



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

ALEX SOUSA DO ROSARIO

CONSTRUÇÕES DE FRACTAIS USANDO O GEOGEBRA

BRAGANÇA-PA
2023

ALEX SOUSA DO ROSARIO

CONSTRUÇÕES DE FRACTAIS USANDO O GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Universidade Federal do
Pará, como parte dos requisitos
necessários para obtenção do título de
Licenciado Pleno em Matemática.

Orientador: Prof. MSc. Nelson Ned
Nascimento Lacerda

FICHA CATALOGRÁFICA

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)
autor(a)

R789c Rosario, Alex Sousa do.
Construções de Fractais usando o Geogebra / Alex
Sousa do Rosario. — 2023.
47 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Me. Nelson Ned Nascimento Lacerda
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -
Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de
Bragança, Faculdade de Matemática, Bragança, 2023.

1. Fractais. 2. Geogebra. 3. Árvores Bifurcadas. 4.
Triângulo de Sierpinski. I. Título.

CDD 516.9

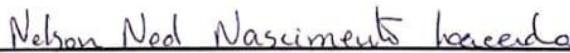
ALEX SOUSA DO ROSARIO

CONSTRUÇÕES DE FRACTAIS USANDO O GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Universidade Federal do
Pará, como parte dos requisitos
necessários para obtenção do título de
Licenciado Pleno em Matemática.

Bragança, 06 de julho de 2023

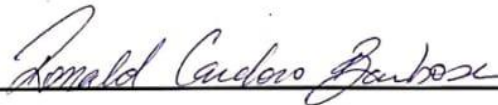
BANCA EXAMINADORA



Prof. MSc. Nelson Ned Nascimento Lacerda
Orientador - UFPA



Prof. Dr. Elizardo Fabricio Lima Lucena
Examinador Interno- UFPA



Prof. Dr. Ronald Cardoso Barbosa
Examinador Interno - UFPA

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer a Deus pela minha vida, e por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo da realização deste curso.

Aos meus pais e irmãos, que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava à realização deste trabalho.

Aos professores, pelas correções e ensinamentos que me permitiram apresentar um melhor desempenho no meu processo de formação profissional ao longo do curso.

Ao professor Nelson Lacerda, por ter sido meu orientador e ter desempenhado tal função com dedicação e amizade.

Aos meus colegas de turma, por compartilharem comigo tantos momentos de descobertas e aprendizado e por todo o companheirismo ao longo deste percurso.

“Das leis mais simples nascem infinitas maravilhas que se repetem indefinidamente”.

Benoit Mandelbrot

RESUMO

Este trabalho faz uma revisão bibliográfica sobre Geometria Euclidiana e as Geometrias Não-Euclidianas. A onde terá o foco principal na geometria fractal. Os fractais são figuras geométricas que despertam a curiosidade humana, pois, no fractal, cada parte é similar ao todo. Os fractais estão presentes na natureza e no nosso cotidiano. Nesse trabalho, realizou-se a construção de dois exemplos clássicos: Árvores Bifurcadas e Triângulo de Sierpinski. Para as construções, utilizou-se o Geogebra, um software de Matemática que reúne Geometria, Álgebra, Cálculo, entre outras funções. Além de ser livre, funciona em qualquer sistema operacional, gratuito e está disponível em múltiplas plataformas como iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux. Torna-se, portanto uma ferramenta útil em sala de aula para ensinar de maneira mais simples os assuntos mais complexos.

Palavras – Chaves: Fractais; Geogebra; Árvores Bifurcadas; Triângulo de Sierpinski.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Curva de Koch	22
Figura 2: Curva de Hilbert.....	22
Figura 3: Esponja de Menger	23
Figura 4: Árvores Bifurcadas	24
Figura 5: Retirada dos eixos e da malha da janela de visualização.	25
Figura 6: Construção dos segmentos AB e BC.	26
Figura 7: Construção do ângulo α	26
Figura 8: Definindo a razão r.....	27
Figura 9: Construção do círculo c.....	27
Figura 10: Criação do ângulo β e do ponto B'.	28
Figura 11: Criação do segmento CB'.....	29
Figura 12: Criação do ponto D.	29
Figura 13: Ocultando a circunferência c.	30
Figura 14: Ocultando os ângulos α e β	30
Figura 15: Ocultando o ponto B' e o segmento h.	30
Figura 16: Retirando os rótulos de AB, BC e os pontos A e B.	31
Figura 17: Criação de CD e a retirados de seu rótulo.	31
Figura 18: Criando uma nova ferramenta.	32
Figura 19: Construção de um novo ramo da árvore.....	33
Figura 20: Figura resultante	33
Figura 21: Reflexão em relação a uma reta.....	34
Figura 22: Primeira reflexão.....	34
Figura 23: Segunda reflexão.....	34
Figura 24: Terceira reflexão.	35
Figura 25: Quarta reflexão	35
Figura 26: Quinta reflexão	35
Figura 27: Árvores com diferentes tamanhos para os segmentos AB, CD e amplitude para o ângulo α	36
Figura 28: Criação os pontos A e B.	37
Figura 29: Ocultando a malha e os eixos.	37
Figura 30: Construção do pol1.	38
Figura 31: Criação dos pontos médios D, E e F e do centro G.	39

Figura 32: Criação da lista l1.....	39
Figura 33: Criação do triângulo l2.....	40
Figura 34: Criação da lista l3.....	40
Figura 35: Criação da lista l4.....	41
Figura 36: Figuras dos Passos 9, 10 e 11, respectivamente.	41
Figura 37: Localizando a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE.	42
Figura 38: Criação do CONTROLE DESLIZANTE $a=1$	42
Figura 39: Inserindo a condição para a exibição de l2.....	43
Figura 40:Fractal quando $a=1$, $a=4$ e $a=6$	44

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
1 A GEOMETRIA EUCLIDIANA	13
1.1 Origem da Geometria Euclidiana	13
1.2 As Novas Geometrias	15
2 GEOMETRIA FRACTAL	18
2.1 Geometria fractal e sua história	18
2.2 Características dos Fractais	19
2.3 Linha do tempo	20
2.4 Aplicações de Fractais	21
2.5 Algumas figuras de fractais	22
2.6 CONSTRUÇÕES DE FRACTAIS	23
2.6.1 O Software GeoGebra	23
2.6.2 Árvores Bifurcadas	24
2.6.3 O Triângulo de Sierpinski	36
CONSIDERAÇÕES FINAIS	45
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	46

INTRODUÇÃO

A geometria está presente na vida cotidiana de todo cidadão. A todo o momento estamos utilizando conhecimentos geométricos em nossos afazeres. O estudo da geometria é indispensável para o pleno desenvolvimento do ser humano, pois ajuda na compreensão do mundo, desenvolve o raciocínio lógico e proporciona um melhor entendimento de outras áreas do conhecimento, devido à grande importância que a geometria assume no cotidiano do indivíduo. Assim, nesse trabalho vamos falar sobre a geometria euclidiana e não-euclidiana, partindo disso, o trabalho focará na geometria fractal que colabora com o estudo de formas cuja estrutura se repete infinitamente, em escalas cada vez menores.

Os fractais são formas geométricas que possuem um padrão interessante em sua construção, formando figuras muitas vezes bonitas e intrigantes. Em um fractal, cada parte é similar ao todo. A área da Matemática que estuda os fractais é conhecida como Geometria dos fractais, que analisa as propriedades e o comportamento das figuras de alta complexidade.

Existem vários tipos de fractais, os mais comuns são os geométricos e os aleatórios. Os fractais estão presentes na natureza, como ramificações das árvores, flocos de neve, entre outros. Também existem vários exemplos de fractais em nosso corpo, como os vasos sanguíneos e os alvéolos pulmonares.

Devido a sua forma e beleza, o estudo de fractais é um tema bastante interessante e visualmente atrativo, e permite a exploração de diferentes conteúdos e situações, além de terem propriedades que propiciam sua construção e abordagem através de softwares de geometria dinâmica.

Nesse trabalho, temos como objetivo a construção de duas figuras da geometria fractal; a primeira, as Árvores Bifurcadas, e a segunda construção é o Triângulo de Sierpinski e como ferramenta utilizamos o geogebra.

Em termos teóricos e metodológicos, o trabalho fundamenta-se essencialmente na ideia de metodologia de Minayo. Segundo Minayo (2016) a metodologia é o caminho para a elaboração de uma pesquisa científica. A metodologia é um conjunto de ferramentas, em que se inclui a teoria de abordagem (método de análise), os instrumentos

de operacionalização do conhecimento (técnicas de pesquisa) e a criatividade do autor na seleção de dados e na elaboração do texto científico, bem como a sua capacidade crítica. Dessa forma, a metodologia a ser utilizada em um trabalho possui grande importância uma vez que determina os passos a serem seguidos para a concretização do trabalho.

O presente trabalho se desenvolveu primeiramente no estudo de artigos, livros, e trabalhos sobre Geometria Euclidiana, Não-Euclidiana e Fractais. Após essa etapa, realizou-se a opção pela construção dos fractais utilizando o Geogebra, por ser um software gratuito de fácil acessibilidade, apresenta boa ilustração geométrica. Dessa forma facilita a construção e visualização dos fractais.

1 A GEOMETRIA EUCLIDIANA

Antes de iniciar o estudo sobre a geometria fractal, vamos apresentar uma revisão sobre a geometria euclidiana, base de todas as geometrias.

1.1 Origem da Geometria Euclidiana

Os primeiros conhecimentos geométricos que o homem teve, a respeito da geometria partiram das necessidades em compreender melhor o meio onde vivia. Motivo este que talvez justifique a origem da sua palavra, pois o termo “geometria” deriva do grego $geo = terra + metria = medida$ que significa medição de terra.

De acordo com Eves (1997), as primeiras considerações feitas a respeito da geometria são muito antigas tendo como origem a simples observação e a capacidade de reconhecer figuras, comparar formas e tamanhos. Um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos foi a noção de distância.

Ainda, segundo Eves (1997), foi das necessidades da sociedade, quando o homem teve que delimitar terras, que teve origem uma geometria caracterizada pelo traçado de desenho de formas, fórmulas, cálculo de medidas de comprimento de área, volume etc. Foi nessa época que se desenvolveu a noção de figuras geométricas como, retângulo, quadrado e triângulos. Outros conceitos geométricos, como noções de paralelismo e perpendicularidade teriam sido sugeridas pela construção de muros e moradias.

Para Brás (2009), foi a partir de Tales de Mileto (600 A.C., aproximadamente) que a dedução de fatos geométricos começou a ser testada. Já as primeiras academias foram estabelecidas na Grécia, em torno de 500 A.C., onde elevava a busca por conhecimentos sobre Geometria. No entanto, os conhecimentos de geometria se desenvolveram como ciência dedutiva, graças a Euclides, por volta de 300 A.C.

Os acontecimentos da vida de Euclides são desconhecidos, não se sabe sobre sua origem e nem onde ocorreu a sua formação acadêmica. Deduz-se que estudou em Atenas, na Academia de Platão, devido à similar particularidade entre o desinteresse de ambos pelas aplicações práticas. “Euclides eventualmente se estabeleceu em Alexandria, Egito, onde o soberano Ptolomeu I havia criado um importante instituto científico conhecido

como Museu. No Museu, Euclides tornou-se um bom educador, com reconhecida habilidade como expositor” (BRÁS, 2009, p.10)

É conhecido até os tempos atuais como o pai da Geometria, visto que por meio da reunião dos estudos consolidados anteriormente aos dele, organização e formalização dos mesmos, é que podemos conhecer uma matemática tão bem sistematizada em princípios dedutivos e, ao mesmo tempo, dirigida pelo mais fervoroso rigor matemático.

Sabe-se que a obra mais influente de Euclides, Os Elementos, escrita por volta de 300 a.C., é uma compilação de teoremas conhecidos e demonstrados. Euclides sistematizou a grande massa de conhecimentos matemáticos adquiridos ao longo do tempo, dando ordem lógica e estabelecendo o conceito de lugar geométrico (BRÁS, 2009, p.11)

Os Elementos é obra formada por 13 livros, contendo 465 proposições ou teoremas, abrangendo Geometria plana e espacial, álgebra e teoria dos números. Na seção que se refere a Geometria, sua estrutura é composta por cinco postulados e cinco axiomas. Foi considerada uma obra tão primorosa que permaneceu praticamente constante durante aproximadamente 2000 anos.

A seguir são apresentados os cinco postulados de Euclides, uma observação válida a se fazer, é que o quinto postulado de Euclides, também conhecido como postulado das paralelas, não parece tão evidente ou intuitivo como os anteriores.

I. Pode-se traçar uma (única) reta ligando dois pontos.

II. Pode-se prolongar (de uma única maneira) uma reta finita continuamente em uma linha reta.

III. Pode-se traçar um círculo com centro qualquer e raio qualquer.

IV. Todos os ângulos retos são iguais.

V. Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado cuja soma dos ângulos internos é menor que dois retos.

Dirigido por esses postulados, surgiu a Geometria Euclidiana, que recebeu esse nome em homenagem a Euclides. No entanto, “com base na análise das propriedades de um sistema axiomático, percebe-se que as demonstrações de Euclides eram cheias de apelos à intuição com hipóteses implícitas, fazendo-se necessário uma reconstrução” (BRÁS, 2009, p.13).

Dessa forma, em obra publicada em 1899, “Fundamentos da Geometria”, David Hilbert (1862-1943), matemático alemão, expõe um dos trabalhos de maior estima, entre aqueles que procuravam aperfeiçoar a Geometria de Euclides sob o ponto de vista de estruturação lógica. Nesta obra, se solidificaram termos como: conceitos primitivos e a divisão dos axiomas em grupo.

1.2 As Novas Geometrias

De todos os postulados criados por Euclides, o quinto é o mais polêmico. Segundo Brás (2009, p.14), “o quinto postulado tornou-se alvo de críticas dos Elementos no tempo de Euclides e durante 2.000 anos inúmeras tentativas foram feitas para demonstrá-lo. Uma das consequências foi a produção de vários outros equivalentes denominados substitutos”. A preocupação dos matemáticos em relação a esse postulado ocorreu, “devido ao fato da propriedade axiomática da independência, não estar tão evidente uma vez que o ponto de interseção poderia ocorrer a milhares de quilômetros” (CARDOSO; SOUSA, 2009, p. 10).

Os esforços para demonstrar o quinto postulado de Euclides possibilitaram aos matemáticos a descoberta de uma nova Geometria, a Geometria não-euclidiana.

O primeiro a batizar de Geometria não-Euclidiana foi Gauss (1777-1855), o maior matemático de sua época. Poucos foram os resultados de Gauss que ficaram conhecidos durante sua vida, por causa das preocupações com a pressão realizada pela inquisição para com os estudiosos. “Sabe-se da descoberta da nova Geometria por Gauss graças as suas anotações e correspondências que trocava com alguns matemáticos da época. Muitos de seus resultados foram divulgados dessa forma” (BRÁS 2009, p. 22).

Por Barbosa (2002 *apud* BRÁS, 2009, p. 23), é possível ler um fragmento da carta de Gauss a F.A. Taurinus, em 8 de novembro de 1824, na cidade de Gottingem:

“... A hipótese que a soma dos ângulos é menor que 180° leva a uma geometria curiosa, muito diferente da nossa (a euclidiana), mas totalmente consistente, a qual desenvolvi a um ponto que me satisfaz plenamente, no sentido de que posso resolver qualquer problema nela, com exceção da determinação de uma constante que não pode ser fixada a priori. ...

.... Os teoremas dessa geometria parecem paradoxais e absurdos para um não iniciado; mas reflexão cuidadosa sobre o assunto revela que eles não contêm nada de impossível. ...

... Todos os meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nesta geometria não euclidiana não tiveram sucesso, e a única coisa nela que se opõe a nossa concepção é que se for verdade, deve existir no espaço uma unidade universal de medida linear (desconhecida por nós). ...”

Desse modo, pode-se verificar que foi na segunda década do século XIX que Gauss começou a formular a Geometria não-Euclidiana, composta de teoremas e conceitos, em que não era válido o quinto postulado de Euclides. Juntamente com Gauss, outros dois matemáticos contribuíram para a formulação da nova Geometria. Um deles tratava-se de Johann Boylai (1802 - 1860), filho do húngaro Wolfgang Boylai (1775 - 1856), o qual era amigo de Gauss e com o qual este trocava correspondências sobre o quinto postulado de Euclides, um jovem matemático, que se dedicou ao estudo das paralelas e “em 1820, resolveu negar o quinto postulado de Euclides e resultados interessantes começaram a aparecer. Ele acreditou na possibilidade da existência de uma geometria geral, na qual a Geometria Euclidiana seria um caso particular” (BRÁS, 2009, p. 24).

O outro matemático que contribuiu para o descobrimento da nova Geometria, é considerado o maior matemático russo de seu tempo, Nicolai Ivanovich Lobachewsky (1793 - 1856) publicou suas conclusões sobre a geometria não-Euclidiana dois anos antes da publicação de Johann Boylai. Brás (2009, p.25-26) nos esclarece que:

Lobachewsky, Gauss e J. Boylai desenvolveram a geometria não- Euclidiana ao mesmo tempo, mas Lobachewsky foi o primeiro a comunicar suas descobertas. [...] Grandes matemáticos continuaram o estudo da Geometria não-Euclidiana, como Beltrami, Poincare, Klein e Riemann, desenvolvendo o assunto e aplicando em outras áreas da matemática. A independência do postulado das paralelas trouxe uma nova visão sobre a geometria e como Gauss havia previsto, a aceitação dessas novas ideias seria lenta. Em 1868, Beltrami provou definitivamente que não era possível provar o quinto postulado.

Desde a publicação dos Elementos, os matemáticos tentaram demonstrar o 5º postulado por meio dos quatro postulados anteriores e suas consequências, pois ele era pouco intuitivo e de redação bem mais complicada que os outros, mas todas as tentativas de demonstrar o 5º postulado foram inúteis. Somente quando se negou este postulado, foi que se chegou ao desenvolvimento da primeira Geometria não Euclidiana.

Essa primeira Geometria não-Euclidiana foi chamada de Geometria hiperbólica, e se apresenta tão consistente quanto a Geometria Euclidiana, não podendo ser contrariada. É importante lembrar que apesar dela não ser o foco de estudo dessa pesquisa, ela foi a introdutora para a origem das demais Geometrias não-Euclidianas.

No século XVII, os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) criam o método das coordenadas ou a “geometria analítica” enquanto que o alemão Gottfried Leibniz (1646-1716) e o inglês Isaac Newton (1643-1727) descobrem

os algoritmos do cálculo infinitesimal, os quais permitirão o estudo de curvas e superfícies através de suas propriedades diferenciais.

A Geometria Diferencial, começa com o estudo de curvas. A *curvatura* de uma curva plana em um ponto da curva é uma medida numérica de quanto a curva se afasta de ser uma reta numa vizinhança daquele ponto: é a taxa de variação naquele ponto da direção tangente à curva em relação ao comprimento de arco. Os conceitos de curvatura de uma curva plana e de círculo osculador já eram conhecidos por Newton e Leibniz, mas o precursor do assunto talvez seja o holandês Christian Huygens (1629-1695), que ainda não conhecia o cálculo, mas que em 1673 publicou um trabalho sobre curvas planas introduzindo os conceitos de involuta e evoluta de uma curva o qual foi curiosamente motivado pelo seu interesse em pêndulos e relógios. Durante o século XVIII e até o início do século XIX, desenvolvem-se os fundamentos da teoria de curvas e superfícies mergulhadas no espaço tridimensional. Em 1731, Alexis Clairaut (1713-1765) estuda curvas no espaço tridimensional, mas se limita à propriedades de primeira ordem (que envolvem apenas as derivadas primeiras, como retas tangentes). Em 1775, Gaspard Monge (1746-1818) vai mais longe e discute os conceitos de curvatura e torção de uma curva espacial. Uma transição natural da teoria de curvas para a teoria de superfícies se encontra no problema geodésico, i. e. o problema de se encontrar o caminho mais curto entre dois pontos de uma superfície.

2 GEOMETRIA FRACTAL

Nesse capítulo, vamos falar sobre a geometria fractal, algumas definições gerais, aplicações em diversas áreas e a construção da Árvore Bifurcada e o Triângulo de Sierpinski. É a partir dele que podemos perceber o quanto a geometria fractal é contemporânea e fascinante.

2.1 Geometria fractal e sua história

Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente autossimilares e de escala. Em muitos casos um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo.

A geometria fractal foi apresentada em 1975 por Benoît Mandelbrot e estuda o comportamento e propriedade dos fractais, que são figuras da geometria não-euclidiana. A denominação vem a partir do adjetivo em latim *fractus*, que significa “quebrar”.

Para Menezes (2003), existem dois tipos de fractais: os geométricos (determinísticos) e os não não-lineares (ou aleatórios). Os geométricos repetem padrões continuamente. Os fractais não lineares, ou aleatórios, guardam a simetria de escala, mas a transformação não é previsível. Em geral, construídos em computadores. Os fractais são resultados de funções simples ou complexas e suas características principais são a autossemelhança, dimensionalidade fracionária e a complexidade infinita. Sua construção é baseada em iteração dos elementos, rotacionando-os, refletindo-os ou dilatando-os.

De acordo com Mandelbrot (2004), os fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões completos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita. O autor constatou ainda que havia uma curiosa e interessante relação entre estes objetos e aqueles encontrados na natureza.

A ideia de fractais teve a sua origem no trabalho de alguns cientistas entre 1857 e 1913. Esse trabalho deu a conhecer alguns objetos catalogados como “monstros” que se supunha não terem grande valor científico. Tais objetos acabaram por adquirir um estatuto de dignidade matemática, constituindo hoje uma área importante de investigação matemática.

Em 1872, Karl Weierstrass encontrou o exemplo de uma função com propriedade de ser contínua em todo seu domínio, mas em nenhuma parte diferenciável. O gráfico desta função é chamado atualmente de fractal. Em 1904, Helge Von Kock, não satisfeito com a definição muito abstrata e analítica de Weierstrass, deu uma definição mais geométrica de uma função similar, atualmente conhecida como kock snowflake (ou floco de neve de Koch), que é o resultado de infinitas adições de triângulos ao perímetro de um triângulo inicial. Cada vez que novos triângulos são adicionados, o perímetro aumenta, e como consequência se aproxima do infinito, dessa maneira o fractal abrange uma área finita dentro de um perímetro infinito. (FERNANDES, 2007)

Houve também muitos outros trabalhos relacionados a estas figuras, mas esta geometria só conseguiu se desenvolver plenamente a partir da década de 60, com o auxílio da computação. Conforme Fernandes (2007), esses objetos foram construídos para mostrar que existiam objetos matemáticos interessantes além das curvas e superfícies regulares da geometria tradicional.

Diferentes definições de Fractais surgiram com o aperfeiçoamento de sua teoria. A noção que serve de fio condutor foi introduzida por Benoilt Mandelbrot por meio do neologismo “Fractal”, que surgiu do adjetivo latino fractus, que significa “irregular” ou “quebrado”. Uma primeira definição matemática dada pelo próprio Mandelbrot diz: “Um conjunto é dito Fractal se a dimensão Hausdorff-Besicovitch deste conjunto for maior do que sua dimensão topológica” (BARBOSA, 2005, p.18). É claro que essa definição recebeu críticas e não satisfazia ao próprio Mandelbrot.

2.2 Características dos Fractais

Segundo K.J. Falconer (*apud*, Barbosa,2005, p.18), autor de duas obras importantes sobre fractais (1985 e 1990), sugeriu a definição de fractal por caracterização: Um conjunto é fractal se possuir alguma forma de auto-similaridade ainda que aproximada, onde a sua dimensão seja maior que a dimensão topológica, e que este conjunto possa ser expresso por meio de um procedimento recursivo ou iterativo.

As principais propriedades que caracterizam os fractais são:

- A auto-similaridade: Um fractal costuma apresentar cópias aproximadas de si mesmo em seu interior. Um pedaço é similar ao todo. Visto em 7 diferentes escalas a imagem de um fractal parece similar. (SIQUEIRA, 2008)

- A complexidade infinita: É uma propriedade dos fractais que significa que nunca conseguiremos representá-la completamente, pois a quantidade de detalhes é infinita. (SIQUEIRA, 2008)
- A dimensão dos fractais: Ao contrário do que acontece na geometria euclidiana, não é necessariamente uma quantidade inteira, e sim uma quantidade fracionária. A dimensão de um fractal representa o grau de ocupação deste no espaço, que tem a ver com o seu grau de irregularidade. (FERNANDES, 2007)

2.3 Linha do tempo

Embora a terminologia geometria fractal tenha sido criada por Mandelbrot na década de 80, muitos estudos antecederam essa época e vários objetos matemáticos, vejamos sua cronologia.

- 1500 – Dürer desenvolve construções de polígonos regulares, gera os fractais que leva o seu nome.
- 1883 – Cantor publica o primeiro objeto fractal a curva de Cantor.
- 1890 – Peano publica a sua curva.
- 1891 – Hilbert publica sua curva com a ideia de preenchimento quadrangular, hoje bastante utilizada em compressão de imagens.
- 1904 – Koch publica as curvas de Koch e a ilha de Koch como soluções de curvas contínuas e não deriváveis em nenhum ponto, como Cantor não valorizava o aspecto de auto-similaridade.
- 1918 – Hausdorff publica resultados sobre estudos topológicos e com isso a Dimensão de Hausdorff, utilizada por Mandelbrot anos depois para a definição de fractais.
- 1918 – Julia publica um artigo com 199 páginas sobre o seu conjunto gerado num plano complexo. Julia não chega a ver o resultado belíssimo dos seus conjuntos, dado que ele só conseguia fazer poucas implementações.
- 1918 – Fatou publica trabalho semelhante ao de Julia, porém não tem muita repercussão.
- 1921 – Menger apresenta a Esponja de Menger ao explorar conceitos de dimensão topológica.

- 1938 – Lévy descreve sobre a propriedade de auto-similaridade de algumas curvas.
- 1967 – Mandelbrot publica seu artigo sobre a topologia da costa da Grã-Bretanha, iniciando um novo capítulo sobre a Geometria Fractal.

2.4 Aplicações de Fractais

Embora não aparentem, os fractais podem ser encontrados em todo o universo natural e em quase toda ciência, desde os aspectos das nuvens, montanhas, árvores, brócolis, couve-flor, relâmpagos, até a distribuição das galáxias, como na arte e na matemática.

É importante ressaltar que hoje a aplicação do conceito de fractal em problemas reais, se estende por um vasto campo interdisciplinar como: Biologia, Geografia, Medicina, Música, Economia, Indústria Cinematográfica, Análise de Imagens por Satélite, Meteorologia, Geologia e outros.

Para os biólogos, ajuda a compreender o crescimento das plantas. Para os médicos dá uma nova visão da anatomia interna do corpo. Para os físicos, possibilita o estudo de superfícies caóticas. Enfim não faltam exemplos. Um dos mais belos e, sem dúvida o mais colorido é o uso dos fractais na arte. Quando os computadores são alimentados com equações eles criam magníficos desenhos abstratos. (OLIVEIRA, 1994)

Podemos verificar o uso de fractais em vários ramos de atividades, pode citar alguns trabalhos a seguir:

- Mendonça, E. ; Da Silva, A. C. (2001), utiliza fractais como uma alternativa para explicar a conformação de agregados moleculares. Sua utilização no estudo de substâncias húmicas (SH) reside na tentativa de descrever (representar) a estrutura ramificada ou a superfície rugosa e distorcida destas substâncias. A presença de um modelo fractal por sistemas naturais implica que este pode ser decomposto em partes, em que cada uma, subsequentemente, é cópia do todo.
- Dantas Neto et al (2009), explora a aplicabilidade da teoria de fractais para estimar a curva de retenção de água no solo através do modelo proposto por Brooks & Corey (1964) modificado por Pierrer et al. (1996), utilizando-se a dimensão fractal com base em dados medidos da distribuição das partículas e do tamanho dos poros

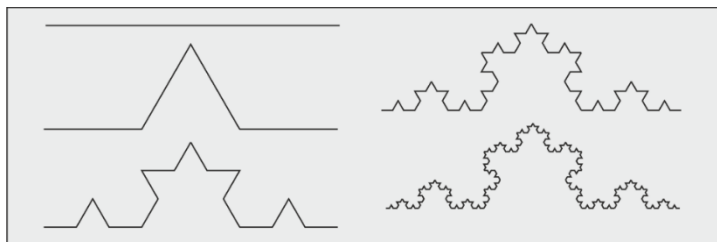
do solo. O estudo foi realizado em um solo cultivado com gergelim e irrigado com sistema de irrigação por aspersão convencional.

- Santos *et al* (2018), discutiu de que modo diferentes padrões de fractais poderiam ser aplicáveis à projetos arquitetônicos para gerar mobiliários urbanos inovadores, bonitos, seguros e práticos.

2.5 Algumas figuras de fractais

Curva de Koch: É uma curva geométrica e uma dos primeiros fractais a serem descritos. Conhecido também como Floco de Neve de Koch, sua construção inicia com uma linha reta chamada de iniciador.

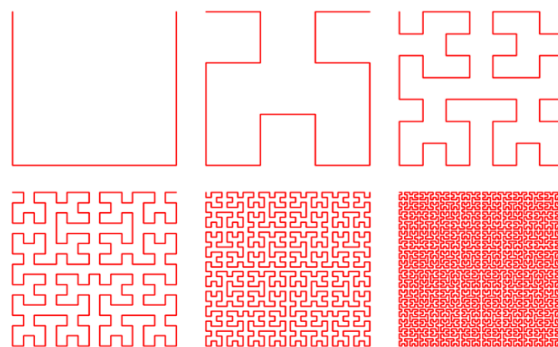
Figura 1: Curva de Koch



Fonte: University of groningen

Curva de Hilbert: As curvas de Hilbert são nomeadas em homenagem ao matemático alemão *David Hilbert*. Eles foram descritos pela primeira vez em 1891. Uma curva de Hilbert é uma curva contínua de preenchimento de espaço. Eles também são fractais e autossimilares.

Figura 2: Curva de Hilbert



Fonte: DataGenetics

Espanja de Menger: Esponja Menger fractal em matemática é uma curva universal. Na medida em que tem uma dimensão topológica, e qualquer outra curva, é

homeomórfica para alguns subconjuntos dele. Às vezes é chamado de esponja de Sierpinski-Menger ou esponja de Sierpinski. É uma extensão tridimensional do conjunto de Cantor e "carpete" de Sierpinski

Figura 3: Esponja de Menger



Fonte: Khaos1101

2.6 CONSTRUÇÕES DE FRACTAIS

Após essa breve revisão bibliográfica vamos construir a Árvore Bifurcada e o Triângulo de Sierpinski. Para isso, vamos primeiro falar um pouco sobre o geogebra.

2.6.1 O Software GeoGebra

Criado por Markus Hohenwarter, o projeto iniciou no ano de 2001 na Universidade de Salzburgo na Áustria, passou pela Universidade Flórida Atlântica na Flórida, e finalizou na Universidade Estadual da Flórida em 2009.

O GeoGebra é um software de Matemática que reúne Geometria, Álgebra, Cálculo, Probabilidade e Estatística. Além de ser livre, é multiplataforma, ou seja, funciona em qualquer sistema operacional. Pode ser baixado gratuitamente e está disponível em múltiplas plataformas como iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux. Devido a isso, torna-se uma ferramenta útil em sala de aula para ensinar de maneira mais simples os assuntos mais complexos, pois reúne também planilhas, gráficos, estatística e cálculo.

Pode ser instalado acessando o Play Store ou o site oficial www.geogebra.org. Para smartphones e tablets o ideal é acessar o Play Store, e baixar o Suíte GeoGebra Calculadora, pois ele mostra várias ferramentas que podem ser trabalhadas, ou seja, as

calculadoras que você pode escolher. Em especial, as janelas 2D (bidimensional) e 3D (tridimensional), que abrangem um amplo número de recursos a ser utilizado.

Utilizamos nesse trabalho a versão Classic, obtido através do site citado acima. Com o auxílio do Geogebra, é possível investigar propriedades geométricas e, conseqüentemente, aprender novos conceitos. A utilização desse ambiente gráfico permite a experimentação, a simulação, o questionamento e a análise de situações geométricas contribuindo para o ensino-aprendizado de Matemática e aplicações em áreas afins. Em particular, o GeoGebra nos proporcionou a construção de vários objetos fractais associados a construções geométricas.

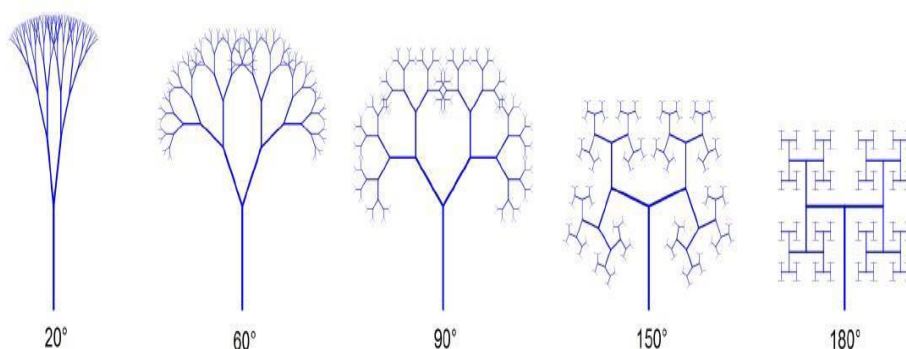
Existem vários cursos *online* sobre o Geogebra, e existe uma comunidade chamada GeoGebra espalhados por diversos países, que apoiam a educação em ciência, tecnologia, engenharia e matemática, inovando a partir das propriedades do Software

2.6.2 Árvores Bifurcadas

As Árvores Bifurcadas são fractais gerados por funções iterativas *tipo árvore*, ou seja, têm em seu processo iterativo ramificações que se assemelham-se a árvores. A sua construção parte de um segmento vertical, que é o tronco, e desse segmento teremos um ângulo de bifurcação onde o tronco se ramificará gerando, a partir de um fator de redução/ampliação fixado, novos “galhos” e a cada passo o número de galhos da árvore dobra.

Podemos avaliar se a árvore será limitada ou não, conforme o valor de seu fator de redução/ampliação, que denotamos por r . Usando alguns elementos de trigonometria, mostra-se que para $r < 1$ a árvore será limitada e para $r \geq 1$, não existe região que a limite. Na figura 1, temos variações de árvores de acordo com o ângulo de bifurcação.

Figura 4: Árvores Bifurcadas



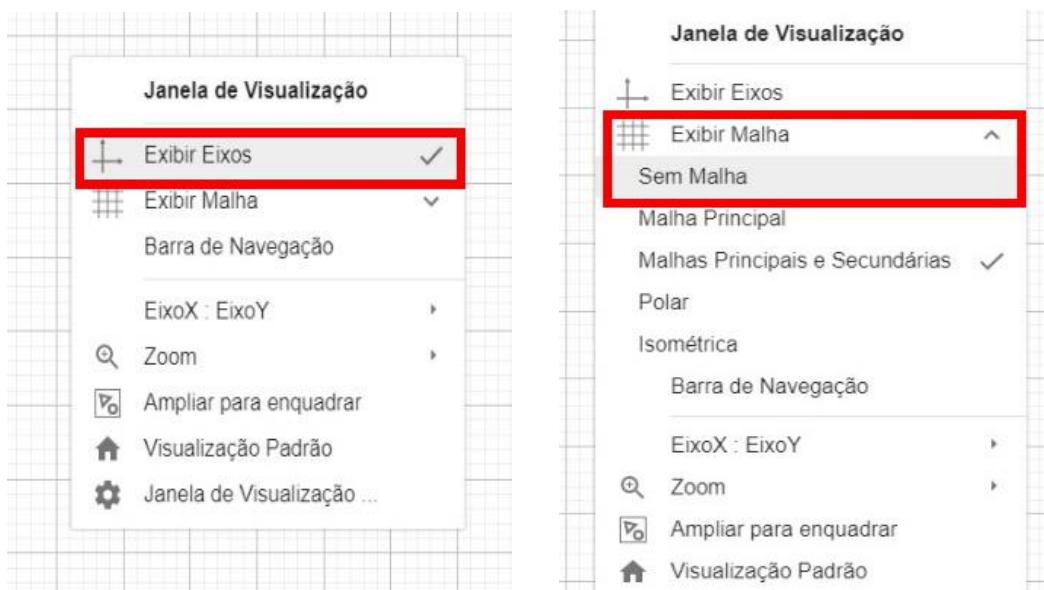
Fonte: RABAY, Y.S.F

Com o uso do GeoGebra, é possível visualizar algumas iterações do processo de construção de uma Árvore Bifurcada.

A seguir teremos o passo a passo de algumas iterações da arvores bifurcadas no Geogebra.

Passo 1: Clique com o botão direito do mouse na janela de visualização do GeoGebra e desmarque as opções EXIBIR EIXOS e SEM MALHA para retirar os eixos e a malha da tela, seguindo os passos dados na figura 5 abaixo:

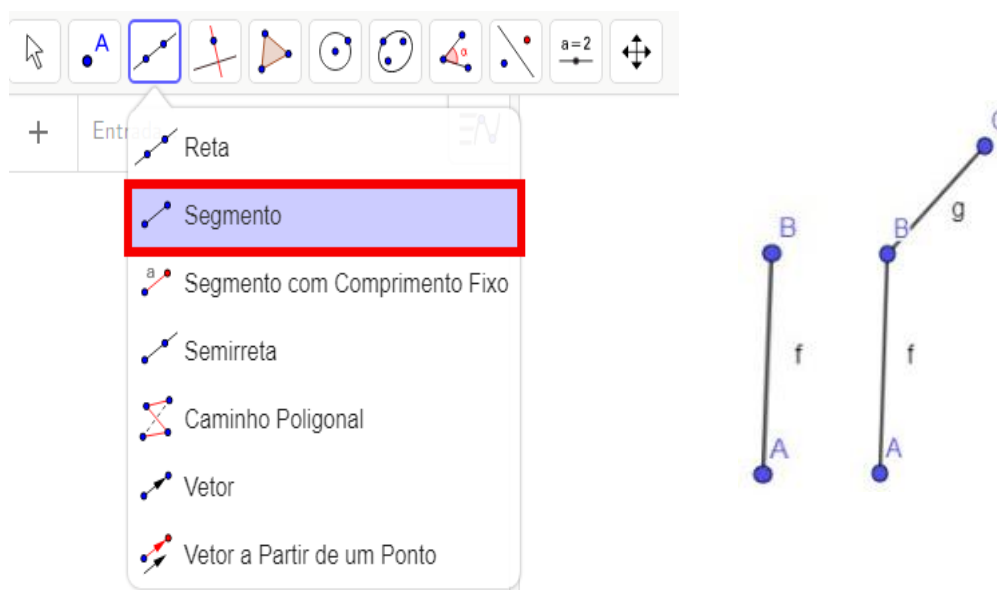
Figura 5: Retirada dos eixos e da malha da janela de visualização.



Fonte: Autor (2023)

Passo 2: Acesse a ferramenta SEGMENTO no menu principal para construir os segmentos AB e BC. Com a ferramenta, clique em dois lugares quaisquer da janela de visualização e isso formará o segmento AB. Em seguida, clique no ponto B e em outro local qualquer da janela para formar o segmento BC. Nota-se que o segmento AB foi automaticamente rotulado por f e o segmento BC por g. Seguindo os passos dados na figura 6.

Figura 6: Construção dos segmentos AB e BC.



Fonte: Autor (2023)

Passo 3: Utilizando a ferramenta ÂNGULO no menu principal, vamos formar o ângulo entre os segmentos AB e BC. Com a ferramenta, clique nos segmentos AB e BC, nessa ordem, isso criará o ângulo α . Como segue a figura 7 abaixo.

Figura 7: Construção do ângulo α .

Fonte: Autor (2023)

Passo 4: Na caixa de entrada, no canto inferior esquerdo da tela, digite $r=g/f$ e pressione ENTER no teclado do seu computador/celular. Na janela de álgebra aparecerá, como segue na figura 8 abaixo:

Figura 8: Definindo a razão r.

$$r = \frac{g}{f}$$

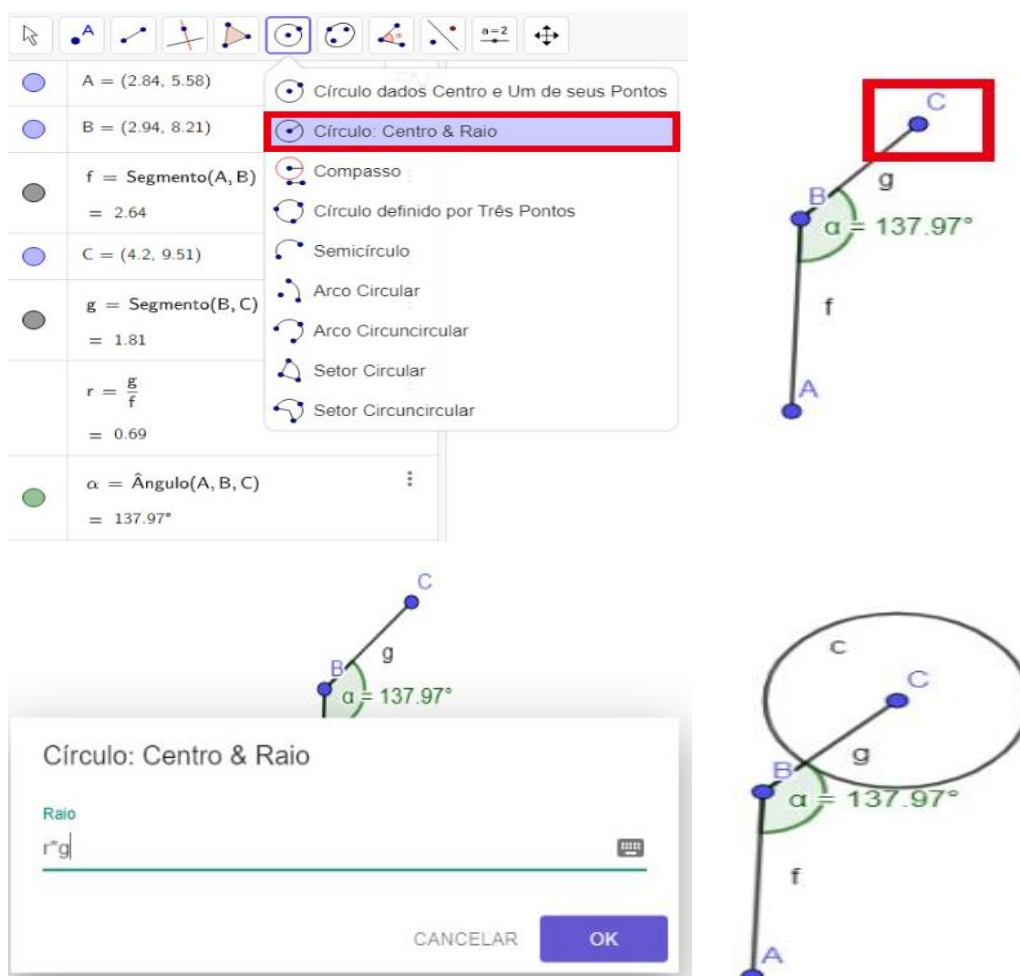
$$= 0.69$$

Entrada...

Fonte: Autor (2023)

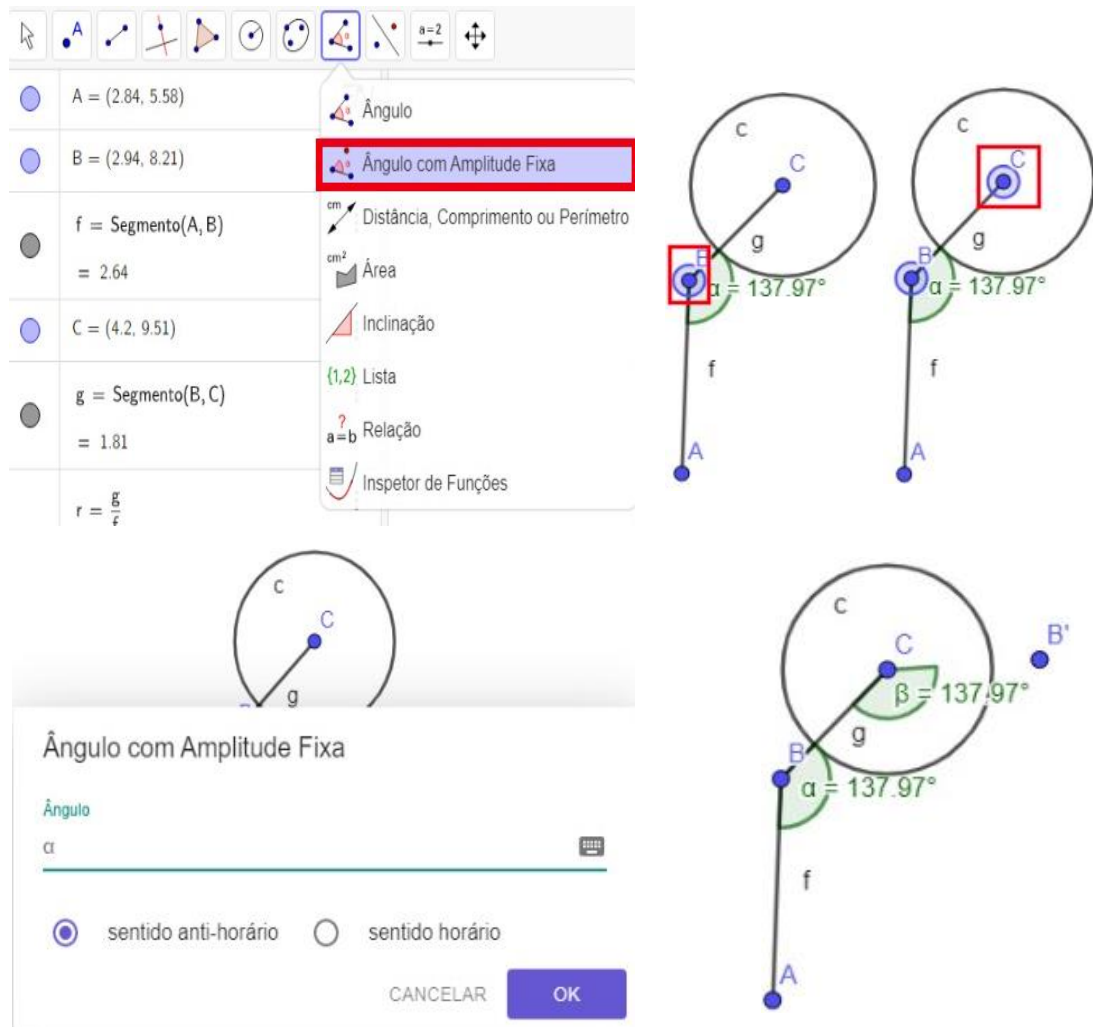
Passo 5: Utilizando a ferramenta CÍRCULO: CENTRO & RAI0, no menu principal, construa o círculo c centrado no ponto C com raio r.g. Clique no ponto C e abrirá uma caixa de diálogo na qual você deve digitar r*g. Como mostra a figura 9 abaixo.

Figura 9: Construção do círculo c.



Fonte: Autor (2023)

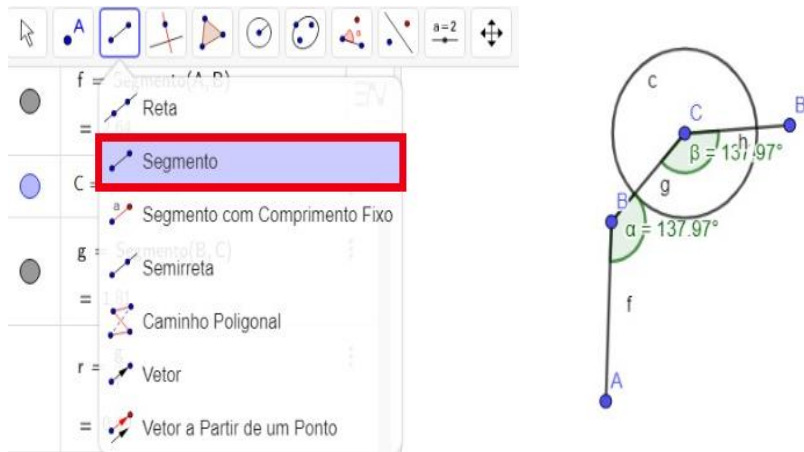
Passo 6: Utilizando a ferramenta ÂNGULO COM AMPLITUDE FIXA, no menu principal, crie um ângulo β com amplitude igual ao ângulo α . Clique no ponto B e no ponto C, nessa ordem. Na caixa de diálogo que surgirá, digite α . Isso automaticamente criará o ponto B'. Como segue a figura 10 abaixo.

Figura 10: Criação do ângulo β e do ponto B'.

Fonte: Autor (2023)

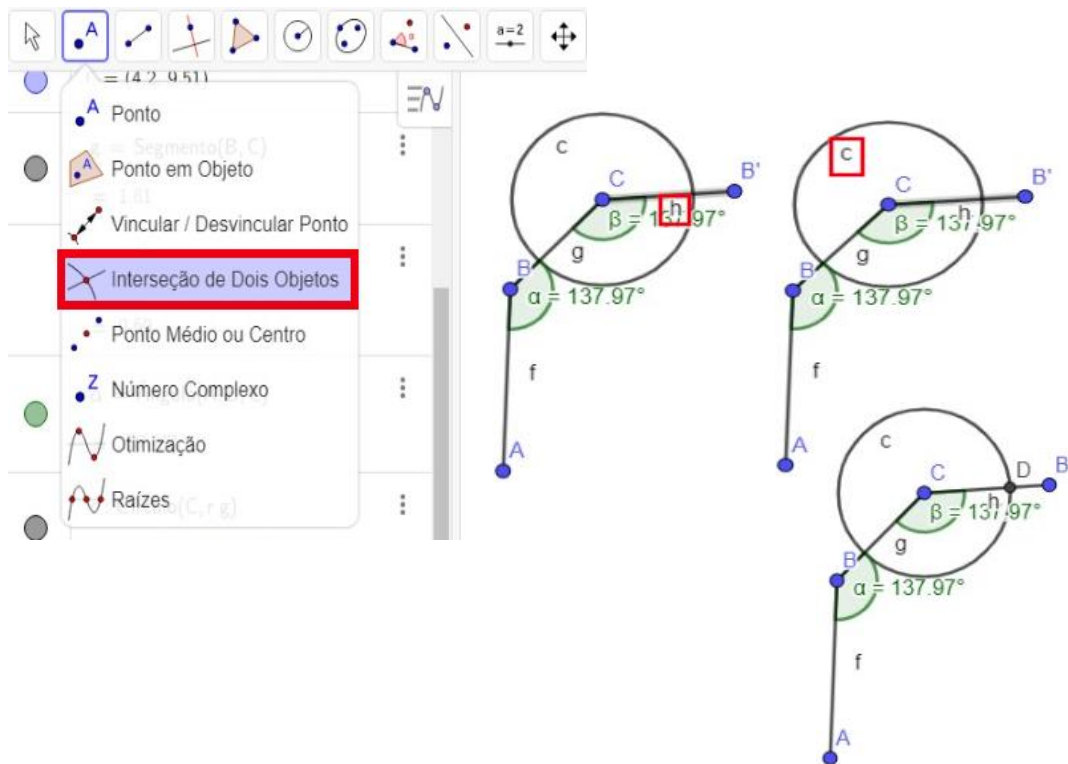
Passo 7: Novamente, utilizando a ferramenta SEGMENTO, crie o segmento CB' que será rotulado por h. Com auxílio da ferramenta INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, no menu principal, clique no segmento h e no círculo c. Dessa forma, geramos o ponto D de interseção do segmento h com o círculo c, como mostra a figura 11 e figura 12 respectivamente.

Figura 11: Criação do segmento CB'.



Fonte: Autor (2023)

Figura 12: Criação do ponto D.



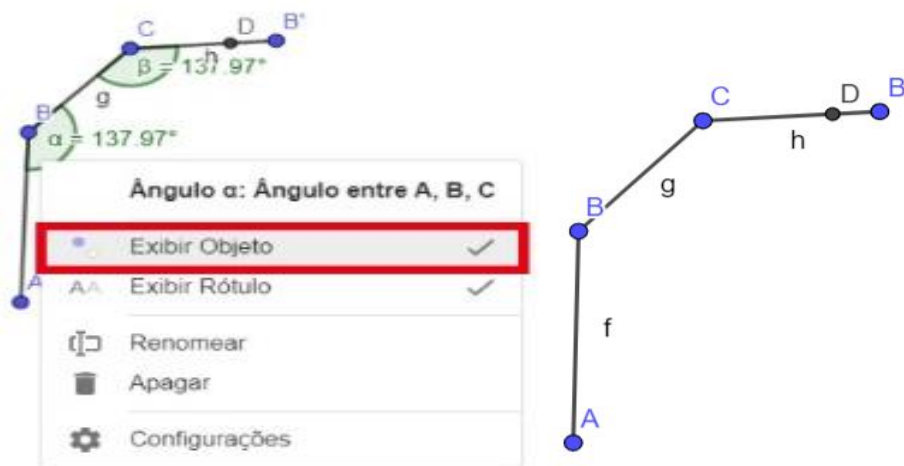
Fonte: Autor (2023)

Passo 8: Oculte a circunferência c , os ângulos β e α , o ponto B' e o segmento h . Para isso, basta dar um clique com o botão direito do mouse no objeto em questão e desmarcar a opção EXIBIR OBJETO. Em seguida, retire os rótulos dos segmentos AB , BC e de todos os pontos clicando com o botão direito do mouse no objeto desejado e, na caixa de diálogo, desative a opção EXIBIR RÓTULO. Como exemplo, a figura 13 apresenta o procedimento para ocultar a circunferência c .

Figura 13: Ocultando a circunferência c.



Fonte: Autor (2023)

A figura 14 apresenta o procedimento para ocultar os ângulos α e β .Figura 14: Ocultando os ângulos α e β .

Fonte: Autor (2023)

A figura 15 apresenta o procedimento para ocultar o ponto B' e o segmento h.

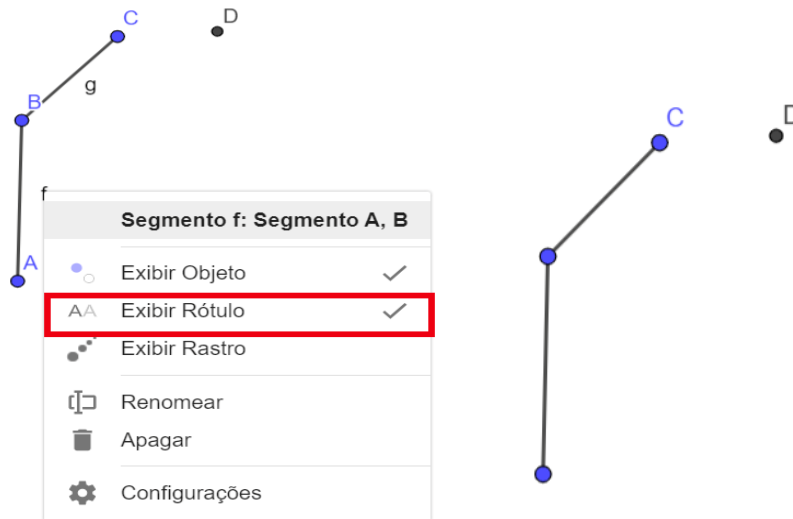
Figura 15: Ocultando o ponto B' e o segmento h.



Fonte: Autor (2023)

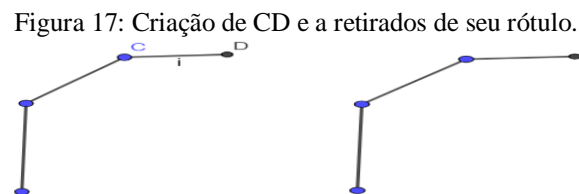
E a figura 16 apresenta o procedimento para retirar o rótulo dos segmentos AB, BC e os pontos A e B:

Figura 16: Retirando os rótulos de AB, BC e os pontos A e B.



Fonte: Autor (2023)

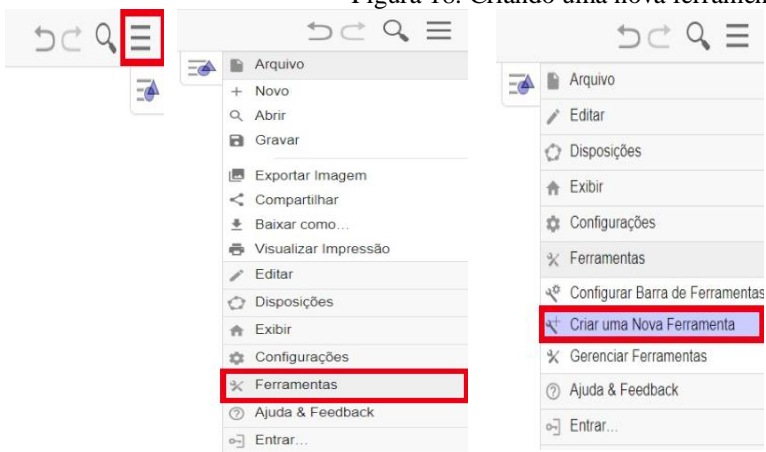
Passo 9: Crie um segmento com os pontos C e D, e retire o seu rótulo. Como mostra a figura 17 abaixo.



Fonte: Autor (2023)

Passo 10: Clique nos 3 traços no canto superior direito da tela e escolha a opção FERRAMENTA. Na opção de FERRAMENTA clique na opção CRIAR UMA NOVA FERRAMENTA. Daí, abrirá uma caixa de diálogo e você deverá selecionar em OBJETOS FINAIS o segmento “i: segmento CD” e o ponto “D: ponto de intersecção c, h”, nessa ordem. Em seguida, vá para a opção de NOME E ÍCONE e clique em concluir. Como mostra a figura 18 abaixo.

Figura 18: Criando uma nova ferramenta.



Criar uma Nova Ferramenta

Objetos Finais | **Objetos Iniciais** | Nome e Ícone

Selecione os objetos na construção ou escolha-os de uma lista

- Círculo c: Círculo com centro C e raio r g
- Número r: g / f
- Ponto B': Rotação de B pelo ângulo α
- Ponto D: Ponto de interseção de c, h
- Segmento f: Segmento A, B
- Segmento g: Segmento B, C
- Segmento h: Segmento C, B'
- Segmento i: Segmento C, D**
- Ângulo α : Ângulo entre A, B, C
- Ângulo β : Ângulo entre B, C, B'

< VOLTAR PRÓXIMO >

CANCELAR

Criar uma Nova Ferramenta

Objetos Finais | **Objetos Iniciais** | Nome e Ícone

Selecione os objetos na construção ou escolha-os de uma lista

- Círculo c: Círculo com centro C e raio r g
- Número r: g / f
- Ponto B': Rotação de B pelo ângulo α
- Ponto D: Ponto de interseção de c, h**
- Segmento f: Segmento A, B
- Segmento g: Segmento B, C
- Segmento h: Segmento C, B'
- Ângulo α : Ângulo entre A, B, C
- Ângulo β : Ângulo entre B, C, B'

< VOLTAR PRÓXIMO >

CANCELAR

Criar uma Nova Ferramenta

Objetos Finais | **Objetos Iniciais** | Nome e Ícone

Selecione os objetos na construção ou escolha-os de uma lista

- Segmento i: Segmento C, D**
- Ponto D: Ponto de interseção de c, h**

< VOLTAR **PRÓXIMO >**

CANCELAR

Criar uma Nova Ferramenta

Objetos Finais | **Objetos Iniciais** | Nome e Ícone

Selecione os objetos na construção ou escolha-os de uma lista

- Ponto A
- Ponto B
- Ponto C

< VOLTAR **PRÓXIMO >**

CANCELAR

Criar uma Nova Ferramenta

Objetos Finais | **Objetos Iniciais** | **Nome e Ícone**

Nome da ferramenta
Ferramenta1

Nome do comando
Ferramenta1

Ajuda da ferramenta

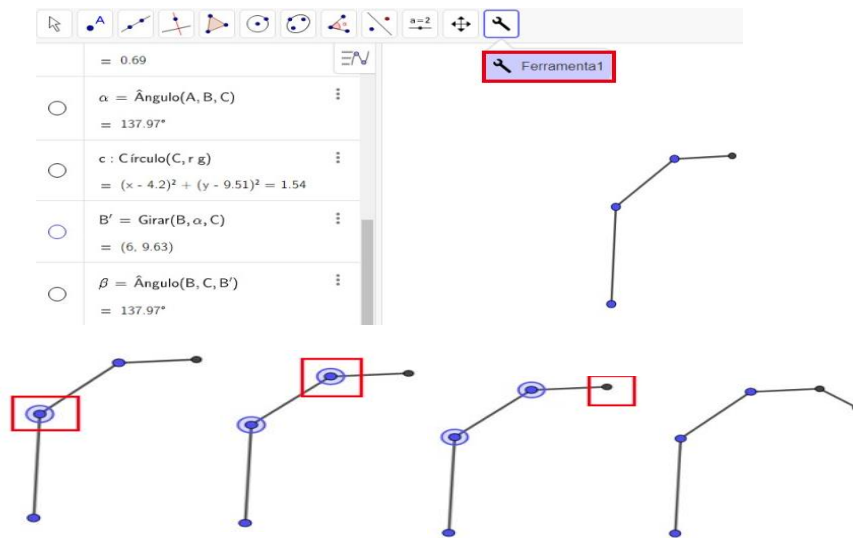
Ícone ... Exibir na Barra de Ferramentas

< VOLTAR **CONCLUÍDO**

CANCELAR

Passo 11: Selecione a ferramenta criada no Passo 10, denominada FERRAMENTA 1 no menu principal. Clique nos 3 últimos pontos da árvore, da esquerda para a direita da tela, e, a partir daí aparecerá um novo ramo da árvore, como mostra a figura 19 abaixo.

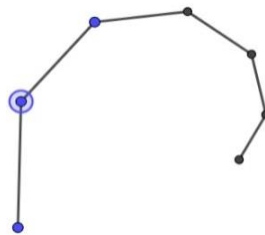
Figura 19: Construção de um novo ramo da árvore.



Fonte: Autor (2023)

Realize esse procedimento por mais três vezes. E a figura 20 resultante será:

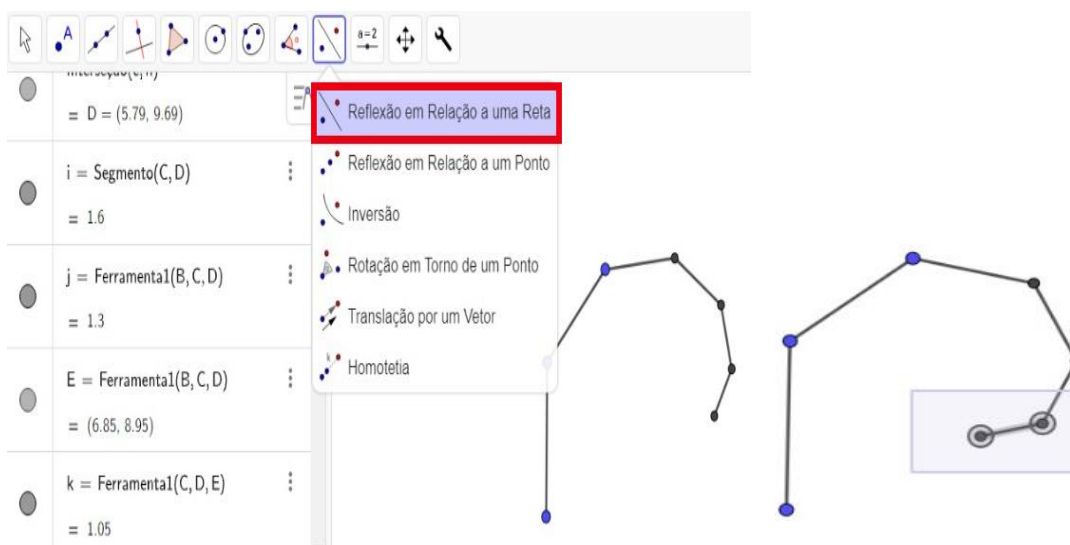
Figura 20: Figura resultante



Fonte: Autor (2023)

Passo 12: No menu principal, escolha a ferramenta REFLEXÃO EM RELAÇÃO A UMA RETA. Selecione o último segmento da árvore e clique no segmento anterior a este, conforme figura abaixo. Como resultado obteremos um novo ramo que será a reflexão do segmento selecionado em relação ao segmento clicado. Note que na figura 21 o quadrado representa o segmento que será refletido e o segmento da cor vermelha indicará que será o eixo de reflexão.

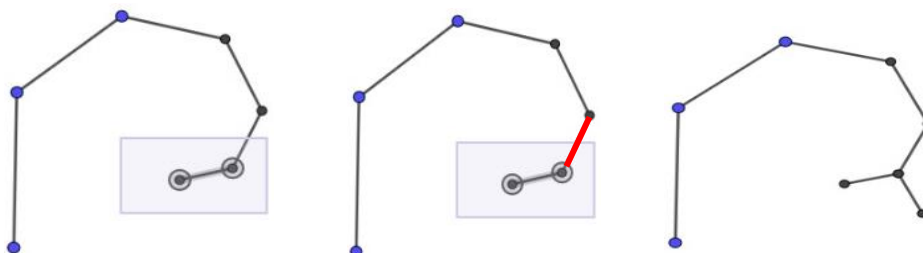
Figura 21: Reflexão em relação a uma reta.



Fonte: Autor (2023)

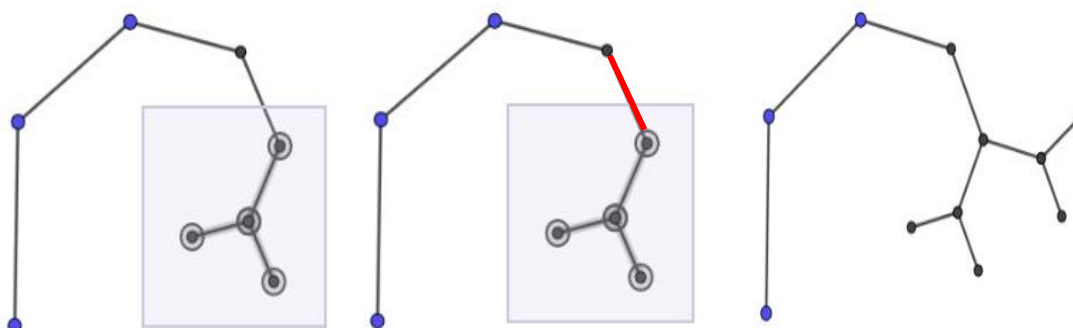
Repita esse procedimento para cada figura selecionada conforme abaixo:

Figura 22: Primeira reflexão.



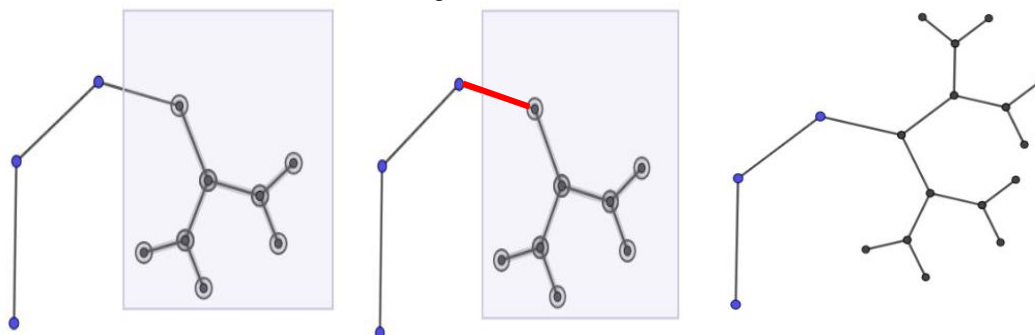
Fonte: Autor (2023)

Figura 23: Segunda reflexão.



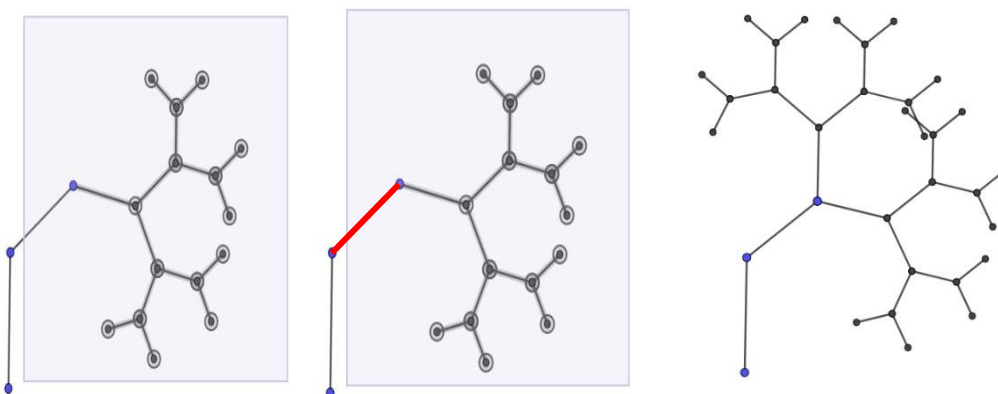
Fonte: Autor (2023)

Figura 24: Terceira reflexão.



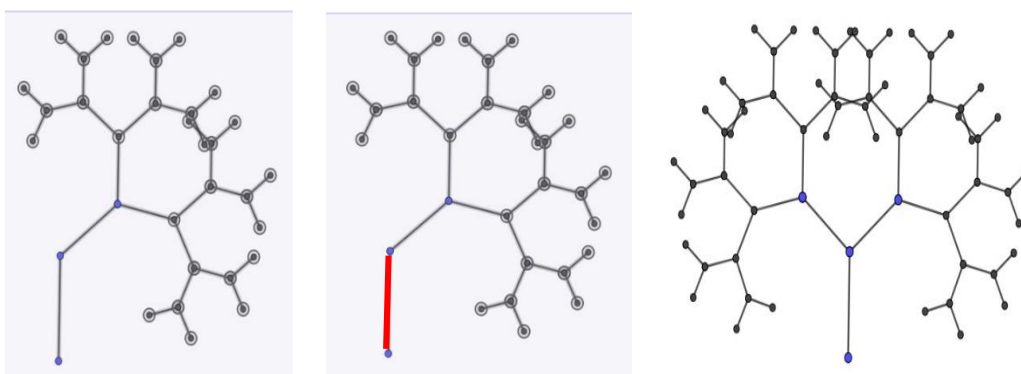
Fonte: Autor (2023)

Figura 25: Quarta reflexão.



Fonte: Autor (2023)

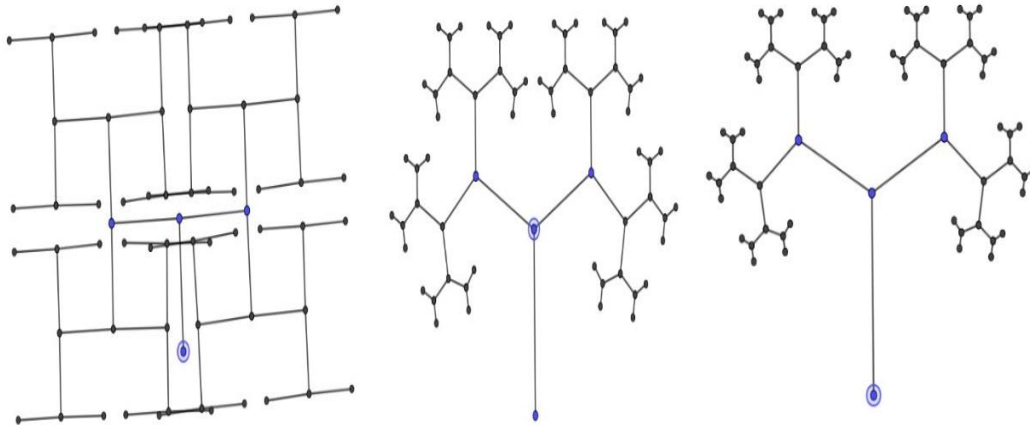
Figura 26: Quinta reflexão.



Fonte: Autor (2023)

Assim, finalizará a árvore com o número de galhos que desejar. Observe que se alterar o tamanho dos segmentos AB e CD iniciais e/ou o ângulo α produzirá novas árvores bifurcadas, conforme a figura 27 a seguir:

Figura 27: Árvores com diferentes tamanhos para os segmentos AB, CD e amplitude para o ângulo α .



Fonte: Autor (2023)

2.6.3 O Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski é um fractal obtido a partir da seguinte construção recorrente: a partir de um triângulo equilátero, marcamos os pontos médios de cada lado e retiramos da figura o triângulo cujos vértices são esses pontos médios dos lados do triângulo anterior. A cada nova etapa repetimos o processo em cada novo triângulo equilátero resultante da etapa anterior.

O Triângulo de Sierpinski é a figura obtida quando esse processo ocorre indefinidamente. Um fato curioso sobre esse fractal é que ele tem medida de área nula e a medida de perímetro infinita. É possível verificar essas afirmações analisando o que acontece com essas medidas em cada iteração. De fato, supondo que o triângulo inicial tem medida de lado igual a l unidades de comprimento, na n -ésima iteração a medida P_n do perímetro da figura é dada pela expressão.

$$P_n = 3l \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

daí quando $n \rightarrow \infty$, temos que $P_n \rightarrow \infty$. Enquanto sua medida de área, A_n , na n -ésima iteração, é

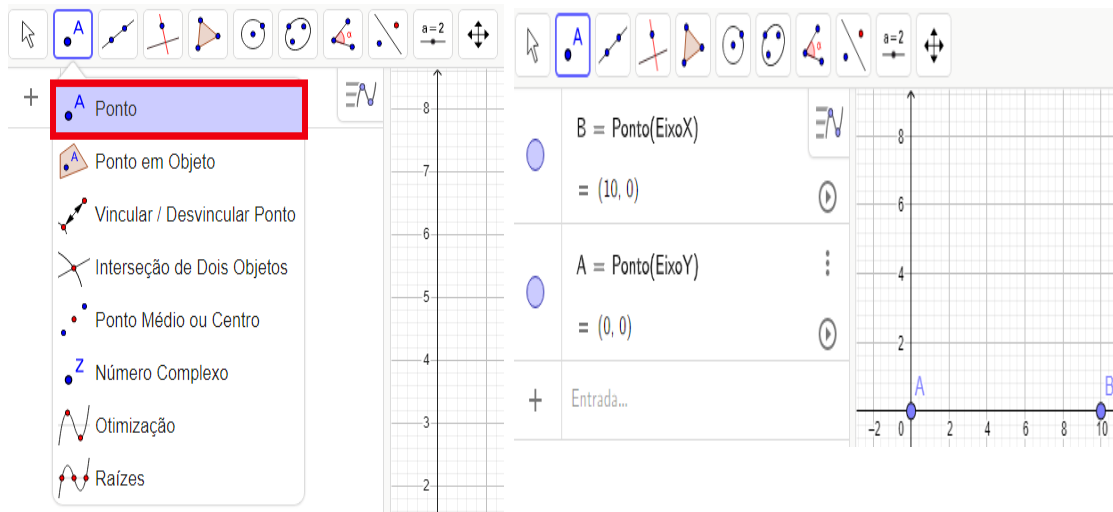
$$A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

consequentemente, quando $n \rightarrow \infty$ temos que $A_n \rightarrow 0$.

A seguir os passos para construção do Triângulo de Sierpinski

Passo 1: Selecione a ferramenta PONTO no menu principal e crie os pontos A e B no eixo das abscissas conforme a figura 28 abaixo:

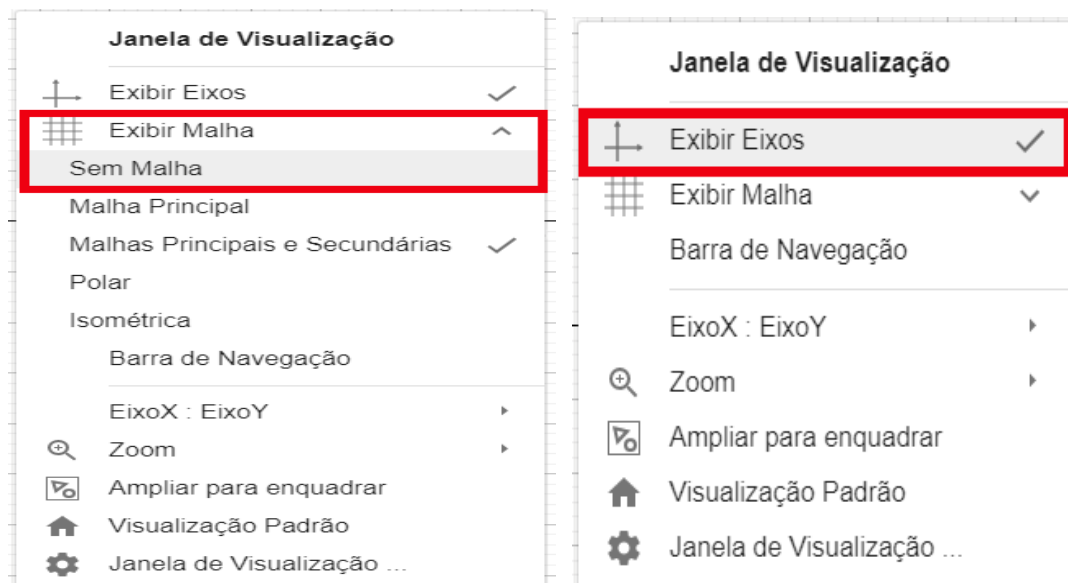
Figura 28: Criação os pontos A e B.



Fonte: Autor (2023)

Passo 2: Oculte a malha e o eixo como feito na construção das árvores bifurcadas na seção anterior, como mostra a figura 29 abaixo

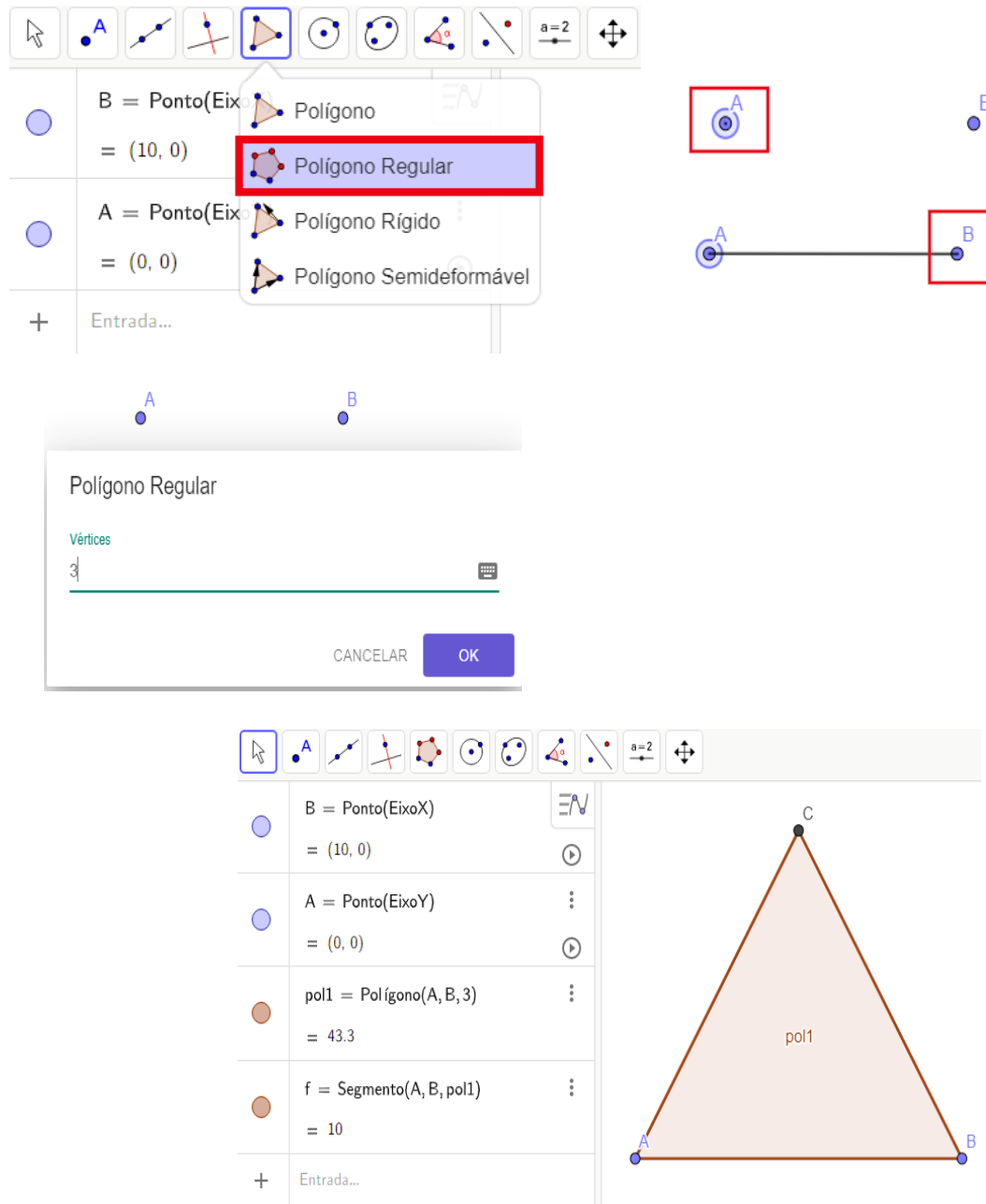
Figura 29: Ocultando a malha e os eixos.



Fonte: Autor (2023)

Passo 3: Selecione a ferramenta POLÍGONO REGULAR no menu principal e selecione os pontos A e B. Em seguida, na caixa de diálogo que surgirá, digite o número de vértices para produzir o polígono pol1. Como segue a figura 30 abaixo.

Figura 30: Construção do pol1.

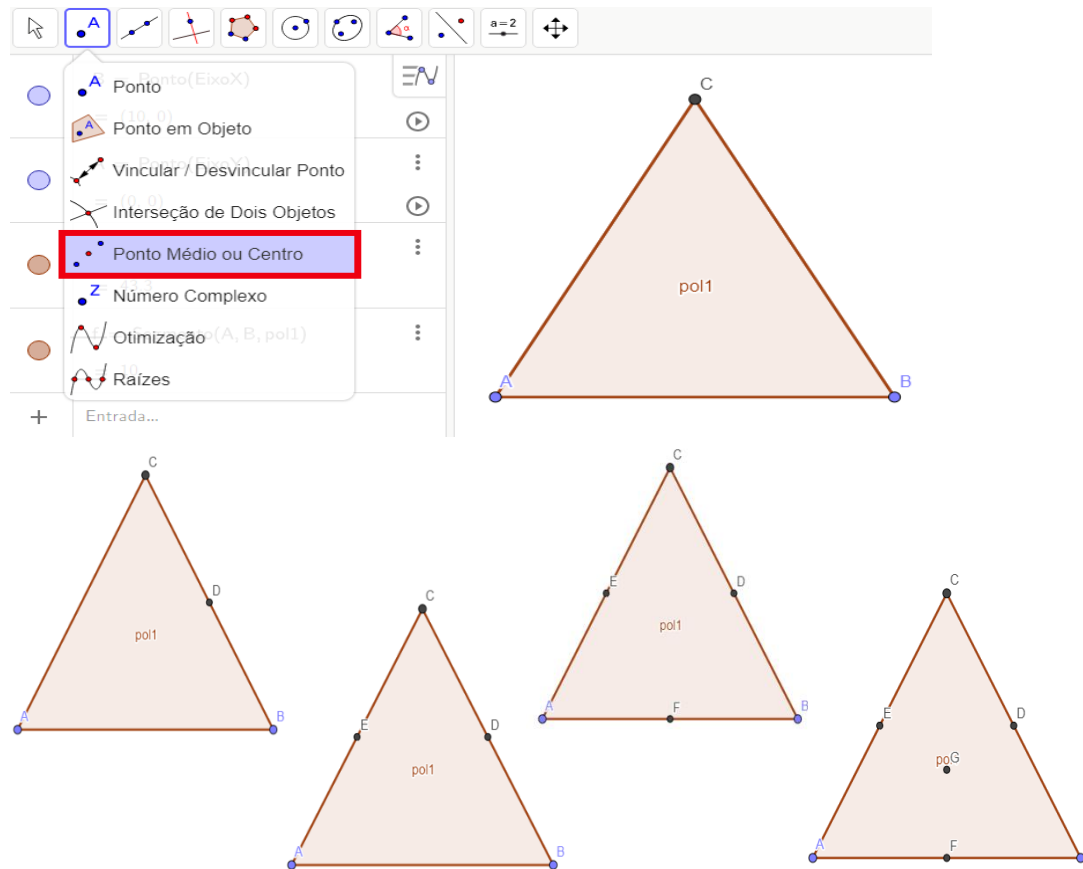


Fonte: Autor (2023)

Passo 4: Selecione a ferramenta PONTO MÉDIO OU CENTRO no menu principal. Clique no segmento BC para encontrar o ponto médio D. Da mesma forma, clique nos segmentos AC e AB para encontrar os pontos médios E e F, respectivamente.

Em seguida, ainda com a mesma ferramenta, clique no interior do polígono para encontrar o ponto G, centro do triângulo. Como mostra a figura 31 abaixo.

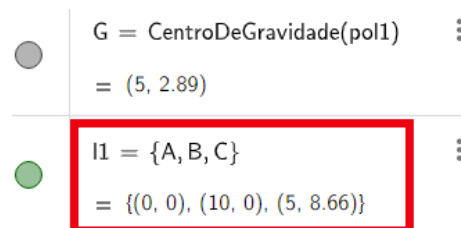
Figura 31: Criação dos pontos médios D, E e F e do centro G.



Fonte: Autor (2023)

Passo 5: Na caixa de entrada, crie a lista l1 com os pontos A, B e C conforme a figura 32 abaixo.

Figura 32: Criação da lista l1.

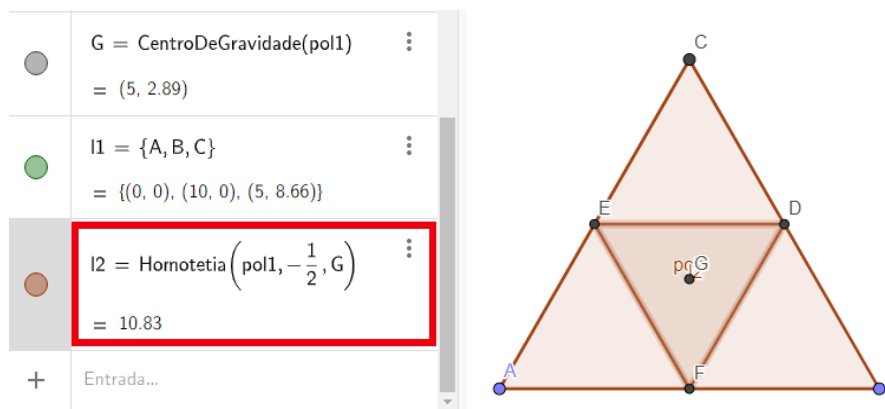


Fonte: Autor (2023)

Passo 6: Na caixa de entrada, utilizando o comando HOMOTETIA, crie a lista l2 com o triângulo obtido aplicando o comando HOMOTETIA do pol1 no centro G com razão $-1/2$ digitando $l2=Homotetia(pol1,-1/2,G)$ e, em seguida, pressionando ENTER no

teclado de seu computador/celular. Esta lista l2 aparecerá automaticamente na janela de álgebra do GeoGebra, como mostra a figura 33

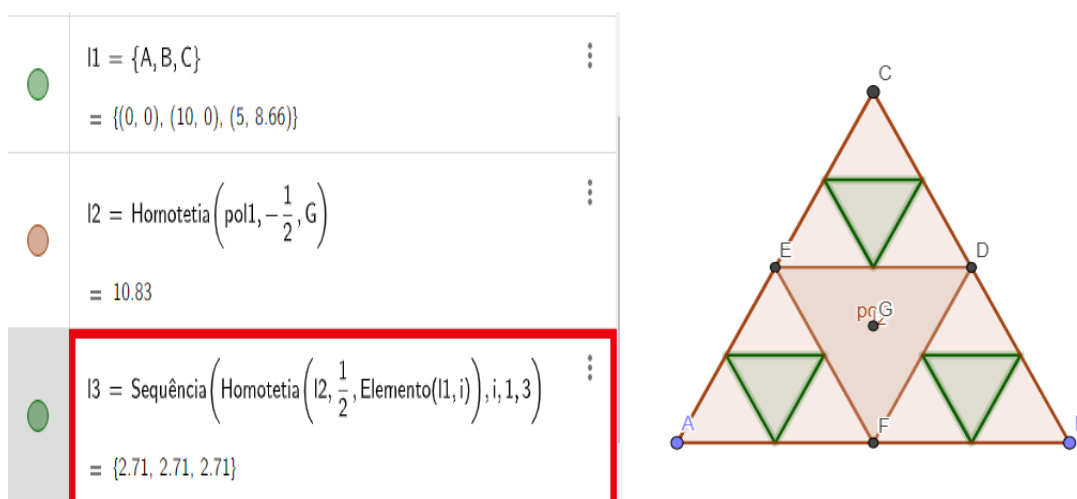
Figura 33: Criação do triângulo l2.



Fonte: Autor (2023)

Passo 7: Ainda na caixa de entrada, utilizando o comando SEQUÊNCIA, crie uma lista l3 com três triângulos obtidos aplicando o comando HOMOTETIA da lista l2 nos vértices da lista l1 com razão 1/2. Ou seja, na caixa de entrada, digite $l3 = \text{Sequência}(\text{Homotetia}(l2, 1/2, \text{Elemento}(l1, i)), i, 1, 3)$ e pressione ENTER. Como mostra a figura 34 abaixo.

Figura 34: Criação da lista l3.

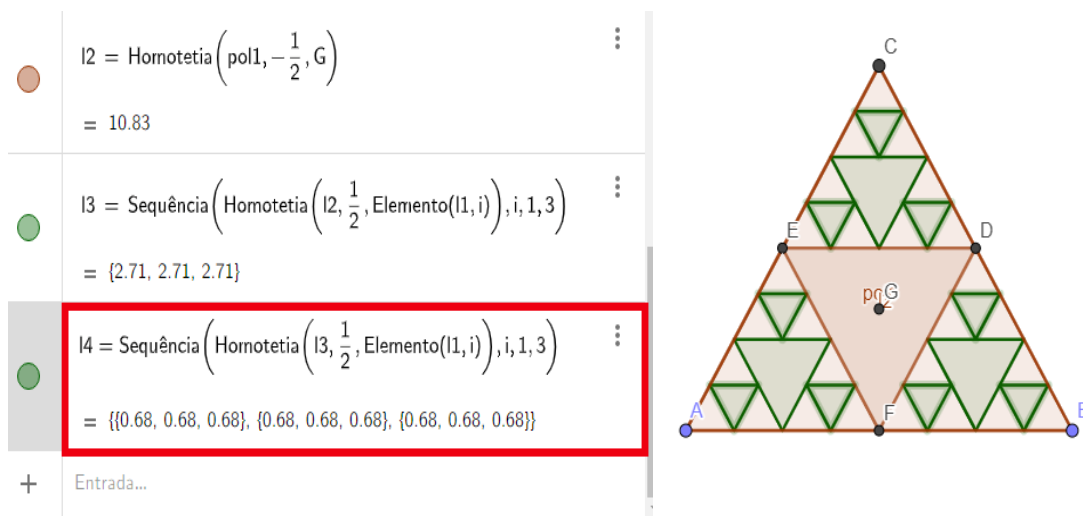


Fonte: Autor (2023)

Passo 8: Novamente, na caixa de entrada, utilizando o comando SEQUÊNCIA, crie uma lista l4 com nove novos triângulos obtidos aplicando o comando HOMOTETIA da lista l3 nos vértices da lista l1 com razão 1/2 digitando

$l_4 = \text{Sequência}(\text{Homotetia}(l_3, 1/2, \text{Elemento}(l_1, i)), i, 1, 3)$ e, em seguida, pressionando ENTER. Como mostra a figura 35 abaixo.

Figura 35: Criação da lista l_4 .



Fonte: Autor (2023)

Utilize a mesma ideia do passo anterior para produzir as listas seguintes.

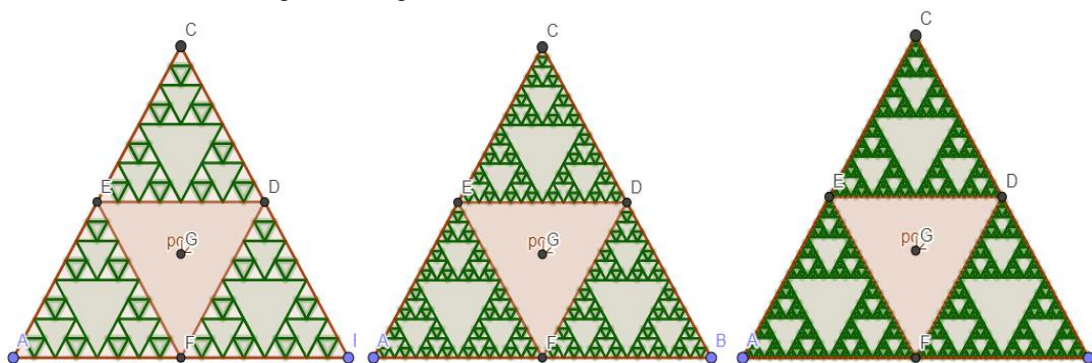
Passo 9: $l_5 = \text{Sequência}(\text{Homotetia}(l_4, 1/2, \text{Elemento}(l_1, i)), i, 1, 3)$.

Passo 10: $l_6 = \text{Sequência}(\text{Homotetia}(l_5, 1/2, \text{Elemento}(l_1, i)), i, 1, 3)$.

Passo 11: $l_7 = \text{Sequência}(\text{Homotetia}(l_6, 1/2, \text{Elemento}(l_1, i)), i, 1, 3)$.

Veja a figura 36 abaixo.

Figura 36: Figuras dos Passos 9, 10 e 11, respectivamente.



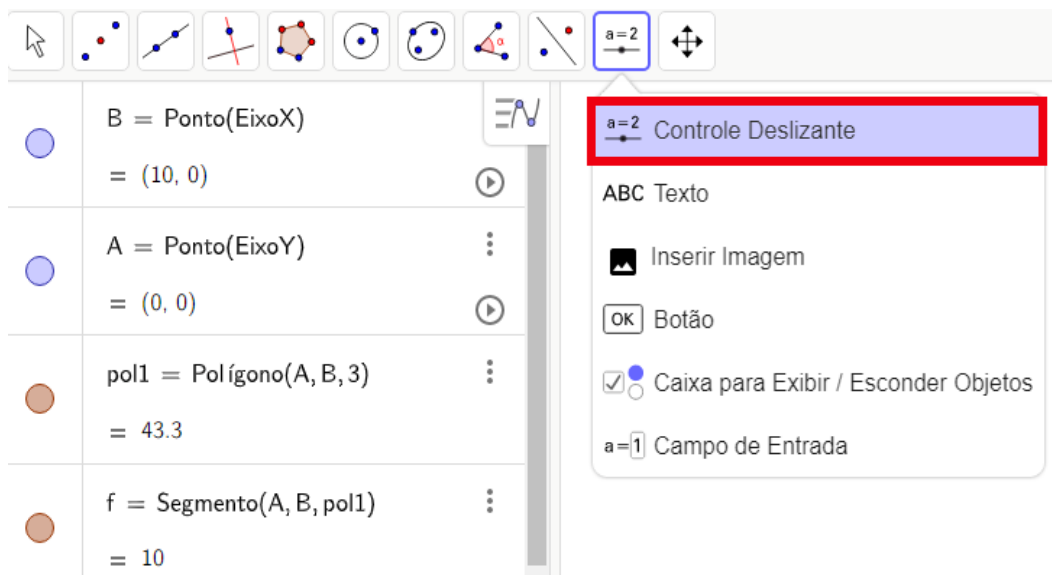
Fonte: Autor (2023)

Aqui o fractal já está construído, porém só podemos observá-lo na iteração em que paramos a construção. É possível visualizar a formação desse fractal, etapa por etapa, de

modo dinâmico. Para isso, utilizaremos a ferramenta chamada **CONTROLE DESLIZANTE**. Siga os passos abaixo.

Passo 12: Selecione a ferramenta **CONTROLE DESLIZANTE** no menu principal. Como mostra a figura 37 abaixo.

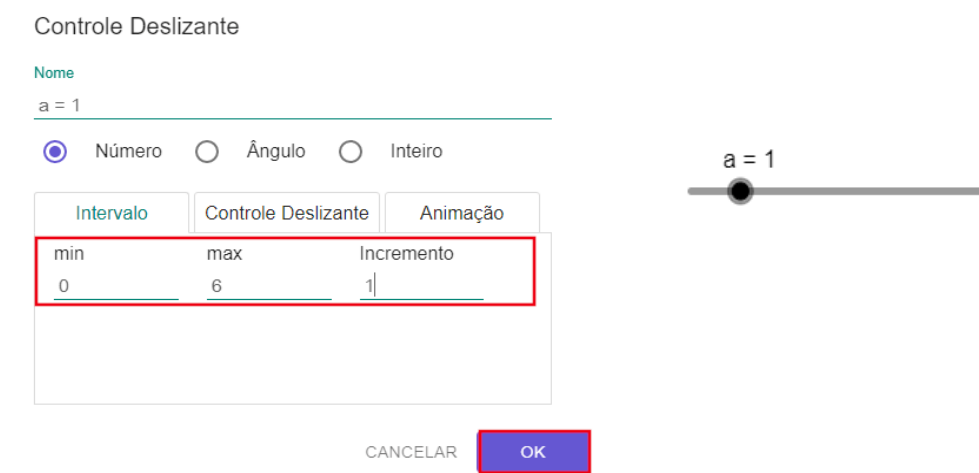
Figura 37: Localizando a ferramenta **CONTROLE DESLIZANTE**.



Fonte: Autor (2023)

Passo 13: Clique em qualquer lugar da tela. Daí aparecerá a caixa de diálogo do **CONTROLE DESLIZANTE** e defina $a=1$. Como mostra a figura 38.

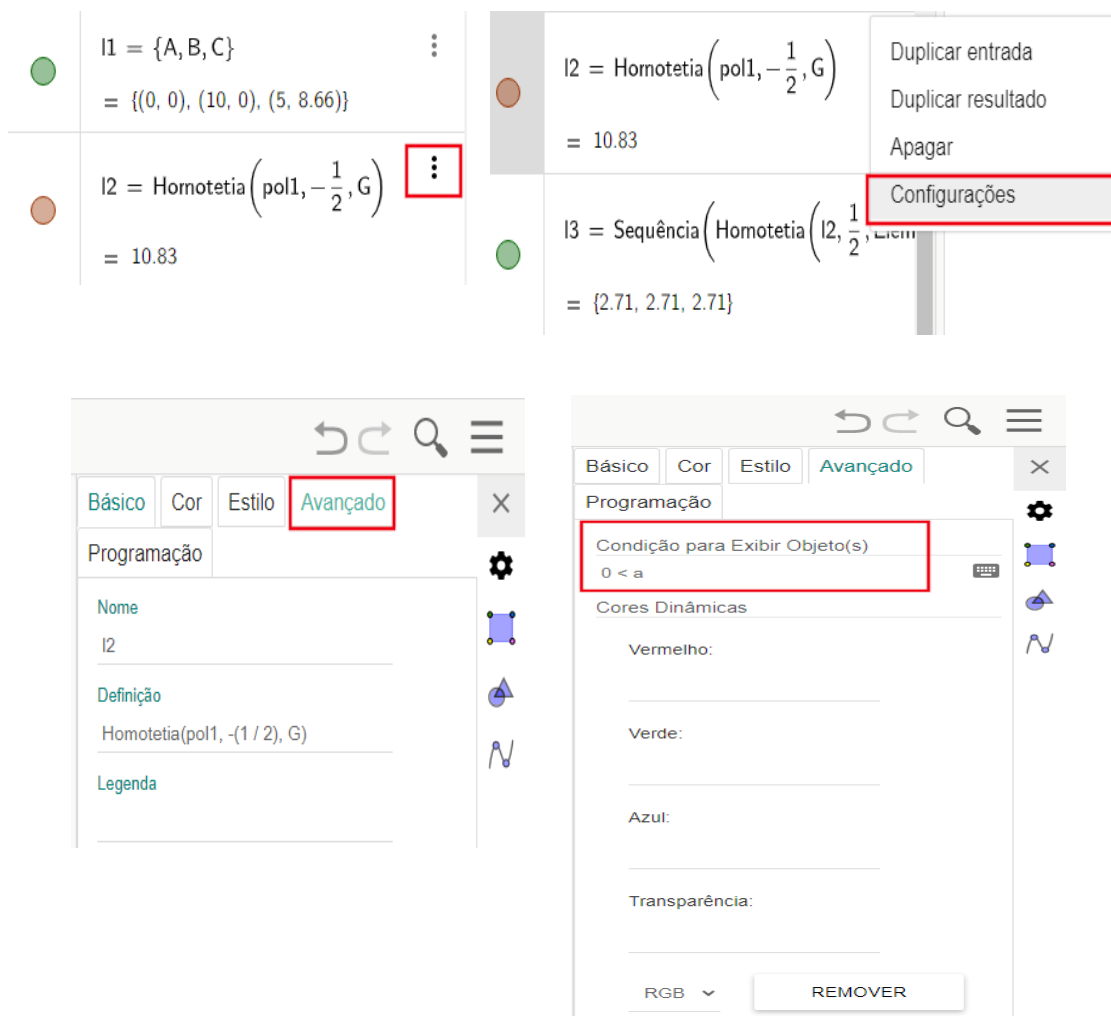
Figura 38: Criação do **CONTROLE DESLIZANTE** $a=1$.



Fonte: Autor (2023)

Passo 14: Na janela de álgebra, selecione a lista I2 e clique nos três pontos no canto superior direito. Escolha a opção de CONFIGURAÇÕES. Na caixa de diálogo, clique em AVANÇADO e digite em CONDIÇÃO PARA EXIBIR OBJETO(S) $0 < a$.

Figura 39: Inserindo a condição para a exibição de I2.

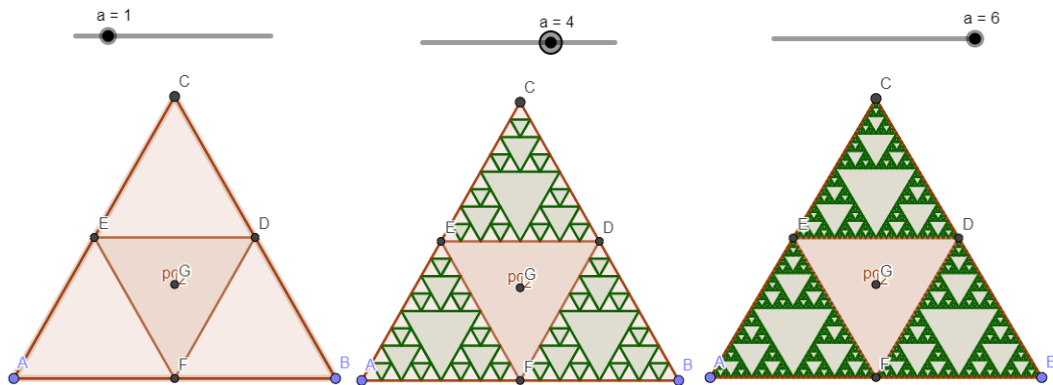


Fonte: Autor (2023)

Seguindo o mesmo procedimento, configure os objetos I3, I4, I5, I6 e I7 para serem exibidos quando $1 < a$, $2 < a$, $3 < a$, $4 < a$ e $5 < a$, nessa ordem.

Finalizado esse processo, não só esse fractal vai estar construído como também será possível ver cada passo de sua construção de forma dinâmica através do controle deslizante, pois à medida que “a” variar, veremos as iterações correspondentes da figura. Abaixo, veja o registro de alguns passos da construção do triângulo de Sierpinski.

Figura 40: Fractal quando $a=1$, $a=4$ e $a=6$.



Fonte: Autor (2023)

Após essas construções, vamos fazer as considerações finais do trabalho.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática dos fractais é a área que faz um estudo aprofundado sobre essas formas, analisando-as geometricamente e desenvolvendo equações para tentar explicar os padrões existentes nelas. Os fractais possuem aplicações na Biologia, na Física, na Engenharia, na Computação, entre outras áreas de conhecimento.

O uso do recurso computacional trouxe significativas contribuições ao desenvolvimento de nossa proposta. Com uma interface de fácil entendimento o software GeoGebra ofereceu condições para manipulação dos diferentes componentes das figuras construídas permitindo a exploração e realização de conjecturas de forma a embasar a construção de conceitos geométricos e algébricos. Contemplar os aspectos harmoniosos e observar as regularidades nas próprias irregularidades de cada fragmento fractal permitiu a percepção do condicionamento desses aos aspectos algébricos e geométricos favorecendo a exploração de tais conhecimentos.

Nesse trabalho, foi construído Árvore Bifurcada e do Triângulo de Sierpinski, como sugestão de outras aplicações temos Círculo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, Pirâmide de Sierpinski, Esponja de Menger, Floco de neve de Koch, Curva de Koch e a Curva de Hilbert.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimos a geometria fractal: para a sala de aula**. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BRÁS, Fernanda Martins. **História da Geometria hiperbólica**. 2009. 34 p. Trabalho de conclusão de curso (Especialização em Matemática). Instituto de Ciências Exatas - Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

CARDOSO, Maria Dolores Costa Lhamas; SOUSA, Gisele Costa de. **De Euclides e os elementos aos nossos dias**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática Regional do Rio Grande do Norte, 2009.

Curva de Hilbert. Disponível em: <http://www.datagenetics.com/blog/march22013/>

Curva de Koch. Disponível em: <https://sites.google.com/a/rug.nl/aperiodic-tiling/2x2-supertiles-1/von-koch>

DANTAS NETO *et al* . **Uso da aproximação fractal no ajuste da curva de retenção de água no solo**. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental, v.13, n.3, Campina Grande, PB, UAEEA/UFCG, p.282–288, 2009.

Esponja de Menger. Disponível em: <https://khaos1101.wordpress.com/2007/11/12/dimension-fractal/>

EVES, Howard. Geometria: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Geometria Tradução Higino H Domingues. São Paulo, Atual, 1997.

FERNANDES, Jaqueline Aparecida. Fractais, uma nova visão da Matemática. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação)-Centro Universitário de Lavras- Unilavras, Lavras-Minas Gerais, 2007 Disponível em http://200.189.113.123/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/MATEMATICA/MonografiaFractais.pdf

FRAME, Michael, MANDELBROT, Benoit and NEGER, Nial. Introduction to Fractals. In: Fractal Geometry, 2004. Disponível em: <<http://www.classes.yale.edu/99-00/math190a/>>.

MENDONÇA, E. ; DA SILVA, A. C. **Modelo fractal de substâncias húmicas**. Ciência Rural, Santa Maria, v.31, n.5, p.903-908, 2001

MENEZES, M. S., CUNHA JR, H. A. Formas geométricas e estruturas fractais na cultura africana e afrodescendentes In: DE PRETO A AFRODESCENDENTE: trajetos de pesquisa sobre o negro, cultura negra e relações étnico-raciais no Brasil ed. São Carlos: EduFSCar Editora da Universidade Federal de São Carlos, 2003, p. 307-320.

MINAYO. M C, S. O desafio da pesquisa social. In: MINAYO. M, C, S.; DESLANDES. S, F.; GOMES. R. (Org.). **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. 1ª reimp. – Petrópolis, RJ : Vozes, 2016.

OLIVEIRA, L. H. A. Matemática do Delírio. SUPERINTERESSANTE. São Paulo: Ed. Abril, ano 8, n.10, out. 1994. 92 p.

RABAY, Y.S.F. et al. **Estudo e aplicações da geometria fractal**. Tese (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

SANTOS, R. S; M; Carasek;R.M. L. Kripka;R.A.Lahm. **Matemática e arquitetura: uso de fractais em mobiliário urbano**. Scientia Plena, Vol 14, Num 9, 2018.

SIQUEIRA, R. Desenvolvido por um grupo de pesquisadores, Fractarte. Disponível em: <http://www.insite.com.br/fractarte/artigos.php>