



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS BRAGANÇA**

**AS SECÇÕES CÔNICAS: UMA ABORDAGEM ANALÍTICA
E EXPERIMENTAL COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA.**

MAYCON DOUGLAS FARIAS DOS SANTOS

**BRAGANÇA, PARÁ
2026**

MAYCON DOUGLAS FARIAS DOS SANTOS

AS SECÇÕES CÔNICAS: UMA ABORDAGEM ANALÍTICA E EXPERIMENTAL COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)
apresentado à UNIVERSIDADE FEDERAL
DO PARÁ, CAMPUS BRAGANÇA, como
parte dos requisitos para obtenção do grau de
licenciado em MATEMÁTICA, sob a orien-
tação da Prof^a. Dra. SILVIA HELEN FER-
REIRA DOS SANTOS.

Orientador:
Prof^a. Dra. SILVIA HELEN FERREIRA DOS SANTOS.

BRAGANÇA, PARÁ
2026

Dedico este trabalho aos meus amados pais, que me apoiaram durante toda a vida, os ensinamentos por eles repassados, a minha noiva amada e amigos que fiz durante a curso. Em suma, ao Deus, Senhor e Criador do Universo que me concedeu à vida.

Agradecimentos

O indivíduo não constrói sentimentos sozinho, durante a vida diversas pessoas colaboraram para o meu desenvolvimento pessoal e profissional, sendo assim, não há possibilidade de citar todos os amigos, colegas de turma e familiares, professores. Todavia, agradeço: meus pais Elton e Geise, irmã, meus avós maternos e paternos, minha noiva e companheira, Lorena, professores e diretores da faculdade de matemática (FAMAT), em especial a minha orientadora Dra. Silvia Helen Ferreira dos Santos.

Estes conjuntos colaboraram diretamente com grande parte dos meus valores como pessoa, de maneira eficaz, paciente e respeitosa. Desta forma, o ser humano pode aprender coisas que não estão escritas em livros, como o amor, a compaixão e a reciprocidade, isso é possível através da relação com as pessoas.

De maneira especial, agradecer ao Deus Criador dos Céus e da Terra, que me concedeu saúde, força e sabedoria.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo central o estudo aprofundado das cônicas (elipse, hipérbole e parábola) no contexto da Geometria Analítica. Apesar de sua importância histórica e aplicação em diversas áreas da ciência, esses temas costumam ser explorados de maneira limitada no ensino médio.

A proposta é apresentar as cônicas de forma clara e acessível, partindo de suas definições geométricas e avançando para suas representações algébricas. Analisamos tanto as equações reduzidas quanto a equação geral das cônicas, investigando os procedimentos de rotação e translação necessários para a sua identificação e classificação.

Também são abordadas conexões com a Álgebra Linear, utilizando conceitos como mudança de base e diagonalização para fornecer uma alternativa rigorosa à classificação tradicional.

Ao longo do trabalho, são utilizados recursos gráficos com o auxílio do software Geogebra, com o intuito de tornar mais visível a relação entre a geometria e a álgebra.

O intuito é oferecer uma contribuição didática que auxilie estudantes e professores no aprofundamento desse tema fundamental, incentivando uma visão mais integrada da matemática.

Palavras-chave: Seções Cônicas, Geometria Analítica, GeoGebra, Volume.

Abstract

This work aims to provide an in-depth study of conic sections (ellipse, hyperbola, and parabola) within the context of Analytic Geometry. Despite their historical importance and wide range of applications in various scientific fields, these topics are often explored in a limited way at the high school level.

The proposal is to present conic sections in a clear and accessible manner, starting from their geometric definitions and progressing to their algebraic representations. We analyze both the standard (reduced) equations and the general equation of conics, investigating the procedures of rotation and translation necessary for their identification and classification.

Connections with Linear Algebra are also explored, using concepts such as change of basis and diagonalization to provide a more rigorous alternative to the traditional classification approach.

Throughout the work, graphic resources are used with the help of GeoGebra software, aiming to make the relationship between geometry and algebra more visible.

The aim is to offer a didactic contribution that helps students and teachers in delving deeper into this fundamental topic, encouraging a more integrated view of mathematics.

Keywords: Conic Sections, Analytic Geometry, GeoGebra, Volume.

Lista de Figuras

Figura 1 – Decomposição Geométrica do cone.	12
Figura 2 – Secções cônicas.	14
Figura 3 – Cone de duas folhas.	15
Figura 4 – Planificação do cone.	16
Figura 5 – Apolônio De Perga.	17
Figura 6 – Parábolas no plano cartesiano.	21
Figura 7 – Elipse no plano com focos $F_1(-3, 0), F_2(3, 0)$	23
Figura 8 – Gráfico de um aremesso gerando uma parábola.	25
Figura 9 – Hiperbole com focos $F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$	27
Figura 10 – Cone em um espaço tridimensional.	29
Figura 11 – Plano paralelo a base do cone.	30
Figura 12 – Parábola gerada a partir de um plano diagonal.	30
Figura 13 – Elipse no cone.	31
Figura 14 – Hipérbole no cone duplo.	32
Figura 15 – Representação geométrica dos elementos lineares e pontos notáveis da elipse.	37
Figura 16 – Elementos geométricos da elipse.	39
Figura 17 – Comparação entre uma elipse pouco excêntrica e uma muito excêntrica.	40
Figura 18 – Parábola com excentricidade unitária ($e = 1$).	42
Figura 19 – Elementos da hipérbole.	43
Figura 20 – Representação dos parâmetros a e c que definem a excentricidade hiper- bólica.	44
Figura 21 – Visualização da excentricidade $e = 1,67$	45
Figura 22 – Elipse no espaço tridimensional.	48
Figura 23 – Coliseu, Roma, Itália.	48
Figura 24 – Bilhar Elíptico	49
Figura 25 – Parábola $y = x^2$	52
Figura 26 – Hiérbole no plano	54
Figura 27 – Hipérbole com assíntotas $y = \sqrt{3}x$ e $y = -\sqrt{3}x$	56

Figura 28 – Cone duplo interceptado por um plano.	57
Figura 29 – Parábola gerada através de um plano	58
Figura 30 – Tronco de cone.	59
Figura 31 – Cone interceptado por um plano paralelo a sua base.	61

LISTA DE SÍMBOLOS

Conjuntos e Espaços

$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos Números Inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos Números Racionais
$\mathbb{I}$	Conjunto dos Números Irracionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\mathbb{R}^3$	Espaço tridimensional

Letras Gregas e Constantes

α	Alpha (ângulo ou constante)
β	Beta (ângulo ou constante)
δ	Delta (variação ou diferença pequena)
θ	Teta (medida de ângulo)
π	Constante Pi

Operadores e Relações

$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$\approx$	Aproximadamente
$>$	Maior que
$<$	Menor que
$\geq$	Maior ou igual a
$\leq$	Menor ou igual a
$\pm$	Mais ou menos

Cálculo e Funções

$\int$ Integral

f Função

Geometria e Variáveis

h Altura

r Raio

R Raio maior

g Geratriz

V Volume

A_L Área lateral

A_T Área total

Sumário

Resumo	3
Abstract	4
1 Introdução	11
2 Fundamentos, contexto histórico e origem das secções cônicas	13
2.1 Surgimento	13
2.1.1 Estudo das secções cônicas	14
2.1.2 Representação de um cone de duas folhas no espaço tridimensional de mesmas dimensões e volume utilizando o software Geogebra 3D .	15
2.1.3 Planificação de um cone e tronco de cone	15
2.1.4 As contribuições de Apolônio de Perga para os estudos das cônicas	16
3 O problema da duplicação do cubo	18
3.1 A Relação Estrutural entre a Duplicação do Cubo e as Cônicas	19
3.1.1 Formulação Algébrica do Problema	20
3.1.2 Redução a Médias Proporcionais	20
3.1.3 Interpretação Geométrica	20
4 Cônica sendo utilizada na física	22
4.1 Estudos voltados para a aplicação da Elipse	22
4.1.1 Exemplo de aplicação da Elipse	23
4.1.2 Graficamente	23
4.2 Estudos voltados para a aplicação da Parábola	23
4.2.1 Exemplo de utilização de parábola em um arremesso no basquete .	24
4.2.2 Graficamente	25
4.3 Estudos voltados para a aplicação da hipérbole	25
4.3.1 Exemplo de dois focos quaisquer no plano	26
4.3.2 Graficamente	27
5 O Uso do Software GeoGebra no Ensino de Cônicas	28
6 Demonstração da equação e propriedades do cone	33

6.0.1	Forma paramétrica	34
6.0.2	4. Volume do cone	35
6.0.3	Volume do cone por integração	35
6.0.4	Ângulo do vértice do cone	36
7	Secções Cônicas e Definições	37
7.1	Elipse	37
7.1.1	Excentricidade	38
7.1.2	Representação Gráfica	39
7.1.3	Análise Limite da Excentricidade	39
7.2	Parábola	41
7.2.1	Excentricidade da Parábola	41
7.2.2	Exemplo Numérico	41
7.3	Hipérbole	42
7.3.1	Elementos Constituintes da Hipérbole	43
7.3.2	Excentricidade da Hipérbole	44
8	Cônicas: Usualidade da elipse, parábola e hiperbole	47
8.1	Elipse	47
8.1.1	Aplicação na Arquitetura, Design e Engenharia	48
8.1.2	Aplicação da Elipse: Área total e distância entre os focos de uma pista de atletismo	49
8.2	Parábola	51
8.2.1	Exemplo Simples de Parábola: Arco de um Jardim	52
8.3	Hiperbole	53
8.3.1	Situação -Problema	54
8.4	Definição de equação do segundo grau	56
9	Tronco de Cone	59
9.1	Volume do Tronco de Cone	60
10	Conclusão	62

Capítulo 1

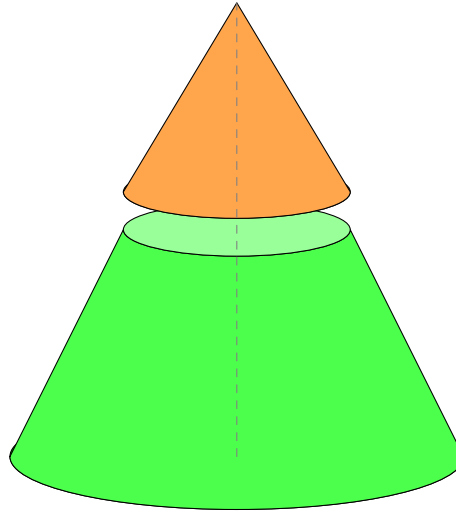
Introdução

Ao estudarmos as **secções cônicas e suas aplicações**, deparamo-nos com conceitos que transcendem a matemática pura, alcançando a física, a história e áreas aplicadas como a engenharia e a arquitetura. Historicamente, as cônicas passaram por profundos desenvolvimentos, tendo em **Apolônio de Perga** uma de suas maiores referências; sua obra, *As Cônicas*, permanece como um manual fundamental para a compreensão do tema [6]

Na gênese deste estudo, nota-se um caráter abstrato. Historicamente, a busca pela solução de problemas clássicos, como a **duplicação do cubo**, que envolve o número irracional $\sqrt[3]{2}$ e foi posteriormente provado impossível de resolver apenas com régua e compasso, isso impulsionou a descoberta dessas curvas [2]. Séculos mais tarde, matemáticos como Pierre de Fermat aplicaram a Geometria Analítica para sistematizar essas figuras sob uma nova perspectiva algébrica.

Hodiernamente, a sociedade dispõe de recursos tecnológicos que seriam de valor inestimável em séculos passados. Para fins de visualização além do papel e caneta, o software GeoGebra permite modelar com precisão um cone de duas folhas no espaço tridimensional ($\mathbb{R}^3$) [5]. Por meio da geometria dinâmica, torna-se notório que a intersecção desse cone por um plano α resulta em diferentes figuras (Elipse, Parábola ou Hipérbole) a depender da inclinação do corte.

Figura 1: Decomposição Geométrica do cone.



Além das cônicas propriamente ditas, este trabalho contextualiza o tronco de cone, gerado por um corte horizontal paralelo à base. A figura 1 ilustra essa decomposição, onde se observa o tronco de cone e um cone menor, preservando a semelhança geométrica [11]. Essa abordagem facilita a compreensão das relações volumétricas e espaciais que fundamentam as aplicações práticas discutidas adiante, como a geometria presente na construção de monumentos e objetos.

As aplicações das seções cônicas abrangem campos como a física, a astronomia e o design. Monumentos históricos e modernos utilizam formatos elípticos e parabólicos, provando que as definições descritas por Apolônio de Perga continuam a sustentar inovações tanto teóricas quanto estruturais.

Outrossim, é imprescindível ressaltar que o estudo das seções cônicas e de suas propriedades não é apenas uma exploração teórica, mas uma exigência pedagógica. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o aluno deve ser capaz de interpretar e construir modelos para resolver problemas que envolvam objetos com formatos parabólicos, elípticos ou hiperbólicos, integrando a geometria analítica a contextos do mundo físico [3].

Capítulo 2

Fundamentos, contexto histórico e origem das secções cônicas

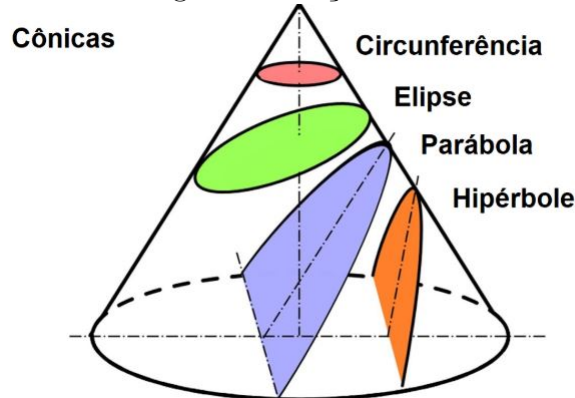
2.1 Surgimento

O estudo das cônicas remonta à Grécia Antiga, por volta do século IV a.C, com destaque para o matemático Menecmo, discípulo de Eudoxo de Cnido. Atribui-se a ele a descoberta das curvas cônicas (elipse, parábola e hipérbole) ao investigar soluções geométricas para o clássico problema da duplicação do cubo [2]. Desta maneira, Menecmo percebeu que essas curvas surgiam como intersecções de um cone com um plano, dependendo da abertura do ângulo no vértice do cone.

Os primeiros estudos referentes às cônicas deram-se inicialmente pela formalização da teoria de Menecmo. Naquela época, a busca pela definição de cônica e seus modelos resumia-se à classificação do ângulo do cone: a elipse era definida como a seção de um cone acutângulo; a hipérbole como a seção de um cone obtusângulo; e a parábola como a seção de um cone retângulo [6]. Na geometria clássica, esses termos referiam-se à categorização das angulações do cone em relação à sua geratriz.

No século seguinte, o matemático Apolônio de Perga (262 a.C. — 190 a.C.) sistematizou o estudo das curvas em sua obra fundamental, *As Cônicas* (Conics). Originalmente dividida em oito volumes, apenas sete sobreviveram, dos quais quatro chegaram completos em grego e três em traduções árabes aos espaços acadêmicos modernos [2]. Somado a isso, Apolônio foi o responsável pela introdução definitiva dos nomes elipse, parábola e hipérbole, além de desenvolver uma teoria unificada, demonstrando que todas poderiam ser obtidas como seções planas de um mesmo cone duplo de base circular, variando-se apenas a inclinação do plano de corte [11].

Figura 2: Secções cônicas.



Fonte: Disponível em: Acessado em 11 abr. 2026

Durante a Idade Média, os trabalhos de Apolônio foram preservados e aperfeiçoados por matemáticos árabes. Destaca-se o polímata **Alhazen** (Ibn al-Haytham), cujas contribuições em óptica utilizaram propriedades das cônicas para explicar a reflexão em espelhos curvos [2]. O interesse por essas curvas renasceu na Europa durante o **Renascimento**, impulsionado pela necessidade de novos métodos na astronomia e na geometria.

A grande revolução ocorreu no século XVII com o advento da Geometria Analítica, estabelecida por **René Descartes** e **Pierre de Fermat**. Nesse período, as cônicas deixaram de ser tratadas apenas como formas geométricas espaciais e passaram a ser expressas por equações algébricas no plano cartesiano. Descartes, ao estabelecer a relação entre álgebra e geometria, permitiu que as propriedades dessas curvas fossem analisadas de forma puramente analítica [6].

Outro marco fundamental foi a publicação da obra *Principia Mathematica* (1687), de **Isaac Newton**. Nela, Newton demonstrou que as órbitas dos planetas em torno do Sol são elípticas, fundamentando-se nas leis da gravitação universal e consolidando a aplicação das cônicas na mecânica celeste [2].

Portanto, ao longo dos séculos, as cônicas deixaram o campo da abstração para desempenhar um papel essencial na engenharia, arquitetura e tecnologia. Atualmente, além de seu valor teórico, elas fundamentam aplicações práticas onipresentes, como o design de antenas parabólicas, o funcionamento de sistemas ópticos, o cálculo de trajetórias balísticas e a estruturação de grandes obras arquitetônicas [12].

2.1.1 Estudo das secções cônicas

O estudo das secções cônicas iniciou-se por volta do século IV a.C. Desde então, incontáveis matemáticos e físicos dedicaram grande parte de suas vidas ao estudo dessas curvas e de suas propriedades geométricas. Este capítulo apresenta uma breve análise, de caráter não exaustivo, sobre a gênese das cônicas no período que antecede as contribuições de Apolônio de Perga, astrônomo e matemático da Escola de Alexandria.

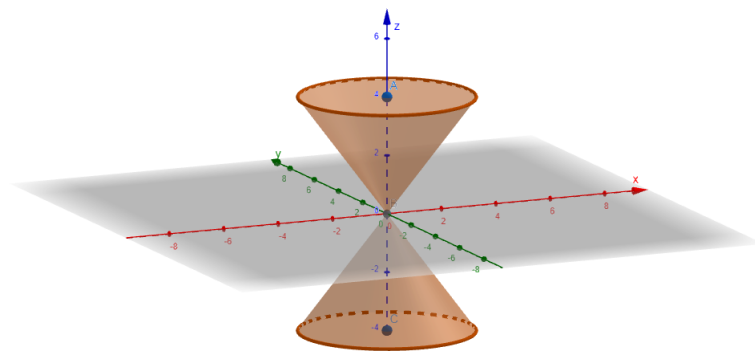
A importância deste resgate histórico refere-se ao fato de que os fundamentos consolidados por Apolônio em sua obra máxima, intitulada "As Cônicas", colaboram até hoje com os estudos da geometria analítica moderna. É amplamente aceito que grande parte do conhecimento sistematizado que possuímos sobre este assunto advém dos estudos rigorosos realizados por Apolônio (BOYER, 2012).

Antes desse período, matemáticos como Menecmo já haviam iniciado a investigação dessas curvas ao tentarem resolver problemas clássicos, como a duplicação do cubo. Todavia, foi com a sistematização de Apolônio que as cônicas deixaram de ser vistas apenas como cortes específicos em cones distintos, passando a ser compreendidas como variações de inclinação de um plano sobre um único cone de duas folhas (IEZZI, 2013).

2.1.2 Representação de um cone de duas folhas no espaço tridimensional de mesmas dimensões e volume utilizando o software Geogebra 3D

O programa GeoGebra permite que o usuário visualize gráficos de determinadas situações, em específico, podemos construir uma imagem de dois cones em um espaço tridimensional, ou seja, um cone de duas folhas, ambos idênticos em relação ao seu volume e dimensões.

Figura 3: Cone de duas folhas.



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o software Geogebra (2026).

2.1.3 Planificação de um cone e tronco de cone

A planificação do cone e do tronco de cone consiste em representar suas superfícies tridimensionais em um plano, preservando suas áreas. No cone, a base permanece um círculo de raio r e a superfície lateral transforma-se em um setor circular de raio igual à geratriz g , cujo arco corresponde à circunferência da base. Desta maneira, é possível obter a área lateral e área total, sendo:

i $A_{lateral} = \pi r g$

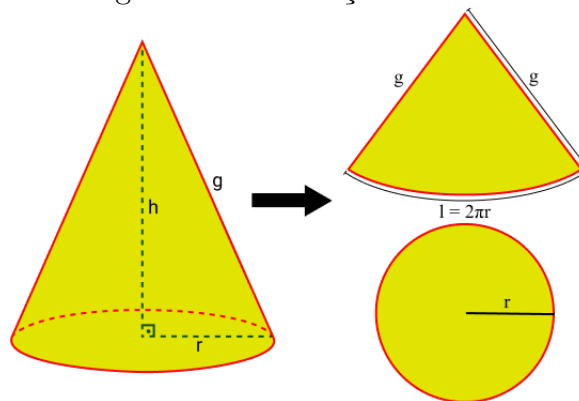
ii $A_{total} = \pi r^2 + \pi r g$

Além disso, o tronco de cone, formado pelo corte de um cone por um plano paralelo à base, a planificação resulta em R e r e uma superfície lateral em forma de setor circular anular. Sua área lateral e área total são dadas por:

i $A_{lateral} = \pi(R + r)g$

ii $A_{total} = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi(R + r)g$

Figura 4: Planificação do cone.



Fonte: Matemática Básica. Disponível em: <https://matematicabasica.net/area-do-cone/>

2.1.4 As contribuições de Apolônio de Perga para os estudos das cônicas

As contribuições de Apolônio de Perga representam o ápice da geometria grega clássica. Vivendo aproximadamente entre 262 a.C. e 190 a.C., ele ficou imortalizado com o título de o "*Grande Geômetra*" devido ao rigor e a profundidade de suas demonstrações [2]. Sua obra magna, "*As Cônicas*" (Konika), foi originalmente dividida em oito livros, dos quais apenas os quatro primeiros sobreviveram no grego original, enquanto os volumes V, VI e VII foram preservados por meio de traduções árabes; o oitavo volume, infelizmente, foi perdido [6].

A estrutura da obra reflete uma organização lógica sem precedentes:

Livros I-IV: Introdução às propriedades fundamentais das curvas (elipse, parábola e hipérbole), estudos de diâmetros e propriedades de tangência.

Livros V-VII: Discussões avançadas sobre segmentos máximos e mínimos (antecedendo conceitos de normais e curvatura), seções semelhantes e diâmetros conjugados.

Uma de suas contribuições mais célebres foi a introdução dos termos elipse (*élleipsis*), parábola (*parabolé*) e hipérbole (*hyperbolé*). Tais nomenclaturas não eram arbitrárias;

elas derivavam do método grego de *aplicação de áreas*, onde se comparava o quadrado de uma ordenada com um retângulo aplicado sobre a abscissa [2].

Somado a isso, Apolônio promoveu a unificação das seções cônicas. Enquanto seus predecessores (como Menecmo) acreditavam que eram necessários três tipos diferentes de cones para gerar as três curvas, Apolônio demonstrou que todas podem ser obtidas a partir de um único cone duplo de base circular, bastando variar a inclinação do plano de corte em relação à geratriz do cone [11].

Por fim, seus estudos sobre diâmetros conjugados e assíntotas anteciparam ferramentas que seriam fundamentais séculos depois para a Geometria Analítica. Apolônio estabeleceu que as propriedades das cônicas independem de eixos fixos, tratando-as por meio de suas propriedades intrínsecas, o que conferiu uma base conceitual robusta que perdurou até a modernidade.

Figura 5: Apolônio De Perga.



Fonte: Matemática e suas regras. Disponível em:

<https://mregrsa.blogspot.com/2012/11/apolonio-de-perga-nasceu-cerca-de-262-a.html>

Capítulo 3

O problema da duplicação do cubo

O problema da duplicação do cubo, também conhecido como o "*Problema Délico*", figura entre os três grandes desafios clássicos da geometria grega, juntamente com a quadratura do círculo e a trisseção do ângulo. Este desafio consiste em construir, utilizando exclusivamente régua não graduada e compasso, o lado de um cubo cujo volume seja exatamente o dobro de um cubo dado. De acordo com a tradição, a denominação "*Problema Délico*" origina-se de uma lenda envolvendo a ilha de Delos. Sobre a origem deste enigma, Howard Eves relata: [4].

De acordo com uma das versões da lenda, o Oráculo de Delfos teria ordenado aos habitantes de Delos, para que se livrassem de uma peste, que duplicassem o altar cúbico de Apolo. Os habitantes tentaram então resolver o problema, dobrando o comprimento das arestas do altar, mas com isso obtiveram um altar com oito vezes o volume do original. Quando os habitantes de Delos consultaram Platão sobre o assunto, ele respondeu que o oráculo não queria de fato um altar maior, mas sim que eles passassem a cultivar o estudo da geometria [4].

Formalmente, dado um cubo de aresta a , seu volume é $V = a^3$. Duplicar este volume significa encontrar uma nova aresta x tal que $x^3 = 2a^3$, o que implica em $x = a\sqrt[3]{2}$. A questão resume-se, portanto, à construção geométrica da raiz cúbica de 2 [2].

Além disso, não é possível achar soluções para o problema por meios euclidianos foi elucidada apenas no século XIX. Sobre essa transição do pensamento geométrico para o algébrico, Tatiana Roque observa que:

A impossibilidade de resolver esses problemas clássicos com régua e compasso só foi demonstrada quando eles foram traduzidos para a linguagem da álgebra. O que era um problema de construção de figuras tornou-se um problema sobre a natureza dos números e das extensões de corpos [10].

Dessa forma, provou-se que a construção com régua e compasso está limitada a extensões de corpos de grau 2^n . Como $\sqrt[3]{2}$ é raiz do polinômio irredutível $p(x) = x^3 - 2$, seu grau sobre os racionais é 3, o que torna sua construção impossível pelos métodos clássicos [6].

Apesar dessa restrição, soluções não-euclidianas surgiram na antiguidade. Hipócrates de Quios demonstrou que o problema poderia ser reduzido à busca por duas médias proporcionais entre a e $2a$ ($a : x = x : y = y : 2a$). Essa redução foi o que permitiu que matemáticos posteriores, como Menecmo, utilizassem as secções cônicas para encontrar tais médias, transformando um dilema místico em um dos pilares da geometria avançada [4].

3.1 A Relação Estrutural entre a Duplicação do Cubo e as Cônicas

Foi nesse contexto que surgiram novas abordagens geométricas que ampliaram significativamente o campo de investigação matemática. As cônicas surgiram originalmente da tentativa de resolver o problema da duplicação do cubo [1]. Entre os matemáticos gregos que se dedicaram ao problema destaca-se Menaechmus, discípulo de Eudoxus de Cnidos e contemporâneo de Platão. Ao buscar uma solução para a duplicação do cubo, Menaechmus investigou a interseção entre superfícies cônicas e planos, identificando curvas específicas que hoje são conhecidas como secções cônicas. Em particular, ele demonstrou que a solução do problema poderia ser obtida por meio da interseção de duas curvas que atualmente reconhecemos como parábolas ou, em outra construção equivalente, pela interseção entre uma parábola e uma hipérbole.

Essa abordagem representa um avanço conceitual importante, pois estabelece uma relação direta entre um problema algébrico de natureza cúbica e estruturas geométricas mais complexas. Ao considerar as propriedades dessas curvas, Menaechmus percebeu que a solução da equação cúbica associada ao problema poderia ser interpretada geometricamente como o ponto de interseção entre duas cônicas. Dessa forma, as curvas não eram apenas objetos geométricos abstratos, mas instrumentos capazes de expressar relações proporcionais mais sofisticadas do que aquelas acessíveis apenas por meio de construções lineares.

Posteriormente, o estudo sistemático dessas curvas foi aprofundado por Apolônio de Perga em sua obra **Cônicas**, na qual foram estabelecidas as bases teóricas das secções cônicas, incluindo as denominações elipse, parábola e hipérbole. Apolônio não apenas consolidou os resultados obtidos anteriormente, mas também desenvolveu uma análise rigorosa das propriedades geométricas dessas curvas, contribuindo para que elas se tornassem objetos centrais da investigação matemática.

Nesse sentido, a duplicação do cubo pode ser interpretada como um problema catalisador que impulsionou a ampliação do repertório geométrico da matemática grega. A necessidade de resolver uma equação cúbica por meios geométricos levou à descoberta e ao estudo das cônicas, estabelecendo uma conexão estrutural entre problemas de natu-

reza algébrica e construções geométricas. Tal relação evidencia que o desenvolvimento da matemática não ocorre de maneira isolada, mas frequentemente emerge da tentativa de resolver problemas específicos que exigem a criação de novos conceitos e métodos.

3.1.1 Formulação Algébrica do Problema

O problema da duplicação do cubo consiste em, dado um cubo de aresta a , determinar a aresta x de um novo cubo cujo volume seja o dobro do volume inicial. Isto é,

$$x^3 = 2a^3.$$

Equivalentemente,

$$x = a\sqrt[3]{2}.$$

A questão fundamental é que o número $\sqrt[3]{2}$ não pode ser construído com régua e compasso, pois sua obtenção exigiria a resolução de uma equação cúbica irreduzível sobre $\mathbb{Q}$.

3.1.2 Redução a Médias Proporcionais

O problema pode ser reformulado como a determinação de duas médias proporcionais entre a e $2a$. Procuram-se x e y tais que:

$$a : x = x : y = y : 2a.$$

Das proporções obtemos:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad x^2 = ay,$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{2a} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2ax.$$

Temos então o sistema:

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2ax \end{cases}$$

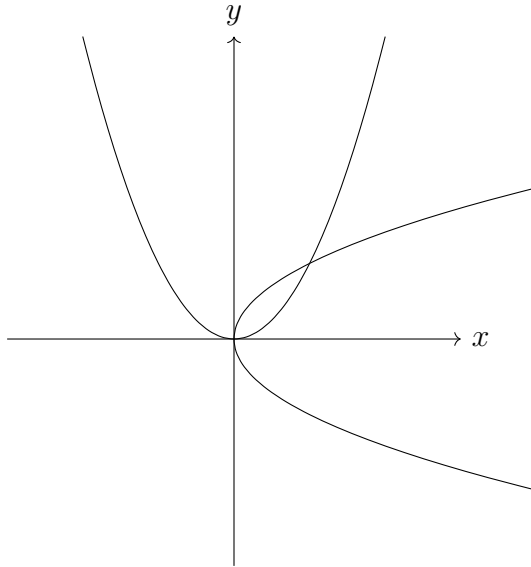
3.1.3 Interpretação Geométrica

As equações

$$x^2 = ay \quad \text{e} \quad y^2 = 2ax$$

representam duas parábolas no plano cartesiano, graficamente da seguinte forma:

Figura 6: Parábolas no plano cartesiano.



A solução do problema corresponde ao ponto de interseção dessas duas curvas.

Substituindo $y = \frac{x^2}{a}$ na segunda equação:

$$\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = 2ax,$$

$$\frac{x^4}{a^2} = 2ax,$$

$$x^4 = 2a^3x.$$

Como $x \neq 0$, segue que

$$x^3 = 2a^3.$$

Portanto, a interseção das duas parábolas fornece exatamente a solução da equação cúbica associada à duplicação do cubo, sendo $2a^3 = a\sqrt[3]{2}$. Destarte, o problema constitui um ponto de encontro entre **Geometria Clássica** e **Álgebra Moderna**.

Capítulo 4

Cônica sendo utilizada na física

4.1 Estudos voltados para a aplicação da Elipse

A relação entre as cônicas e a Física segue trechos de diferentes leis, épocas, temas e autores, sendo relações diretamente interligadas com a tríade (elipse, parábola e hipérbole), e assim podemos citar e demonstrar três assuntos nos quais utilizam as figuras cônicas.

Na primeira lei do filósofo e astrólogo alemão Johannes Kepler, também conhecida como lei das órbitas, estabelece que os planetas se movem em órbitas elípticas ao redor do Sol, tendo o mesmo em um dos focos da elipse, isso implica que a órbita planetária não é uma circunferência perfeita, mas sim uma elipse, uma curva plana e fechada com dois focos, sendo o Sol posicionado em um deles.

A primeira lei de Kepler estabelece que os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, o qual ocupa um dos focos dessas elipses. Esta descoberta foi revolucionária, pois abandonou a crença milenar na perfeição do movimento circular uniforme. Ao utilizar a elipse, Kepler conseguiu explicar as variações de velocidade e posição dos planetas com uma precisão que nenhum modelo anterior, fosse ele ptolemaico ou copernicano, fora capaz de atingir, consolidando a utilidade prática das seções cônicas [2].

Como consequência, Kepler observou que os planetas não se movem ao redor do Sol em uma velocidade constante. Isso ocorre porque suas órbitas têm um formato elíptico, o que faz com que a distância entre o planeta e o Sol varie. Essa variação na distância provoca mudanças na velocidade orbital dos planetas. Quando o planeta está mais próximo do Sol, diz-se que ele está no periélio; já quando está no ponto mais afastado, está no afélio.

Diante disso, tornou – se notório a importância dos estudos referentes a elipse e como que o movimento orbital planetário segue uma geometria elíptica, fundamentada em abordagens aprofundadas no tema, grandes nomes da física, astronomia e matemática dedicaram tempo e perseverança no movimento elíptico, verifique uma elipse no espaço tridimensional.

4.1.1 Exemplo de aplicação da Elipse

Considere a órbita de um planeta descrita por:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Identificando os parâmetros:

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5, \quad b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

Cálculo de c :

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 25 - 16 = 9$$

$$c = 3$$

Focos:

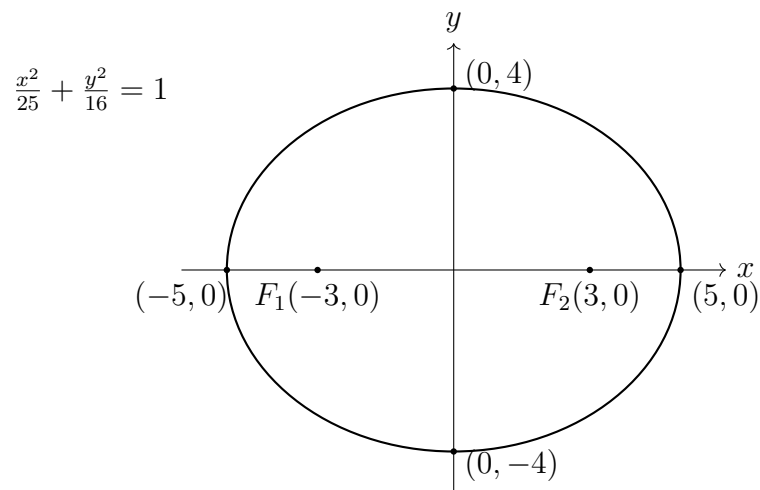
$$F_1 = (-3, 0), \quad F_2 = (3, 0)$$

Propriedade:

$$PF_1 + PF_2 = 2a = 10$$

4.1.2 Graficamente

Figura 7: Elipse no plano com focos $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$.



4.2 Estudos voltados para a aplicação da Parábola

Ao abordarmos a parábola de uma maneira geral, nos deparamos com diversos tópicos e exemplos, na física é bastante utilizada para cálculos de distância de projéteis, arremessos

e movimentos que traçam uma linha parabólica. Visto isso, quando um corpo é lançado com certa velocidade inicial formando um ângulo com a horizontal, seu movimento pode ser decomposto em duas componentes independentes: uma horizontal, com velocidade constante, e outra vertical, sujeita à aceleração da gravidade.

4.2.1 Exemplo de utilização de parábola em um arremesso no basquete

Considere os valores utilizados com o intuito de simplificar o exemplo dado, ou seja, sem nem uma relação com uma situação real. Temos os seguintes dados:

- Altura inicial: $y_0 = 2 \text{ m}$ (altura do jogador)
- Velocidade inicial: $v_0 = 8 \text{ m/s}$
- Ângulo: $\theta = 45^\circ$, o ângulo de 45° é utilizado por maximizar o alcance em condições ideais, sendo adotado para simplificar a modelagem do problema na Física.
- Gravidade: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

A equação da trajetória é dada por:

$$y(x) = x \tan(\theta) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} x^2 + y_0$$

Substituindo os valores:

$$y(x) = x - 0,153x^2 + 2$$

Para determinar a distância horizontal em que a bola atinge a altura da cesta (3,05 m), resolvemos:

$$3,05 = x - 0,153x^2 + 2$$

Reorganizando:

$$0,153x^2 - x + 1,05 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Portanto

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 0,153 \cdot 1,05}}{2 \cdot 0,153}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 0,6426}}{0,306}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{0,3574}}{0,306}$$

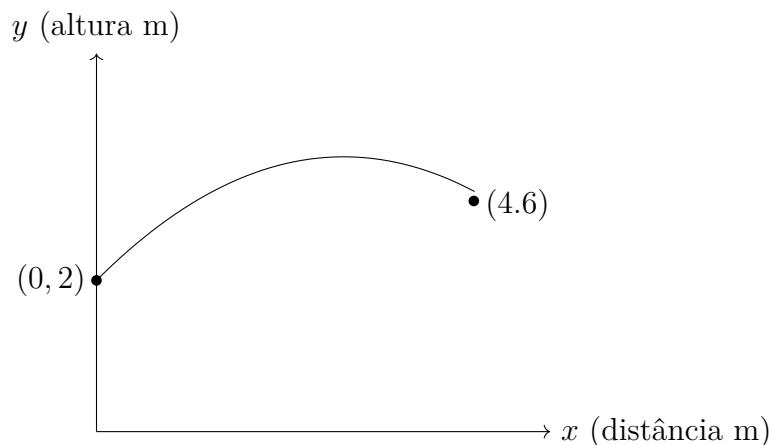
$$x \approx \frac{1 \pm 0,598}{0,306}$$

Tomando a solução física válida:

$$x \approx 4,6 \text{ m}$$

4.2.2 Graficamente

Figura 8: Gráfico de um aremesso gerando uma parábola.



4.3 Estudos voltados para a aplicação da hipérbole

Um exemplo mais simples da aplicação da hipérbole na Física, com foco em seus elementos geométricos, pode ser compreendido a partir de uma interpretação envolvendo duas fontes de influência no espaço. Considere dois pontos fixos no plano, F_1 e F_2 , que representam os focos de uma hipérbole. Visto isso, suponha que uma partícula se desloque de tal forma que a diferença entre suas distâncias a esses dois pontos permaneça constante. O conjunto de todas as posições possíveis que satisfazem essa condição define geometricamente uma hipérbole.

Ademais, essa situação pode ser interpretada, por exemplo, como a propagação de sinais provenientes de duas fontes distintas. Nesse caso, a diferença de distâncias está diretamente relacionada à diferença de tempo de chegada ou de intensidade da partícula em um determinado ponto do espaço. Assim, a hipérbole representa o lugar geométrico dos pontos onde essa diferença se mantém constante.

Dessa forma, os focos assumem um significado físico ao representarem as fontes do fenômeno analisado, enquanto a hipérbole descreve a distribuição espacial das posições que satisfazem a condição imposta. Esse tipo de abordagem evidencia, de maneira acessível, a conexão entre propriedades geométricas e sua interpretação em fenômenos físicos, contribuindo para uma compreensão mais integrada entre matemática e Física.

4.3.1 Exemplo de dois focos quaisquer no plano

Considere dois focos em $F_1 = (-2, 0)$ e $F_2 = (2, 0)$.

As distâncias de um ponto genérico (x, y) até os focos são:

$$r_1 = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

Pela definição de hipérbole:

$$|r_1 - r_2| = 2$$

Substituindo:

$$\left| \sqrt{(x+2)^2 + y^2} - \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \right| = 2$$

Elevando ao quadrado:

$$\left(\sqrt{(x+2)^2 + y^2} - \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \right)^2 = 4$$

Expandindo:

$$(x+2)^2 + y^2 + (x-2)^2 + y^2 - 2\sqrt{[(x+2)^2 + y^2][(x-2)^2 + y^2]} = 4$$

Simplificando:

$$2x^2 + 8 + 2y^2 - 2\sqrt{[(x+2)^2 + y^2][(x-2)^2 + y^2]} = 4$$

Isolando a raiz:

$$2\sqrt{[(x+2)^2 + y^2][(x-2)^2 + y^2]} = 2x^2 + 2y^2 + 4$$

Dividindo por 2:

$$\sqrt{[(x+2)^2 + y^2][(x-2)^2 + y^2]} = x^2 + y^2 + 2$$

Elevando ao quadrado novamente:

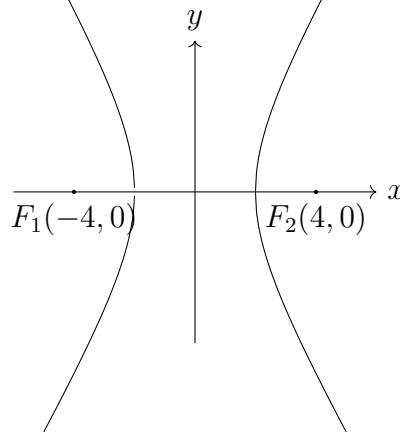
$$[(x+2)^2 + y^2][(x-2)^2 + y^2] = (x^2 + y^2 + 2)^2$$

Após simplificações algébricas, obtemos:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

4.3.2 Graficamente

Figura 9: Hiperbole com focos $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$.



Capítulo 5

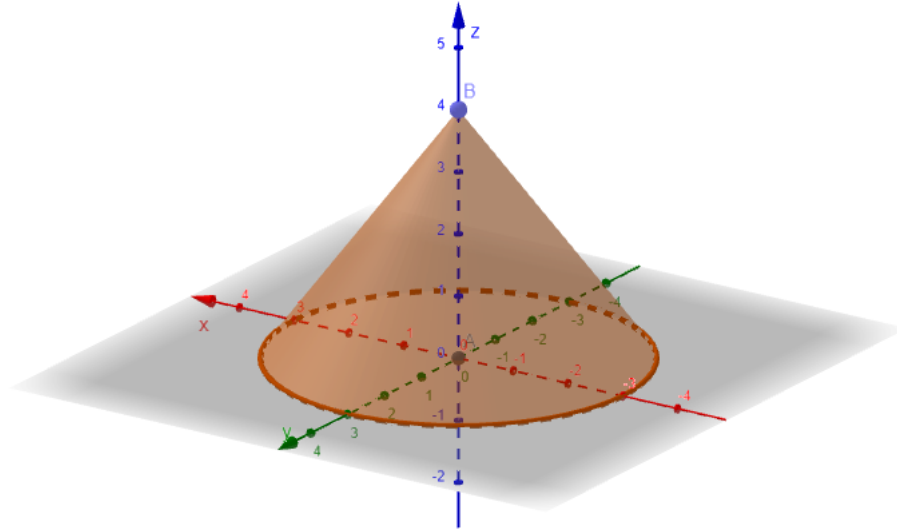
O Uso do Software GeoGebra no Ensino de Cônicas

A inserção de softwares de geometria dinâmica, com ênfase no GeoGebra, estabelece um novo paradigma no processo de ensino-aprendizagem das seções cônicas. Tradicionalmente, o estudo da elipse, parábola e hipérbole é conduzido de forma estritamente analítica, priorizando a manipulação de equações quadráticas em detrimento da compreensão geométrica. Ao utilizar o GeoGebra, é possível resgatar a gênese dessas curvas como lugares geométricos resultantes da intersecção de um plano com um cone de revolução. A ferramenta permite a visualização simultânea em múltiplas janelas (2D e 3D), proporcionando ao discente a percepção da transição entre o objeto sólido e a sua representação planar.

A principal contribuição desse recurso tecnológico reside na sua capacidade de manipulação paramétrica em tempo real. Através da utilização de seletores de variação (controles deslizantes), o estudante pode alterar a inclinação do plano intersetor e observar a mudança contínua das curvas. Esse dinamismo evidencia que a excentricidade de uma cônica não é um valor arbitrário, mas uma consequência direta da relação angular entre o plano e a geratriz do cone. No que tange ao estudo do tronco de cone, o software viabiliza a análise de seções transversais e o cálculo imediato de grandezas como área lateral e volume, transformando conceitos abstratos em modelos matemáticos tangíveis.

Portanto, o GeoGebra atua como um mediador cognitivo eficaz, que não apenas facilita a visualização espacial, mas também promove a síntese entre a geometria sintética e a álgebra analítica, essencial para a formação matemática em nível superior. Ademais, a elipse, parábola e hipérbole são construtíveis ao selecionar a opção janela de visualização 3D dentro do programa, após isso, serão visíveis os três eixos (x, y, z) para que, arbitrariamente, sejam escolhidos três pontos para a criação do cone, observe:

Figura 10: Cone em um espaço tridimensional.



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o Software Geogebra (2026).

A partir da figura 10, é possível traçar um plano paralelo a base do cone. Visto isso, a intersecção de um cone de revolução por um plano paralelo à sua base resulta na decomposição do sólido em duas figuras distintas: um cone menor, que preserva as proporções e a excentricidade do original através de uma razão de semelhança constante, e um tronco de cone, que corresponde à região compreendida entre a base e o plano de seção.

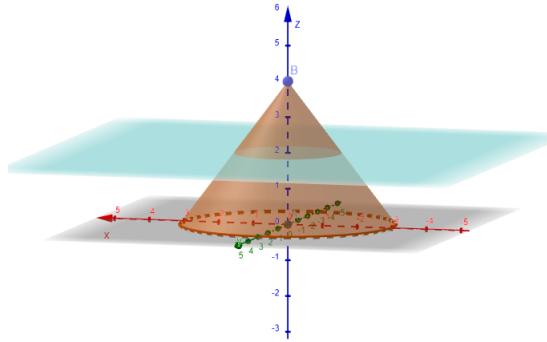
No software GeoGebra, esta construção permite visualizar a relação de proporcionalidade entre raios e alturas, evidenciando como o volume e a área lateral de ambos os sólidos variam conforme a posição do plano interseção.

A definição matemática de um plano no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ é dada pela sua equação geral, expressa por:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Onde os coeficientes a, b e c representam as componentes do vetor normal ao plano, determinando a sua inclinação, enquanto o termo constante d indica a posição do plano em relação à origem do sistema de coordenadas.

Figura 11: Plano paralelo a base do cone.

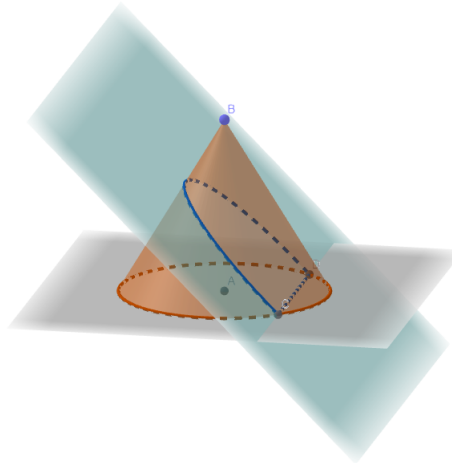


Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o Software Geogebra (2026)

O plano pode ser gerado diagonalmente, resultando em uma parábola na parte interna do cone, o plano deve ser $z = x + 2$. Para isso, deve-se selecionar a ferramenta chamada "interseção geométrica", de forma que seja possível evidenciar a imagem da parábola através da imagem do cone.

Algebricamente, ao realizarmos a substituição da equação do plano na equação do cone, obtemos $(x + d)^2 = x^2 + y^2$, que se expande para $x^2 + 2xd + d^2 = x^2 + y^2$. Note que os termos de segunda ordem em x (x^2) se anulam em ambos os lados da igualdade, restando a expressão $y^2 = 2dx + d^2$. Esta redução de grau é o que caracteriza a parábola.

Figura 12: Parábola gerada a partir de um plano diagonal.



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o Software Geogebra (2026).

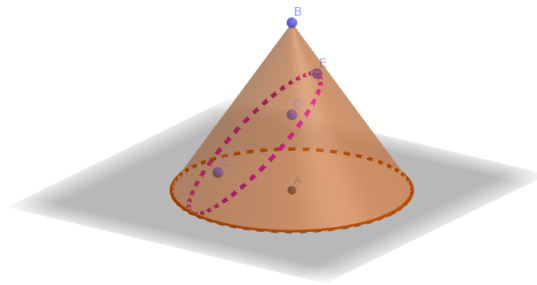
A construção de uma elipse no GeoGebra oferece uma oportunidade única de integrar a definição geométrica clássica com a visualização analítica moderna. Ao utilizar a ferramenta "Ellipse", o software solicita a marcação de dois pontos distintos no plano, que atuarão como os focos (F_1 e F_2), e um terceiro ponto pertencente à curva. Instantanea-

mente, o programa traça o lugar geométrico de todos os pontos cuja soma das distâncias aos focos é constante, materializando a definição métrica fundamental desta cônica.

A grande vantagem acadêmica reside na opção "Janela de Álgebra", que exibe em tempo real a equação quadrática correspondente, permitindo que o estudante observe como o deslocamento dos focos altera diretamente os coeficientes da fórmula e a excentricidade da figura.

Os controles deslizantes, opção presente em qualquer versão do Geogebra, permite o usuário aumentar e diminuir a distância dos focos, consequentemente alterando o tamanho da elipse.

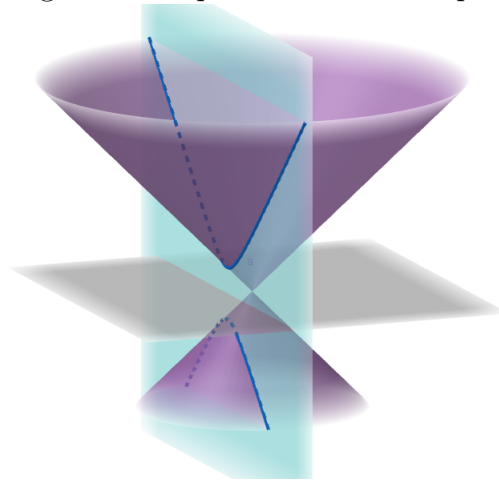
Figura 13: Elipse no cone.



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o Software Geogebra (2026).

A construção de uma hipérbole completa no GeoGebra 3D fundamenta-se na intersecção de um plano vertical com um cone duplo, definido analiticamente pela equação $x^2 + y^2 = z^2$, o que permite a manifestação simultânea dos dois ramos simétricos da curva. Ao estabelecer um plano intersecor que atravessasse ambas as superfícies do sólido e aplicar o comando de intersecção, o software materializa o lugar geométrico onde a diferença das distâncias aos focos é constante, revelando a excentricidade característica da cônica.

Figura 14: Hipérbole no cone duplo.



Fonte: Elaborada pelo autor utilizando o Software Geogebra (2026).

A utilização do software GeoGebra no ensino de seções cônicas revela-se como uma estratégia pedagógica indispensável para a superação do ensino puramente abstrato. Ao longo deste capítulo, observou-se que a transição entre a geometria sintética e a álgebra analítica é facilitada pela natureza dinâmica do programa, que permite ao discente visualizar a gênese da elipse, parábola e hipérbole como lugares geométricos resultantes de intersecções em sólidos tridimensionais.

Capítulo 6

Demonstração da equação e propriedades do cone

Demonstração da Equação do Cone

A equação do cone pode ser demonstrada a partir de sua definição geométrica no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$. Além disso, a equação com vértice na origem $(0, 0, 0)$ e eixo no eixo z é dada por $x^2 + y^2 = (z \tan \alpha)^2$, onde α é o semiângulo do vértice. Essa fórmula descreve os pontos cuja distância ao eixo z é proporcional à altura, formando uma superfície cônica, muitas vezes simplificada para $x^2 + y^2 = k^2 z^2$

Considere um ponto $P(x, y, z)$ no cone. Então:

$$\cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Elevando ao quadrado:

$$\cos^2 \alpha = \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos^2 \alpha (x^2 + y^2 + z^2) = z^2$$

$$\cos^2 \alpha (x^2 + y^2) = z^2 (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$\cos^2 \alpha (x^2 + y^2) = z^2 \sin^2 \alpha$$

$$x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$$

Essa equação representa um cone duplo (superior e inferior), simétrico em relação à origem no espaço $\mathbb{R}^3$

1. Equação geral da superfície lateral do cone

A forma geral da equação de uma cônica (neste caso, o cone circular reto) é dada por:

$$x^2 + y^2 = z^2 \left(\frac{r^2}{h^2} \right)$$

onde:

- r é o raio da base,
- h é a altura do cone,
- z varia de 0 até h .

Essa equação representa a **superfície lateral do cone**, sem incluir a base.

6.0.1 Forma paramétrica

A partir da equação cartesiana, podemos obter a forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = \frac{r}{h} z \cos \theta \\ y = \frac{r}{h} z \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{com } 0 \leq z \leq h, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

3. Área lateral do cone

A área lateral do cone é dada por:

$$A_L = \pi r g$$

onde g é a geratriz:

$$g = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Substituindo:

$$A_L = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

6.0.2 4. Volume do cone

O volume do cone é uma grandeza que expressa a quantidade de espaço ocupada por esse sólido geométrico tridimensional, sendo um conceito fundamental na Geometria Euclidiana. Desta maneira, um cone circular reto é definido como o conjunto de segmentos de reta que ligam todos os pontos de uma circunferência (base) a um ponto fixo fora do plano, denominado vértice. A determinação de seu volume está diretamente relacionada à área da base e à altura do sólido, que corresponde à distância perpendicular entre o vértice e o plano da base.

Do ponto de vista matemático, o volume do cone é dado por um terço do produto entre a área da base e a altura, o que pode ser interpretado como sendo um terço do volume de um cilindro que possui a mesma base e a mesma altura. Essa relação evidencia uma conexão importante entre diferentes sólidos geométricos e pode ser justificada por meio de argumentos geométricos ou pelo uso do Cálculo Integral. Assim, o volume do cone não apenas fornece uma medida quantitativa do espaço ocupado, mas também ilustra a integração entre conceitos geométricos e analíticos na descrição de formas tridimensionais.

6.0.3 Volume do cone por integração

Para a fundamentação analítica do volume do cone circular reto, utiliza-se o conceito de sólidos de revolução. Considere uma reta que passa pela origem $(0, 0)$ e por um ponto (h, r) no plano cartesiano, cuja equação é dada por $f(x) = \frac{r}{h}x$. Ao rotacionar a região limitada por essa reta, pelo eixo das abscissas e pelas retas verticais $x = 0$ e $x = h$ em torno do eixo x , obtém-se um cone de altura h e raio da base r .

Segundo Lima (2006), o volume de um sólido gerado pela rotação de uma função contínua em torno do eixo x é obtido através da integração das áreas das secções transversais circulares ao longo do eixo de simetria. O autor formaliza que:

O volume de um sólido de revolução, cujas secções transversais perpendiculares ao eixo x são discos de raio $f(x)$, logo, é dado pela integral da função área $A(x) = \pi[f(x)]^2$ no intervalo correspondente à altura do sólido [8].

Dessa forma, a demonstração do volume V configura-se no cálculo da seguinte integral definida:

$$V = \pi \int_0^h [f(x)]^2 dx$$

Substituindo a função geratriz $f(x) = \frac{r}{h}x$ na expressão, temos:

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx$$

Como r e h são constantes em relação à variável de integração x , podemos retirá-los da integral:

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo para resolver a integral de potência:

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h$$

Avaliando nos limites de integração de 0 a h :

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2} \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right)$$

Simplificando os termos, obtemos a expressão clássica para o volume do cone:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Esta demonstração ilustra como ferramentas do cálculo diferencial e integral corroboram os resultados obtidos milenarmente pela geometria grega, conferindo rigor analítico à medida do volume.

6.0.4 Ângulo do vértice do cone

O ângulo α entre a geratriz e o eixo z é dado por:

$$\tan(\alpha) = \frac{r}{h} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{r}{h}\right)$$

6. Resumo das fórmulas principais

Equação cartesiana: $x^2 + y^2 = \frac{r^2}{h^2} z^2$

Forma paramétrica:
$$\begin{cases} x = \frac{r}{h} z \cos \theta \\ y = \frac{r}{h} z \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Área lateral: $A_L = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

Volume: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Ângulo de abertura: $\tan \alpha = \frac{r}{h}$

Capítulo 7

Secções Cônicas e Definições

7.1 Elipse

Uma **elipse** ocorre quando o plano de corte intercepta apenas uma das partes do cone e não é paralelo à geratriz, resultando em uma curva fechada e contínua. Essa construção evidencia a relação entre a geometria espacial e as curvas planas, além de destacar a elipse como o conjunto dos pontos cuja soma das distâncias a dois focos é constante, característica que também fundamenta suas diversas aplicações matemáticas e físicas.

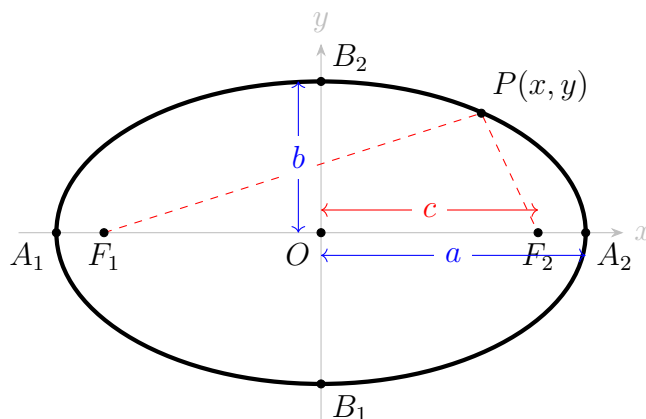
Além disso, temos uma elipse quando:

$$A > 0, \quad B > 0 \quad \text{e} \quad A \neq B.$$

Elementos Constituintes da Elipse

A elipse é uma cônica cujas propriedades métricas dependem da posição relativa de seus elementos principais. Abaixo, apresentamos a construção detalhada da elipse $\mathcal{E}$ centrada na origem $O(0,0)$ com o eixo maior sobre o eixo das abscissas.

Figura 15: Representação geométrica dos elementos lineares e pontos notáveis da elipse.



Para a compreensão completa da figura acima, definimos os seguintes elementos:

- a) **Focos** (F_1 e F_2): São os dois pontos fixos internos. A distância entre eles, $d(F_1, F_2) = 2c$, é chamada de distância focal.
- b) **Centro** (O): É o ponto médio do segmento que une os focos. Nas equações canônicas, representa a origem do sistema.
- c) **Eixo Maior** (A_1A_2): É o segmento de reta que passa pelos focos e cujas extremidades estão na elipse. Seu comprimento é $2a$.
- d) **Eixo Menor** (B_1B_2): É o segmento perpendicular ao eixo maior que passa pelo centro. Seu comprimento é $2b$.
- e) **Vértices** (A_1, A_2, B_1, B_2): São os pontos de intersecção da elipse com seus eixos de simetria.
- f) **Raios Vetores**: Para qualquer ponto P pertencente à elipse, os segmentos PF_1 e PF_2 são os raios vetores, cuja soma é sempre constante: $d(PF_1) + d(PF_2) = 2a$.
- g) **Relação Pitagórica**: Em toda elipse, os parâmetros a, b e c satisfazem a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$, onde a é a hipotenusa do triângulo retângulo formado pelo centro, o foco e o vértice do eixo menor.

7.1.1 Excentricidade

Definição 1. Seja $\mathcal{E}$ uma elipse definida no plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. Geometricamente, a elipse é o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 , denominados focos, é constante e igual a $2a$, onde $2a > d(F_1, F_2)$.

A excentricidade é o elemento que caracteriza a forma da cônica. Se $0 < e < 1$, a curva é uma elipse; se $e = 1$, temos uma parábola; e se $e > 1$, a curva é uma hipérbole. No caso limite onde a excentricidade tende a zero, a elipse aproxima-se de uma circunferência [7].

A forma da elipse é intrinsecamente ligada à sua excentricidade (e), um parâmetro adimensional que mede o grau de achatamento da cônica. Matematicamente, a excentricidade é definida pela razão entre a semidistância focal c e o semieixo maior a :

$$e = \frac{c}{a}$$

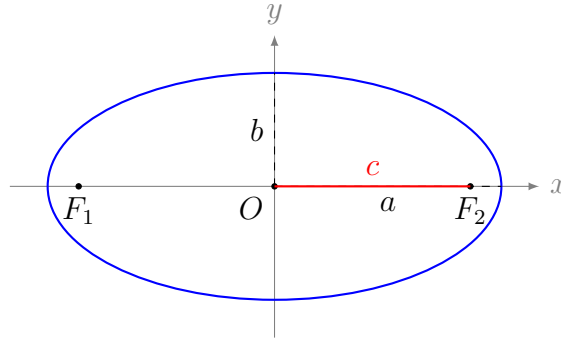
Considerando que a relação fundamental da elipse é dada por $a^2 = b^2 + c^2$, onde b representa o semieixo menor, podemos expressar a excentricidade em termos das dimensões dos eixos:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

7.1.2 Representação Gráfica

Abaixo, apresenta-se a construção geométrica de uma elipse com seus elementos principais identificados.

Figura 16: Elementos geométricos da elipse.



7.1.3 Análise Limite da Excentricidade

O domínio da excentricidade para elipses é o intervalo $e \in [0, 1)$. Analisamos os casos notáveis:

- **Caso Circular** ($e = 0$): Quando $c = 0$, os focos coincidem com o centro O . Neste cenário, $a = b$, transformando a elipse em uma circunferência de raio a .
- **Caso Linear** ($e \rightarrow 1$): À medida que c se aproxima de a , o valor de b tende a zero. A elipse torna-se extremamente alongada, aproximando-se visualmente de um segmento de reta que une os vértices.

Esta característica é fundamental no estudo das órbitas celestes, onde a trajetória de um corpo sob influência gravitacional descreve uma elipse com o corpo central ocupando um dos focos, conforme enunciado pela Primeira Lei de Kepler.

Exemplos de Cálculo de Excentricidade

Abaixo, demonstramos o cálculo da excentricidade (e) para duas elipses com diferentes proporções, utilizando a *definição 1*.

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Exemplo 1: Elipse com $a = 5$ e $b = 4$

Neste caso, os semieixos possuem valores próximos, sugerindo uma curva menos achatada.

$$\begin{aligned}e &= \sqrt{1 - \frac{4^2}{5^2}} \\e &= \sqrt{1 - \frac{16}{25}} \\e &= \sqrt{\frac{25 - 16}{25}} \\e &= \sqrt{\frac{9}{25}} \\e &= \frac{3}{5} = 0,6\end{aligned}$$

Resultado: A excentricidade é 0,6.

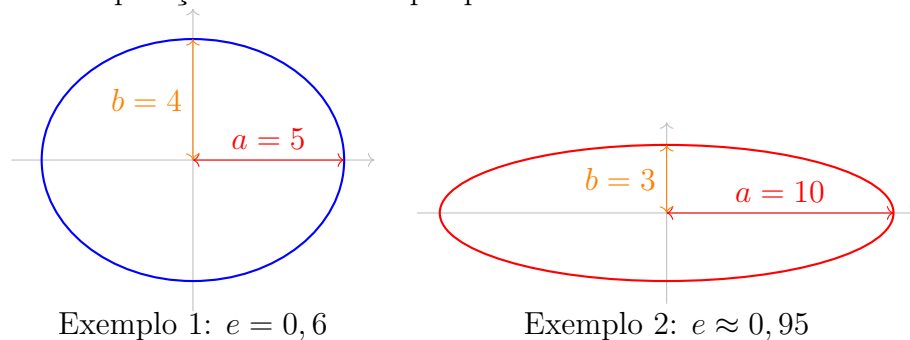
Exemplo 2: Elipse com $a = 10$ e $b = 3$

Aqui, a grande diferença entre os semieixos resultará em um valor de e próximo de 1.

$$\begin{aligned}e &= \sqrt{1 - \frac{3^2}{10^2}} \\e &= \sqrt{1 - \frac{9}{100}} \\e &= \sqrt{0,91} \\e &\approx 0,9539\end{aligned}$$

Resultado: A excentricidade é aproximadamente 0,95.

Figura 17: Comparação entre uma elipse pouco excêntrica e uma muito excêntrica.



7.2 Parábola

Temos uma **parábola** quando lidamos com uma função do segundo grau, ou seja, uma função polinomial da forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

onde $a \neq 0$. Essa condição garante que a curva seja realmente uma parábola. Além disso, b e c são coeficientes que influenciam a posição e a forma da parábola.

Uma parábola é o lugar geométrico de um ponto que se move num plano de tal maneira que sua distância de uma reta fixa, situada no plano, é sempre igual à sua distância de um ponto fixo do plano e que não pertence à reta [7].

- Se $a > 0$, a concavidade será voltada para cima;
- Se $a < 0$, a concavidade será voltada para baixo.

7.2.1 Excentricidade da Parábola

Definição 2. Segundo Steinbruch e Winterle (1987), "a excentricidade da parábola é sempre igual à unidade". Assim, a parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à mesma distância de um ponto fixo F (foco) e de uma reta fixa d (diretriz), que não contém F .

Analiticamente, a excentricidade (e) de uma cônica é a razão entre a distância de um ponto P ao foco e a distância de P à diretriz:

$$e = \frac{d(P, F)}{d(P, d)}$$

Pela própria definição da parábola, temos que para qualquer ponto P pertencente à curva, $d(P, F) = d(P, d)$. Portanto, a excentricidade da parábola é sempre constante e igual à unidade:

$$e = 1$$

Esta característica marca o limite de transição entre as curvas fechadas (elipses) e as curvas abertas (hipérboles).

7.2.2 Exemplo Numérico

Para ilustrar a *Definição 2*, consideremos uma parábola com foco $F(0, 1)$ e diretriz $d : y = -1$. Seja o ponto $P(4, 4)$ pertencente à curva.

1. Calculamos a distância de P ao foco F :

$$d(P, F) = \sqrt{(4 - 0)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

2. Calculamos a distância de P à diretriz d :

$$d(P, d) = |4 - (-1)| = 5$$

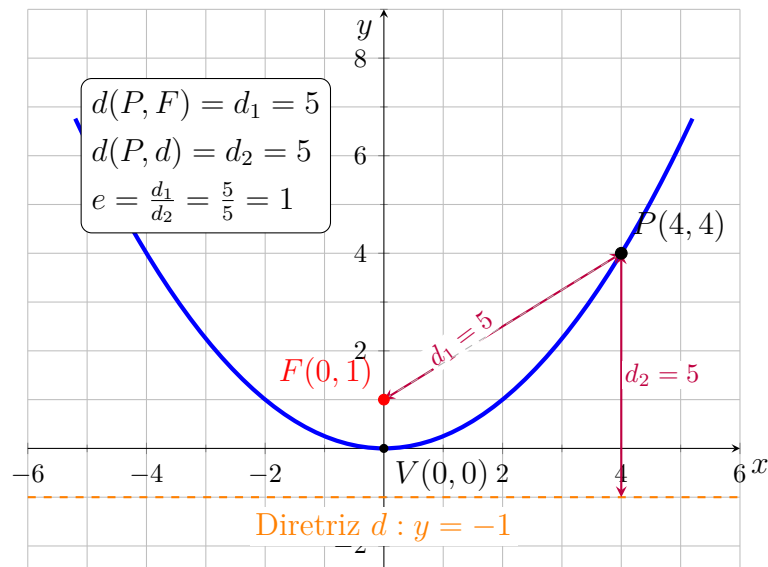
3. Aplicando a razão da excentricidade (e):

$$e = \frac{d(P, F)}{d(P, d)} = \frac{5}{5} = 1$$

Como demonstrado, o valor obtido confirma a Definição 2, resultando em uma excentricidade unitária.

Figura 18: Parábola com excentricidade unitária ($e = 1$).

Gráfico da Parábola $y = \frac{1}{4}x^2$



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

7.3 Hipérbole

A **hipérbole** surge quando a equação da curva apresenta subtração entre dois termos quadráticos. A forma mais comum (canônica) da equação de uma hipérbole é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

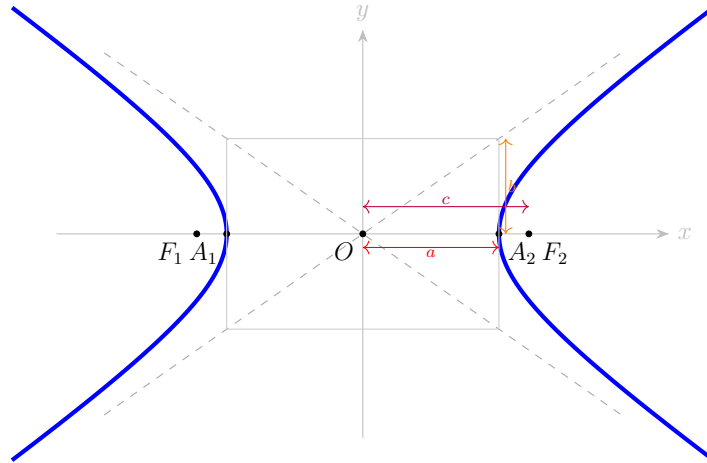
Essas duas formas geram hipérboles diferentes:

- No primeiro caso, a hipérbole tem os ramos abertos na **horizontal**;
- No segundo caso, os ramos são abertos na **vertical**.

7.3.1 Elementos Constituintes da Hipérbole

A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano para os quais a diferença das distâncias a dois pontos fixos (F_1 e F_2 , os focos) é constante, em valor absoluto, e igual a $2a$. Diferente da elipse, a hipérbole é uma curva aberta composta por dois ramos.

Figura 19: Elementos da hipérbole.



Uma hipérbole é o lugar geométrico de um ponto que se move num plano de tal maneira que o valor absoluto da diferença de suas distâncias a dois pontos fixos do plano, chamados focos, é sempre igual a uma quantidade constante, positiva e menor do que a distância entre os focos [7].

- a) **Focos (F_1 e F_2):** Pontos fixos localizados no eixo real. A distância entre eles é a distância focal $2c$.
- b) **Centro (O):** Ponto médio do segmento que une os focos.
- c) **Eixo Real ou Transverso (A_1A_2):** Segmento que une os dois vértices da hipérbole. Seu comprimento é $2a$.
- d) **Eixo Imaginário ou Conjugado (B_1B_2):** Segmento de comprimento $2b$, perpendicular ao eixo real e que passa pelo centro.
- e) **Vértices (A_1 e A_2):** Pontos de intersecção da hipérbole com o eixo real.
- f) **Assíntotas:** Retas que se aproximam da curva conforme ela se estende ao infinito, mas nunca a tocam. Para uma hipérbole centrada na origem, possuem equações $y = \pm \frac{b}{a}x$.
- g) **Relação Pitagórica:** Na hipérbole, a semidistância focal é a hipotenusa da relação: $c^2 = a^2 + b^2$.
- h) **Excentricidade (e):** Definida por $e = \frac{c}{a}$. Para a hipérbole, tem-se sempre $e > 1$.

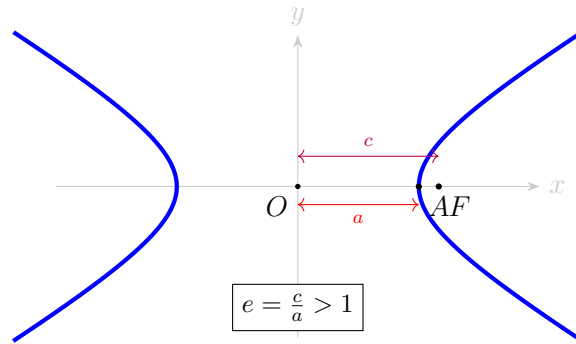
7.3.2 Excentricidade da Hipérbole

Definição 3. A excentricidade de uma hipérbole, denotada por e , é a medida que caracteriza a abertura de seus ramos. Diferente da elipse, onde a curva é fechada e $e < 1$, na hipérbole a excentricidade é sempre superior à unidade ($e > 1$), o que reflete sua natureza de curva aberta e ilimitada.

Matematicamente, é definida pela razão entre a semidistância focal c e o semieixo real a :

$$e = \frac{c}{a}$$

Figura 20: Representação dos parâmetros a e c que definem a excentricidade hiperbólica.



Definição e Relações Fundamentais

Analiticamente, a excentricidade é descrita como a *definição 3.* pela razão entre a semidistância focal (c) e o semieixo real (a):

$$e = \frac{c}{a}$$

Considerando a relação pitagórica fundamental da hipérbole $c^2 = a^2 + b^2$, podemos reescrever a excentricidade em função dos semieixos real (a) e imaginário (b):

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

Interpretação Geométrica do Valor de e

O valor de e define a inclinação das assíntotas e a forma da curva:

- a) **Valores de e próximos de 1:** A hipérbole é muito "fechada", com ramos estreitos e pontiagudos. Isso ocorre quando b é muito pequeno em relação a a .
- b) **Hipérbole Equilátera ($e = \sqrt{2}$):** Quando $a = b$. Neste caso especial, as assíntotas são perpendiculares entre si.

c) **Valores de e muito grandes:** A medida que e cresce, a hipérbole torna-se cada vez mais "aberta", tendendo visualmente a duas retas paralelas à medida que o eixo imaginário domina a estrutura.

Considere a hipérbole de equação $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. A partir dos parâmetros $a = 3$ e $b = 4$, calculamos a semidistância focal $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Fazendo uso da *definição 3*, determinamos a excentricidade como a razão:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \approx 1,67$$

Geometricamente, o valor $e \approx 1,67$ indica que a distância entre os focos é significativamente maior que a distância entre os vértices, resultando na abertura característica visualizada no gráfico. As assíntotas, que limitam o crescimento da curva, possuem inclinação dada por $\pm \frac{b}{a} = \pm \frac{4}{3}$.

Definição 2. Analiticamente, a excentricidade (e) é definida pela razão entre a semidistância focal (c) e o semieixo real (a):

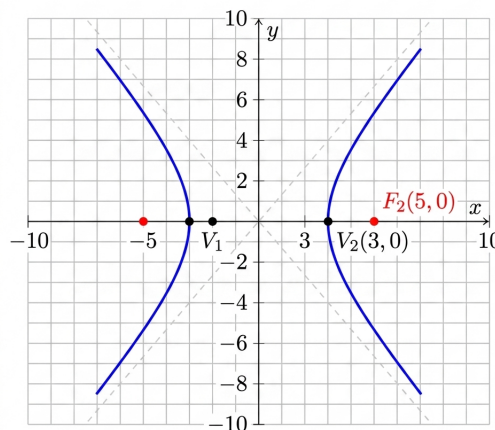
$$e = \frac{c}{a}$$

Exemplo Prático: Considere a hipérbole de equação $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. A partir dos parâmetros $a = 3$ e $b = 4$, calculamos a semidistância focal $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Fazendo uso da *Definição 2*, determinamos a excentricidade:

$$e = \frac{5}{3} \approx 1,67$$

Figura 21: Visualização da excentricidade $e = 1,67$



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

A transição para o domínio das hipérboles ocorre quando a excentricidade assume

valores estritamente maiores que 1 ($e > 1$). Neste cenário, a distância focal supera o semieixo real ($c > a$), o que gera dois ramos simétricos e abertos. A visualização da excentricidade $e = 1,67$, apresentada na Figura 21, ilustra precisamente essa configuração. Um valor de 1,67 indica uma hipérbole cuja abertura dos ramos é ditada pela inclinação de suas assíntotas, demonstrando que, quanto maior a excentricidade, mais "aberta" e plana a curva se torna em relação ao seu eixo transversal.

Capítulo 8

Cônicas: Usualidade da elipse, parábola e hiperbole

8.1 Elipse

A formação da elipse a partir do cone não é apenas uma curiosidade matemática, mas possui aplicações práticas em diversas áreas do conhecimento. Na óptica, por exemplo, espelhos com formato elíptico têm a propriedade de refletir a luz emitida de um dos focos diretamente para o outro, característica derivada da própria definição geométrica da elipse. O mesmo princípio se aplica na acústica: em salas elípticas ou em domos com cortes cônicos, um som emitido de um foco se concentra no outro, o que pode ser aproveitado para melhorar a propagação sonora em teatros e auditórios.

Além disso, na astronomia, a elipse aparece de forma notável nas órbitas dos planetas ao redor do Sol. Segundo as leis de Kepler, essas órbitas são elipses em que o Sol ocupa um dos focos. Esse modelo só é possível porque, geometricamente, as elipses podem ser vistas como projeções planas das seções de um cone, explicando o movimento elíptico dos corpos celestes com base em cortes inclinados no "*cone gravitacional*" que representa a ação do campo gravitacional.

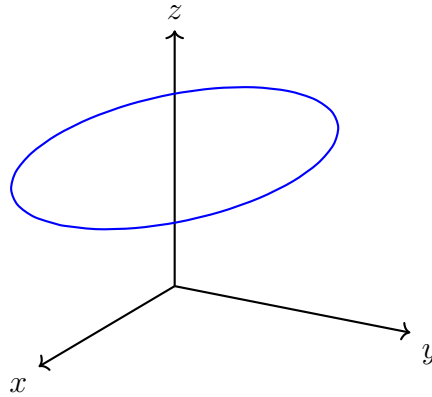
Analogamente, a elipse gerada pelo corte do cone pode ser descrita por equações paramétricas ou pela equação canônica da elipse, cuja forma depende da orientação do corte e da inclinação do plano. A medida que a inclinação do plano aumenta, a excentricidade da elipse também aumenta, tornando a figura mais achatada. Quando o plano é perpendicular ao eixo do cone, a elipse degenera em um círculo, o que reforça a ideia de que o círculo é um caso especial da elipse.

Portanto, a elipse gerada por um corte oblíquo em um cone é uma das figuras mais estudadas da geometria analítica devido às suas propriedades geométricas e aplicações em áreas como física, engenharia, astronomia e arquitetura. Sua formação a partir do cone demonstra a riqueza e a profundidade das seções cônicas no estudo do espaço e das

formas.

A seguir, temos uma representação de uma elipse no espaço tridimensional com seu centro em $z = 2$

Figura 22: Elipse no espaço tridimensional.



8.1.1 Aplicação na Arquitetura, Design e Engenharia

A elipse é assiduamente usada na Arquitetura, no Design e na Engenharia, devido a Propriedade Refletora da Elipse, bem como as superfícies geradas pela revolução da mesma, conhecidos como elipsóides, além disso, possuem propriedades que se usam para criar condições acústicas especiais em auditórios, teatros e igrejas. Mas não somente em monumentos atuais, podemos relembrar algumas construções clássicas como as salas de sussurros, bastante usadas na antiguidade de característica de forma oval e dois focos, nos quais duas pessoas se comunicavam através de sussurros, ainda que de maneira inaudível para o restante da sala, mostrando a eficiência da construção.

Ademais, um exemplo bastante conhecido por sua relevância histórica é o Coliseu de Roma, símbolo de poder do Império Romano.

Figura 23: Coliseu, Roma, Itália.

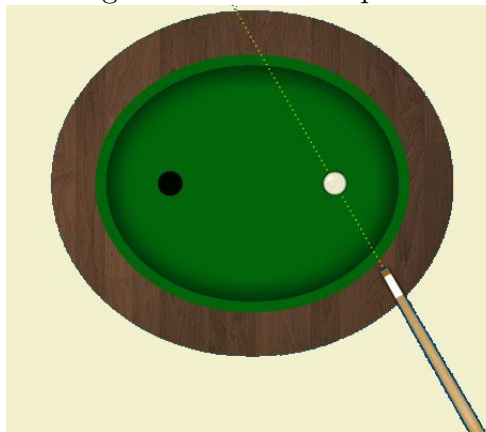


Fonte: Turista Profissional (2026). Disponível em:
<https://turistaprofissional.com/dicas-para-visitar-o-coliseu-de-roma/>

O escritor da obra *"Alice no País das Maravilhas"*, Lewis Carroll, que era o pseudônimo do matemático Charles Dodgson, realizou um experimento interessante relacionado ao estudo da elipse. Ele idealizou uma mesa de bilhar com geometria elíptica, rompendo com o padrão retangular tradicional. O objetivo era demonstrar que, ao posicionar uma bola em cada foco, qualquer tacada desferida contra uma delas resultaria em uma colisão inevitável com a outra após o rebote nas bordas. Isso ocorre porque a trajetória da bola disparada de um foco é refletida obrigatoriamente em direção ao foco oposto, conforme descreve Pappas (2002):

Em uma mesa de bilhar elíptica, qualquer bola lançada a partir de um dos focos, independentemente da direção, passará necessariamente pelo outro foco após colidir com a borda da mesa. Carroll utilizou essa propriedade refletora para demonstrar que, ao posicionar as bolas nos focos, a colisão torna-se um resultado geométrico inevitável da trajetória [9].

Figura 24: Bilhar Elíptico



Fonte: Atractor, Disponível em: <https://www.atractor.pt/geral/temp/BilharConico.html>

8.1.2 Aplicação da Elipse: Área total e distância entre os focos de uma pista de atletismo

Situação -Problema

Podemos contextualizar esse tópico da seguinte maneira:

Uma pista de atletismo tem o formato de uma elipse, com eixo maior de 90 m e eixo menor de 60 m.

Deseja-se calcular:

1. A área total da pista;
2. A distância entre os focos.

Cálculo da área

Fórmula da área:

$$A = \pi \cdot a \cdot b$$

Semi-eixos:

$$a = \frac{90}{2} = 45 \text{ m} \quad \text{e} \quad b = \frac{60}{2} = 30 \text{ m}$$

Substituindo:

$$A = \pi \cdot 45 \cdot 30$$

Usando $\pi = 3,14$:

$$A = 3,14 \cdot 1350 = 4239 \text{ m}^2$$

Portanto, a área total da pista é de aproximadamente:

$$\boxed{A = 4239 \text{ m}^2}$$

Distância entre os focos

A distância dos focos pode ser encontrada considerando:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Substituindo:

$$c = \sqrt{45^2 - 30^2}$$

$$c = \sqrt{2025 - 900} = \sqrt{1125}$$

Efetuando a radiciação:

$$c \approx 33,5 \text{ m}$$

Esse valor representa a distância de F_1 até o centro (0), logo, devemos considerar:

$$2c = 67 \text{ m}$$

Portanto, a distância entre os focos é aproximadamente:

$$\boxed{67 \text{ m}}$$

Equação Reduzida da Elipse

A equação reduzida da elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

quando o centro está na origem $(0, 0)$ e os focos estão localizados sobre o eixo x .

Por outro lado, temos:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

quando o centro é $(0, 0)$ e os focos estão sobre o eixo y .

8.2 Parábola

Do ponto de vista matemático, a parábola pode ser definida como o conjunto de todos os pontos que estão equidistantes de um ponto fixo (o foco) e de uma reta fixa (a diretriz). Segundo Lehmann (1970), essa relação de equidistância é o que define a excentricidade da parábola como sendo igual à unidade ($e = 1$) [7]. A equação mais comum da parábola, no plano cartesiano com vértice na origem e eixo de simetria paralelo ao eixo y é dada por $y = ax^2$, onde o coeficiente a determina o grau de abertura da curva.

A aplicação da parábola ultrapassa o campo teórico e encontra grande relevância prática, especialmente na engenharia, óptica e comunicação. Uma das propriedades mais importantes da parábola é que qualquer raio paralelo ao seu eixo de simetria, ao refletir em sua superfície, passa exatamente por seu foco. Essa característica é explorada em projetores de luz, antenas parabólicas e refletores. Em uma antena parabólica, por exemplo, ondas de rádio ou sinais de TV que chegam paralelas ao eixo são refletidas diretamente para o foco, onde está localizado o receptor do sinal, garantindo alta eficiência na captação.

Na engenharia civil e arquitetura, a parábola também aparece em construções de pontes e viadutos com formato parabólico, devido à sua distribuição natural de forças. A parábola permite que o peso seja distribuído de forma mais eficiente ao longo de um arco, sendo frequentemente usada no design de estruturas em arco e cúpulas parabólicas.

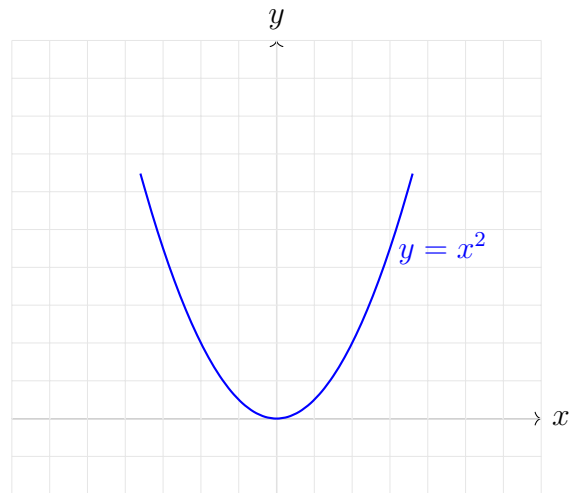
Além disso, a trajetória de objetos em movimento sob a ação da gravidade, em condições ideais e sem resistência do ar, descreve uma parábola. Esse fato torna a curva parabólica fundamental no estudo de lançamentos oblíquos e na física do movimento. Assim, o modelo matemático da parábola é essencial na balística, no desenvolvimento de trajetórias em esportes e no planejamento de sistemas de defesa.

Portanto, a parábola, quando obtida como seção cônica do cone, não só representa uma importante figura geométrica, mas também possui aplicações práticas que envolvem a reflexão de ondas, a construção de estruturas e a descrição do movimento de projéteis. A partir de sua formação geométrica e definição analítica, é possível compreender tanto

sua utilidade quanto a beleza de sua simetria e funcionalidade no mundo físico.

A parábola pode ser representada no plano cartesiano pela equação $y = ax^2$. Abaixo está o gráfico da parábola com $a = 1$:

Figura 25: Parábola $y = x^2$.



8.2.1 Exemplo Simples de Parábola: Arco de um Jardim

Situação-Problema

Um arco decorativo tem 4 metros de largura e 3 metros de altura. O ponto mais alto do arco está no centro.

Deseja-se determinar a equação da parábola que modela esse arco.

Como o ponto mais alto está no centro, colocamos o vértice na origem verticalmente deslocada:

$$V = (0, 3)$$

Como a largura total é 4 metros, os pontos onde o arco toca o chão são:

$$(-2, 0) \quad \text{e} \quad (2, 0)$$

A forma canônica da parábola é:

$$y = ax^2 + 3$$

Determinação do coeficiente a

Sabemos que o ponto $(2, 0)$ pertence à parábola:

$$0 = a(2)^2 + 3$$

$$0 = 4a + 3$$

$$a = -\frac{3}{4}$$

Equação Final

Substituindo o valor de a :

$$y = -\frac{3}{4}x^2 + 3$$

Interpretação

- A parábola tem concavidade voltada para baixo. Pois, $a < 0$
- A altura máxima é $h = 3$ metros.
- A base mede 4 metros.

8.3 Hiperbole

A hipérbole é uma das figuras pertencentes ao grupo das seções cônicas, originando-se da interseção entre um plano e um cone de revolução em determinada posição. Essa curva se forma quando o plano atravessa as duas partes do cone de forma inclinada em relação ao seu eixo, mas com um ângulo inferior ao da geratriz. Como resultado, obtém-se uma curva aberta, composta por dois ramos simétricos que se distanciam infinitamente entre si.

Do ponto de vista geométrico, a hipérbole pode ser definida como o conjunto de pontos do plano cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos chamados de focos é constante. Essa definição contrasta com a da elipse, onde a soma dessas distâncias é constante. A forma mais comum da equação canônica da hipérbole, no plano cartesiano com centro na origem e eixo transversal no eixo x , é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Essa curva possui diversas propriedades matemáticas relevantes, como assíntotas, que são linhas retas às quais os ramos da hipérbole se aproximam, mas nunca tocam. Essas assíntotas determinam a abertura da curva e ajudam na sua representação gráfica.

As aplicações práticas da hipérbole são notáveis, especialmente em áreas como comunicações, engenharia, acústica e até mesmo em astronomia. Um exemplo clássico está nas antenas de reflexão hiperbólica. Nessas estruturas, as ondas refletidas por um ponto focal

são direcionadas ao outro, graças à propriedade reflexiva da hipérbole. Isso é aproveitado em sistemas de comunicação que exigem transmissão e recepção em pontos diferentes, como em telescópios e receptores de sinais de radar.

Na acústica, superfícies hiperbólicas são utilizadas em ambientes onde se deseja redirecionar o som de um ponto a outro sem que ele se dissipe, como em dispositivos de som direcionado ou instrumentos musicais com partes hiperbólicas internas. Além disso, em sistemas de navegação e localização, como o LORAN (Long Range Navigation), a hipérbole aparece naturalmente: ao medir a diferença de tempo na recepção de sinais emitidos por duas fontes fixas, os possíveis locais do receptor formam uma hipérbole.

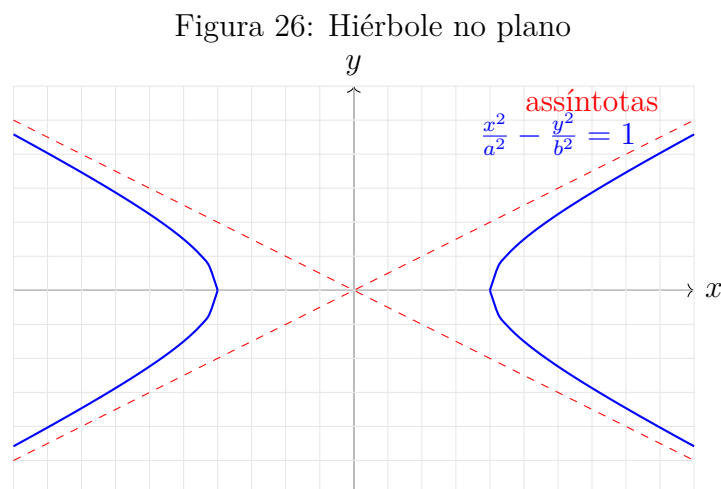
Na física e na astronomia, a hipérbole também representa trajetórias de corpos celestes que passam perto de um planeta ou estrela e seguem viagem ao invés de entrarem em órbita. Essas trajetórias são chamadas de órbitas hiperbólicas e são típicas de sondas espaciais que realizam sobrevoos para ganhar velocidade (manobra de assistência gravitacional).

Em conclusão, a hipérbole, embora menos intuitiva que a elipse ou a parábola, possui aplicações fundamentais em diversas áreas tecnológicas e científicas. A partir da sua formação como secção cônica, ela revela propriedades geométricas e funcionais que a tornam indispensável no estudo de fenômenos que envolvem reflexão, propagação de sinais, e trajetórias abertas no espaço.

A hipérbole pode ser representada pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Abaixo está o gráfico correspondente com $a = 2$ e $b = 1$:



8.3.1 Situação -Problema

Duas torres de sinal estão localizadas nos pontos $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$.

Um aparelho está em algum ponto do plano tal que a diferença das distâncias até as torres é igual a 4 unidades.

Mostrando que a equação da trajetória é uma hipérbole.

Sabemos que:

$$2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

Os focos estão em:

$$c = 4$$

Usamos a relação de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$16 = 4 + b^2$$

$$b^2 = 12$$

Logo, a equação é:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

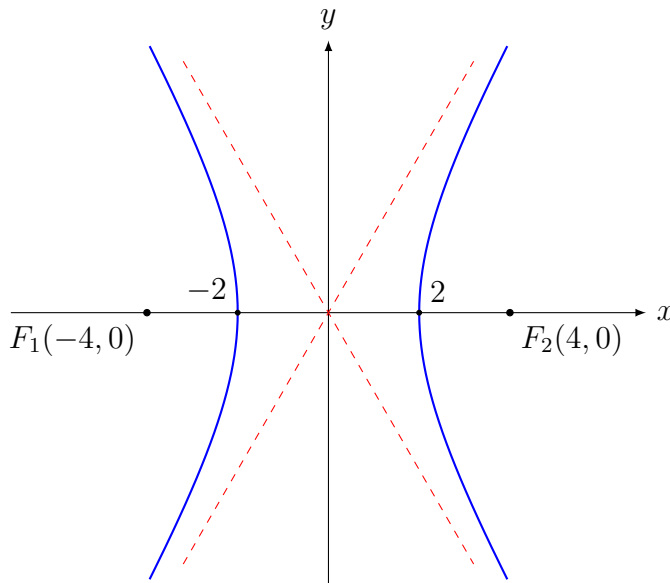
As assíntotas de uma hipérbole são retas das quais a curva se aproxima indefinidamente à medida que os pontos se afastam da origem, mas sem nunca intersecá-las.

As equações das assíntotas podem ser obtidas considerando o comportamento limite da curva, o que equivale a igualar a unidade a zero na equação reduzida:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 0 \\ \frac{y^2}{12} = \frac{x^2}{4} \\ y^2 = \frac{12}{4}x^2 \\ y^2 = 3x^2 \\ y = \pm\sqrt{3}x \end{array} \right.$$

Desta forma, as assíntotas são as retas $y = \sqrt{3}x$ e $y = -\sqrt{3}x$. O coeficiente angular $\sqrt{3} \approx 1,73$ indica a inclinação destas retas guias, que determinam a abertura dos ramos da hipérbole no plano cartesiano. Temos o seguinte gráfico:

Figura 27: Hipérbole com assíntotas $y = \sqrt{3}x$ e $y = -\sqrt{3}x$.



8.4 Definição de equação do segundo grau

Neste capítulo, será realizado um estudo sobre a equação geral do segundo grau com duas variáveis, x e y . A equação tem a forma: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ com a condição de que os coeficientes A , B e C não sejam todos iguais a zero ao mesmo tempo. Caso contrário, ou seja, se $A = B = C = 0$, a equação se reduz à equação de uma reta no plano: $Dx + Ey + F = 0$.

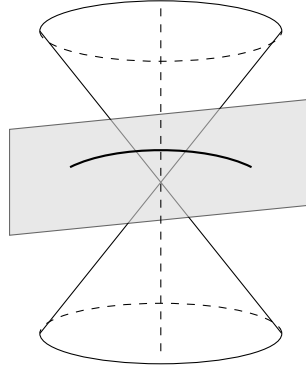
Dessa forma, o estudo será dividido em duas situações distintas: a primeira quando $B=0$, e a segunda quando $B \neq 0$. Nesta seção, focaremos no primeiro caso, apresentando-o de maneira clara e objetiva, com o intuito de facilitar a compreensão do leitor. Além disso, o tronco de cone é o sólido obtido ao seccionar um cone por um plano paralelo à base. Ele possui duas bases circulares paralelas de raios R (raio maior) e r (raio menor), e altura h .

O cone duplo pode ser descrito por:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Ao cortarmos o cone por um plano, obtemos uma curva cuja equação é do segundo grau em x e y .

Figura 28: Cone duplo interceptado por um plano.



Equação geral do segundo grau que representa as cônicas.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Exemplos de Corte

Dependendo do ângulo do plano de corte em relação ao cone, a equação do segundo grau assume formas específicas, correspondentes às diferentes seções cônicas:

- **Círculo:**

$$x^2 + y^2 = r^2$$

obtido quando o plano de corte é horizontal.

- **Elipse:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

obtida quando o plano é inclinado e corta apenas uma das partes do cone.

- **Parábola:**

$$y = ax^2 + bx + c$$

obtida quando o plano é paralelo a uma geratriz do cone.

- **Hipérbole:**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

obtida quando o plano corta as duas partes do cone duplo.

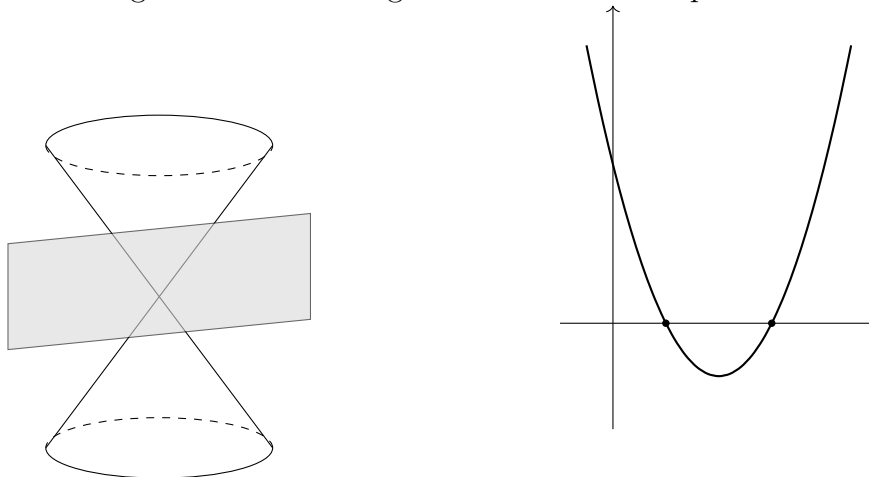
Exemplo Numérico

Considere que um plano corta um cone gerando uma seção cônica cuja equação é:

$$y = x^2 - 4x + 3$$

Determine os pontos onde a curva intercepta o eixo x .

Figura 29: Parábola gerada através de um plano .



Resolução

Para encontrar os pontos onde a curva intercepta o eixo x , fazemos $y = 0$:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Agora resolvemos a equação do segundo grau:

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

Logo,

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

Portanto, os pontos de interseção com o eixo x são:

$$(1, 0) \quad \text{e} \quad (3, 0)$$

Conclusão

A curva obtida pode ser representada por uma equação do segundo grau. Neste exemplo, a seção cônica é uma parábola descrita pela equação $y = x^2 - 4x + 3$.

Capítulo 9

Tronco de Cone

O tronco de cone circular reto é o sólido geométrico obtido a partir da secção de um cone circular reto por um plano paralelo à sua base. Considerando-se um cone de altura H e raio da base R , ao seccionar esse sólido por um plano paralelo à base a uma determinada altura, obtém-se uma nova circunferência de raio r . A região compreendida entre as duas bases circulares paralelas e a superfície lateral correspondente define o tronco de cone.

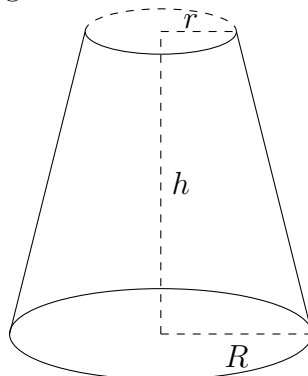
Do ponto de vista geométrico, a estrutura do tronco de cone está fundamentada na semelhança de triângulos. Ao analisar uma secção meridiana do cone, observa-se que os triângulos formados pelo eixo do cone e pelos raios das bases são semelhantes. Dessa semelhança decorre a proporcionalidade linear entre os raios e as alturas correspondentes, expressa pela relação:

$$\frac{r}{R} = \frac{H - h}{H}$$

Essa proporcionalidade é essencial para a dedução das fórmulas métricas do sólido. A geratriz g do tronco de cone pode ser determinada por meio do **Teorema de Pitágoras** aplicado à secção meridiana. A expressão correspondente é:

$$g = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

Figura 30: Tronco de cone.



Com a determinação da geratriz, obtém-se a área lateral do tronco de cone, dada por:

$$A_L = \pi(R + r)g$$

Entende-se que o tronco de cone pode ser compreendido tanto sob o enfoque da geometria clássica, por meio da semelhança de triângulos, quanto sob a abordagem analítica, como uma região limitada de uma superfície quádricas no espaço euclidiano tridimensional.

9.1 Volume do Tronco de Cone

O volume do tronco de cone pode ser obtido pela diferença entre dois cones semelhantes ou por integração.

A fórmula do volume é:

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

Demonstração via Semelhança

Considere um cone maior de altura H e raio R , e um cone menor removido de altura $H - h$ e raio r .

Pela semelhança de triângulos:

$$\frac{r}{R} = \frac{H - h}{H}$$

O volume do tronco é:

$$V_{tronco} = V_{cone\ maior} - V_{cone\ menor}$$

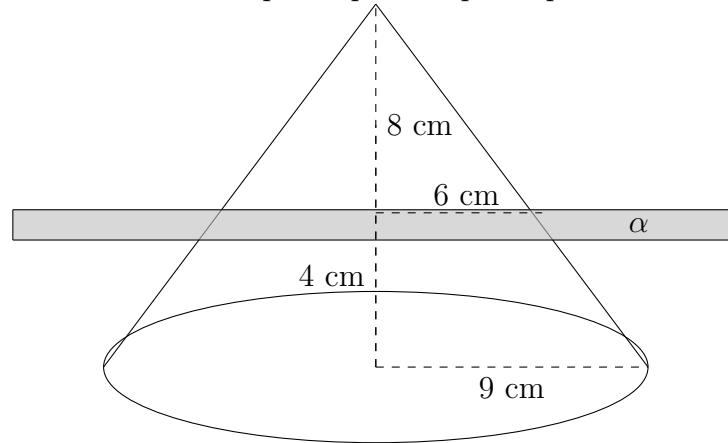
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 (H - h)$$

Após manipulações algébricas, obtemos:

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

Exemplo Numérico

Figura 31: Cone interceptado por um plano paralelo a sua base.



Se um tronco de cone com $R = 9$, sendo o cone menor de $r = 6$ e a altura $h = 4$, então é possível calcularmos o volume do tronco de cone. Observe:

Temos a fórmula,

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

substituindo os valores,

$$V = \frac{\pi \cdot 4}{3}(9^2 + 9 \cdot 6 + 6^2)$$

$$V = \frac{\pi \cdot 4}{3}(81 + 54 + 36)$$

$$V = \frac{4\pi}{3}(171)$$

$$V = 228\pi$$

Capítulo 10

Conclusão

A elaboração deste trabalho permitiu uma análise aprofundada das secções cônicas (elipse, parábola e hipérbole), sob uma perspectiva que integra a evolução histórica, o rigor da geometria analítica e as possibilidades pedagógicas da tecnologia moderna. Através do resgate histórico, ficou evidente que o que começou como uma investigação geométrica abstrata na Grécia Antiga, com Menaechmus e Apolônio de Perga, fundamentou as bases para revoluções científicas posteriores na física e na astronomia, como as leis de Kepler e a gravitação universal de Newton.

A utilização do software GeoGebra revelou-se um diferencial metodológico essencial, atuando como um mediador cognitivo que transforma equações algébricas em modelos visuais dinâmicos e tangíveis. A capacidade de visualizar a gênese das cônicas a partir da intersecção de planos em cones de duas folhas permitiu uma compreensão mais clara de conceitos complexos como excentricidade e assíntotas.

Em suma, este estudo reforça a evolução dos estudos das secções cônicas, sendo refinada e aplicada em diversas áreas. Além disso, entende-se que o ensino das cônicas não deve limitar-se à manipulação mecânica de fórmulas. A integração entre a geometria dinâmica e o contexto histórico e prático proporciona uma visão unificada da matemática, essencial para a formação de estudantes e professores. Conclui-se que o uso de ferramentas tecnológicas adequadas não apenas facilitam a visualização espacial, mas promove uma aprendizagem significativa, preparando o aluno para aplicar estes conhecimentos não somente na matemática, mas também em outras linhas de estudos.

Referências Bibliográficas

- [1] AKIO, L. História da matemática para professores 7: Apolônio e as cônicas, 2014. <https://www.youtube.com/watch?v=RR3uZ6wIOe4>.
- [2] BOYER, C. B. *História da matemática*, 3 ed. Blucher, São Paulo, 2012.
- [3] BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.
- [4] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*, 5 ed. Editora da Unicamp, Campinas, 2011.
- [5] GEOGEBRA. Geogebra: Calculadora gráfica e geometria. Versão Online, 2024. Acesso em: 16 abr. 2026.
- [6] IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Analítica*, 6 ed., vol. 7. Atual, São Paulo, 2013.
- [7] LEHMANN, C. H. *Geometria Analítica*. Editora Globo, Porto Alegre, 1970.
- [8] LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria*, 4 ed. SBM, Rio de Janeiro, 2006.
- [9] PAPPAS, T. *O Barato da Matemática*. Artemis, Lisboa, 2002.
- [10] ROQUE, T. *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Zahar, Rio de Janeiro, 2012.
- [11] STEINBRUCH, A., AND WINTERLE, P. *Geometria Analítica*, 2 ed. Makron Books, São Paulo, 1987.
- [12] WINTERLE, P. *Vetores e Geometria Analítica*. Pearson, São Paulo, 2000.