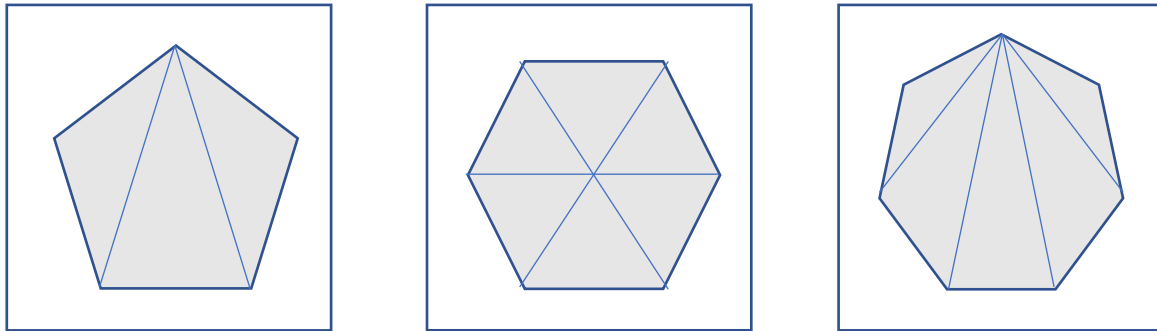
Área do quadrado: $AQ = l * l = b * h$, se somente se, $b = h$.

Área do retângulo: $AR = b * h$.

Área do triangulo: $AT = \frac{b*h}{2}$.

Área dos polígonos: para se calcular a área de um polígono os gregos utilizavam-se da seguinte metodologia: dividiam-na em vários triângulos. Essa quantidade iria depender do total de lados que o polígono possuía. Calculavam-se a área de cada um desses triângulos e após isso somavam-nas para chegar até a área do polígono. Para entender melhor como era essa divisão do polígono em triângulos. Veja a **Figura 1**

Figura 1: Ideia para calcular área de polígonos.



Fonte: Produção do próprio

Então, Eudoxo começou a explorar essas ideias com mais ênfase e acabou criando uma definição, *Lema de Eudoxo*, para ajudar a resolver o problema da *comparação de curvas com retilíneas*, que trouxe uma solução plausível para essa questão.

1.1 Lema de Eudoxo

Eudoxo foi quem forneceu o lema conhecido atualmente, por alguns matemáticos, de *Axioma de Arquimedes*, este de suma importância a base do método de exaustão. O *lema*, ou *axioma*, diz que dadas duas grandezas que possuem uma razão, ou seja, nenhuma das duas sendo zero, pode-se achar um múltiplo de qualquer uma delas que seja maior que o outro.

Para melhor exemplificar esse axioma, utiliza-se um exemplo simples, através de uma redução ao absurdo (*reduction ad absurdum*), da seguinte maneira.

Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que a sua metade e do resto novamente subtrai-se não menor que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie. [Boyer tradução da 3ª edição Americana, p.81]

Eudoxo diz o seguinte, que pegando uma grandeza, e subtraindo pela metade desta mesma grandeza, obtém-se um múltiplo dela. Então pega-se esse múltiplo e faz-se o mesmo processo. Com inúmeras repetições desse processo haverá momentos que essa grandeza será tão pequena, que se aproximará de 0, porém nunca será 0, sempre existirá uma grandeza entre o 0 e a menor grandeza encontrada.

Exemplo: tem-se uma grandeza chamada de a , fazendo o processo descrito:

$$a - \frac{a}{2} \rightarrow \frac{a}{2} - \frac{\frac{a}{2}}{2} \rightarrow \frac{a}{4} - \frac{\frac{a}{4}}{2} \rightarrow \frac{a}{8} - \frac{\frac{a}{8}}{2} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{a}{\infty}$$

Essa repetição cansativa que recebe o nome de “*propriedade de exaustão*”.

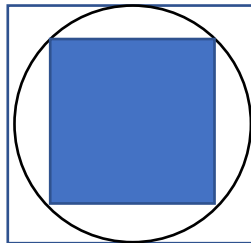
1.2 Quadratura do círculo

A hipótese dos matemáticos anteriores a Eudoxo só teve maior eficácia a partir da criação do *Lema de Eudoxo* que trazia uma ideia de comparar proporções, mas através dessas comparações surge uma situação problema: quando se deveriam encerrar essas comparações ou se seriam contínuas?

Para achar a área de uma circunferência, de acordo com a reflexão de Eudoxo, tem-se que inscrever e circunscrever uma sequência de figuras retilíneas, ou seja, alguns polígonos dentro e fora da circunferência, tendo em vista que as áreas dessas figuras já são conhecidas. Diante das ideias desse grandioso matemático é possível construir uma sequência de polígonos de tal forma que o último irá convergir para a área da figura que se deseja encontrar, isto é, a área da circunferência.

Primeiro, inscrevendo e circunscrevendo um *quadrado* no círculo, veja a **Figura 2**:

Figura 2: Quadrado inscrito e circunscrito no círculo.



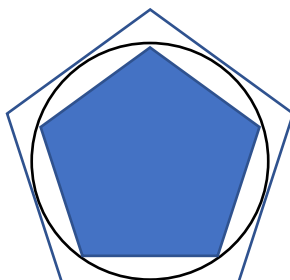
Fonte: Produção do próprio autor

Note que, tem-se uma comparação da área do círculo com a área dos quadrados. Na figura existe dois quadrados e um círculo, logo tem-se a área de um quadrado grande e um pequeno e também a área do círculo que está entre as duas áreas dos quadrados, ou seja, $AQ_g > AC > AQ_p$, pois uma figura está dentro da outro. Entretanto existem espaços entre os contornos das figuras, que é a diferença entre as áreas de cada figura. Utilizando-se algum artifício para diminuir esse espaço fazendo com que essa diferença seja quase nula ou inexistente, obtém-se uma área próxima ou igual do círculo, ou ainda, quanto mais próximo o

contorno dos polígonos inscrito e circunscrito se aproximarem do contorno desse círculo, mais próximo as áreas dos polígonos se aproximam da área do círculo.

Segundo inscrever e circunscrever um *pentágono* no círculo, veja na **Figura 3**:

Figura 2: Pentágono inscrito e circunscrito no círculo.

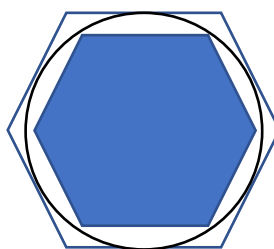


Fonte: Produção do próprio autor

Agora tem-se a comparação da área do círculo com a área dos pentágonos, observa-se que comparando a **Figura 3** com a **Figura 2**, nota-se que a **Figura 3** também possui esses espaços entre os contornos, porém esses espaços da **Figura 3** é menor que os espaços da **Figura 2**, ou seja, o contorno do polígono inscrito na **Figura 3** é mais próximo do contorno do círculo do que os contornos da **Figura 2**, inferindo assim que a área do pentágono é mais próxima da área do círculo do que da área do quadrado.

Terceiro, inscrevendo e circunscrevendo mais uma figura no círculo, o *hexágono*, veja na **Figura 4**:

Figura 4: Hexágono inscrito e circunscrito no círculo.



Fonte: Produção do próprio

Agora comparando as três **Figuras (2,3,4)**, os quadrados, pentágonos e o hexágonos, percebe-se que o quadrado é “próximo” a área do círculo, e o pentágono é mais “próximo” ainda da área do círculo do que o quadrado, porém o hexágono é mais próximo da área do círculo do que o quadrado e do que o pentágono.

Essa comparação não acaba aqui, ela pode ser continuada com um polígono de $7, 8, 9, 10, \dots, n$ lados, todavia comparando essas três **Figuras 2,3,4** é possível concluir que: quanto mais lados esse polígono inscrito e circunscrito no círculo possuir, maior será a aproximação da área do polígono com a área do círculo. E para que se consiga obter uma aproximação perfeita entre as áreas a diferença precisa ser nula. Veja que essa comparação é simples e fácil, porém é uma repetição “exaustiva”. Daí o nome método da exaustão.

Naquela época não se tinha uma formulação para limite, nos dias atuais, pode-se escrever que a área do círculo é igual ao limite da área do polígono de n lados, quando o n (números de lados) tende ao infinito, ou seja:

$$AC = \lim_{n \rightarrow \infty} AP(n)$$

Onde: $AP(n)$ é a área do polígono de n lados, e AC é a área do círculo.

Isto confirma que quando o polígono inscrito e circunscrito tem infinitos lados, a área dos polígonos é igual a área do círculo.

Disto concluímos que quando o polígono é inscrito no círculo todos os seus pontos estarão dentro do círculo, e nunca estarão fora da circunferência, ou seja, o contorno da circunferência é o limite para esse polígono. Analogamente acontece ao circunscrever um polígono no círculo em que todos os seus pontos estarão dentro do polígono, ou seja, o contorno do círculo é limitado por cima e também é limitado por baixo, isto quer dizer que a área do círculo converge para um valor entre a área do polígono circunscrito e o polígono inscrito, ou seja, $AP_c > AC > AP_i$.

No entanto como ainda não existia esse conceito de limite, o problema para calcular as áreas era resolvido por aproximações, contudo não se conseguia o resultado exato e sim um valor aproximado através desse processo exaustivo.

1.3. Arquimedes de Siracusa

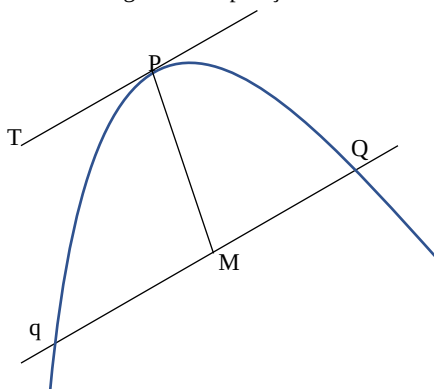
Arquimedes (287-212 a.C.) matemático que veio logo após Eudoxo, também fez uma grande contribuição para o cálculo. Desenvolveu mais ainda o método de Eudoxo e conseguiu achar a área de uma *região limitada por uma parábola e uma reta*, fazendo a soma de infinitos triângulos inscrito nessa região. Com isso ele acabou sendo o primeiro matemático que calculou uma soma com infinitos termos.

1.4. Quadratura da Parábola.

Para calcular a área da parábola Arquimedes usou argumentos geométricos e a ideia de repetição do método da exaustão que era inscrever polígonos dentro da região que desejava se calculada, porém utilizou um único polígono específico (o triângulo) e também argumentos da dupla redução ao absurdo, ou seja, para mostra que $x = y$, bastaria provar que não pode ser $x < y$ e nem $x > y$. Esse método que Arquimedes utilizou ficou conhecido como *método de triângulos inscritos*. Para entender como funciona o método dos triângulos inscritos, necessita conhecer algumas proposições que já eram conhecidas na época de Arquimedes, encontradas no livro *elementos de Euclides V*.

Proposição 1: Se marca um ponto P em uma parábola e deste traça-se um segmento de reta $\overline{PM}$, onde esse segmento $\overline{PM}$ pode ser o eixo da parábola ou ele pode ser um segmento de reta paralela a esse eixo. Uma reta tangente a parábola passa no ponto P , e $\overline{Qq}$ é um segmento de uma corda paralela a tangente e que corta $\overline{PM}$ em M , então: $\overline{QM} = \overline{Mq}$, ou seja, M é o ponto médio de $\overline{Qq}$. Reciprocamente se M é o ponto médio de $\overline{Qq}$ então a reta $\overline{PM}$ é o eixo da parábola, logo o segmento $\overline{Qq}$ e a reta tangente que passa pelo ponto P , são paralelas.

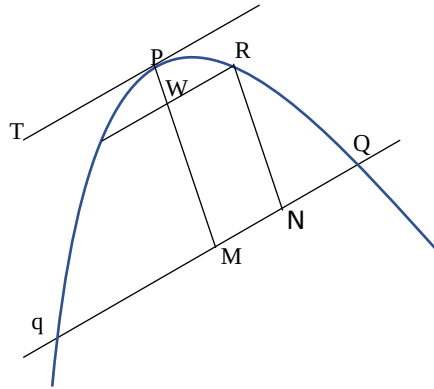
Figura 5: Proposição 1.



Fonte: Produção do próprio autor

Proposição 2: (Surgiu da **Proposição 1**), se tem a situação descrita na **Proposição 1** e adicionar um ponto R na parábola e deste ponto R traça-se duas retas: uma paralela ao eixo da parábola e outra reta paralela a tangente que passa pelo ponto P . O segmento de reta $\overline{RW}$ corta $\overline{PM}$ em W , então $\overline{PM} : \overline{PW} :: (\overline{QM})^2 : (\overline{RW})^2$, ou seja, o segmento $\overline{PM}$ esta para $\overline{PW}$ assim como $\overline{QW}^2$ esta para $\overline{RW}^2$, $(\frac{PM}{PW} = \frac{QM^2}{RW^2})$, essa proporção que dizer que o segmento é proporcional ao raio ao quadrado, $(\overline{PM} = k * \overline{QM})$, da parábola.

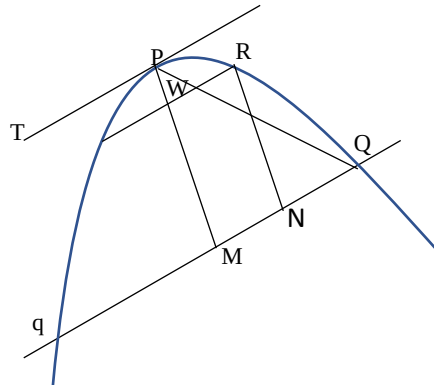
Figura 6: Proposição 2.



Fonte: Produção do próprio autor

Proposição 3: Seja P o ponto do vértice da parábola, e $\overline{Qq}$ o segmento da corda que corta a parábola, traça-se um segmento de reta $\overline{PQ}$, no qual R é um ponto sobre a parábola e que a tangente que passa em R é paralela a $\overline{PQ}$, e também em R traça-se uma reta paralela ao eixo da parábola que corta $\overline{Qq}$ em N . Então o ponto Y que corta RN é ponto médio de PQ e por consequência o ponto N é ponto médio de $\overline{QM}$, logo $\overline{PM} = \frac{4}{3} * \overline{RN}$.

Figura 7: Proposição 3.



Fonte: Produção do próprio autor

Demonstração:

$$\overline{PM} = \overline{PW} + \overline{WM} = \overline{PW} + \overline{RN}$$

Então:

$$\frac{\overline{PW} + \overline{RN}}{\overline{PW}} = \frac{\overline{QM}^2}{\overline{RW}^2}$$

$$\frac{\overline{PW} + \overline{RN}}{\overline{PW}} = \frac{(2 * \overline{MN})^2}{(\overline{MN})^2}$$

$$\frac{\overline{PW}}{\overline{PW}} + \frac{\overline{RN}}{\overline{PW}} = 4$$

Logo:

$$\overline{RN} = 3 * \overline{PW}$$

Por consequência:

$$\overline{PM} = 4 * \overline{PW}$$

$$\overline{PM} = 4 * (\overline{PM} - \overline{RN})$$

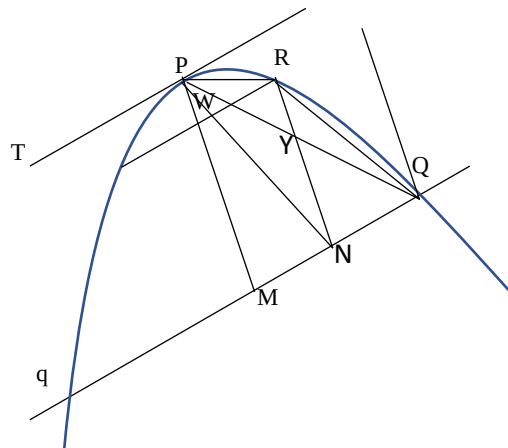
Portanto:

$$\overline{RN} = 3 * \frac{\overline{PM}}{4}$$

Proposição 4: Seja $\overline{Qq}$ a base e P o vértice do segmento parabólico e também o vértice do triângulo formado ΔQqP , e seja R o ponto no segmento parabólico no qual tangente e paralela a $\overline{PQ}$, tem-se:

$$\Delta PQq = 8 * \Delta PRQ$$

Figura 8: Proposição 4.

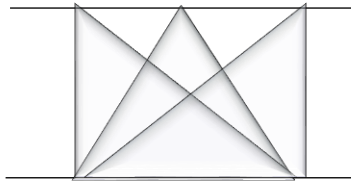


Fonte: Produção do próprio autor

Demonstração:

A *Propriedade de Euclides* sobre semelhanças de triângulos nos revela que apresentadas duas retas paralelas onde uma terá um segmento fixo no qual será a base do triângulo, e a outra será o vértice de altura desse triângulo. A área do triângulo não se altera quando o vértice percorre a paralela ao segmento de base.

Figura 9: Propriedade de Euclides.



Fonte: Produção do próprio autor

Primeiro prova-se que:

$$i) \quad \Delta PQM = 4 * \Delta PRQ$$

$$\Delta PQN = 2 * \Delta PRQ$$

$$\Delta PYN + \Delta YQN = 2 * \Delta PRY + 2 * \Delta RQY$$

Veja que:

$$\overline{NY} = 2 * \overline{RY}$$

Pois:

$$\Delta PQM \approx \Delta YQN$$

$$\overline{PM} = 2 * \overline{YN} (N \text{ divide } \overline{QM} \text{ ao meio})$$

$$\overline{PM} = \frac{4}{3} * \overline{RN}$$

$\therefore$

$$2 * \overline{YN} = \frac{4 * (\overline{RY} + \overline{YM})}{3}$$

$$\overline{YN} = 2\overline{RY}$$

Usando agora a **Propriedade de Euclides**, nota-se que uma *base* é duas vezes a outra, e que estão fixas em uma mesma paralela, e uma *área* também será duas vezes a outra. Mostrando assim que, a área do triângulo $\Delta PYN = 2 * \Delta PRY$, o mesmo se aplica para os triângulos $\Delta YQN = 2 * \Delta RQY$.

Logo tem-se:

$$\Delta PQN = 2 * \Delta PRQ$$

ii) $\Delta PMN = \Delta PQN$

De acordo com a *propriedade de Euclides* as áreas dos triângulos ΔPMN e ΔPQN são iguais, pois as bases são iguais e o vértice está fixo em uma paralela à base.

Então:

$$\Delta PMQ = 2 * \Delta PQN$$

E

$$\Delta PQN = 2 * \Delta PRQ$$

Logo:

$$\Delta PMQ = 4 * \Delta PRQ$$

Agora falta provar que:

$$\Delta PQq = 8 * \Delta PRQ.$$

Note que:

$$\Delta PQq = 2 * \Delta PMQ$$

Logo:

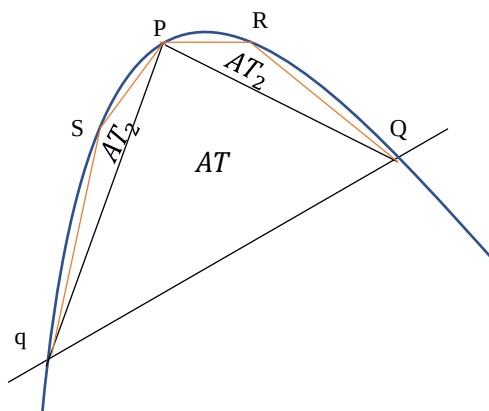
$$\Delta PQq = 8 * \Delta PRQ$$

Essa proposição é de extrema importância para demonstrar a quadratura da parábola.

A partir dessas proposições mostradas, é possível compreender o raciocínio que Arquimedes utilizou para explicar e comprovar a quadratura da parábola.

Arquimedes inscreveu um triângulo no segmento parabólico e a partir dele inscreveu vários outros triângulos menores “*propriedade de exaustão*”. A ideia era somar essas áreas de triângulos inscritos no segmento parabólico.

Figura 10: Triângulos inscritos



Fonte: Produção do próprio autor

Pela **Proposição 4** tem-se $AT = 4 * AT_2$, $AT_2 = 4 * AT_3$, e assim sucessivamente. A soma das áreas será expressa da seguinte maneira:

$$AT + \frac{AT}{4} + \frac{AT}{4^2} + \dots + \frac{AT}{4^{n-1}}$$

Para concluir essa soma precisar-se de mais uma proposição:

Proposição 5: Dada uma sequência de áreas finitas, $A, B, C, D, \dots, Y, Z$, das quais A é a maior, e cada uma das outras é quatro vezes menor que a anterior, então:

$$A + B + C + D + \dots + Y + Z + \frac{1}{3} * Z = \frac{4}{3} * A$$

Demonstração:

Sabe-se que:

$$A = 4 * B, B = 4 * C, C = 4 * D, \dots, Y = 4 * Z$$

Então tem-se:

$$B + C + D + \dots + Y + Z \text{ com } \left(\frac{1}{3} * B + \frac{1}{3} * C + \frac{1}{3} * Y + \frac{1}{3} * Z \right) = \frac{A}{3} + \frac{B}{3} + \dots + \frac{Y}{3}$$

Agora acrescentando A de ambos os lados da equação:

$$\begin{aligned} A + B + C + D + \dots + Y + Z \text{ com } \left(\frac{1}{3} * B + \frac{1}{3} * C + \dots + \frac{1}{3} * Y \right) + \frac{1}{3} * Z \\ = \frac{A}{3} + \left(\frac{B}{3} + \dots + \frac{Y}{3} \right) + A \end{aligned}$$

Tem-se $\left(\frac{1}{3} * B + \frac{1}{3} * C + \dots + \frac{1}{3} * Y \right)$ de ambos os lados da equação, logo eles se anulam, veja o resultado:

$$A + B + C + D + \dots + Y + Z + \frac{1}{3} * Z = \frac{A}{3} + A$$

$$A + B + C + D + \dots + Y + Z + \frac{1}{3} * Z = \frac{4}{3} * A$$

É essa a proposição que Arquimedes utilizou para fazer as somas dos triângulos. Então, aplicando a soma mais $\frac{1}{3}$ do último termo tem-se:

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \cdots + \frac{T}{4^{n-1}} + \frac{1}{3} * \frac{T}{4^{n-1}} = \frac{4}{3} * T$$

Essa somatória é fundamental para a proposição da quadratura da parábola.

Proposição 6: Afirma que qualquer segmento limitado por uma parábola e uma corda tem área igual a $\frac{4}{3}$ do triângulo inscrito nesse segmento, onde o triângulo tem a mesma base que o segmento e a mesma altura que a parábola.

Demonstração:

Argumento:

$$S \geq \frac{4}{3} * T \text{ e } S \leq \frac{4}{3} * T$$

Logo:

$$S = \frac{4}{3} * T$$

Então é preciso negar o argumento para tentar encontrar um absurdo:

$$\text{i) } S > \frac{4}{3} * T$$

Suponha que após n interações da repetição da construção de triângulos tem-se triângulos cuja a soma da área é A , com $A > \frac{4}{3} * T$ e $A < S$.

A pode ser escrito da seguinte forma:

$$A = T + \frac{T}{4} + \cdots + \frac{T}{4^{n-1}}$$

Aplicando a **Proposição 5**, tem-se:

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \cdots + \frac{T}{4^{n-1}} + \frac{1}{3} * \frac{T}{4^{n-1}} = \frac{4}{3} * T$$

$$A = \frac{4}{3} * T - \frac{1}{3} * \frac{T}{4^{n-1}}$$

Logo:

$$A < \frac{4}{3} * T$$

Conclui-se que há uma contradição com o argumento que dizia: $A > \frac{4}{3} * T$.

ii) $S < \frac{4}{3} * T$

Se $\frac{4}{3} * T$ é maior que S então $\frac{4}{3} * T - S$, nos dar um número positivo obtido através de uma m-emésima interação Tm , onde Tm é o triângulo obtido nessa m-emésima etapa.

A área desse triângulo Tm é dada por: $Tm = \frac{T}{4^{m-1}}$.

Sabe-se que:

$$Tm = \frac{T}{4^{m-1}} > \frac{1}{3} * Tm = \frac{1}{3} * \frac{T}{4^{m-1}}$$

Então:

$$\frac{4}{3} * T - S = \frac{T}{4^{m-1}} > \frac{1}{3} * \frac{T}{4^{m-1}}$$

Aplicando a **Proposição 5** novamente, tem-se:

$$\frac{1}{3} * \frac{T}{4^{n-1}} = \frac{4}{3} * T - (T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \dots + \frac{T}{4^{n-1}})$$

Então:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} * T - S &> \frac{4}{3} * T - (T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \dots + \frac{T}{4^{n-1}}) \\ S &< (T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \dots + \frac{T}{4^{n-1}}) \end{aligned}$$

Porém isso é uma contradição, já que $T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \dots + \frac{T}{4^{n-1}}$ é um triângulo inscrito em S.

Portanto está demonstrado as duas desigualdades, logo é possível concluir que a área do segmento parabólico é $S = \frac{4}{3} * T$, através do método da exaustão.

O método da exaustão foi uma ferramenta matemática essencial, a base inicial para o cálculo integral, porque foi partindo desse conhecimento que o conceito de integral e o conceito de limite surgiram. Lembrando que para calcular a área do círculo através do método da exaustão a área do círculo foi limitada pela área de dois polígonos: um inscrito e outro circunscrito. A “propriedade de exaustão” equivale a uma formulação moderna bastante conhecida. Se M é uma grandeza dada, ε uma grandeza prefixada de mesmo tipo e r é uma razão tal que $\frac{1}{2} \leq r < 1$, então, é possível encontrar um número inteiro N tal que $M * (1 - r)^n < \varepsilon$ para todo inteiro $n > N$. Isto é, a propriedade de exaustão é o mesmo que dizer que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - r)^n = 0$.

Entretanto, esses conceitos só começaram a ser formalizados no século XVII, com a contribuição de muitos matemáticos de países como França, Inglaterra, Alemanha, gerando certas controvérsias a respeito da autoria das descobertas feitas nesse século. Os nomes dos matemáticos mais importantes que diz respeito as descobertas que formalizaram o cálculo a serem citados tem-se: Isaac Newton, Pierre de Fermat e Gottfried Leibniz. Em algum momento da história esses nomes foram atribuídos a criação do cálculo.

CAPÍTULO 2

SÉCULO XVII ATÉ INÍCIO DO SÉCULO XIX

No século XVII havia uma explosão de hipóteses matemáticas, em que vários pesquisadores buscavam soluções para os mais variados tipos de problemas, como o da cicloide, tangente, distâncias entre pontos em uma curva, e muitos outros. Com essas variedades hipotéticas a matemática começou a ser reconhecida como algo essencial para o cotidiano das pessoas, tendo a atenção do século voltada para si e por consequência muitas descobertas. Porém já existiam pesquisas de como encontrar o cálculo da área delimitada embaixo da curva, mas como citado anteriormente eram por aproximações, e os matemáticos queriam o valor exato e não aproximado.

A construção histórica do cálculo se deu a partir da resolução de problemas que apareceram junto ao desenvolvimento da humanidade. Problemas esses que foram solucionados por diversos matemáticos, que direta ou indiretamente fizeram parte da criação do cálculo, porém os créditos de criadores do *Cálculo Diferencial e Integral* deu-se para Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), porque recolheram e juntaram todos os conhecimentos que existiam dos problemas solucionados por estudiosos anteriores e criaram novas pesquisas a partir dessas coletâneas. Newton e Leibniz mesmo por motivações diferentes depararam-se com denominador comum: notaram semelhanças nessas análises que poderiam resultar em uma única teoria, *Teorema Fundamental do Cálculo*. Por esse motivo a história dar os créditos da descoberta do cálculo para esses dois grandes matemáticos.

As semelhanças do cálculo de Newton e Leibniz ocorreu porque ambos estavam empenhados no mesmo ramo de estudos, como por exemplos: as sequências infinitas que deram uma noção intuitiva do conceito de limite e continuidade; o estudo da tangente que originou a noção de derivada; e o estudo da quadratura que originou a noção da operação contrária a derivada, chamada de integral. Esses assuntos que tanto Newton e Leibniz abordaram levaram ambos a terem um resultado muito semelhante uma relação profunda entre o método da tangente e o cálculo de área, ou como é conhecido, *Teorema Fundamental do Cálculo*.

2.1 Teorema Fundamental do Cálculo.

Definição, sendo f integrável em $[a, b]$, a função definida por $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ é derivável em todo ponto $x \in [a, b]$ onde f seja contínua nesses pontos $F'(x) = f(x)$.

Para chegar a essa definição, precisou dos: limite, derivada e integral.

2.2 Noção de limite.

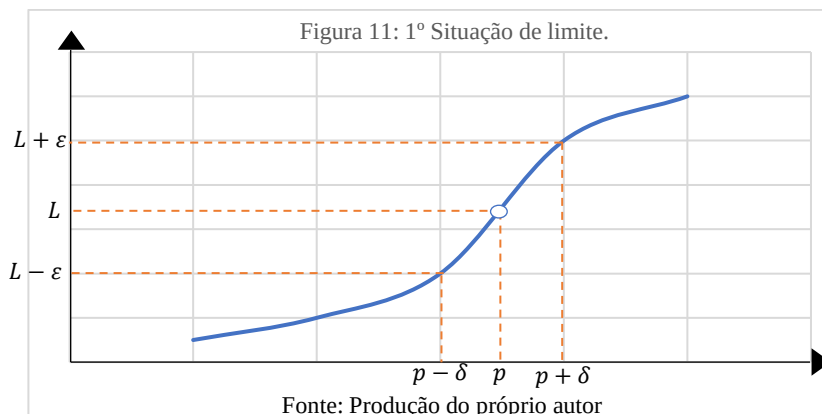
Historicamente o conceito de limite veio depois ao de derivada, mas como limite é o conceito fundamental do cálculo, e para um melhor entendimento ordenado e lógico, é correto iniciar primeiro com a ideia de limite que surgiu de duas situações problemas: encontrar uma reta tangente a uma curva, e calcular a área delimitada embaixo da curva.

Antes de começa apresentação do o conceito de limite, necessita-se conhecer um pouco sobre função contínua.

Definição: Uma função é contínua em um determinado ponto P de seu domínio, quando essa função não possui em seu gráfico, “saltos” e nem “furos” em P , se possuir a função é chamada descontínua nesse ponto.

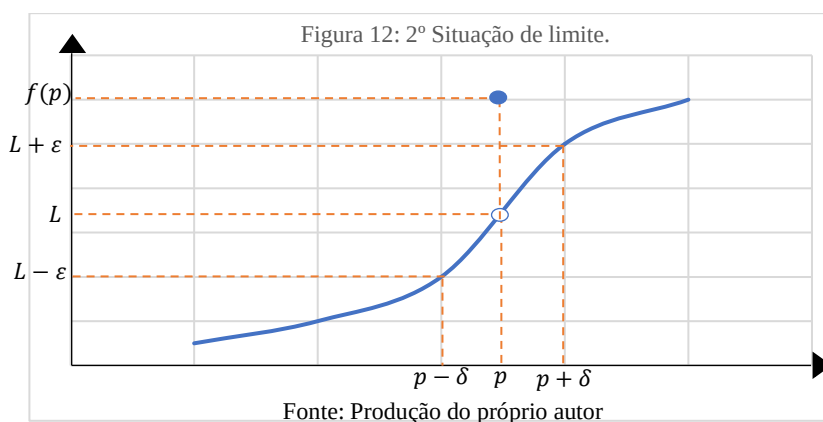
Agora veja a definição de limite:

Seja f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f que pode pertencer ou não ao domínio. Segundo Geraldo Ávila em *Introdução Análise Matemática* um número é limite de $f(x)$ com x tendendo a p , quando qualquer $\varepsilon > 0$ dado, exista um número $\delta > 0$ tal que $x \in Df$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Veja quatro situações gráficas da existência ou não de limite:

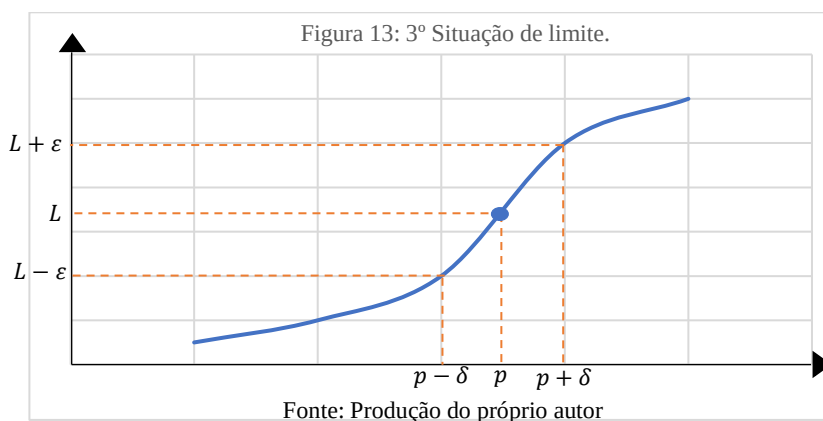


Analisando a primeira situação (**Figura 11**), nota-se que a função não é contínua, pois existe um buraco na função em p , logo não está definida em p , porém existe um L que satisfaz

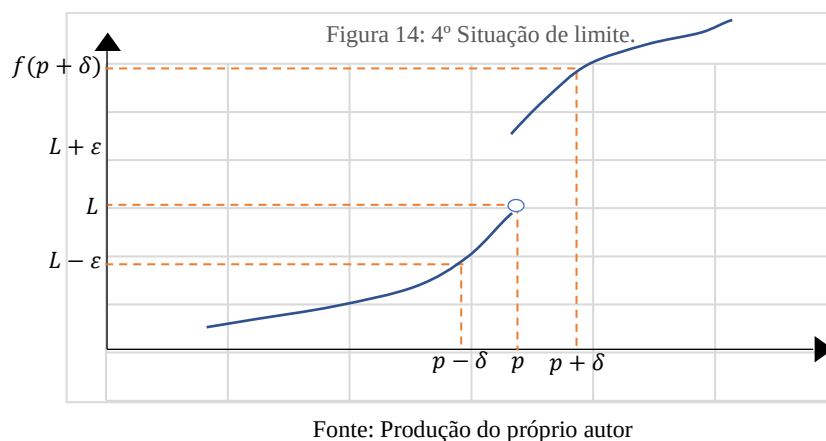
a propriedade de existência que para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um número $\delta > 0$ tal que $x \in Df$,
 $p - \delta < x < p + \delta$, $x \neq p \rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.



Analisando a segunda situação (**Figura 12**), nota-se que a função f não é contínua, pois existe um “buraco” na função em p . Entretanto está definida em p e também existe um L que satisfaz a propriedade de existência, mas não é contínua em p , a restrição $x \neq p$ é essencial nesse caso.



Analisando (**Figura 13**), nota-se que a função é contínua em p , pois não existe buracos na função em p , resultando assim um $L = f(p)$ satisfazendo a propriedade de existência.



Analisando a última situação (**Figura 14**), nota-se que o limite não existe, porque a função possui um salto em p , e também não existe um L que satisfaz a propriedade de existência, pois aplicando o ponto $p + \delta$ na função o resultado é um $f(p + \delta)$ que não tem a distância ε de L , com isso L não existe neste caso.

Com essas análises concluem-se que o limite de uma função existe quando dado um valor $\delta > 0$ que é adicionado ou retirado de um ponto p do eixo x , gera um $\varepsilon > 0$ no eixo y que seja uma região de proximidade de L tal que quaisquer x pertencendo aos intervalos $[p - \delta, p]$ ou $[p, p + \delta]$, quando aplicado em f forme valores que também esteja nas proximidade de L , ou seja, respectivamente $[L - \varepsilon, L]$ e $[L, L + \varepsilon]$.

$$x \in Df, p - \delta < x < p + \delta, \quad \rightarrow \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

Como o limite estuda a região de proximidade de um objeto de estudo, logo $x \neq p$.

Se a situação descrita acima acontece logo o módulo da diferença $|x - p| > 0$, porém como x pertence ao domínio $[p - \delta, p]$ ou $[p, p + \delta]$, infere que $|x - p| < \delta$, então $0 < |x - p| < \delta$.

Quando aplicado o x na função isso resulta em um resultado $f(x)$, tal que esse $f(x)$ pertence ao intervalo $[L - \varepsilon, L]$ ou $[L, L + \varepsilon]$, logo o módulo da diferença $|f(x) - L| < \varepsilon$, com isso tem-se a definição de limite: dado $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que $x \in Df$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. O limite pode ser escrito dessa maneira:

$$L = \lim_{x \rightarrow p} f(x).$$

2.3 Noção de Derivada.

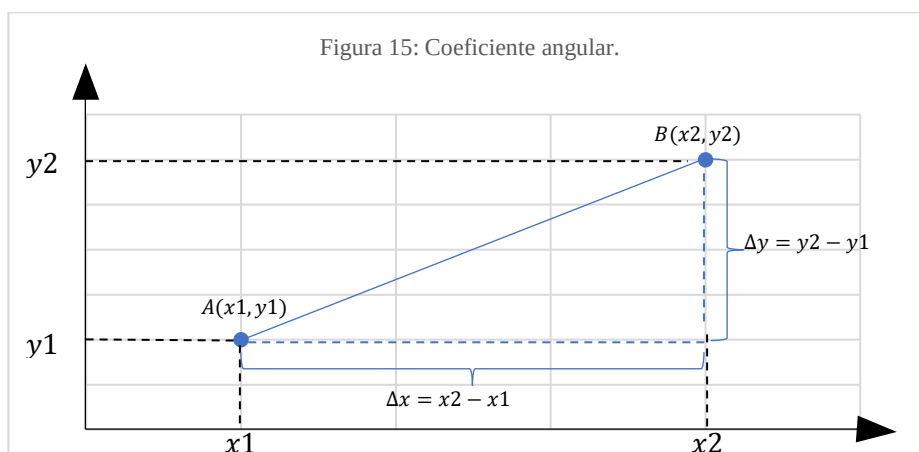
O conceito de derivada surgiu da necessidade de se calcular um problema matemático muito famoso no século XVII, conhecido como *retas tangentes de uma curva*. Como construir uma reta tangente? E o que é uma reta tangente de uma curva?

Uma reta é chamada tangente a curva quando apenas um único ponto dessa reta toca a curva. O raciocínio utilizado para construir uma reta tangente baseou-se no conceito de reta secante e na variação dos valores do eixo y e x no plano cartesiano, ou seja, o coeficiente angular da reta.

COEFICIENTE ANGULAR

No plano cartesiano o coeficiente angular está diretamente ligado à inclinação que a reta possui. Sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ dois pontos distintos de uma reta. O coeficiente angular m do segmento de reta $\overline{AB}$ é dado por:

Demonstração é criada a partir da criação de um triângulo retângulo:

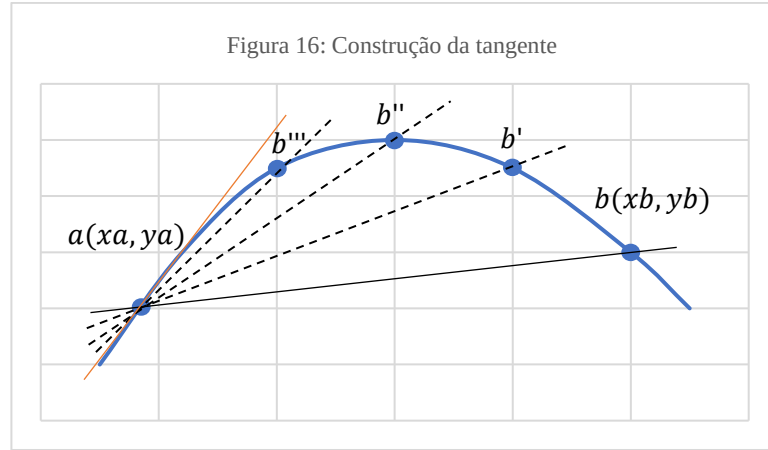


$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Essa definição de coeficiente angular, servira de base para mostra a construção da reta tangente:

Dado dois pontos a e b distintos, onde a e b pertencentes a curva, pode-se traçar um segmento de reta $\overline{AB}$ no qual esse segmento corta a curva em dois pontos, ou seja, uma reta secante a curva.

Se manter o ponto a fixo e utiliza algum artifício matemático que faça com que o ponto b aproxime-se gradativamente do ponto a , de tal forma que em algum momento os dois pontos estejam praticamente sobre postos um ao outro, ou seja, fazendo com que o Δx seja cada vez menor. Para concluir essa aproximação, utiliza-se do operatório que estuda aproximações, o Limite.



Fonte: Produção do próprio autor

No gráfico os b' , b'' e b''' descrevem a aproximação gradativa do ponto b até a , mostrando-nos que a inclinação da reta secante está se aproximando da inclinação da reta tangente. E também o *coeficiente angular* dessa reta secante está definido por:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_b - y_a)}{(x_b - x_a)}$$

Como $y_b = f(x_b)$, $y_a = f(x_a)$ e também $\Delta x = x_b - x_a$ implica dizer que $x_b = \Delta x + x_a$, logo:

$$m = \frac{(y_b - y_a)}{(x_b - x_a)} = \frac{f(\Delta x + x_a) - f(x_a)}{\Delta x + x_a - x_a} = \frac{f(\Delta x + x_a) - f(x_a)}{\Delta x}$$

E para descobrir a reta tangente a curva os matemáticos aplicaram o limite no *coeficiente angular* da reta secante a curva, mas com uma particularidade: a distâncias entre os pontos da reta secante teria que ser pequena o suficiente de tal forma que seja quase nula ($\Delta x \rightarrow 0$). Dessa maneira o ponto $b \rightarrow a$ e a inclinação da reta secante tenderia a da tangente de tal modo que as inclinações acabariam se tornando iguais, ou seja, o *coeficiente angular* da reta tangente é igual ao limite do *coeficiente angular* da reta secante, quando $\Delta x \rightarrow 0$.

$$mt = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_a + \Delta x) - f(x_a)}{\Delta x}, \text{ se somente se o limite existir.}$$

Sabendo o coeficiente angular de uma reta e um ponto (x_1, y_1) que passa pela mesma, é possível encontrar a equação da reta, a partir de:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

O estudo da reta tangente teve um grande avanço para a matemática, pois graças a ele chegou-se a definição de derivada. Veja a seguir:

A derivada de uma função $y = f(x)$ é uma função denotada por $f'(x)$, tal que seu valor x pertence ao domínio Df é dado por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se esse limite existir diz-se que f é uma função derivável ou diferenciável, se f for derivável em cada ponto do seu domínio.

A derivada de uma função $y = f(x)$ é uma função $f'(x)$ na qual ela é o coeficiente angular da reta tangente a função $y = f(x)$.

Leibniz quando se aprofundou nos estudos das derivadas criou a notação $\frac{dy}{dx}$, e a notação $f'(x)$ foi criada pelo matemático francês Lagrange, e Newton também usava a sua própria notação que era: $\dot{y}$, todas essas simbologias significavam a derivada de uma função em relação a incógnita x .

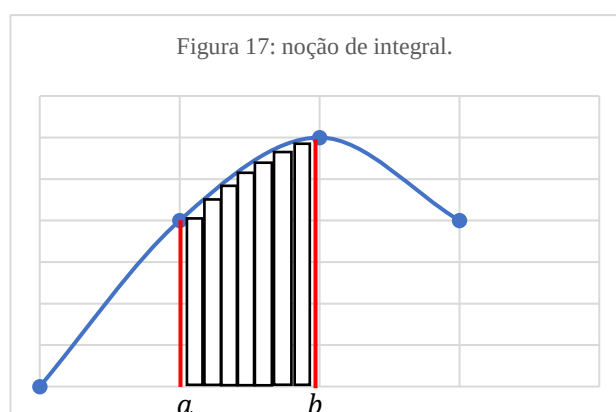
No século XVIII a derivada passou a ser interpretada como uma operação, no qual o objetivo era aplicar o operador derivada em uma expressão denominada *função*. Com essa aplicação tem-se a criação de uma nova expressão algébrica, chamada de *equação da reta tangente*.

A repetição desses artifícios em diferentes expressões concluiu-se que essas transformações seguiam uma lei geral de formação: x^n , e quando aplicada a operação derivada se tornava: $n \cdot x^{n-1}$.

2.4 Noção de Integral.

O conceito de cálculo integral é bem mais antigo que o de derivada, entretanto pode ser formulado com mais rigor a partir de estudos feitos como o de François Viète (1560-1603) que desenvolveu bastante a simbologia. Os trabalhos de René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665) e outros contemporâneos modernos que contribuíram para o

desenvolvimento da geometria analítica, o plano cartesiano, a sistematização e unificação de métodos de geometria que foram aplicadas no cálculo de área e volume. O desenvolvimento mais rigoroso do conceito de integral deu-se até início do século XIX, com os estudos de mais alguns matemáticos entre eles Georg Friedrich Bernhard Riemann, assunto que será abordado no próximo capítulo. Antes dos trabalhos de Riemann a noção básica que se tinha de integral era um processo de somatória para encontrar uma aproximação da área de baixo da curva (**Figura 17**).



Fonte: Produção do próprio autor

A figura mostra uma aproximação para encontrar essa área, note que é basicamente a ideia que se tinha no método da exaustão. Porém, ao invés de aumentar os lados de um polígono inscrito para obter uma aproximação similar a área verdadeira, é aumentado a quantidade de figuras retangulares no determinado intervalo $[a, b]$. Para ter esse aumento de retângulos, basta diminuir as bases.

A simbologia de integral é dada por uma $\int$. (alguns estudiosos da matemática afirmam que esse símbolo surgiu da ociosidade de escrever a palavra somatória repetidas vezes e com o tempo, começaram a escrever apenas $\int$ para representar uma soma).

Por dedução integral é igual área, onde essa área é dada por:

$$Area = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_i)$$

Onde:

$\frac{b-a}{n}$ é a base do retângulo;

$f(xi)$ é a altura de cada retângulo.

A integral definida pode ser considerada a área sob o gráfico de uma função, e a integral indefinida assim como a derivada também poderia ser interpretada como uma operação algébrica, no qual o objetivo era aplicar o operador integral em uma expressão denominada *função*. Com essa aplicação tem-se a criação de uma nova expressão algébrica, chamada de *Primitiva da função*.

Assim como a derivada, a integral também seguia uma lei geral de formação: x^n , e ao aplicar a operação integral a expressão se tornava em: $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Uma breve comparação entre a integral e derivada pode ser notada através de um simples exemplo: Tem-se uma função $f(x) = x^2$, admitindo que é uma função contínua em todos os seus pontos. O que acontece se aplicar a operação derivada e integral seguidas?

$$f(x) = x^2$$

Aplicando a operação derivada tem-se:

$$f'(x) = 2 * x^{2-1} \Rightarrow 2.x$$

Agora aplicando a operação integral, tem-se:

$$f(x) = \frac{2 * x^{1+1}}{1 + 1} \Rightarrow x^2$$

Veja que se aplicar a operação derivada em uma função, obtém-se uma nova expressão, e após isso aplicando a operação integral, tem-se como resultado a função inicial que é a primitiva da expressão derivada. Por isso que ao aplicar a operação integral em uma função diz-se que o resultado é a primitiva daquela função.

Basicamente essa é a ideia do teorema fundamental do cálculo.

Já a integral definida é interpretada como a diferença de valores de uma mesma primitiva da função que também segue uma lei para se calcular: $\frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$.

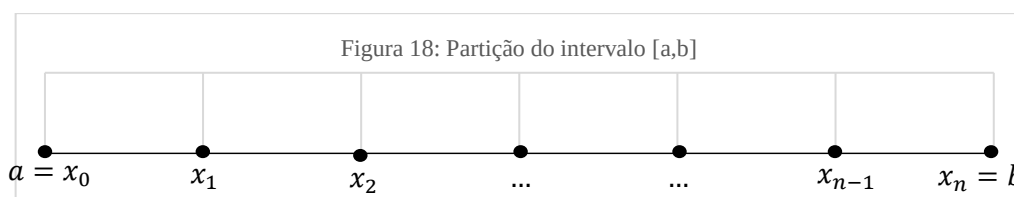
CAPÍTULO 3

INTEGRAL DE RIEMANN

3.1 Motivação de Riemann.

A motivação que Riemann teve para calcular áreas de baixo da curva, foi primeiro uma aproximação, mas ao desenvolver a sua teoria ele conseguiu formalizar utilizando conceitos de limite e tornar essa aproximação em um valor exato, basicamente a ideia inicial de seu método era comparar a área de baixo da curva com uma figura de área conhecida que se parecesse com a área desejada, e o retângulo foi a figura chave para o desenvolvimento de seu método.

A área abaixo da curva é definida por uma função f , pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, ou seja, a f é limitada pelo intervalo $[a, b]$. Como a área do retângulo é definida por $Ar = b * h$, se colocasse n retângulos dentro do intervalo $[a, b]$ obteria uma aproximação da área abaixo da curva, e quanto mais retângulos melhor seria a aproximação. Daí para se colocar mais retângulos nesse intervalo ele dividiu $[a, b]$ em n partições, onde essas partições fazem parte de um conjunto finito $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ em que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.



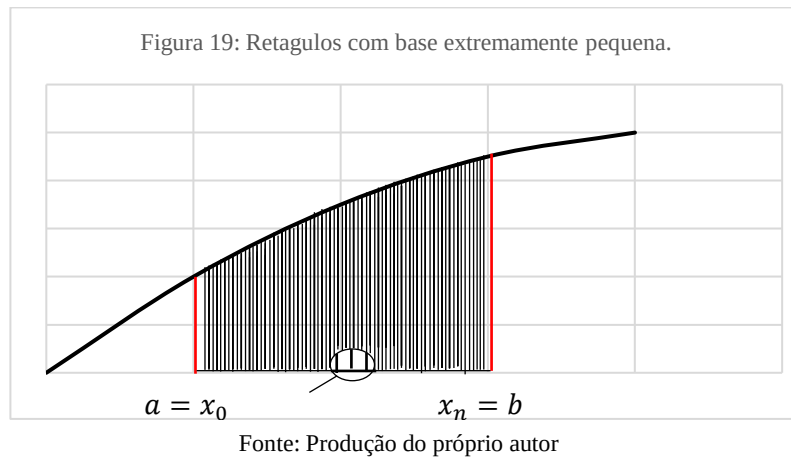
Fonte: Produção do próprio autor

A base dos retângulos eram dadas por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e a altura foi definida da seguinte maneira, foram escolhidos arbitrariamente números c_i de cada partição onde este pertencesse ao intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, onde i é um índice ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Daí a altura seria $f(c_i)$. Logo a aproximação da área seria dada por uma somatória de retângulos:

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i * f(c_i) = f(c_1) * \Delta x_1 + f(c_2) * \Delta x_2 + \dots + f(c_n) * \Delta x_n$$

Veja que $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, logo suponha que x_{i-1} e x_i sejam valores bem próximos, por exemplo 1 e 2 respectivamente, então pelo teorema do valor médio (afirma que sempre vai existir um valor entre outros dois valores) esse c_i seria um valor entre 1 e 2, que ao aplicar c_i na função resulta em um $f(c_i)$ no qual é chamado de altura do retângulo. Então note que quanto menor for o intervalo, ou seja, quando Δx_i for muito pequeno o erro torna-se cada vez menor.

Logo se Δx_i for extremamente pequeno ao ponto de os intervalos e o valor médio c_i forem iguais, não existiria erro na aproximação e os retângulos seriam como se fossem linhas a olho nu. Para entender melhor o raciocínio, veja a **Figura 19**:



Essa somatória de retângulos de base extremamente pequena que foi construída acima é conhecida por *Soma de Riemann*, mas agora veja ver como Riemann formalizou essa ideia.

3.2 Somas inferiores e superiores.

Teorema 3.1.: *Toda soma inferior é menor ou igual a toda soma superior.*

Tem-se que m e M são respectivamente, ínfimo (conjunto dos menores valores possíveis de f) e supremo (conjunto dos maiores valores possíveis de f), sabe-se também que o ínfimo é menor ou igual ao supremo do mesmo conjunto, ou seja, $m(b-a) \leq M(b-a)$. Logo é possível definir a soma inferior por $s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ referente a partição P , e $S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$ a soma superior referente a partição P .

$$m = \inf\{f(x); x \in [a, b]\} \text{ e } M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}$$

Logo um $P_0 = \{a, b\}$ qualquer, resulta em: $s(f; P_0) \leq S(f; P_0)$

Agora utilizando-se $P = \{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$, uma partição do intervalo $[a, b]$ tal que:

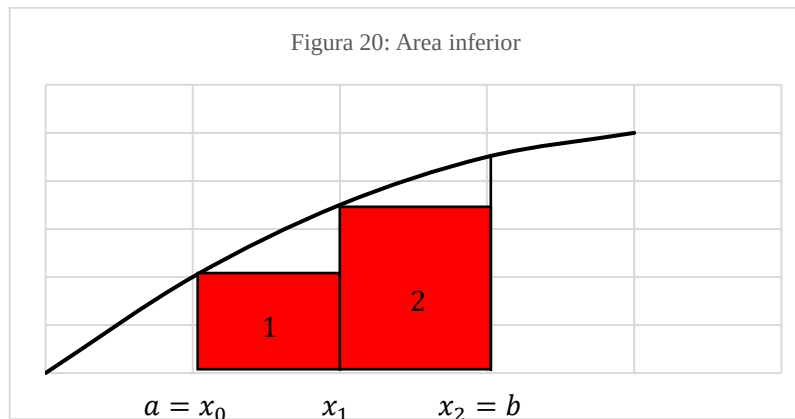
$$P = \{x_1 - x_0, x_2 - x_1\}$$

Sejam m e M , ínfimo e supremo respectivamente de P , se pega-se uma sub partição P , ela também terá ínfimo e supremo da mesma maneira do intervalo $[a, b]$, dessa forma: $m \leq m_i \leq M_i \leq M$. Então:

$$m(b - a) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq M(b - a).$$

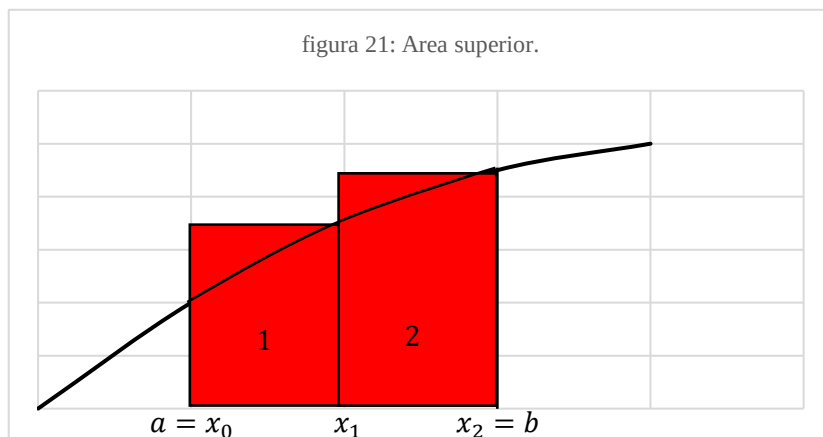
Sejam m_i e M_i , respectivamente a menor e maior altura do retângulo que tem base definida por: $x_i - x_{i-1}$, pode-se calcular a área de P' (soma inferior) da seguinte maneira:

$$A(inferior) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1)$$



E também pode-se calcular a área de P' (soma superior) da seguinte maneira:

$$A(superior) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1)$$



Graficamente é bem fácil nota que a área abaixo da curva esta compreendida entre $A(inferior)$ e $A(superior)$, como foi mostrado $m \leq M$, onde m é o ínfimo de f e M supremo de f , logo $m \leq f \leq M$, então:

$$A(inferior) \leq A(f) \leq A(superior)$$

Ou melhor:

$$s(f, P) \leq f \leq S(f, P)$$

Como $s(f, P) \leq S(f, P)$, isso implica dizer que o conjunto da soma inferior é limitado superiormente por $M(b - a)$, onde esse supremo é finito e também chamado de integral inferior da função f . Analogamente, o conjunto da soma superior é limitado inferiormente por $m(b - a)$, onde esse ínfimo é finito e também chamado de integral superior de f . Os símbolos no qual indicam a integrais inferior e superior são indicados respectivamente por: $\int_{-a}^b f$ e $\int_a^{-b} f$. O teorema 3.1., permite concluir que:

$$\int_{-a}^b f \leq \int_a^{-b} f$$

Quando essas integrais são iguais, diz-se que a função f é integrável. Sendo assim o valor comum das integrais inferior e superior são chamado de integral da função f , indicado pela simbologia $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)dx$. Onde a e b são os intervalos que também pode ser chamado de limites de integração, inferior e superior respectivamente.

3.3 Critérios de integrabilidade.

Como consequência do **Teorema 3.1**, Riemann definiu as funções que possuíam a soma inferior e soma superior iguais como “Riemann-integrável” ou simplesmente (função integrável).

Definição: Diz-se que uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow R$ é Riemann-integrável (ou simplesmente integrável) se:

$$\int_{-a}^b f \, dx = \int_a^{-b} f \, dx$$

O valor que torna essas duas expressões iguais é designado como integral de Riemann ou integral da função no intervalo $[a, b]$.

Dito isto, vejamos os critérios de integrabilidade mostrados nos teoremas a seguir:

Teorema 3.2.: *Uma função f limitada por $[a, b]$ é integrável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $P \in \mathcal{P}$ tais que:*

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^n [M_i - m_i] * (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

Seja $M_i - m_i$ uma oscilação de f no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Posto $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$, a condição anterior pode ser escrita assim:

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^n [M_i - m_i] * (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n [M_i - m_i] * \Delta x_i < \varepsilon$$

Demonstração:

Suponha que f seja integrável, logo:

$$S(f, P) = s(f, P)$$

Ou ainda,

$$\int_{-a}^b f \, dx = \int_a^{-b} f \, dx$$

Então, existe partição $P \in \mathcal{P}$ com $\varepsilon > 0$, de tal maneira que:

$$(1) \quad S(f, P) < \int_a^b f \, dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(2) \quad s(f, P) > \int_a^b f \, dx - \frac{\varepsilon}{2}$$

Tem-se que:

Multiplicando toda a inequação (2) por -1, e após isso somar com a inequação (1) tem-se o resultado para que a condição seja necessária, veja:

$$S(f, P) - s(f, P) < \int_a^b f \, dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f \, dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

Tem-se que:

$$\int_{-a}^b f \, dx \geq s(f, P)$$

e

$$\int_a^{-b} f \, dx \leq S(f, P)$$

Então:

$$\int_a^{-b} f \, dx - \int_{-a}^b f \, dx \leq S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

Logo:

$$\int_a^{-b} f \, dx - \int_{-a}^b f \, dx < \varepsilon$$

Lembrando que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, obtem-se:

$$\int_a^{-b} f \, dx \leq \int_{-a}^b f \, dx + \varepsilon \Rightarrow \int_a^{-b} f \, dx \leq \int_{-a}^b f \, dx$$

De maneira geral tem-se:

$$\int_a^{-b} f \, dx \geq \int_{-a}^b f \, dx$$

Então conclui-se que:

$$\int_{-a}^b f \, dx = \int_a^{-b} f \, dx$$

Isso mostrar que f é Riemann-integrável em $[a, b]$.

Teorema 3.3.: *Toda função contínua num intervalo $I = [a, b]$ é integrável.*

Como a função é contínua no intervalo, isso implicar dizer que a função é densa em todo o intervalo, ou seja, não possui nenhum “buraco” ou “salto” em seu gráfico da função, as **Figuras 11, 12, 13 e 14**, mostram exemplos de existência de limites e também mostram quando uma função é contínua ou descontínua. Uma função só pode ser contínua ou descontínua não podendo ser as duas ao mesmo tempo.

Demonstração:

Argumento:

Para que uma função seja integral ela deve ser integrável em todos os pontos do intervalo, ou seja, não pode haver “saltos” ou “buraco”. Tendo por definição que f é integral se existindo um ponto $c \in [a, b]$ que isso aconteça:

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx$$

Suponha que f seja descontínua em um ponto $c \in [a, b]$.

Logo:

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx$$

Não acontece, ou seja, ao ter essa descontinuidade em um ponto pertence ao intervalo, já contradiz o argumento que é essencial para que ocorra a integrabilidade.

Logo, toda função contínua é integrável.

Teorema 3.4.: *Toda função monótona num intervalo $[a, b]$ é integrável.*

Demonstração:

Suponha que f não seja decrescente, logo f será constante ou crescente.

Dado $\varepsilon > 0$, e seja $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$, cujo os sub intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tenham comprimento $\Delta x_i < \varepsilon$, como $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ essa diferença não pode ser 0, pois se fosse zero não existiria área nesse intervalo. Então a partir das inequações tem-se: $0 < \Delta x_i < \varepsilon$. E como a f não é decrescente, logo nesse subintervalo a f assume o valor máximo M_i em x_i e valor mínimo m_i em x_{i-1} . Com isso tem-se que:

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum_{i=1}^n M_i * (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i * (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n [M_i - m_i] * (x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] * \Delta x_i &\leq \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] * \varepsilon \\ \varepsilon * \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] &= \varepsilon * [f(b) - f(a)] \end{aligned}$$

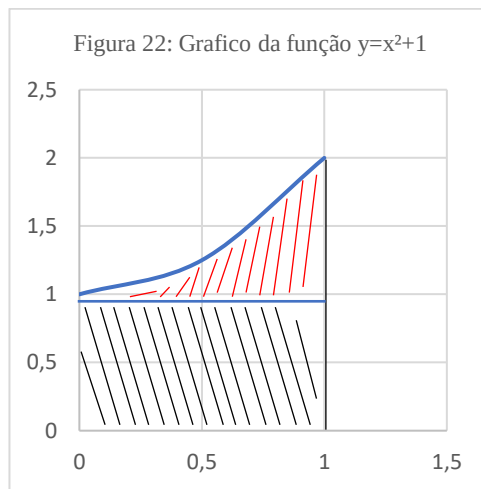
Daqui a condição mostrada no **Teorema 3.2.** segue a integrabilidade de f , e o caso em que f ser decrescente o raciocínio usado é mesmo, mudar apenas os valores máximos e mínimos da função, valor máximo M_i em x_{i-1} e o valor mínimo m_i em x_i .

3.4 Propriedades da integral.

Teorema 3.5.: Se f e g são funções integráveis em $[a, b]$, o mesmo é verdade para $f + g$. Além disso,

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + d \int_a^b g$$

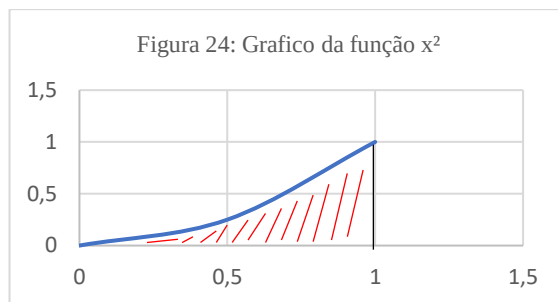
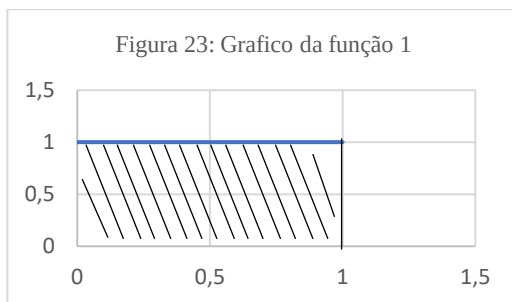
Para provar esse teorema utiliza-se um exemplo simples apresentado abaixo (**Figura 22**):



Fonte: Produção do próprio autor

Esse gráfico acima, diz a respeito da função $x^2 + 1$, para achar o número correspondente a área abaixo da curva precisasse calcular a integral dessa função: $\int_0^1 x^2 + 1$.

Agora veja que área do gráfico pode ser dividida na soma de duas áreas, a área da função x^2 e a área da função constante:



Fonte: Produção do próprio autor

Logo:

$$\int_0^1 x^2 + 1 = \int_0^1 x^2 + \int_0^1 1$$

ou seja,

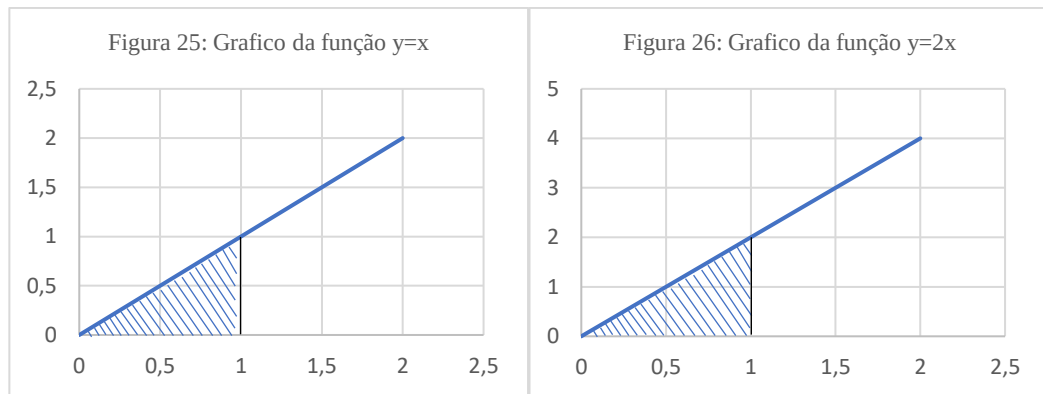
$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

o mesmo vale para,

$$\int_a^b f - g = \int_a^b f - \int_a^b g$$

Teorema 3.6.: Se f é uma função integrável em $[a, b]$ e k é uma constante qualquer, $k*f$ é integrável no mesmo intervalo $[a, b]$ e $\int_a^b k * f = k * \int_a^b f$.

Utiliza-se mais um exemplo gráfico, comparando dois gráficos (**Figuras 25 e 26**).



Fonte: Produção do próprio autor

Note que para calcular a área abaixo da função $y = x$ é bem simples, pois forma uma figura conhecida, um triângulo, e para calcular a área do triângulo basta utilizar a formula: $At = \frac{b*h}{2}$.

Então:

$$\int_0^1 x = \frac{b * h}{2} \Rightarrow \frac{1 * 1}{2} = \frac{1}{2}$$

O mesmo servi para a função $y = 2x$, já que também forma um triângulo abaixo do gráfico.

Então:

$$\int_0^1 2 * x = \frac{b * h}{2} \Rightarrow \frac{1 * 2}{2} = 1$$

Veja que se multiplica o resultado da integral pelo valor da constante, tem-se o mesmo resultado de multiplica a constante pela função e depois resolver a integral.

Logo:

$$\int_0^1 2 * x = 2 * \int_0^1 x$$

ou seja,

$$\int_a^b k * f = k \int_a^b f$$

Teorema 3.7: Se f é uma função integráveis no intervalo $[a, b]$, o mesmo é verdade para f^2 .

Demonstração:

O argumento a ser utilizado nesse caso será que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ do intervalo $[a, b]$, tal que:

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) * \Delta x_i < \varepsilon$$

Seja M o supremo da função f no intervalo $[a, b]$, de forma que $M_i + m_i \leq 2 * M$.

Então:

$$(f^2, P) - s(f^2, P) = \sum_{i=1}^n (M_i^2 - m_i^2) * \Delta x_i$$

Lembrando que: $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$

Logo:

$$\sum_{i=1}^n (M_i^2 - m_i^2) * \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (M_i + m_i) * (M_i - m_i) * \Delta x_i$$

E como $M_i + m_i \leq 2 * M$.

$$\sum_{i=1}^n (M_i + m_i) * \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) * \Delta x_i \leq 2 * M * \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) * \Delta x_i$$

Que por sua vez a condição para que f seja integrável é:

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) * \Delta x_i < \varepsilon$$

Então:

$$\sum_{i=1}^n (M_i + m_i) * \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) * \Delta x_i \leq 2 * M * \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) * \Delta x_i \leq 2 * M * \varepsilon$$

Com isso mostra-se que f^2 satisfaz a condição de integrabilidade mostrada no **Teorema 3.2.**, logo f^2 é integrável no intervalo $[a, b]$.

Teorema 3.8.: *Se f e g são funções integráveis em $[a, b]$ então $f * g$ também é integrável no mesmo intervalo.*

A demonstração do **Teorema 3.8.** torna-se consequência imediata de:

$$f * g = \frac{1}{2}[(f + g)^2 - f^2 - g^2]$$

Se f e g são integráveis, o seu produto também será, já que os **Teoremas 3.5 e 3.7** dizem respectivamente que: 3.5. que $f + g$ é integrável e 3.7. que f^2 é integrável no mesmo intervalo.

Logo:

$$f * g = \frac{1}{2}[(f + g)^2 - f^2 - g^2]$$

Também é integrável.

Teorema 3.9.: *Se f e g são funções integráveis num intervalo $[a, b]$, então, a) $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$; b) $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$.*

a) Se $f \geq 0$, então $S(f, P) \geq 0$ e $s(f, P) \geq 0$.

Logo:

$$\int_a^b f \geq 0$$

b) Se $f \geq g$, então $f - g \geq 0$ é integrável.

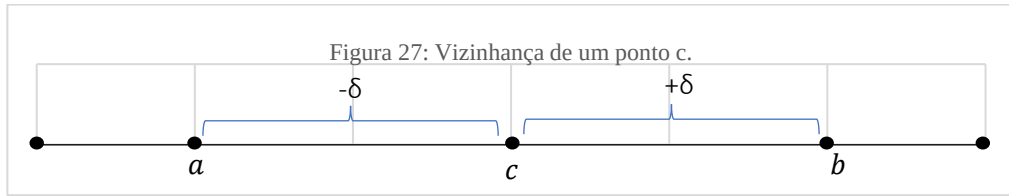
Logo:

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g$$

Teorema 3.10.: Se $f \geq 0$ é uma função contínua num intervalo $[a, b]$, com $f(c) > 0$ em algum ponto $c \in [a, b]$, então $\int_a^b f > 0$.

Demonstração:

Tem-se que c é um ponto interno, logo pertence ao intervalo $[a, b]$, como f possui uma continuidade em todo o intervalo, suponha que $f(x)$ permanece maior do que $\frac{f(c)}{2}$ em uma vizinhança $V_\delta(c)$ que está toda contida no intervalo $[a, b]$, como mostra a **Figura 27**.



Fonte: Produção do próprio autor

Por consequência:

$$\int_a^b f \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f * \frac{f(c)}{2}$$

Como $\frac{f(c)}{2}$ se tornou uma função quando c for aplicado em c , então:

$$\frac{f(c)}{2} * \int_{c-\delta}^{c+\delta} f = \frac{f(c)}{2} * 2\delta = \delta * f(c)$$

Tem-se que:

$$\int_a^b f \geq \delta * f(c)$$

Como $f(c) > 0$, e também que $\delta * f(c) > 0$, então:

$$\int_a^b f > 0$$

Teorema 3.11.: Se f é integrável em $[a, b]$, o mesmo é verdade de $|f|$ e:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Note que quando um número está em modulo, exemplo $|x|$ ocorre que:

$$-x \leq 0 \leq x$$

Então o modulo de:

$$\left| \int_a^b f \right| \Rightarrow - \int_a^b f \leq 0 \leq \int_a^b f$$

Logo:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Lema 3.1: Sejam I_i e I_s , respectivamente, as integrais inferior e superior de f num intervalo $[a, b]$. Essas integrais são os limites de $s(f, P)$ e $S(f, P)$, respectivamente, com $|P| \rightarrow 0$. Em outras palavras, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|P| < \delta \Rightarrow I_i - \varepsilon < s(f, P) \leq I_i \leq I_s \leq S(f, P) < I_s + \varepsilon$$

A partir desse lema é bem fácil concluir que quando se criar partições no intervalo $[a, b]$ de maneira que essas partições criadas tendam ao zero, ou seja, que ela forme subintervalos de $[a, b]$ extremamente pequenos, o resultado seria que as soma superior e inferior sejam iguais. Logo, a integral inferior (I_i) e superior (I_s) serão iguais.

3.5 Soma de Riemann

Teorema 3.12: Se f é uma função integrável no intervalo $[a, b]$, sua integral nesse intervalo é o limite das somas de Riemann com $|P|$ tendendo a zero, isto é,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

Demonstração: Qualquer que seja o $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, valem as desigualdades $m_i \leq f(c_i) \leq M_i$, então isso também acontece:

$$s(f, P) \leq \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \leq S(f, P)$$

Pelo **Lema 3.1** e juntando com o fato de que f é integrável, tem-se que a soma inferior e a soma superior têm o mesmo limite já que $|P| \rightarrow 0$, ou seja, I_i e I_s são iguais, se isso acontece, e como a desigualdade acima é verdadeira, tem-se que a Soma de Riemann também é igual aos limites das integrais I_i e I_s . Logo:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

Este dx que Riemann adotou em sua simbologia, expressava a soma das áreas de uma infinidade de retângulos infinitesimais de altura $f(x)$ e base “infinitamente pequena” (dx).

Note que essa reflexão possui alguns fundamentos semelhantes com a de Eudoxo, quando ele circunscovia e inscrevia figuras retilíneas na circunferência, área da figura circunscrita é maior do que a área do círculo raciocínio que por sua vez é maior que área da figura inscrita.

O mesmo acontece nas somas inferiores e superiores e a soma de Riemann. Soma superior é maior que a soma de Riemann que por sua vez é maior que a soma inferior.

Então os dois se utilizaram de artifício matemáticos para provar que essas áreas poderiam ser iguais se fosse utilizadas algumas ideias, lógico que ao longo dos séculos foram se aperfeiçoando e se tornando essa maravilhosa ferramenta que hoje é utilizada para calcular áreas dos mais diversos objetos.

Essa ideia mostrada foi fundamental para o cálculo integral e alguns matemáticos como Gaston Darboux (1842-1917) que conseguiu preencher todas as lacunas deixadas por Riemann e formalizaram mais ainda o cálculo integral, que com isso conseguiu avançar mais ainda e no século XIX com todos os avanços matemáticos e tecnológicos foi criado um programa computacional que simula muito bem a integral de Riemann, chamado de Geogebra.

CAPÍTULO 4

GEOGEBRA

O GeoGebra é um programa que pode ser utilizado no computador pessoal ou smartphone, foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado como uma metodologia que facilitar o entendimento sobre o assunto no qual está sendo apresentado em sala de aula já que unifica conceitos de geometria e álgebra em uma mesma plataforma computacional.

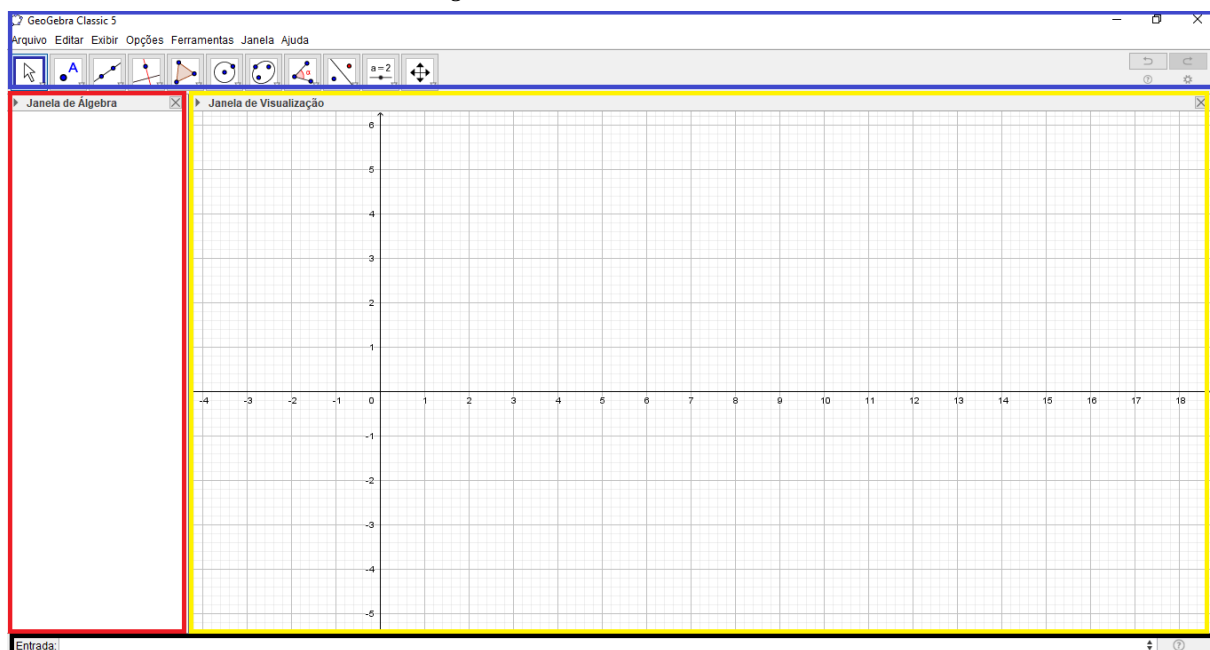
O programa permite inserir funções e seus respectivos gráficos, permite a realização de construções geométricas como a criação de retas, segmentos de retas, pontos, polígonos, cálculos simples, complexos, equações, coordenadas, entre outras diversas utilidades. E após terminar a construção desses objetos o programa ainda permite edições, caso ocorra a necessidade de fazer-se alguma correção.

O mais interessante do programa é o fato de ser bastante simples em sua linguagem, ficando bastante fácil a utilização, e mais ao trabalhar com as funções o programa ainda permite receber alguns comandos que são capazes encontrar as raízes e pontos extremos de uma função. Também oferece ferramentas tradicionais da geometria, álgebra e cálculo.

Esse programa tem uma vantagem grande na didática por possui todos esses recursos unificados em um único ambiente visual.

Ao abrir o programa a sua tela inicial é dividida em quatro: a barra de ferramentas que se encontra na parte superior, a entrada que é o local onde são inseridos os comandos (localizada na parte inferior), janela de álgebra onde mostra os resultados dos comandos e a janela de visualização que mostra a animação dos comandos (**Figura 28**):

Figura 28: Tela inicial do GeoGebra.



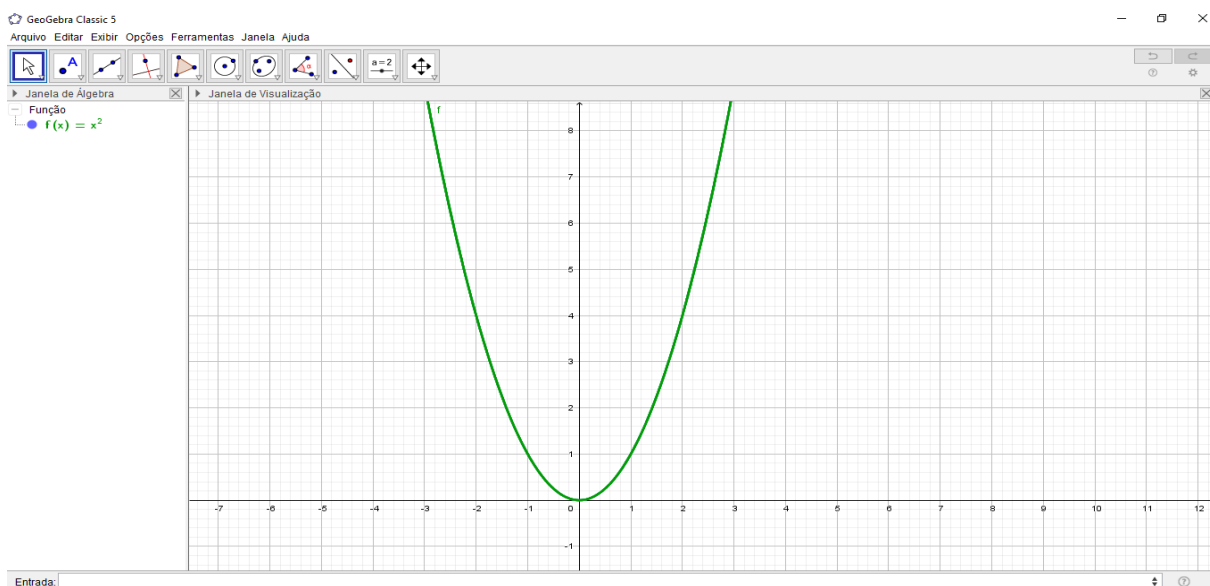
■ Barra de ferramenta. ■ Janela de Álgebra. ■ Janela de visualização. ■ Entrada.

Fonte: Programa GeoGebra

4.1. Soma de Riemann no Geogebra.

Para utilizar a soma de Riemann, primeiro é preciso ter uma função na qual será aplicada a soma de Riemann, e para adiciona a função no programa basta clicar na barra de entrada e digita a função que será utilizada. A **Figura 29** ilustra a função $f(x) = x^2$ adicionada.

Figura 29: Animação da função $f(x) = x^2$ no GeoGebra.



Fonte: Programa GeoGebra

Note que ao adiciona $f(x) = x^2$ na barra de entrada e pressionando a tecla *enter*, duas áreas são modificadas: a janela de álgebra e a janela de visualização, aparecendo a função $f(x) = x^2$ e a animação do gráfico da função, respectivamente.

Veja também que a janela de visualização é composta por um plano cartesiano, que é padronizado de uma a uma unidade, porém pode ser modificada utilizando o *scroll* do seu *mouse*, podendo aproximar ou afastar a visualização da animação.

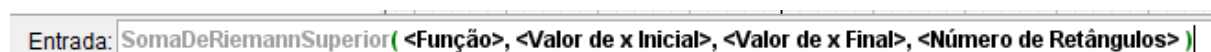
O programa também possui uma ferramenta que ilustra perfeitamente as animações da *Soma de Riemann*.

4.1. Soma superior de Riemann no GeoGebra.

Para apresentar a soma superior de Riemann no Geogebra basta digitar o comando “*SomaDeRiemann*” na barra de entrada, como o programa é bem intuitivo algumas sugestões irão aparecer como “*SomaDeRiemannInferior*” e “*SomaDeRiemannSuperior*”.

Clicando-se na opção “*SomaDeRiemannSuperior*”, o programa irá solicitar que o usuário digite quatro itens consecutivos: Função $f(x)$, valor inicial e final de x , no qual é o intervalo que os retângulos irão aparecer, e por último, a quantidade de retângulos no qual se deseja utiliza para essa aproximação (**Figura 30**).

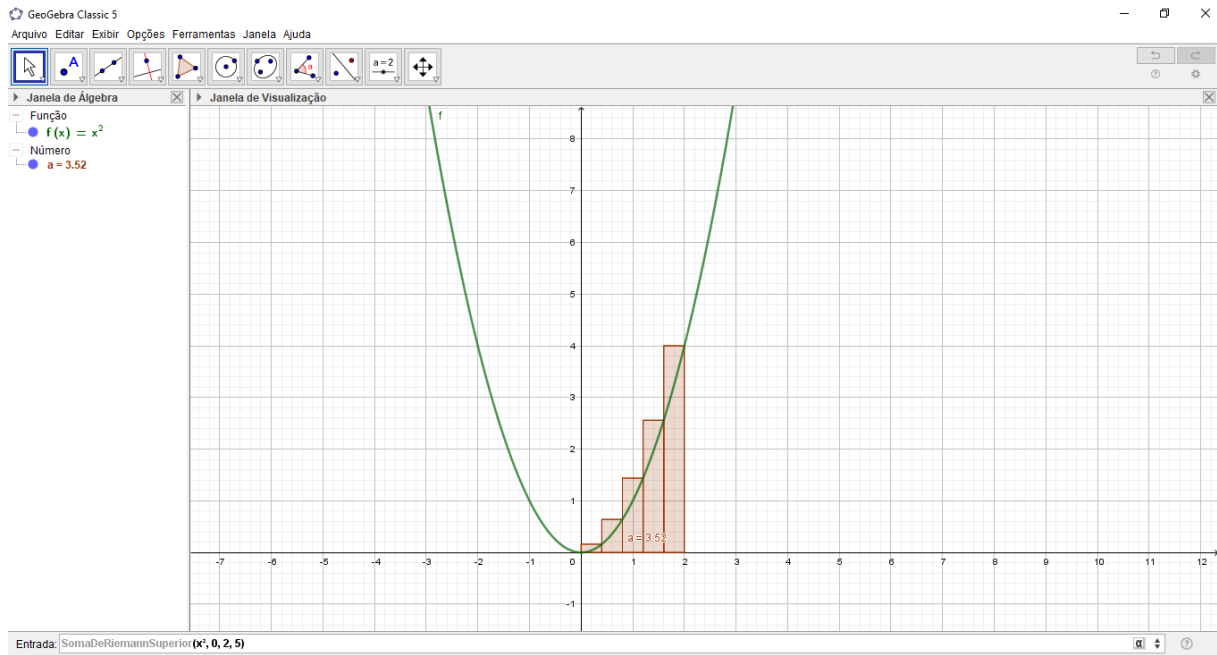
Figura 30: Barra de entrada como o comando soma superior.



Fonte: Programa GeoGebra

Para ter um melhor entendimento suponha que a função $f(x) = x^2$, com o intervalo $[0,2]$ e número de retângulos igual a 5, será usado como exemplo (**Figura 30**). Assim substitui-se a palavra função por x^2 , no lugar do valor de x inicial por 0, no lugar do valor de x final por 2, no número de retângulos por 5 e pressione *enter* (**Figura 31**).

Figura 31: Soma superior com 5 retângulos.



Fonte: Programa GeoGebra

Note que na janela de álgebra o programa criará um elemento “ a ”, no qual esse elemento representa a soma das áreas desses 5 retângulos mostrados na animação presente na janela de visualização.

Como o objetivo é achar o valor exato da área sob a função calcula-se a integral definida:

$$\int_0^2 x^2 dx$$

Para isso é bem simples, primeiro integra-se a função, ou seja, usa-se a operação integral e o cálculo da diferença de valores da primitiva, onde esses valores é o intervalo $[0,2]$. Veja:

$$\int x^2 = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \int x^2 = \frac{x^3}{3}$$

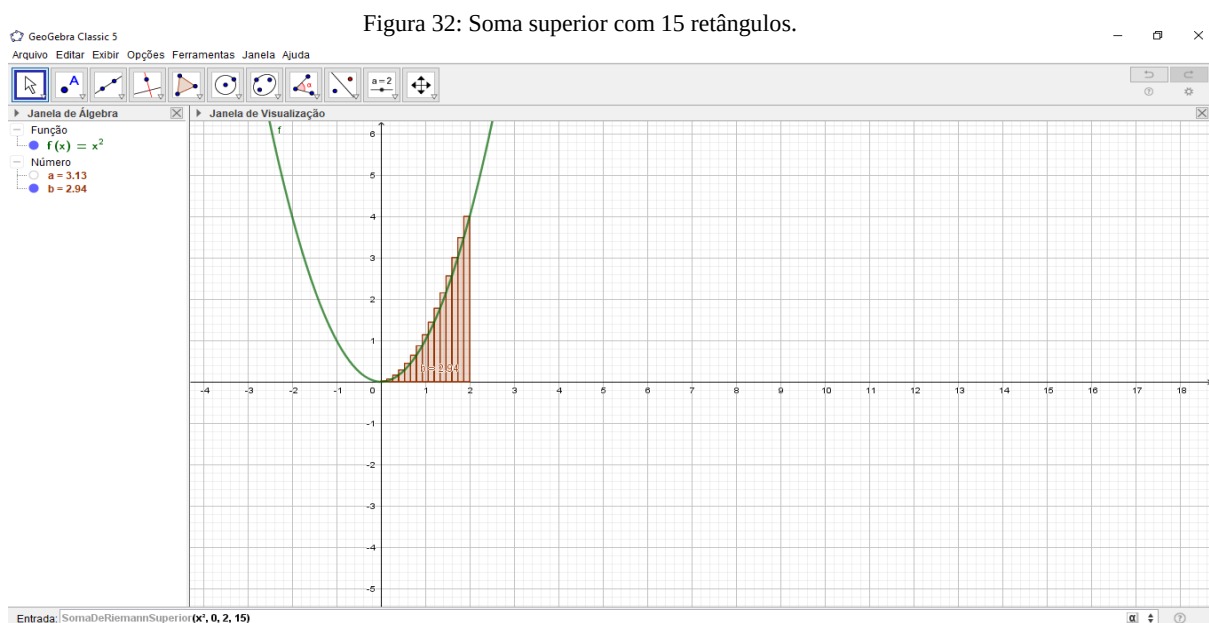
Agora fazendo a diferença tem-se:

$$\int_0^2 x^2 = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \int_0^2 x^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \Rightarrow \int_0^2 x^2 = 2.66$$

Assim a integral definida encontrada é igual a 2.66.

Comparando o resultado da integral definida 2.66 com a soma superior de Riemann 3.52 percebe-se que a soma superior se aproxima do valor da integral definida, porém o valor da soma superior é maior que a integral definida.

Aumentando a quantidade de retângulos para 15, observa-se o seguinte (**Figura 32**).



Fonte: Programa GeoGebra

Note que na janela de álgebra o programa criará um elemento “b” no qual esse elemento representa a soma das áreas desses 15 retângulos mostrados na animação presente na janela de visualização.

Veja que com 15 retângulos a soma das áreas é mais próxima do resultado desejado (integral definida), pois com 5 retângulos o valor da soma é 3.52 e agora com 15 retângulos o valor é 2.94, o que é mais próximo do resultado desejado, pois a integral definida é uma soma de retângulos quando essa quantidade tende ao infinito. Com apenas 10 retângulos a mais já se obteve uma aproximação suficiente para perceber que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_i)$$

4.2. Soma inferior de Riemann no GeoGebra.

Analogamente a soma superior, para apresentar a soma inferior de Riemann no Geogebra basta digitar o comando “*SomaDeRiemann*” na barra de entrada e irá aparecer as sugestões *SomaDeRiemannInferior*” e “*SomaDeRiemannSuperior*”.

Clicando-se na opção “*SomaDeRiemannInferior*”, o programa irá solicitar que o usuário digite quatro itens consecutivos: Função $f(x)$, valor inicial e final de x , no qual é o intervalo que os retângulos irão aparecer, e por último, a quantidade de retângulos no qual se desejam utilizar para essa aproximação (**Figura 33**).

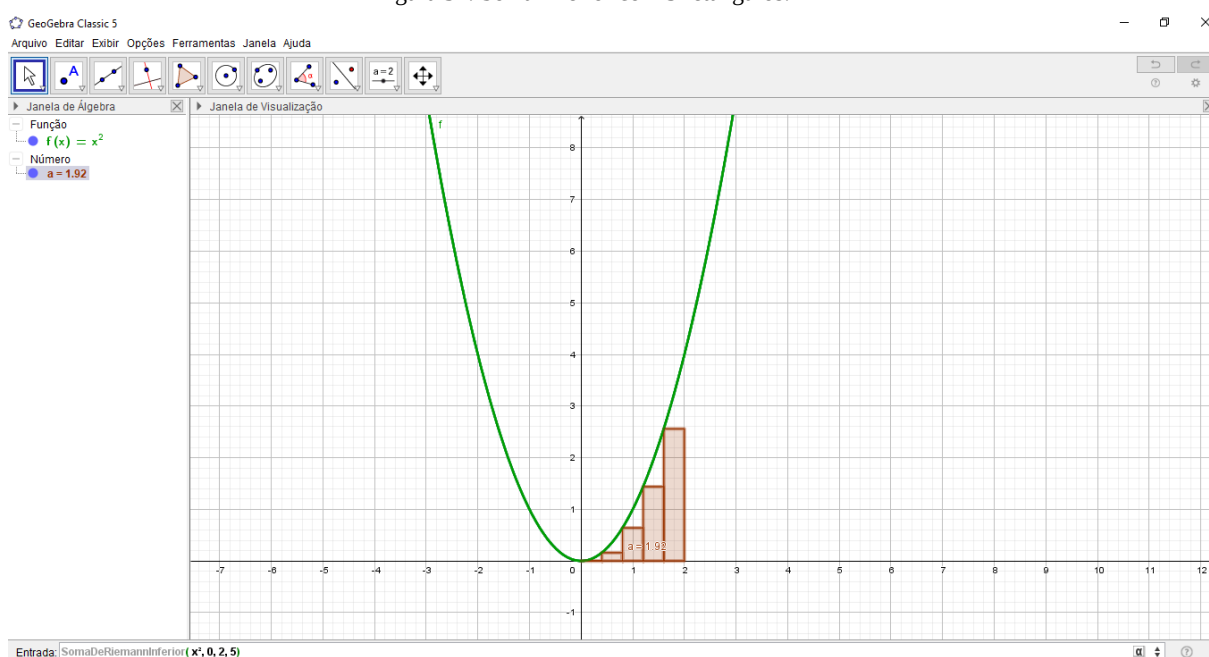
Figura 33: Barra de entrada como o comando soma inferior.

Entrada: `SomaDeRiemannInferior(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos> )`

Fonte: Programa GeoGebra

Para se ter um melhor entendimento os valores a serem usados serão os mesmos da soma superior, então a função $f(x) = x^2$, com o intervalo $[0,2]$ e número de retângulos igual a 5, será usado como exemplo. Assim substitui-se a palavra função por x^2 , no lugar do valor de x inicial por 0, no lugar do valor de x final por 2, no número de retângulos por 5 e pressione *enter* (**Figura 34**).

Figura 34: Soma inferior com 5 retângulos.



Fonte: Programa GeoGebra

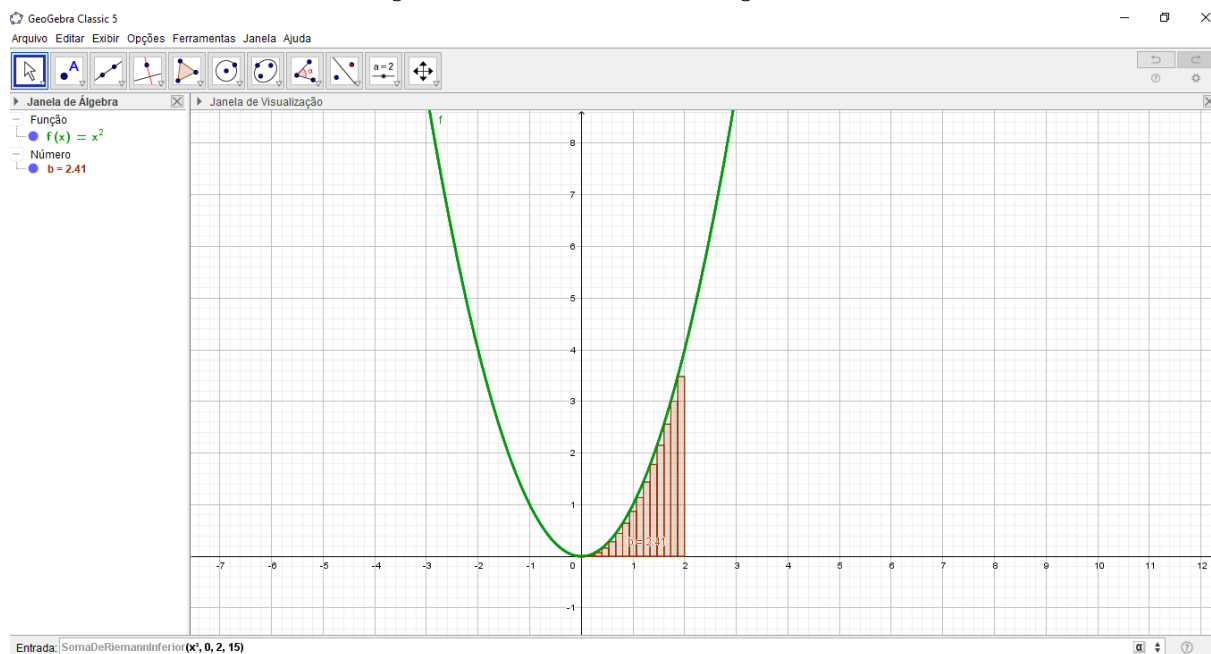
Note que na janela de álgebra o programa criará um elemento “ a ”, no qual esse elemento representa a soma das áreas desses 5 retângulos mostrados na animação presente na janela de visualização.

Lembrando que o valor da integral definida é: $\int_0^2 x^2 = 2.66$

Comparando o resultado da integral definida 2.66 com a soma inferior de Riemann 1.92 percebe-se que a soma inferior se aproxima do valor da integral definida, porém o valor da soma inferior é menor que a integral definida.

Aumentando a quantidade de retângulos para 15, observa-se o seguinte (**Figura 35**).

Figura 35: Soma inferior com 15 retângulos.



Fonte: Programa GeoGebra

Note que na janela de álgebra o programa criará um elemento “ b ” no qual esse elemento representa a soma das áreas desses 15 retângulos mostrados na animação presente na janela de visualização.

Veja que com 15 retângulos a soma das áreas é mais próxima do resultado desejado (integral definida), pois com 5 retângulos o valor da soma é 1.92 e agora com 15 retângulos o valor é 2.41, o que é mais próximo do resultado desejado, pois a integral definida é uma soma de retângulos quando essa quantidade tende ao infinito. Com apenas 10 retângulos a mais já se obteve uma aproximação suficiente para perceber que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_i)$$

Nessa comparação no GeoGebra utilizou-se valores aleatórios, porém pode ser feito com outros valores, por exemplo com uma outra função, ou um intervalo maior do que $[0,2]$ ou até mesmo intervalos com valores negativos, já que possui a mesma metodologia.

O fato é que quanto mais retângulos forem adicionados na soma superior o resultado se aproxima da integral definida por um lado a direita, o mesmo ocorre com a soma inferior quanto mais retângulos adicionados na soma inferior o resultado também se aproxima da integral definida, porém pela esquerda; e quando essas somas forem iguais, ou seja, soma superior igual à soma inferior, o resultado será exatamente a integral definida no intervalo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho iniciou apresentando o *método da exaustão* que pode ser considerado a semente daquilo que com a ajuda de Newton, Leibniz, Cauchy e Riemann tornou-se a integral de Riemann, eles tiveram maior participação pois criaram o conceito de limite, infinito, séries e convergência. Outros matemáticos também auxiliaram de alguma forma para que aquela ideia de circunscrever e inscrever figuras retilíneas em figuras curvilíneas transformasse na integral de Riemann.

Ela apresenta o raciocínio de que com três áreas: uma área superior, a área desejada e uma área inferior; onde a área superior e inferior encaminham-se para o mesmo resultado utilizando o conceito de limite, limitando a área superior inferiormente e a inferior superiormente, portanto ambos resultados convergem exatamente para a área que almeja encontrar.

O estudo do cálculo diferencial e integral faz parte da matriz curricular do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Pará, sendo encontrado nas seguintes disciplinas: Cálculo I, II, III e IV. Que por sua vez pertencem respectivamente aos 1º, 2º, 3º e 4º semestres. A partir disso se percebe a importância de se estudar o cálculo diferencial e integral, visando a valorização do ensino das integrais na formação de professores como uma ferramenta indispensável, pois pode ser aplicada em diversas situações, a exemplos: cálculos de área, volumes, matemática financeira, física, entre outras aplicações. Esse trabalho veio abordar a história de como deu-se o cálculo integral, a partir de uma motivação pessoal na qual possa beneficiar a outros discentes que possam chegar a ter a mesma motivação que é a curiosidade de saber “de onde veio?”, “como veio?” e “para que veio?”.

Tendo em vista que quando o discente consegue compreender de onde, como, para que veio determinado conteúdo, o aprendizado torna-se mais atrativo. Este trabalho objetiva trazer o que o discente precisa para aprender Cálculo. No primeiro momento explica-se a motivação inicial que a humanidade teve para o desenvolvimento inicial do cálculo até ao cálculo integral, que por sua vez é apresentado nas universidades de forma dispersa.

Logo essa pesquisa apresenta historicamente a construção do Cálculo integral, pesquisa esta que pode ser utilizada por professores para seus discentes. O trabalho possui

linguagem simples que apresenta a essência do cálculo integral de uma maneira acessível, para alunos não familiarizados com integral consigam compreender um pouco do que se trata a ideia aplicada de integral.

Além do cálculo integral que tem grande importância em vários conteúdos que são vistos no curso de Licenciatura Plena em Matemática, este trabalho cita dois conceitos matemáticos importantes que auxiliam na construção do Cálculo integral que é: o conceito de limite e derivada.

O GeoGebra é um programa que ilustra as animações gráficas da soma inferiores e superiores de Riemann, onde os professores que venham a ler este trabalho sejam familiarizados com o programa, mostrando-lhes a possibilidade de utilizar em sala de aula para instigar a curiosidade e interesse dos alunos.

SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

No intuito de facilitar a identificação de oportunidades de continuação da pesquisa, são sugeridos os seguintes temas a serem possivelmente abordados em trabalhos futuros relacionados ao assunto tratado nesta monografia:

- Construção do Teorema fundamental do cálculo.
- Construção do Cálculo diferencial.
- Integral Lebesgue.

REFERÊNCIAS

ARQUIMEDES. Autora: Tatiana Marins Roque. Vídeos do PROFMAT. SBM, 2013. Disponível em: <<http://bit.profmtat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/611>>. Acesso em: 20.03.2018.

ÁVILA, Geraldo. Introdução à análise Matemática. 2º Edição revista. Editora Edgard Blücher.

BOYER, Carl B. História da Matemática. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de Cálculo. Volume 1. 5ª Edição. Editora LTC.

JÚLIO, Francisco. Introdução à análise real. PDF. Disponível em:

<<http://googlewebligh.com/i?u=http:www.ebah.com.br/content/ABAAAfBlwAD/introducao-a-analise-real-francisco-julio&hl=pt-BR&grqid=AmT9itUO&geid=1032#>>