



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

ALISSON THIAGO DE SOUZA ARIAS

A DESIGUALDADE INTEGRAL DE SIMONS

Belém

2023

ALISSON THIAGO DE SOUZA ARIAS

A DESIGUALDADE INTEGRAL DE SIMONS

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador Prof. Dr. Adam Oliveira da Silva.

Belém

2023

ALISSON THIAGO DE SOUZA ARIAS


A DESIGUALDADE INTEGRAL DE SIMONS

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito básico para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador(a) Prof. Dr. Adam Oliveira da Silva.

Data da Apresentação: 11/12/23

Conceito: *EXCELENTE*



Prof. Dr. Adam Oliveira da Silva (Orientadora)

Faculdade de Matemática, UFPA



Prof. Dr. Valter Borges Sampaio Junior

Faculdade de Matemática, UFPA



Prof. Dr. Jose Antonio Moraes Vilhena

Faculdade de Matemática, UFPA

Dedico este trabalho a todas as pessoas que se
fizeram presentes nesta jornada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer à minha mãe, Dona Telma Cristina, que esteve presente a cada dia e sempre me apoiou.

Ao meu pai, Armado Arias, que mesmo morando longe, sempre se fez presente, sendo fundamental em cada escolha que fiz na minha vida.

À minha família, em especial às minha irmãs, que sempre demonstraram preocupação e carinho para mim.

Ao meu orientador, professor Adam Oliveira, por aceitar a tarefa de me orientar desde 2019, pelos 4 anos de orientação que foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho e por me manter motivado durante a graduação.

Ao professor Valter Borges, por seus valiosos conselhos, e pelas inúmeras vezes em que fui recebido em sua sala para tirar dúvidas ou pedir recomendações de livros. As conversas sobre geometria sempre me motivaram.

Aos meus amigos, Augusto Cezar, Williams Santos, Wallace Ramos, Luiz Guilherme, Felipe Quaresma, Bheatriz Costa, que conheci durante a graduação. Pelas diversas vezes em que ficamos no Lapepe conversando ou olhando para o quadro em busca de uma solução para alguma questão.

Aos professores que contribuíram com seu conhecimento, em especial ao professores Marcel Vinhas, Gelson Conceição, Irene Castro, Alex Sierra,, Juliana Canella, Jean Lelis.

Por fim, agradeço à Universidade Federal do Pará pela oportunidade e a todas as pessoas que compartilharam essa jornada comigo de alguma forma.

mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. The true spirit of delight, the exaltation, the sense of being more than Man, which is the touchstone of the highest excellence, is to be found in mathematics as surely as in poetry.

Bertrand Russel

RESUMO

Neste trabalho, apresentaremos um estudo sobre a fórmula de Simons e a desigualdade integral de Simons. Ambos os resultados são fundamentais para o estudo de subvariedades mínimas. Nosso objetivo é desenvolver toda a teoria fundamental necessária para compreender e interpretar esses resultados. Na primeira parte, exploraremos a teoria inicial relacionada à Geometria Riemanniana. Apresentaremos uma forma de derivar objetos em uma variedade e desenvolveremos um estudo sobre a curvatura de uma variedade riemanniana. Definiremos o que são tensores em uma variedade riemanniana, explicaremos o conceito de imersões isométricas e, buscando entender a sua geometria, encontraremos um $(2,1)$ -tensor chamado segunda forma fundamental. Na segunda parte, nos aprofundaremos no estudo da fórmula e da desigualdade de Simons. Demonstraremos ambos os resultados e analisaremos artigos que se baseiam nesses resultados.

PALAVRAS-CHAVE: Fórmula de Simons, Desigualdade integral de Simons, Segunda forma fundamental, Imersões isométricas.

ABSTRACT

In this work, we will present a study on the Simons formula and the Simons integral inequality. Both results are fundamental for the study of minimal submanifolds. Our goal is to develop all the fundamental theory necessary to understand and interpret these results. In the first part, we will explore the initial theory related to Riemannian Geometry. We will present a way to derive objects on a manifold and develop a study on the curvature of a Riemannian manifold. We will define what tensors are in a Riemannian manifold, we will explain the concept of isometric immersions and, seeking to understand its geometry, we will find a $(2,1)$ -tensor called the second fundamental form. In the second part, we will delve deeper into the study of Simons' formula and inequality. We will demonstrate both results and analyze articles that build on these results.

KEY WORDS: Simons formula, Simons integral inequality, Second fundamental form, Isometric immersions.

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	12
1.1 Variedades Diferenciáveis	12
1.2 Fibrado Vetorial e Campos de Vetores	17
1.3 Métricas Riemannianas	19
1.4 Conexões	20
1.4.1 Conexão Riemanniana (Levi-Civita)	22
1.5 Geodésica	24
1.6 Tensores	27
1.7 Curvaturas	28
2 Imersões Isométricas	36
2.1 A Segunda Forma Fundamental	36
2.1.1 Equações Fundamentais	42
2.2 Operadores Diferenciáveis	45
3 Uma fórmula tipo Simons e a Desigualdade integral de Simons	49
3.1 Comentários Finais	70

Introdução

A Geometria Riemanniana é o ramo da Geometria Diferencial que tem como objetivo o estudo de objetos como curvas (unidimensional), superfícies (bidimensional) e variedades (n-dimensionais). Em cada uma delas escolhemos uma métrica, isto é, uma forma de medir comprimentos e ângulos que variam diferenciavelmente ponto a ponto. Esse estudo é realizado utilizando conceitos e aplicações de Cálculo Diferencial, Álgebra Linear e Topologia.

A teoria que envolve a Geometria Diferencial tem como base os trabalhos pioneiros de Isaac Newton e Gottfried Leibniz. No entanto, foi Carl Friedrich Gauss que estabeleceu e introduziu os conceitos-chaves que alicerçam esta teoria. Um dos seus trabalhos mais influentes nesta teoria é o célebre artigo "Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas". Em 1854, o matemático G.F.B. Riemann apresentou sua tese intitulada "Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen", que forneceu uma visão global da geometria como o estudo de variedades n-dimensionais. Suas ideias estabeleceram as bases para a Geometria Riemanniana.

Na atualidade, a Geometria Riemanniana possui importantes aplicações em áreas como Análise, Teoria da Relatividade Geral de Einstein, Equações Diferenciais Parciais, Teoria da Informação, etc. Assim, devido a esta interação, a geometria tem fornecido ferramentas fundamentais para a resolução de problemas em aberto na literatura acadêmica.

Iniciamos este trabalho com o estudo dos conceitos de variedades diferenciáveis, com o intuito de estabelecer uma base sólida para os tópicos subsequentes. Em seguida, abordamos campos de vetores juntamente com a noção de fibrado tangente. Além disso, introduzimos a definição de métrica riemanniana, exploramos as ideias relacionadas à conexão, curvatura, geodésicas e tensores. Por fim, estudamos as imersões isométricas e apresentamos os dois principais resultados deste trabalho: a fórmula de Simons e a desigualdade integral de Simons.

A fórmula de Simons (Teorema 4) e a desigualdade integral de Simons (Teorema 6) foram

publicados originalmente no artigo "*Minimal varieties in Riemannian manifolds*" de J. Simons (1968). Esse trabalho, sobre subvariedades mínimas em variedades riemannianas, abriu novas perspectivas na área de superfícies mínimas, resultando em artigos subsequentes, como os de S. Chern, Do Carmo e S. Kobayashi (1970), H. Alencar e Do Carmo (1994) e A. Caminha (2006), etc. A forma como apresentaremos tanto o teorema quanto a fórmula de Simons encontra-se na referência principal deste trabalho [Caminha \[2014\]](#)

1 Preliminares

Neste capítulo, abordaremos alguns conceitos e propriedades introdutórios comuns em um curso de Geometria Riemanniana. Não nos aprofundaremos nas demonstrações dos resultados contidos nessas seções, porém o leitor pode consultar [Do Carmo \[2019\]](#) e [Lee \[2012\]](#), conforme as indicações feitas ao longo do capítulo.

1.1 Variedades Diferenciáveis

Para iniciar os estudos, é necessário estabelecer alguns conceitos básicos da teoria de variedades diferenciáveis. Por isso, iniciamos apresentando tais conceitos.

Definição 1. *Uma **variedade diferenciável** de dimensão n é um conjunto M (também denotado por M^n) e uma família de aplicações biunívocas*

$$\mathbf{x}_\rho : U_\rho \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$$

de abertos U_ρ de \mathbb{R}^n em M , tais que:

1. $\bigcup_{\rho} \mathbf{x}_\rho(U_\rho) = M$.
2. Para todo par ρ, κ , com $\mathbf{x}_\rho(U_\rho) \cap \mathbf{x}_\kappa(U_\kappa) = W \neq \emptyset$ os conjuntos $\mathbf{x}_\rho^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_\kappa^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $\mathbf{x}_\kappa^{-1} \circ \mathbf{x}_\rho$ são diferenciáveis.
3. A família $\{(U_\rho, \mathbf{x}_\rho)\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2). Essa família é chamada de *Atlas maximal*.

A aplicação \mathbf{x}_ρ e o aberto $(\mathbf{x}_\rho(U_\rho))$ são chamados de *parametrização* de M e *vizinhança coordenada* em p , respectivamente. A forma como definimos variedades diferenciáveis, com a escolha

de uma *estrutura diferenciável* $\{(U_\rho, \mathbf{x}_\rho)\}$, induz uma topologia em M , de modo que os conjuntos $\mathbf{x}_\rho(U_\rho)$ são abertos e as aplicações \mathbf{x}_ρ são contínuas. Além disso, exigiremos que esta topologia satisfaça os axiomas de Hausdorff e da base enumerável.

Exemplo 1 (Superfície regulares do \mathbb{R}^n). *Um subconjunto $S^k \subset \mathbb{R}^n$, $k \leq n$, é uma superfície regular de dimensão k , se para cada $p \in S^k$ existem um vizinhança V de p em \mathbb{R}^n e uma aplicação $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow S \cap V$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^k$ sobre $M \cap V$, tais que:*

1. \mathbf{x} é um homeomorfismo diferenciável
2. $(d\mathbf{x})_q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva para todo $q \in U$

Logo, uma superfície regular em \mathbb{R}^n é uma generalização natural para superfícies regulares em \mathbb{R}^3 .

Sejam $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow S^k$ e $\mathbf{y} : \bar{U} \subset \mathbb{R}^k \rightarrow S^k$ duas parametrizações com $\mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(\bar{U}) = W \neq \emptyset$. Então, a aplicação $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$ é um difeomorfismo. De fato, seja $r \in \mathbf{y}^{-1}(W)$ e defina $q = h(r)$. Sejam $(u_1, \dots, u_k) \in U$ e $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, e escreva \mathbf{x} nestas coordenadas como

$$\mathbf{x}(u_1, \dots, u_k) = (v_1(u_1, \dots, u_k), \dots, v_n(u_1, \dots, u_k)).$$

Pela condição 2, podemos supor que

$$\frac{\partial(v_1, \dots, v_k)}{\partial(u_1, \dots, u_k)}(q) \neq \emptyset.$$

Estendendo \mathbf{x} a uma aplicação $F : U \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por

$$F(u_1, \dots, u_k, t_{k+1}, \dots, t_n) = (v_1(u_1, \dots, u_k), \dots, v_k(u_1, \dots, u_k), \\ v_{k+1}(u_1, \dots, u_k) + t_{k+1}, \dots, v_n(u_1, \dots, u_k) + t_n),$$

onde $(t_{k+1}, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$. A aplicação F é diferenciável e a sua restrição a $U \times \{0, \dots, 0\}$ coincide com \mathbf{x} . Calculando o determinante da diferencial de F , obtemos

$$\det(dF_q) = \frac{\partial(v_1, \dots, v_k)}{\partial(u_1, \dots, u_k)}(q) \neq \emptyset$$

Portanto, estamos nas condições do teorema da função inversa, logo existe uma vizinhança V_0 de $\mathbf{x}(q)$ onde F^{-1} existe e é diferenciável. Pela continuidade de \mathbf{y} , existe uma vizinhança $\bar{U}_0 \subset \bar{U}$ de r tal que $\mathbf{y}(\bar{U}_0) \subset V_0$. Note que, restrita a \bar{U}_0 , a aplicação $h = F^{-1} \circ \mathbf{y}$ é uma composição de aplicações

diferenciáveis. Então, h é diferenciável em r , donde em $\mathbf{y}^{-1}(W)$. Aplicando um argumento análogo, pode-se mostrar que a aplicação h^{-1} é diferenciável, e portanto h é um difeomorfismo.

Deste modo, uma superfície regular $S^k \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável e possui uma estrutura diferenciável $\{(\mathbf{x}_\rho, U_\rho)\}$ dada pelas suas parametrizações \mathbf{x}_ρ .

Como consequência do exemplo anterior, temos que a esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma variedade diferenciável. Um exemplo relevante para nós segue abaixo.

Exemplo 2 (Toro de Clifford). Seja $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma aplicação dada por,

$$\mathbf{x}(\theta, \rho) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \rho, \sin \rho), \quad 0 \leq \theta, \rho < 2\pi$$

A imagem $\mathbf{x}(\mathbb{R}^2)$ é uma superfície regular conhecida como toro de Clifford \mathbb{T}^2 .

De fato, seja $p \in \mathbb{T}^2$, logo $p = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \rho, \sin \rho)$, para $(\theta, \rho) \in [0, 2\pi)$ fixos. Observe que, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \rho + \sin^2 \rho) = 1$, isto é, $p \in \mathbb{S}^3$. Além disso, \mathbf{x} é diferenciável e

$$d\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & -\sin \rho \\ 0 & \cos \rho \end{bmatrix}$$

Daí, sejam $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, temos $d\mathbf{x}_p(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ se, e só se,

$$\lambda_1(-\sin \theta, \cos \theta, 0, 0) + \lambda_2(0, 0, -\sin \rho, \cos \rho) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Então, pelo teorema do núcleo e da imagem, temos que $d\mathbf{x}_p$ é injetiva. Por outro lado, seja $q = (x, y, z, t) \in \mathbb{T}^2$, temos $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$, $z = \cos \rho$ e $t = \sin \rho$ determinam (θ, ρ) de maneira única. Desse modo, \mathbf{x} é bijetiva.

Utilizando uma generalização da Proposição 4, página 74, Capítulo 2, de [Do Carmo \[2010\]](#), cujo enunciado é:

”Seja $p \in S$ um ponto de uma superfície regular S e seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \leq n$, uma aplicação com $p \in \mathbf{x}(U)$ tal que \mathbf{x} seja diferenciável e $d\mathbf{x}_p$ seja injetiva, $\forall p \in U$. Suponha que \mathbf{x} seja bijetiva. Então \mathbf{x}^{-1} é contínua.”

temos que \mathbf{x}^{-1} é contínua, logo \mathbf{x} é um homeomorfismo. Portanto, \mathbb{T}^2 é uma superfície regular de \mathbb{R}^4 .

Estabelecida a definição de variedades diferenciáveis, podemos definir de forma natural o conceito de diferenciabilidade para as aplicações entre variedades, e como consequência do item 2) da Definição 1, temos que tal conceito não depende da escolha de uma parametrização.

Definição 2. *Sejam M_1^n e M_2^n variedades diferenciáveis de dimensão n . Uma **aplicação** $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é **diferenciável** em $p \in M_1$, se dada uma parametrização $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ em $\varphi(p)$, existe uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ em p tal que $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ e a aplicação $\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\mathbf{x}^{-1}(p)$. Dizemos que φ é diferenciável em M_1 se é diferenciável em todos os seus pontos.*

Seja M uma variedade diferenciável, uma *curva diferenciável* em M é uma aplicação diferenciável $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$. Representaremos por $C^\infty(M)$ o espaço das funções suaves definidas em M . Suponha que $\beta(0) = p$, com $p \in M$, o *vetor tangente* a β em p é o operador $\beta'(0) : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ definido por

$$\beta'(0)f = \frac{d}{dt}(f \circ \beta)(t)|_{t=0}, \quad \forall f \in C^\infty(M)$$

deste modo, um vetor tangente a M em p é o vetor tangente de alguma curva $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, com $\beta(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por $T_p M$, e é chamado de *espaço tangente* de M em p . Escolhendo uma parametrização $\mathbf{x} : U \rightarrow M^n$, com $p = \mathbf{x}(0)$, $q = (x_1, \dots, x_n) \in U$, podemos representar o vetor tangente a β em p , como

$$\beta'(0)f = \left(\sum_i x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) f$$

onde $(\partial/\partial x_i)_0 \in T_p M$. Decorre desta equação que o conjunto $T_p M$, com as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial de dimensão n , com $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_0, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_0\}$ sendo a base associada a parametrização \mathbf{x} .

Como consequência de todo o anterior, temos o seguinte resultado, cuja demonstração encontra-se em [Do Carmo \[2019\]](#), Proposição 2.7, página 7.

Proposição 1. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_p M_1$, escolha uma curva diferenciável $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1$, com $\beta(0) = p$, $\beta'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \beta$. A aplicação $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de β .*

A aplicação $d\varphi_p$ dada pela proposição acima é chamada *diferencial de φ em p* . Se φ é diferenciável, bijetora e sua inversa φ^{-1} é diferenciável, dizemos que ela é um *difeomorfismo*.

Exemplo 3. Sejam M^n uma variedade diferenciável, a união disjunta de todos os espaços tangentes a M é uma variedade diferenciável, indicada por $TM := \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}$. De fato, sejam $\{(U_\rho, \mathbf{x}_\rho)\}$ a estrutura diferenciável máxima de M , $(x_1^\rho, \dots, x_n^\rho)$ as coordenadas de U_ρ e $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ as bases associadas nos espaços tangentes de $\mathbf{x}_\rho(U_\rho)$.

Para cada ρ , defina $\mathbf{y}_\rho : U_\rho \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$, por

$$\mathbf{y}_\rho(x_1^\rho, \dots, x_n^\rho, a_1, \dots, a_n) = (\mathbf{x}_\rho(x_1^\rho, \dots, x_n^\rho), \sum_i^n a_i \partial_i), \quad (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Observe que,

$$\bigcup_\rho \mathbf{y}_\rho(U_\rho \times \mathbb{R}^n) = TM,$$

pois $\bigcup_\rho \mathbf{x}_\rho(U_\rho) = M$ e $(d\mathbf{x}_\rho)_q(\mathbb{R}^n) = T_{\mathbf{x}_\rho(q)}M$, $q \in U_\rho$.

Seja $(p, v) \in \mathbf{y}_\rho(U_\rho \times \mathbb{R}^n) \cap \mathbf{y}_\kappa(U_\kappa \times \mathbb{R}^n)$. Então,

$$(p, v) = (\mathbf{x}_\rho(q_\rho), d\mathbf{x}_\rho(v_\rho)) = (\mathbf{x}_\kappa(q_\kappa), d\mathbf{x}_\kappa(v_\kappa)),$$

onde $q_\rho \in U_\rho$, $q_\kappa \in U_\kappa$, $v_\rho, v_\kappa \in \mathbb{R}^n$. Assim,

$$\mathbf{y}_\kappa^{-1} \circ \mathbf{y}_\rho(q_\rho, v_\rho) = \mathbf{y}_\kappa^{-1}(\mathbf{x}_\rho(q_\rho), d\mathbf{x}_\rho(v_\rho)) = ((\mathbf{x}_\kappa^{-1} \circ \mathbf{x}_\rho)(q_\rho), d(\mathbf{x}_\kappa^{-1} \circ \mathbf{x}_\rho)(v_\rho)).$$

Logo, $\mathbf{y}_\kappa^{-1} \circ \mathbf{y}_\rho$ é diferenciável. Portanto, $\{(U_\rho \times \mathbb{R}^n, \mathbf{y}_\rho)\}$ é uma estrutura diferenciável de TM .

Considere duas variedades diferenciáveis M^m e N^n .

Definição 3. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$ é dita uma **imersão** se $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N , diz-se que φ é um **mergulho**. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma **subvariedade** de N .

Exemplo 4. Uma superfície regular S^k (Exemplo 1) é uma subvariedade de \mathbb{R}^n , $k \leq n$. De fato, sejam $\{(U_\rho, \mathbf{x}_\rho)\}$ a estrutura diferenciável de S , $V \subset \mathbb{R}^n$ uma vizinhança de $p \in S$, e considere a inclusão $i : S \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Então, para todo $p \in S$ existem uma parametrização $\mathbf{x}_\rho : U_\rho \subset \mathbb{R}^n \rightarrow S$, $\mathbf{x}_\rho(q) = p$, e uma aplicação $Id : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset S$, tal que $Id \circ i \circ \mathbf{x}_\rho = \mathbf{x}_\rho$ é diferenciável. Além disso, pelas condições 1 e 2 do Exemplo 1, i é um mergulho.

Definição 4. Seja M um variedade diferenciável. Diz-se que M é **orientável** se admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\rho, \mathbf{x}_\rho)\}$ tal que :

1. Para todo par ρ, κ com $\mathbf{x}_\rho(U_\rho) \cap \mathbf{x}_\kappa(U_\kappa) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $\mathbf{x}_\kappa^{-1} \circ \mathbf{x}_\rho$ tem determinante positivo.

Caso contrario, M é não orientável. Além disso, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo a condição 1 é chamada uma orientação de M , e dizemos que M está orientada.

1.2 Fibrado Vetorial e Campos de Vetores

Agora, apresentaremos a definição de um dos objetos fundamentais para o nosso estudo, o fibrado tangente. Veremos que ele nos fornece um ambiente natural para os campos de vetores suaves sobre uma variedade.

Definição 5. Dada uma variedade diferenciável M , um **fibrado vetorial** sobre M é uma variedade diferenciável E , juntamente com uma aplicação diferenciável e sobrejetiva $\pi : E \rightarrow M$ satisfazendo as condições:

1. $\exists k \in \mathbb{N}; \forall p \in M$, o conjunto $E_p = \pi^{-1}(p)$ possui uma estrutura de espaço vetorial real k -dimensional
2. Para cada $p \in M$, existem uma vizinhança $U \subset M$ de p e uma aplicação diferenciável $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ tais que:
 - (a) Para cada $q \in U$, a restrição de Φ a E_q é um isomorfismo linear entre E_q e $\{q\} \times \mathbb{R}^k$, munido com a estrutura canônica de espaço vetorial real.
 - (b) Se $\pi_U : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$ denota a projeção sobre o primeiro fator, então $\pi = \pi_U \circ \Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$.

Nas notações da definição acima, temos que M é uma base do fibrado E , E_p é a fibra de E sobre p , e k é o posto de E . Uma seção de um fibrado E é uma aplicação diferenciável $\eta : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \eta = Id_M$. O conjunto $\Gamma(E)$ das seções de E tem uma estrutura natural de espaço vetorial real, o que nos motiva chamá-lo de espaço das seções. Deste modo, fixado $p \in M$ temos que $\eta(p) \in E_p$. Se η_1 e $\eta_2 \in \Gamma(E)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, podemos considerar as seções $\eta_1 + \eta_2$ e $\lambda\eta_1$, tais que

$$(\eta_1 + \eta_2)(p) = \eta_1(p) + \eta_2(p)$$

$$(\lambda\eta_1)(p) = \lambda\eta_1(p)$$

Além disso, considere a aplicação $\bar{\eta} : M \rightarrow E$, dada por $\bar{\eta}(p) = 0$ (elemento neutro de E_p), com p fixo. Então, $\bar{\eta}$ é uma seção de E_p . De fato,

$$(\pi \circ \bar{\eta})(p) = \pi(p, 0) = p.$$

Exemplo 5 (Fibrado Tangente). Seja TM a variedade que definimos no Exemplo 3 e $\pi : TM \rightarrow M$ uma aplicação dada por $\pi(p, v) = p$, com $p \in M$ e $v \in T_pM$. Nas notações do Exemplo 3, temos

$$\begin{aligned} \pi : TM &\rightarrow M \\ (\mathbf{x}(q), d\mathbf{x}(v)) &\mapsto \mathbf{x}(q), \end{aligned}$$

onde $\{(U_\rho, \mathbf{x}_\rho)\}$ é a estrutura diferenciável de M , $q \in U_\rho$ e $v \in \mathbb{R}^n$.

A aplicação π é diferenciável, sobrejetiva e $\pi^{-1}(p) = T_pM$, $p \in M$. Além disso, seja $\mathbf{x}_\rho(U_\rho) = V$ uma vizinhança de p , a aplicação $\Phi : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$ restrita a $T_{\bar{p}}M$, $\bar{p} \in V$, é dada por

$$\Phi(\bar{p}, w) = (\mathbf{x}_\rho(q), d\mathbf{x}_\rho(v)), \quad w \in T_{\bar{p}}M, \quad q \in U_\rho \text{ e } v \in \mathbb{R}^n.$$

Se $\pi_V : V \times \mathbb{R}^n \rightarrow V$ denota a projeção sobre o primeiro fator, então

$$\pi_V \circ \Phi(p, w) = \pi_V(\mathbf{x}_\rho(q), d\mathbf{x}_\rho(v)) = \mathbf{x}_\rho(q).$$

Portanto, TM é um fibrado vetorial denominado fibrado tangente de posto n sobre M .

Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o espaço das seções $\Gamma(TM)$, onde cada seção é chamada de campo vetorial sobre M . É importante observar que $\mathfrak{X}(M)$ é um módulo sobre o anel $C^\infty(M)$.

Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ uma parametrização de M em p , podemos escrever o campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ em função de \mathbf{x}

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

onde $a_i \in C^\infty(U)$ e $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ é a base associada a \mathbf{x} .

Em particular, podemos pensar em um campo de vetores como sendo um operador em $C^\infty(M)$, isto é,

$$\begin{aligned} f \in C^\infty(M) &\mapsto Xf \in C^\infty(M) \\ (Xf)(p) &= \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p). \end{aligned}$$

Esta interpretação permite-nos considerar as iteradas de X , que nos fornecem um único campo vetorial $Z = [X, Y] = XY - YX$ chamado *colchete*, conforme o lema a seguir. Para ver a demonstração do lema abaixo, consulte [Do Carmo \[2019\]](#), Lema 5.2, página 21.

Lema 1. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade M . Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in C^\infty(M)$, $Zf = (XY - YX)f$.*

A operação colchete possui as seguintes propriedades, dada pelo proposição a seguir. Sua demonstração esta presente em [Do Carmo \[2019\]](#), Proposição 5.3, página 22.

Proposição 2. *Se $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty(M)$, então:*

- 1) $[X, Y] = -[Y, X]$
- 2) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$
- 3) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*identidade de Jacobi*)
- 4) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

1.3 Métricas Riemannianas

Nesta seção, apresentaremos conceitos que nos proporcionarão formas de medir o comprimento de vetores sobre uma variedade.

Definição 6. *Uma **métrica riemanniana** em um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ é uma aplicação bilinear, simétrica e positiva definida*

$$g : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \rightarrow C^\infty(M)$$

$$g(\eta_1, \eta_2) \mapsto \langle \eta_1, \eta_2 \rangle.$$

Uma métrica riemanniana em uma variedade diferenciável M é simplesmente uma métrica riemanniana no fibrado tangente de M . Formalmente,

Definição 7. *Uma **métrica riemanniana** em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com*

$\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ e $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\langle X_i, X_j \rangle = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .

Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana é chamada de **Variedade Riemanniana**. Um resultado importante é dado pela proposição a seguir. Uma demonstração deste resultado aparece em [Do Carmo \[2019\]](#), Proposição 2.10, página 35, ou [Caminha \[2014\]](#), Lema 1.21, página 14.

Proposição 3. *Toda variedade diferenciável M possui uma métrica riemanniana.*

Estabelecido a definição de métrica riemanniana, podemos calcular comprimento de curvas. Para isto, considere, inicialmente, a seguinte definição:

Definição 8. *Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Diz-se que V é diferenciável se para toda função diferenciável f em M , a função $t \mapsto V(t)f$ é uma função diferenciável em I .*

O campo vetorial dc/dt é chamado *campo tangente* de c . Um *segmento* é a restrição de uma curva c a um intervalo fechado $[a, b] \subset I$. Portanto, se M é riemanniana, definimos o comprimento de um segmento por:

$$L(c) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{1/2} dt$$

Observação 1. *Por causa da forma como definimos curvas, um campo vetorial ao longo de c pode não ser passível de extensão a um campo vetorial definido em um aberto de M .*

1.4 Conexões

Um conceito fundamental na teoria de Superfícies é o da derivada covariante, pois é através desta definição que conseguimos estudar as noções de geodésicas, além de estabelecer uma relação com a curvatura Gaussiana da superfície. Por depender apenas da primeira forma fundamental, podemos generalizar este conceito para Geometria Riemanniana (Proposição 4). Para isso, devemos definir uma forma de derivação de campos de vetores suaves sobre uma variedade, que chamaremos de *conexão afim*.

Definição 9. Uma *conexão afim* em um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ é uma aplicação \mathbb{R} -bilinear

$$\begin{aligned}\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\rightarrow \Gamma(E) \\ (X, \eta) &\mapsto \nabla_X \eta\end{aligned}$$

satisfazendo

$$\nabla_{fX} \eta = f \nabla_X \eta \text{ e } \nabla_X f \eta = f \nabla_X \eta + X(f) \eta.$$

Pela definição acima, podemos considerar o caso em que E é o fibrado tangente TM , dessa forma temos

$$\begin{aligned}\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y\end{aligned}$$

A generalização da derivada covariante é dado pela proposição abaixo. Para ver sua demonstração consulte [Do Carmo \[2019\]](#), Proposição 2.2, página 42.

Proposição 4. Seja M^n uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , tal que

$$a) \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}, W \text{ é um campo ao longo de } c;$$

$$b) \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f \frac{DV}{dt}, f \text{ é uma função diferenciável em } I;$$

$$c) \text{ Se } V \text{ é induzido por um campo } Y \in \mathfrak{X}(M), \text{ isto é, } V(t) = Y(c(t)), \text{ então } \frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y.$$

Como consequência do item c) da Proposição 4, podemos aplicar a conexão afim a campos definidos em conjuntos abertos. Portanto, ao escolher um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) na vizinhança de um ponto $p \in M$, podemos calcular as coordenadas de $\nabla_X Y$ e, assim, concluir que a conexão afim é um conceito local. Sejam

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ e } Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

temos pela Definição 9

$$\nabla_X Y = \sum_i a_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j} a_i b_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + a_i \frac{\partial}{\partial x_i} (b_j) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Escrevendo o campo $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$ em relação a base $\{\frac{\partial}{\partial x_k}\}$, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$, obtemos as funções suaves Γ_{ij}^k , chamadas *símbolos de Christoffel* da conexão ∇ . Então,

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{i,j} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} (b_j) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_k a_i b_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \sum_k \left\{ X(b_k) + \sum_{i,j} a_i b_j \Gamma_{ij}^k \right\} \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

isto é, $\nabla_X Y$ depende apenas dos valores de X em p e de Y ao longo de uma curva $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, $c(0) = p$, $c'(0) = X$.

Através da Proposição 4, é natural questionar o que acontece no caso em que $\frac{DV}{dt} = 0$. A partir disso, podemos introduzir a seguinte definição:

Definição 10. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é chamado **paralelo** quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

A forma como um campo paralelo se comporta ao longo de uma curva é dada pela proposição a seguir, cuja demonstração está em Do Carmo [2019], Proposição 2.6, página 42.

Proposição 5. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Seja $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$. Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c , tal que $V(t_0) = V_0$. O campo $V(t)$ é chamado o **transporte paralelo** de $V(t_0)$ ao longo de c .*

1.4.1 Conexão Riemanniana (Levi-Civita)

A escolha de uma métrica riemanniana em uma variedade M determina univocamente uma certa conexão afim de M , dada pelo Teorema 1.

Definição 11. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é **compatível com a métrica** se, para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, tivermos*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \quad (1.1)$$

Podemos relacionar a definição acima com a derivada covariante, obtendo a seguinte proposição, cuja demonstração está em [Do Carmo \[2019\]](#), Proposição 3.2, página 43.

Proposição 6. *Seja M uma variedade riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle$$

Definição 12. *Uma conexão afim ∇ em um variedade diferenciável M é dita **simétrica** quando, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (1.2)$$

Conhecendo as Definições 11 e 12, podemos definir uma conexão especial chamada *conexão riemanniana* ou *conexão de Levi-Civita*, dada pelo seguinte teorema. Sua demonstração está em [Do Carmo \[2019\]](#), Teorema 3.6, página 45.

Teorema 1 (Levi-Civita). *Dada uma variedade riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

- a) ∇ é simétrica;
- b) ∇ é compatível com a métrica riemanniana;

Para demonstrar este teorema, usamos a seguinte identidade

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle.$$

chamada *identidade de Koszul*. Por meio dessa identidade, podemos expressar os símbolos de Christoffel da conexão riemanniana em função dos coeficientes g_{ij} da métrica.

Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ um sistema de coordenadas locais em torno de $p \in M$, com $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \dots, 1, \dots, 0)$, temos

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km} \quad (1.3)$$

Agora, para concluir esta seção, apresentaremos o conceito de referencial.

Sejam M^n uma variedade riemanniana e $U \subset M^n$ uma vizinhança de p , onde é possível definir campos $e_1, \dots, e_n \in \mathfrak{X}(U)$, de modo que em cada $q \in U$, os vetores $\{e_i(q)\}$, $i = 1, \dots, n$, formam uma base de T_qM . A base $\{e_i(q)\}$ é chamada de *referencial local*. Se $\{e_i(q)\}$ for uma base ortonormal, dizemos que é um *referencial ortonormal*.

1.5 Geodésica

Nesta seção, apresentaremos a definição de geodésica, juntamente com alguns resultados necessários para garantir a existência de uma vizinhança $U \subset M$ de p , na qual uma família de campos de vetores ortonormais $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(U)$, em cada ponto dessa vizinhança, satisfaça $\nabla_{E_i} E_j = 0$ em p .

Definição 13. Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma **geodésica** em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ no ponto t_0 ; Se γ é geodésica em $t \in I$, para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica.

Por meio do fibrado tangente TM de uma variedade M podemos reduzir o estudo local das geodésicas de M ao estudo das trajetórias de um campo de vetores em TM . Para garantir a existência e unicidade desta trajetória faz-se necessário utilizarmos de um resultado da teoria de equações diferenciais, cuja demonstração está em [Do Carmo \[2019\]](#), Teorema 2.2, página 51.

Teorema 2. Se X é um campo C^∞ num aberto V de uma variedade M e $p \in V$ então existem um aberto $V_0 \subset V$, $p \in V_0$, um número $\delta > 0$, e uma aplicação C^∞ , $\psi : (-\delta, \delta) \times V_0 \rightarrow V$ tais que a curva $t \rightarrow \psi(t, q)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única trajetória de X que no instante $t = 0$ passa pelo ponto q , para cada $q \in V_0$. A aplicação $\psi_t : V_0 \rightarrow V$ dada por $\psi_t(q) = \psi(t, q)$ é chamada o **fluxo** de X em V .

Assim, dado uma geodésica γ em M , podemos determinar um único campo G no fibrado tangente cujas trajetórias são da forma $t \rightarrow (\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t))$. O campo G é chamado *campo geodésico* em TM e seu fluxo é o *fluxo geodésico* de TM .

Sejam $p \in M$ e $TV = V \times \mathbb{R}^n$ uma vizinhança de $(p, 0) \in TM$, com V sendo uma vizinhança coordenada de p . Pelo Teorema 2, existem um aberto $\mathcal{U} \subset TV$, com $(p, 0) \in \mathcal{U}$, um número $\delta > 0$ e uma aplicação $\psi : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow TV$, tais que $t \rightarrow \psi(t, q, v)$ é a curva integral de G , que passa

por (q, v) em $t = 0$. Escolhendo

$$\mathcal{U} = \{(q, v) \in TM; q \in V_0, v \in T_qM, |v| < \varepsilon_1\},$$

onde $V_0 \subset V$ é uma vizinhança de $p \in M$ e $\varepsilon_1 > 0$. Pondo $\gamma = \pi \circ \psi$, onde $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção canônica, temos que a curva $t \rightarrow \gamma(t, q, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M que satisfaz $\gamma(0, q, v) = q$ e $\gamma'(0, q, v) = v$.

É possível relacionar o velocidade de uma geodésica com o seu intervalo de definição por meio do seguinte lema, conhecido como lema de Homogeneidade de uma geodésica. Para acessar uma prova desse resultado veja [Do Carmo \[2019\]](#), Lema 2.6, página. 52

Lema 2. *Se a geodésica $\gamma(t, q, v)$ está definida no intervalo $(-\delta, \delta)$, então a geodésica $\gamma(t, q, av)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, está definida no intervalo $(-\delta/a, \delta/a)$ e*

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

Utilizando o Lema acima, podemos tornar o intervalo de definição de uma geodésica uniformemente grande em uma vizinhança de p , conforme a proposição a seguir, cuja demonstração está em [Do Carmo \[2019\]](#), Proposição 2.7, página 53.

Proposição 7. *Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V_0 de p em M , um número $\varepsilon > 0$ e uma aplicação C^∞ , $\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M$, $\mathcal{U} = \{(q, v) \in TM; q \in V_0, v \in T_qM, |v| < \varepsilon\}$ tal que $t \rightarrow \gamma(t, q, v)$, $t \in (-2, 2)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v , para cada $q \in V$ e cada $v \in T_qM$, com $|v| < \varepsilon$.*

Seja $p \in M$ e $U \subset TM$ um aberto dado pela Proposição 7. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{U} &\rightarrow M \\ (q, v) &\mapsto \gamma(1, q, v) \end{aligned}$$

chamada *aplicação exponencial*. Geometricamente, $\exp(q, v)$ é o ponto de M obtido percorrendo um comprimento igual a $|v|$, a partir de q , sobre a geodésica que passa por q com velocidade $v/|v|$. Seja $B_\varepsilon(0)$ uma bola aberta de centro na origem de T_qM e raio ε , a aplicação $\exp_q : B_\varepsilon(0) \rightarrow M$ é a restrição da \exp a $B_\varepsilon(0)$, isto é, $\exp_q(v) = \exp(q, v)$.

Por meio do teorema da função inversa, podemos mostrar que a \exp é um difeomorfismo local em $B_\varepsilon(0)$. Para isso, consulte [Do Carmo \[2019\]](#), Proposição 2.9, página 53.

Proposição 8. Dado $q \in M$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\varepsilon \subset T_q M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de $B_\varepsilon(0)$ sobre um aberto de M .

Seja V uma vizinhança da origem de $T_p M$, $p \in M$, tal que \exp_p é um difeomorfismo, chamamos $\exp_p(V) = U$ uma vizinhança normal de p . Se $B_\delta(0)$ é tal que $\overline{B_\delta(0)} \subset V$, dizemos que $\exp_p(B_\delta(0)) = B_\delta(p)$ é a bola geodésica de centro p e raio δ . As geodésicas em $B_\delta(p)$ que partem de p são chamadas de *geodésicas radiais*. O seguinte teorema garante a existência de vizinhanças normais para todo ponto na variedade, e sua prova está em Do Carmo [2019], Teorema 3.7, página 80.

Teorema 3. Para cada $p \in M$ existem uma vizinhança V de p e um número $\delta > 0$, tais que, para cada $q \in V$, \exp_q é um difeomorfismo em $B_\delta(0) \subset T_q M$ e $\exp_q(B_\delta(0)) \supset V$, isto é, V é vizinhança normal de cada um de seus pontos.

Sejam M^n uma variedade riemanniana, U uma vizinhança normal de $p \in M$ e $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base ortonormal de $T_p M$. Sabemos que existe um único campo E_i tal que $E_i|_p = e_i$, para todo $1 \leq i \leq n$, isto é, $E_i(t)$ é o transporte paralelo dos vetores e_i ao longo da curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U \subset M$, com $E_i(t_0) = e_i$, $t_0 \in I$. Deste modo, temos que $\{E_i\}_{i=1}^n$ é um referencial ortonormal local de U induzido pelo transporte paralelo $E_i(t)$.

Tomemos $\gamma(t) = \exp_q(te_i)$, isto é, γ é uma geodésica radial cuja $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = e_i$. Logo, $E_j(p) = \gamma'$. Como E_j , $1 \leq j \leq n$, é paralelo a γ , temos $\frac{DE_j}{dt} = 0$. Por outro lado, pelo item c) da Proposição 4,

$$\frac{DE_j}{dt} = \nabla_{\gamma'} E_j = 0 \Rightarrow (\nabla_{E_i} E_j)(p) = 0,$$

Como consequência do resultado acima podemos calcular o campo $\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} E_j$, em p . Sabemos pelo transporte paralelo que $\nabla_{\gamma'} E_j = 0$, logo podemos derivar este campo na direção γ' novamente. Assim,

$$\nabla_{\gamma'} E_j = 0 \Rightarrow \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} E_j = 0.$$

Observe que $\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} E_j = 0 \Rightarrow (\nabla_{E_i} \nabla_{\gamma'} E_j)(p) = 0$.

Agora, considere o campo Y dado por $Y = \sum_i b_i E_i$. Logo,

$$\nabla_Y \nabla_Y E_j = \nabla_Y \left(\sum_{i,j} b_i \nabla_{E_i} E_j \right) = \sum_{i,j} \left\{ b_i E_i (b_i) \nabla_{E_i} E_j + b_i^2 \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} E_j \right\} \quad (1.4)$$

Deste modo, vemos que a equação (1.4) depende somente dos campos E_i e dos coeficientes de Y . Então,

$$\nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} E_j = 0 \Rightarrow (\nabla_{E_i} \nabla_{E_i} E_j)(p) = 0$$

Observação 2. Para o caso $\nabla_{E_k} \nabla_{E_i} E_j$, isto é, as direções em que estamos derivando o campo diferem, nada podemos afirmar.

1.6 Tensores

Nesta seção, realizaremos uma breve explanação sobre tensores em uma variedade riemanniana, buscando generalizar a ideia de campos de vetores. Para mais detalhes consulte [O'Neill \[1983\]](#), [L. Rocha \(2020\)](#)

Dado $\mathfrak{X}(M)$ o espaço dos campos vetoriais suaves sobre M , vimos que $\mathfrak{X}(M)$ é um módulo sobre $C^\infty(M)$. Considere o fibrado vetorial T^*M , chamado *fibrado cotangente* sobre M , isto é, é o *dual* do fibrado tangente. Uma seção ω de T^*M , isto é, $\omega \in \Gamma(T^*M) = \mathfrak{X}^*(M)$, é uma 1-forma diferenciável sobre M , e $\mathfrak{X}^*(M)$ é um módulo sobre $C^\infty(M)$.

Definição 14. Sejam $r, s \geq 0$, não ambos nulos. Uma aplicação $C^\infty(M)$ -multilinear

$$T : \mathfrak{X}(M)^r \times \mathfrak{X}^*(M)^s \rightarrow C^\infty(M)$$

é chamada um **tensor** do tipo (r, s) em M .

Assim, dados $\theta^1, \dots, \theta^s$, s 1-formas e X_1, \dots, X_r r campos vetoriais, temos

$$T(X_1, \dots, X_r, \theta^1, \dots, \theta^s) \in C^\infty(M).$$

As entradas X_j , $1 \leq j \leq r$, são ditas *covariantes* e as θ^i , $1 \leq i \leq s$, são ditas *contravariantes*.

Denotaremos por

$$\mathfrak{L}_s^r(M) := \{T : \mathfrak{X}(M)^r \times \mathfrak{X}^*(M)^s \rightarrow C^\infty(M); T \text{ é } C^\infty(M)\text{-multilinear}\},$$

o conjunto de todos os (r, s) -tensores sobre M . Em particular, $\mathfrak{L}_0^0(M) = C^\infty(M)$.

Dados $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$. As aplicações

$$\begin{array}{ll} T : \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M) & \bar{T} : \mathfrak{X}^*(M) \rightarrow C^\infty(M) \\ X \mapsto \omega(X) & \theta \mapsto \theta(X) \end{array}$$

são $C^\infty(M)$ -linear. Logo, T é um $(1,0)$ -tensor e \bar{T} é um $(0,1)$ -tensor. Em uma variedade riemanniana, a métrica riemanniana associa a cada vetor $X \in \mathfrak{X}(M)$ um único elemento $\omega_X \in \mathfrak{X}^*(M)$ da seguinte forma:

$$\omega_X(Y) = \langle X, Y \rangle, \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Assim, T e \bar{T} são determinados de modo único, um pelo outro. Essa correspondência permite identificar os tensores contravariantes com os tensores covariantes. Esse fato é conhecido como o isomorfismo musical, $\flat : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M)$ e sua inversa $\sharp : \mathfrak{X}^*(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$.

Uma generalização da ideia acima ocorre quando consideramos uma aplicação $C^\infty(M)$ -multilinear $T : \mathfrak{X}(M)^r \rightarrow \mathfrak{X}(M)$. Seja $T' : \mathfrak{X}(M)^r \times \mathfrak{X}^*(M) \rightarrow C^\infty(M)$ uma aplicação $C^\infty(M)$ -multilinear, tal que $T'(X_1, \dots, X_r, \omega) = \omega(T(X_1, \dots, X_r))$, para todos $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, esta aplicação é um $(r, 1)$ -tensor em M . Desta forma, podemos relacionar a aplicação T com o $(r, 1)$ -tensor T' .

Um fato importante sobre tensores é que eles são objetos pontuais, isto é, seja T um $(r,0)$ -tensor, o valor do campo $T(X_1, \dots, X_r)$ em $p \in M$ depende apenas dos valores de X_1, \dots, X_r em p .

De forma natural, podemos estender a noção de derivada covariante a tensores.

Definição 15. *Seja T um $(r, 0)$ -tensor. A **diferencial covariante** ∇T de T é um $(r+1, 0)$ -tensor dado por*

$$\nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z) = Z(T(Y_1, \dots, Y_r)) - \sum_{i=1}^r T(Y_1, \dots, \nabla_Z Y_i, \dots, Y_r).$$

Para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$, a derivada covariante $(\nabla_Z T)(Y_1, \dots, Y_r)$ de T em relação a Z é um $(r, 0)$ -tensor dado por

$$\nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z) = (\nabla_Z T)(Y_1, \dots, Y_r).$$

1.7 Curvaturas

Nesta seção, apresentaremos uma definição de curvatura que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade riemanniana deixa de ser euclidiana. Em seguida, definiremos a curvatura de

Gauss de uma superfície gerada a partir de um subespaço bidimensional de T_pM , chamada *curvatura seccional*, e por meio dela definiremos a curvatura de Ricci e a curvatura escalar.

Definição 16. *Seja M um variedade riemanniana. O tensor curvatura de Riemann (ou curvatura) é o $(3,1)$ -tensor*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

dado por $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z$, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Para um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) em torno de $p \in M$, temos

$$R \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

isto é, a curvatura mede o quanto que a segunda derivada covariante deixa de comutar.

A seguir temos algumas propriedades do tensor curvatura de Riemann, dadas pela proposição abaixo, cuja demonstração encontra-se em [Do Carmo \[2019\]](#), Proposição 2.2 e 2.4, página 71.

Proposição 9. *A curvatura R de uma variedade riemanniana goza das seguintes propriedades:*

1. *R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é, para todos $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$, temos*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)$$

2. *Para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador de curvatura $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é linear, isto é,*

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)(Z) + R(X, Y)(W)$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z$$

- 3.

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 \text{ (primeira identidade de Bianchi)}. \quad (1.5)$$

Por meio da métrica, podemos definir um $(4, 0)$ -tensor $R : \mathfrak{X}(M)^4 \rightarrow C^\infty(M)$, dado por

$$R(X, Y, Z, W) := \langle R(X, Y)W, Z \rangle$$

Esse tensor possui algumas características, dadas a seguir

Proposição 10.

- a) $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$
- b) $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$
- c) $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$
- d) $(\nabla_T R)(X, Y, Z, W) + (\nabla_Z R)(X, Y, W, T) + (\nabla_W R)(X, Y, T, Z) = 0$ (*segunda identidade de Bianchi*)

Demonstração.

Para as demonstrações dos itens a), b) e c), consulte [Do Carmo \[2019\]](#), Proposição 2.5, página 72.

Para demonstrar o item d), considere que

$$\begin{aligned}
 (\nabla_T R)(X, Y, Z, W) &= \nabla_T R(X, Y, Z, W) - R(\nabla_T X, Y, Z, W) - R(X, \nabla_T Y, Z, W) \\
 &\quad - R(X, Y, \nabla_T Z, W) - R(X, Y, Z, \nabla_T W) \\
 &= \langle \nabla_T R(Z, W)Y, X \rangle + \langle \cancel{R(Z, W)Y, \nabla_T X} \rangle - \langle \cancel{R(Z, W), \nabla_T X, Y} \rangle \\
 &\quad - R(Z, W, X, \nabla_T Y) - R(\nabla_T Z, W, X, Y) - R(Z, \nabla_T W, X, Y) \\
 &= \langle \nabla_T R(Z, W)Y, X \rangle - R(Z, W, X, \nabla_T Y) - R(\nabla_T Z, W, X, Y) \\
 &\quad - R(Z, \nabla_T W, X, Y) \\
 &= \langle (\nabla_T R(Z, W) - R(Z, W)\nabla_T)Y, X \rangle - R(\nabla_T Z, W, X, Y) \\
 &\quad - R(Z, \nabla_T W, X, Y)
 \end{aligned}$$

onde usamos o item c) e a compatibilidade com a métrica para cancelar os termos. Logo,

$$(\nabla_T R)(X, Y, Z, W) = \langle (\nabla_T R(Z, W) - R(Z, W)\nabla_T)Y, X \rangle - R(\nabla_T Z, W, X, Y) - R(Z, \nabla_T W, X, Y)$$

$$(\nabla_Z R)(X, Y, W, T) = \langle (\nabla_Z R(W, T) - R(W, T)\nabla_Z)Y, X \rangle - R(\nabla_Z W, T, X, Y) - R(W, \nabla_Z T, X, Y)$$

$$(\nabla_W R)(X, Y, T, Z) = \langle (\nabla_W R(T, Z) - R(T, Z)\nabla_W)Y, X \rangle - R(\nabla_W T, Z, X, Y) - R(T, \nabla_W Z, X, Y)$$

Somando os termos acima, temos

$$\begin{aligned}
& (\nabla_T R)(X, Y, Z, W) + (\nabla_Z R)(X, Y, W, T) + (\nabla_W R)(X, Y, T, Z) = \\
& \langle (\nabla_T R(Z, W) - R(Z, W)\nabla_T)Y, X \rangle - \underbrace{R(\nabla_T Z, W, X, Y)}_1 - R(Z, \nabla_T W, X, Y) \\
& + \langle (\nabla_Z R(W, T) - R(W, T)\nabla_Z)Y, X \rangle - \underbrace{R(\nabla_Z W, T, X, Y)}_2 - \underbrace{R(W, \nabla_Z T, X, Y)}_1 \\
& + \langle (\nabla_W R(T, Z) - R(T, Z)\nabla_W)Y, X \rangle - R(\nabla_W T, Z, X, Y) - \underbrace{R(T, \nabla_W Z, X, Y)}_2
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Lembrando que, pela conexão ser simétrica vale

$$[Z, T] = \nabla_Z T - \nabla_T Z,$$

e utilizando a definição de colchetes podemos reescrever a curvatura da seguinte forma

$$R([Z, T], W)Y = ([\nabla_W, \nabla_{[Z, T]}] + \nabla_{[[Z, T], W]})Y$$

Segue que a equação (1.6) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
& \langle (\nabla_T R(Z, W) - R(Z, W)\nabla_T)Y, X \rangle + \langle (\nabla_Z R(W, T) - R(W, T)\nabla_Z)Y, X \rangle \\
& + \langle (\nabla_W R(T, Z) - R(T, Z)\nabla_W)Y, X \rangle \\
& + \langle ([\nabla_W, \nabla_{[Z, T]}] + \nabla_{[[Z, T], W]} + [\nabla_T, \nabla_{[W, Z]}] + \nabla_{[[W, Z], T]} + [\nabla_Z, \nabla_{[T, W]}] + \nabla_{[[T, W], Z]})Y, X \rangle
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Pela propriedade de conexão e pela identidade de Jacobi, tem-se

$$\nabla_{[[Z, T], W]} + \nabla_{[[W, Z], T]} + \nabla_{[[T, W], Z]} = 0$$

Então, aplicando o resultado acima em (1.7), obtemos

$$\begin{aligned}
& \langle (\nabla_T R(Z, W) - R(Z, W)\nabla_T)Y, X \rangle + \langle (\nabla_Z R(W, T) - R(W, T)\nabla_Z)Y, X \rangle \\
& + \langle (\nabla_W R(T, Z) - R(T, Z)\nabla_W)Y, X \rangle \\
& + \langle ([\nabla_W, \nabla_{[Z, T]}] + [\nabla_T, \nabla_{[W, Z]}] + [\nabla_Z, \nabla_{[T, W]})Y, X \rangle
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Agora, considere

$$\begin{aligned}
\nabla_T R(Z, W) - R(Z, W)\nabla_T &= \nabla_T[\nabla_W, \nabla_Z] + \nabla_T\nabla_{[Z, W]} - [\nabla_W, \nabla_Z]\nabla_T - \nabla_{[Z, W]}\nabla_T \\
&= [\nabla_T, [\nabla_W, \nabla_Z]] + [\nabla_{[W, Z]}, \nabla_T]
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\nabla_Z R(W, T) - R(W, T) \nabla_Z = [\nabla_Z, [\nabla_T, \nabla_W]] + [\nabla_{[T, W]}, \nabla_Z]$$

$$\nabla_W R(T, Z) - R(T, Z) \nabla_W = [\nabla_W, [\nabla_Z, \nabla_T]] + [\nabla_{[Z, T]}, \nabla_W]$$

Substituindo os termos acima em (1.8), encontramos

$$\begin{aligned} & \langle ([\nabla_T, [\nabla_W, \nabla_Z]] + [\nabla_{[W, Z]}, \nabla_T] + [\nabla_Z, [\nabla_T, \nabla_W]] + [\nabla_{[T, W]}, \nabla_Z])Y, X \rangle \\ & + \langle ([\nabla_W, [\nabla_Z, \nabla_T]] + [\nabla_{[Z, T]}, \nabla_W])Y, X \rangle \\ & + \langle ([\nabla_W, \nabla_{[Z, T]}] + [\nabla_T, \nabla_{[W, Z]}] + [\nabla_Z, \nabla_{[T, W]}])Y, X \rangle \end{aligned}$$

Simplificando os termos comuns, temos

$$\langle ([\nabla_T, [\nabla_W, \nabla_Z]] + [\nabla_Z, [\nabla_T, \nabla_W]] + [\nabla_W, [\nabla_Z, \nabla_T]])Y, X \rangle = 0$$

□

Observação 3. Podemos demonstrar o item d) usando a definição de referencial geodésico. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial geodésico em $p \in M$. Observe que, para $1 \leq i, j, k, l, m \leq n$

$$(\nabla_m R)(e_i, e_j, e_k, e_l) = \nabla_m R(e_i, e_j, e_k, e_l) = \nabla_m R(e_k, e_l, e_i, e_j) = \langle [\nabla_m, [\nabla_k, \nabla_l]]e_j, e_i \rangle$$

Assim,

$$\begin{aligned} & (\nabla_m R)(e_i, e_j, e_k, e_l) + (\nabla_k R)(e_i, e_j, e_l, e_m) + (\nabla_l R)(e_i, e_j, e_m, e_k) \\ & = \langle ([\nabla_m, [\nabla_k, \nabla_l]] + [\nabla_k, [\nabla_l, \nabla_m]] + [\nabla_l, [\nabla_m, \nabla_k]])e_j, e_i \rangle \\ & = 0. \end{aligned}$$

Em um sistema de coordenadas (U, \mathbf{x}) , podemos representar o $(3, 1)$ -tensor curvatura e o $(4, 0)$ -tensor da seguinte maneira

$$R \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_l R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x_l}, \quad (1.9)$$

$$\langle R(\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j) \partial/\partial x_k, \partial/\partial x_s \rangle = R_{ijks},$$

onde os coeficientes R_{ijk}^l são as componentes do tensor curvatura em (U, \mathbf{x}) , e são dadas em termos dos símbolos de Christoffel por:

$$R_{ijk}^l = \sum_s \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l - \sum_s \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^l \quad (1.10)$$

Existem dois cenários naturais que merecem consideração: o primeiro ocorre quando o tensor curvatura é identicamente nulo; nesse caso, dizemos que a variedade é *flat*. No segundo cenário, em que a diferencial covariante do tensor curvatura é nula, temos como consequência a definição a seguir.

Definição 17. *Uma variedade riemanniana M é um **espaço localmente simétrico** se $\nabla R = 0$, isto é, a diferencial covariante do tensor curvatura é nula.*

Exemplo 6 (Toro de Clifford). *Seja*

$$\mathbb{T}^2 := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \rho, \sin \rho) \in \mathbb{R}^4; 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \rho < 2\pi \right\}$$

a variedade que definimos no Exemplo 2. Então, \mathbb{T}^2 é *flat* na métrica induzida, isto é, o tensor curvatura é nulo. De fato, sejam

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin \theta, \cos \theta, 0, 0) \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -\sin \rho, \cos \rho) \end{aligned}$$

Logo, na métrica induzida por \mathbb{R}^n , temos

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \right\rangle = \frac{1}{2}(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \frac{1}{2} \\ g_{\rho\rho} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho} \right\rangle = \frac{1}{2}(\sin^2 \rho + \cos^2 \rho) = \frac{1}{2} \\ g_{\theta\rho} &= g_{\rho\theta} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

Como pela equação (1.3)

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}$$

isto é, o símbolo de Christoffel é dado em função das derivadas de g_{ij} , temos $\Gamma_{ij}^m = 0$. Então, as componentes do tensor curvatura (1.10) são nulas, e portanto,

$$R\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_j}\right) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_k} = \sum_l R_{ijk}^l \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_l} = 0$$

para todos $i, j, k, l, m \in \{\theta, \rho\}$.

A seguir, dado um espaço vetorial V , usaremos $|x \wedge y|$ para denotar a expressão $\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$. A proposição a seguir, é fundamental para definirmos a curvatura de Gauss de uma superfície gerada a partir de um subespaço bidimensional do espaço tangente a M , sua demonstração encontra-se em Do Carmo [2019], Proposição 3.1, página 74.

Proposição 11. *Sejam $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bidimensional e $\{x, y\}$ uma base qualquer de σ . Então*

$$K(x, y) = \frac{R(x, y, y, x)}{|x \wedge y|}$$

não depende da escolha da base $\{x, y\}$.

Definição 18. *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$, o número real $K(x, y) = K(\sigma)$ (Proposição 11) é chamado **curvatura seccional** de σ em p .*

Um resultado natural a ser obtido, é que o conhecimento da curvatura seccional determina completamente a curvatura. A prova desse lema está em [Do Carmo \[2019\]](#), Lema 3.3, página 74.

Lema 3. *Seja V um espaço vetorial de dimensão ≥ 2 , munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam $R : V \times V \times V \rightarrow V$ e $R' : V \times V \times V \rightarrow V$ aplicações trilineares tais que as condições a), b) e c) da Proposição 10. Sejam satisfeitas para*

$$R(x, y, t, z) = \langle R(x, y)z, t \rangle$$

$$R'(x, y, t, z) = \langle R'(x, y)z, t \rangle$$

Se x, y são dois vetores linearmente independentes, escrevamos,

$$K(\sigma) = \frac{R(x, y, y, x)}{|x \wedge y|^2}, \quad K'(\sigma) = \frac{R'(x, y, y, x)}{|x \wedge y|^2}$$

onde σ é o subespaço bidimensional gerado por x e y . Se para todo $\sigma \subset V$, $K(\sigma) = K'(\sigma)$, então $R = R'$.

Como consequência do lema acima, podemos obter uma equação para o caso em que a variedade possui curvatura seccional constante, dada pelo lema abaixo, cuja demonstração encontra-se em [Do Carmo \[2019\]](#), Proposição 3.4, página 75.

Lema 4. *Sejam M uma variedade riemanniana e p um ponto de M . Defina uma aplicação trilinear*

$$R' : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$$

dada por

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle \quad (1.11)$$

para todo $X, Y, Z, W \in T_p M$. Então M tem curvatura seccional igual a K_0 se, e só se, $R = K_0 R'$, onde R é o tensor curvatura de M .

Definição 19. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, chamamos **tensor de Ricci** o $(2, 0)$ -tensor dado por

$$Ric(Y, Z) := tr(X \mapsto R(X, Y)Z).$$

Seja $\{e_i\}$ um base ortonormal de T_pM , como o traço não depende da base, segue que $Ric(v, w) = \sum_{i=1}^n R(e_i, u, w, e_i)$, $v, w \in T_pM$. Assim, seja $v \in T_pM$, tal que $\{e_1, \dots, e_{n-1}, e_n = v\}$ forma uma base ortonormal de T_pM , a *curvatura de Ricci* em p na direção v e a *curvatura escalar* em p , são definidas, respectivamente, como

$$Ric_p(v) = \sum_{i=1}^n R(e_i, v, v, e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} K(v, e_i),$$

$$K(p) = \sum_{i=1}^n Ric_p(e_i)$$

2 Imersões Isométricas

2.1 A Segunda Forma Fundamental

Nesta seção, apresentaremos a definição de alguns conceitos fundamentais. Em particular, a definição da segunda forma fundamental de uma imersão.

Definição 20. *Sejam M e N variedades riemannianas. Um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ é chamado uma **isometria** se:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_{\varphi(p)}$$

para todo $p \in M$, $u, v \in T_p M$. Se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ é um difeomorfismo e satisfaz a igualdade acima, dizemos que φ é uma **isometria local**.

Definição 21. *Sejam (M^n, g) e $(\overline{M}^{n+k}, \overline{g})$ variedades riemannianas e $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ uma imersão, tal que $g(u, v) = \overline{g}(d\varphi(u), d\varphi(v))$, para todos $u, v \in T_p M$. A aplicação φ é chamada de **imersão isométrica**.*

Observação 4. *Toda imersão isométrica é uma imersão, e como tal, é localmente um mergulho.*

Denotaremos, em tudo o que se segue, por $\overline{R}, \overline{\nabla}$ e R, ∇ objetos de \overline{M} e M , respectivamente. A aplicação $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ representará uma imersão isométrica entre as variedades riemannianas M e \overline{M} . Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{M}}$ a métrica em \overline{M} , a aplicação φ induz uma métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ em M por meio do *pullback*. Além disso, utilizaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar a métrica de ambas as variedades. O número k , dado pela diferença entre as dimensões de \overline{M} e M , é denominado *codimensão*. No caso em que $k = 1$, chamaremos $\varphi(M) \subset \overline{M}$ de *hipersuperfície*.

Por meio do produto interno, podemos realizar uma decomposição de $T_p \overline{M}$, dada por

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus T_p M^\perp,$$

onde $T_p M^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$. Deste modo, para qualquer $v \in T_p \overline{M}$ temos, $v = v^\perp + v^\top$, onde v^\perp e v^\top são denominados *componente normal* e *componente tangente* de v , respectivamente. A união disjunta $\bigsqcup_{p \in M} T_p M^\perp$ admite uma estrutura de fibrado vetorial, denominado *fibrado normal* de M em \overline{M} e denotamos por TM^\perp .

Seja $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de \overline{M} , e sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Se X_1 e X_2 são extensões de X a \overline{M} , e Y_1 e Y_2 são extensões de Y a \overline{M} , segue, pelo fato da conexão ser um conceito local, que $\overline{\nabla}_{X_1} Y_1 = \overline{\nabla}_{X_2} Y_2$. Portanto, utilizaremos $\overline{\nabla}_X Y$ para denotar um campo vetorial definido sobre $T\overline{M}$.

Proposição 12. *Sejam $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica e $\nabla, \overline{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e \overline{M} , respectivamente. Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos*

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top$$

onde $()^\top$ denota a projeção ortogonal de $T\overline{M}$ sobre TM .

Demonstração.

Mostraremos que $(\overline{\nabla}_X Y)^\top$ está bem definido, isto é, define uma conexão em M . Sejam X_1, X_2 e Y_1, Y_2 extensões de X e Y , respectivamente. Observe que, como $\overline{\nabla}$ é uma conexão de Levi-Civita de \overline{M} temos

$$(\overline{\nabla}_{X_1} Y_1 - \overline{\nabla}_{X_2} Y_2)_p^\top = (\overline{\nabla}_X (Y_1 - Y_2))_p^\top = 0$$

$$(\overline{\nabla}_{X_1} Y - \overline{\nabla}_{X_2} Y)_p^\top = (\overline{\nabla}_{X_1 - X_2} Y)_p^\top = 0$$

isto é, $(\overline{\nabla}_X Y)^\top$ não depende das extensões. Agora, verificaremos que essa conexão satisfaz as propriedades da Definição 9,

1.

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_{fX+gY} Z)^\top &= (f\overline{\nabla}_X Z + g\overline{\nabla}_Y Z)^\top \\ &= (f\overline{\nabla}_X Z)^\top + (g\overline{\nabla}_Y Z)^\top \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_X (Y + Z))^\top &= (\overline{\nabla}_X Y + \overline{\nabla}_X Z)^\top \\ &= (\overline{\nabla}_X Y)^\top + (\overline{\nabla}_X Z)^\top \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X fY)^\top &= (f\bar{\nabla}_X Y + X(f)Y)^\top \\ &= (f\bar{\nabla}_X Y)^\top + X(f)Y \end{aligned}$$

Para verificar que a conexão é de Levi-Civita, isto é, simétrica e compatível com a métrica, consulte [Caminha \[2014\]](#), Proposição 2.1, página 48.

□

Em busca de entender a relação entre as geometrias de M e \bar{M} , precisamos compreender como se comporta a componente normal de $\bar{\nabla}_X Y$. Nesse contexto, considere a seguinte definição

Definição 22. A *segunda forma fundamental* da imersão φ é uma aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ dada por

$$\alpha(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y. \quad (2.1)$$

A aplicação α definida acima é tensorial e simétrica. Seja $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, podemos relacionar a segunda forma fundamental a uma aplicação

$$\begin{aligned} A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ A(X, \eta) &\mapsto A_\eta X \end{aligned}$$

da seguinte forma

$$\langle A_\eta X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle.$$

Utilizando a equação (2.1), podemos reescrever a igualdade acima

$$\langle A_\eta X, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, \eta \rangle \quad (2.2)$$

Pela simetria de α , obtemos um operador autoadjunto $A_\eta : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, chamado *operador de forma* (shape operator) da imersão φ na direção η , dada pela proposição abaixo, cuja demonstração encontra-se em [Do Carmo \[2019\]](#), Proposição 2.3, página 98.

Proposição 13. Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. Se M é uma subvariedade de \bar{M} , então

$$A_\eta X = -(\bar{\nabla}_X \eta)^\top. \quad (2.3)$$

Exemplo 7 (Toro de Clifford). Seja \mathbb{T}^2 o Toro de Clifford dado no Exemplo 6. Vimos que \mathbb{T}^2 é uma superfície regular de \mathbb{R}^4 , e pelo Exemplo 4 é uma subvariedade de \mathbb{R}^4 . Desse modo, o espaço tangente de \mathbb{R}^4 possui uma decomposição natural, dada por

$$T_p\mathbb{R}^4 = T_p\mathbb{T}^2 \oplus (T_p\mathbb{T}^2)^\perp.$$

Pelo Exemplo 2, temos que $\left\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho}\right\}$ é uma base de $T_p\mathbb{T}^2$, e sejam

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \rho, \sin \rho), \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos \theta, -\sin \theta, \cos \rho, \sin \rho)$$

vetores de \mathbb{R}^4 , temos que $\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \eta_i \rangle = 0$ e $\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho}, \eta_i \rangle = 0$, com $i, j \in \{1, 2\}$. Logo, $\eta_i \in (T_p\mathbb{T}^2)^\perp$. Além disso, η_1 e η_2 são linearmente independentes. De fato, sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, temos

$$\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2) \cos \theta = 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \theta = 0 \\ (\lambda_1 + \lambda_2) \cos \rho = 0 \\ (\lambda_1 + \lambda_2) \sin \rho = 0 \end{cases} \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Então, $\{\eta_1, \eta_2\}$ é uma base de $(T_p\mathbb{T}^2)^\perp$.

Através da equação (2.2)

$$\left\langle A_{\eta_i} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho} \right\rangle = \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho}, \eta_i \right\rangle, \quad i \in \{1, 2\},$$

podemos calcular as matrizes do operador de forma na base $\left\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho}\right\}$. Como $\bar{\nabla}$ é a derivada usual de \mathbb{R}^4 , temos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \right) = \bar{\nabla}_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = 0 \\ \bar{\nabla}_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos \theta, -\sin \theta, 0, 0) \\ \bar{\nabla}_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -\cos \rho, -\sin \rho) \end{aligned}$$

Assim, a menos de constante

$$\left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \eta_1 \right\rangle = \langle (-\cos \theta - \sin \theta, 0, 0), (\cos \theta, \sin \theta, \cos \rho, \sin \rho) \rangle = -1$$

$$\left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho}, \eta_1 \right\rangle = \langle (0, 0, -\cos \rho - \sin \rho), (\cos \theta, \sin \theta, \cos \rho, \sin \rho) \rangle = -1$$

$$\left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho}, \eta_1 \right\rangle = \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \eta_1 \right\rangle = 0$$

e portanto,

$$A_{\eta_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\langle \bar{\nabla} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \eta_2 \rangle = \langle (-\cos \theta - \sin \theta, 0, 0), (-\cos \theta, -\sin \theta, \cos \rho, \sin \rho) \rangle = 1$$

$$\langle \bar{\nabla} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho}, \eta_2 \rangle = \langle (0, 0, -\cos \rho - \sin \rho), (-\cos \theta, -\sin \theta, \cos \rho, \sin \rho) \rangle = -1$$

$$\langle \bar{\nabla} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho}, \eta_2 \rangle = \langle \bar{\nabla} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \eta_2 \rangle = 0$$

logo,

$$A_{\eta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Definição 23. Dado uma imersão isométrica $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ com segunda forma fundamental α , um aberto $U \subset M$ e um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ definido em U . A **norma ao quadrado da segunda forma fundamental** de φ é a função suave $|\alpha|^2 : M \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$|\alpha|^2 = \sum_{i,j} |\alpha(e_i, e_j)|^2, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (2.4)$$

e norma não depende do referencial.

Considerando um referencial ortonormal (η_1, \dots, η_m) para TU^\perp e o operador de forma A_{η_j} , $1 \leq j \leq m$, podemos reescrever (2.4)

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 &= \sum_i |\alpha(e_i, e_i)|^2 = \sum_{i,j} |\langle \alpha(e_i, e_i), \eta_j \rangle \eta_j|^2 = \sum_{i,j} |\langle A_{\eta_j} e_i, e_i \rangle|^2 \\ &= \sum_{i,j} \langle A_{\eta_j} e_i, \langle A_{\eta_j} e_i, e_i \rangle e_i \rangle = \sum_{i,j} \langle A_{\eta_j}^2 e_i, e_i \rangle \\ &= \sum_j |A_{\eta_j}|^2 \end{aligned}$$

$$\therefore |\alpha|^2 = \sum_j |A_{\eta_j}|^2,$$

onde $|A_{\eta_j}|^2$ é a norma de Hilbert-Schmidt.

Utilizando a Definição 9 podemos definir uma conexão sobre o fibrado normal TM^\perp .

Definição 24. Sejam $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão isométrica e ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e \bar{M} , respectivamente. Para $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, definimos

$$\begin{aligned} \nabla^\perp : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp &\rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp \\ \nabla_X^\perp \eta &= (\bar{\nabla}_X \eta)^\perp \end{aligned}$$

A conexão ∇^\perp é denominada **conexão normal** da imersão φ .

Combinando a conexão normal, definida acima, com a igualdade (2.3), obtemos a equação de Weingarten

$$\bar{\nabla}_X \eta = -A_\eta X + \nabla_X^\perp \eta \quad (2.5)$$

para todos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$.

De modo análogo ao caso do fibrado tangente, introduziremos, a partir de ∇^\perp , uma noção de curvatura no fibrado normal denominada *curvatura normal* R^\perp da imersão. Essa curvatura é definida por:

$$R^\perp(X, Y)\eta = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta - \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta \quad (2.6)$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$.

Definição 25. Se $\varphi : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+k}$ é uma imersão isométrica, um referencial ortonormal $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n+k})$ em um aberto $\bar{U} \subset \bar{M}$ é dito **adaptado** à imersão φ ou à M se as restrições de $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ a $U := \bar{U} \cap M$ formarem um referencial para M em U .

Sendo α a segunda forma fundamental de φ e $(e_1, \dots, e_n, \eta_1, \dots, \eta_k)$ a restrição de um referencial adaptado a um aberto $U \subset M$, considere o campo

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_i \alpha(e_i, e_i) = \frac{1}{n} \sum_{i,j} \langle \alpha(e_i, e_i), \eta_j \rangle \eta_j = \frac{1}{n} \sum_{i,j} \langle A_{\eta_j} e_i, e_i \rangle \eta_j = \frac{1}{n} \sum_j \text{tr}(A_{\eta_j}) \eta_j \quad (2.7)$$

Este campo $\vec{H} \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ só depende da imersão φ , e sua imagem em $p \in M$ é chamado *vetor curvatura média* de φ em p .

Definição 26. Uma imersão isométrica $\varphi : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+k}$ é **mínima**, se $\vec{H} = 0$.

A palavra "mínima" está relacionada ao fato de que uma imersão mínima minimiza o volume da métrica induzida.

Definição 27. Dizemos que a imersão isométrica $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ tem **vetor curvatura média** \vec{H} **paralelo**, se \vec{H} for uma seção paralela do fibrado normal TM^\perp , isto é, se

$$\nabla_X^\perp \vec{H} = 0$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Exemplo 8 (Toro de Clifford). A imersão do toro \mathbb{T}^2 na esfera unitária $\mathbb{S}^3(1)$ induzida por

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\theta, \rho) &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \rho, \sin \rho), \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \rho < 2\pi \end{aligned}$$

é uma imersão mínima. De fato, pelo Exemplo 7 temos que η_1 e $\eta_2 \in (T_p\mathbb{T}^2)^\perp$. Como $\mathbf{x}(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{S}^3(1)$, temos que o toro \mathbb{T}^2 é uma hipersuperfície de \mathbb{S}^3 , logo possui uma única direção normal. Por outro lado, η_1 é o vetor posição da esfera \mathbb{S}^3 , logo $\eta_1 \in (T_p\mathbb{S}^3)^\perp$, sendo $T_p\mathbb{R}^4 = T_p\mathbb{S}^3 \oplus (T_p\mathbb{S}^3)^\perp$. Portanto, η_2 pertence ao complemento ortogonal de $T_p\mathbb{T}^2$ em $T_p\mathbb{S}^3$. Desse modo, pela equação (2.7), temos

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \text{tr}(A_{\eta_2})\eta_2 = 0.$$

Definição 28. Uma imersão $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$ é **geodésica** em $p \in M$, se a segunda forma fundamental é identicamente nula em p , isto é, $\alpha(X, Y) = 0, \forall X, Y \in T_pM$. A imersão φ é **totalmente geodésica** se ela é geodésica para todo $p \in M$.

Uma consequência desta definição é que se uma imersão φ , definida acima, é totalmente geodésica, então toda geodésica da subvariedade M é uma geodésica do ambiente \overline{M} . A demonstração consiste em analisar a equação

$$\overline{\nabla}_X X = \nabla_X X + \alpha(X, X),$$

onde γ é uma geodésica em M , e X uma extensão de γ' a \overline{M} . A recíproca deste resultado também é verdadeira. Está consequência é bastante forte, e não é trivial encontrar exemplos que a satisfaçam.

Para o caso em que $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, as variedades que são formadas pela intersecção de subespaços lineares $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com S^n , $V \cap S^n$, são subvariedades totalmente geodésicas de S^n , pois as geodésicas de $V \cap S^n$ estão contidas nos grandes círculos de S^n .

Além disso, toda imersão totalmente geodésica é mínima, mas a recíproca é falsa.

2.1.1 Equações Fundamentais

Nesta seção, apresentaremos as equações fundamentais de uma imersões isométrica, que são as equações de Gauss, Ricci e Codazzi.

Visto que $\alpha(X, Y) \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ é um campo, podemos associar α a um $(2, 1)$ -tensor $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^*(M)^\perp \rightarrow C^\infty(M)$. Assim, seja ∇^\perp a conexão do fibrado normal da imersão isométrica φ , temos que a diferencial covariante deste tensor é o tensor

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) = \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

As seguintes equações são conhecidas como *equação de Gauss* e *equação de Codazzi*.

Proposição 14. Se $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$ é uma imersão isométrica e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, então

1.

$$(\overline{R}(X, Y)Z)^\top = R(X, Y)Z + A_{\alpha(X, Z)}Y - A_{\alpha(Y, Z)}X \quad (\text{Gauss}) \quad (2.8)$$

2.

$$(\overline{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z) \quad (\text{Codazzi}) \quad (2.9)$$

Demonstração.

Sabemos que

$$\overline{R}(X, Y)Z = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X, Y]} Z$$

Utilizando a equação (2.1), podemos reescrever

$$\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z = \overline{\nabla}_X [\nabla_Y Z + \alpha(Y, Z)].$$

Então,

$$\begin{aligned} \overline{R}(X, Y)Z &= \overline{\nabla}_X [\nabla_Y Z + \alpha(Y, Z)] - \overline{\nabla}_Y [\nabla_X Z + \alpha(X, Z)] - \nabla_{[X, Y]} Z - \alpha([X, Y], Z) \\ &= \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z + \overline{\nabla}_X \alpha(Y, Z) - \overline{\nabla}_Y \nabla_X Z - \overline{\nabla}_Y \alpha(X, Z) - \nabla_{[X, Y]} Z - \alpha([X, Y], Z) \quad (2.5) \text{ e} \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y, Z)}X + \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) \quad (2.1) \\ &\quad - \nabla_Y \nabla_X Z - \alpha(Y, \nabla_X Z) + A_{\alpha(X, Z)}Y - \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z) \\ &\quad - \nabla_{[X, Y]} Z - \alpha(\nabla_X Y, Z) + \alpha(\nabla_Y X, Z) \end{aligned}$$

Ordenado os termos, temos

$$\begin{aligned}
&= R(X, Y)Z - A_{\alpha(Y, Z)}X + A_{\alpha(X, Z)}Y + \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) \\
&\quad - \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z) + \alpha(\nabla_Y X, Z) + \alpha(X, \nabla_Y Z) \\
&= R(X, Y)Z - A_{\alpha(Y, Z)}X + A_{\alpha(X, Z)}Y + (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z)
\end{aligned}$$

Considerando $(\bar{R}(X, Y)Z)^\top$ e $(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp$, mostramos que

- $(\bar{R}(X, Y)Z)^\top = R(X, Y)Z - A_{\alpha(Y, Z)}X + A_{\alpha(X, Z)}Y$
- $(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z)$

□

Corolário 1. Se $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ é uma imersão isométrica e $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$\langle R(W, X)Y, Z \rangle = \langle \bar{R}(W, X)Y, Z \rangle - \langle \alpha(W, Y), \alpha(X, Z) \rangle + \langle \alpha(W, Z), \alpha(X, Y) \rangle. \quad (2.10)$$

Em particular, se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são ortonormais, então

$$K(X, Y) = \bar{K}(X, Y) + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - |\alpha(X, Y)|^2,$$

onde K e \bar{K} denotam as curvaturas seccionais de M e \bar{M} , respectivamente.

Corolário 2. Se $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ é uma imersão isométrica, então

$$(\bar{R}(X, Y)\eta)^\top = (\nabla_Y A)(X, \eta) - (\nabla_X A)(Y, \eta), \quad (2.11)$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$.

Considerando a curvatura normal (2.6), podemos calcular $(\bar{R}(X, Y)\eta)^\perp$. Esta equação é chamada de equação de Ricci.

Proposição 15. Se $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ é uma imersão isométrica, então, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, temos

$$(\bar{R}(X, Y)\eta)^\perp = R^\perp(X, Y)\eta + \alpha(A_\eta X, Y) - \alpha(A_\eta Y, X) \quad (\text{Ricci}) \quad (2.12)$$

Demonstração.

Sabemos que

$$\bar{R}(X, Y)\eta = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \eta - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \eta - \bar{\nabla}_{[X, Y]}\eta$$

Pela equação de Weingarten (2.5), tem-se

$$\begin{aligned} &= \bar{\nabla}_X(-A_\eta Y + \nabla_Y^\perp \eta) - \bar{\nabla}_Y(-A_\eta X + \nabla_X^\perp \eta) + A_\eta[X, Y] - \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta \\ &= -\bar{\nabla}_X A_\eta Y + \bar{\nabla}_X \nabla_Y^\perp \eta + \bar{\nabla}_Y A_\eta X - \bar{\nabla}_Y \nabla_X^\perp \eta + A_\eta[X, Y] - \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta \end{aligned}$$

Considerando a componente normal

$$\begin{aligned} (\bar{R}(X, Y)\eta)^\perp &= -(\bar{\nabla}_X A_\eta Y)^\perp + (\bar{\nabla}_X \nabla_Y^\perp \eta)^\perp + (\bar{\nabla}_Y A_\eta X)^\perp - (\bar{\nabla}_Y \nabla_X^\perp \eta)^\perp \\ &\quad + (A_\eta[X, Y])^\perp - (\nabla_{[X, Y]}^\perp \eta)^\perp \\ &= R^\perp(X, Y)\eta - (\bar{\nabla}_X A_\eta Y)^\perp + (\bar{\nabla}_Y A_\eta X)^\perp \\ &= R^\perp(X, Y)\eta - \alpha(X, A_\eta Y) + \alpha(Y, A_\eta X) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Definição 22}$$

□

Corolário 3. Se $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ é uma imersão isométrica, então, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta, \xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, temos

$$\langle \bar{R}(X, Y)\eta, \xi \rangle = \langle R^\perp(X, Y)\eta, \xi \rangle - \langle [A_\eta, A_\xi]X, Y \rangle \quad (2.13)$$

As equações (2.10), (2.11) e (2.13) são conhecidas, também, como equações de Gauss, Codazzi e Ricci, e suas demonstrações encontram-se em Caminha [2014], Corolário 2.19, página 69; Corolário 2.21, página 71 e Corolário 2.23, página 72, respectivamente.

2.2 Operadores Diferenciáveis

Agora, estenderemos alguns operadores diferenciáveis às variedades riemannianas.

Definição 29. Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Definimos o **gradiente** de f como o campo vetorial suave ∇f tal que

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 16. Sejam $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Então, em U temos

$$\nabla f = \sum_j e_j(f) e_j.$$

Demonstração.

Seja $X = \sum_i a_i e_i$ em U , segue da ortonormalidade do referencial que

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_i a_i e_i(f) = \sum_{i,j} a_i e_j(f) \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i,j} \langle a_i e_i, e_j(f) e_j \rangle \\ &= \langle X, \sum_j e_j(f) e_j \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $\nabla f = \sum_j e_j(f) e_j$. □

Definição 30. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. A **divergência** de X é a função suave $div X : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$(div X)_p = tr\{v \rightarrow (\nabla_v X)_p\},$$

onde $p \in M$ e $v \in T_p M$.

Proposição 17. Sejam X um campo suave em M^n e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em um aberto $U \subset M$. Se $X = \sum_i a_i e_i$ em U , então

$$div X = \sum_i \{e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle\}.$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, então

$$(div X)_p = \sum_i e_i(a_i)_p.$$

Demonstração.

Pela definição de traço, temos

$$\begin{aligned} div X &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle = \sum_i \{e_i \langle X, e_i \rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle\} \\ &= \sum_i \{e_i(a_i) - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle\}. \end{aligned}$$

Se o referencial é geodésico, $\nabla_{e_i} e_i = 0$, então $div X = \sum_i e_i(a_i)$ □

Proposição 18. Se X, Y são campos vetoriais suaves em M^n e $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, então

a) $div(X + Y) = div X + div Y$

$$b) \operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div}X + \langle \nabla f, X \rangle$$

Demonstração.

O item a) segue direto da aditividade do traço. Para o item b), considere $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em $U \subset M$. Pela proposição anterior, temos para $X = \sum_i a_i e_i$ em U

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fX) &= \sum_i \{e_i(f a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, fX \rangle\} \\ &= \sum_i \{e_i(f) a_i + e_i(a_i) f - f \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle\} \\ &= \sum_{i,j} \{e_i(f) \langle X, e_j \rangle + f \operatorname{div}X\} \\ &= \langle X, \nabla f \rangle + f \operatorname{div}X \end{aligned}$$

□

Definição 31. Dado $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. O **operador laplaciano** de f é a função suave $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, dada por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

Proposição 19. Se $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial ortonormal em um aberto $U \subset M$, então

$$\Delta f = \sum_i \{e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i) f\},$$

onde ∇ denota a conexão de Levi-Civita da métrica de M . Em particular, se o referencial acima for geodésico em $p \in U$, então, temos em p ,

$$\Delta f = \sum_i e_i(e_i(f)). \quad (2.14)$$

Demonstração.

Sabemos que em uma vizinhança aberta U vale $\nabla f = \sum_i e_i(f) e_i$. Por outro lado, pela definição de Laplaciano de uma função, temos

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \sum_i \{e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f \rangle\}$$

Para um referencial geodésico, $\nabla_{e_i} e_i = 0$, e portanto,

$$\Delta f = \sum_i (e_i(e_i(f)))$$

□

De maneira geral, podemos estender a definição do operador laplaciano para tensores da seguinte forma

$$\Delta = \text{div} \nabla = g^{ij} \nabla_i \nabla_j.$$

Assim, sejam $T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_r \rightarrow C^\infty(M)$ um $(r, 0)$ -tensor e (e_1, \dots, e_n) um referencial ortonormal em um aberto $U \subset M^n$, temos

$$\Delta T(X_1, \dots, X_r) = \sum_i (\nabla^2 T)(X_1, \dots, X_r, e_i, e_i),$$

isto é, ΔT é um $(r, 0)$ -tensor.

Nestas notações, considere o $(2, 1)$ -tensor α (Definição 22) e a conexão normal ∇^\perp . Então,

$$\nabla^{\perp, 2} \alpha = \sum_i (\nabla_{e_i}^\perp \nabla_{e_i}^\perp \alpha - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^\perp \alpha)$$

Em particular, se (e_1, \dots, e_n) é um referencial geodésico em $p \in M$, temos $\nabla_{e_i} e_i = 0$ e

$$\Delta \alpha = \nabla^{\perp, 2} \alpha = \sum_i \nabla_{e_i}^\perp \nabla_{e_i}^\perp \alpha. \quad (2.15)$$

Para mais detalhes, consulte [Caminha \[2014\]](#), [Chow et al. \[2023\]](#)

3 Uma fórmula tipo Simons e a Desigualdade integral de Simons

Neste capítulo, apresentaremos os dois principais resultados do plano de trabalho: a célebre fórmula de Simons (Teorema 4) e a desigualdade integral de Simons (Teorema 6). No primeiro resultado, calculamos o laplaciano da norma ao quadrado da segunda forma fundamental de uma imersão isométrica $\varphi : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+m}$ com vetor curvatura média paralelo, para uma classe apropriada de ambientes \bar{M}^{n+m} . No segundo resultado, aplicamos a fórmula de Simons para a análise de imersões mínimas em uma esfera euclidiana.

Em tudo o que se segue, adotamos a convenção de índices segundo a qual

$$1 \leq i, j, k, l \leq n \text{ e } n + 1 \leq \mu, \xi \leq n + m.$$

Denotaremos por ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e \bar{M} , respectivamente. Além disso, para simplificar a notação, usaremos $\nabla_i X = \nabla_{e_i} X$.

Para demonstramos a fórmula de Simons (Teorema 4), necessitamos de alguns resultados preliminares.

Podemos definir, no espaço vetorial $M(n, \mathbb{R})$, das matrizes $n \times n$ sobre \mathbb{R} , uma operação de colchetes que satisfaz as propriedades dadas pela Proposição 2. Além disso, sabemos, da álgebra linear, que se A_η é um operador autoadjunto, então existe uma matriz A_η simétrica associada a este operador. Deste modo, podemos expressar o colchete como $[A_\eta, A_\xi] = A_\eta A_\xi - A_\xi A_\eta$, onde $A_\eta A_\xi$ representa o produto matricial. Pelo item 1) da Proposição 2 temos que $[\cdot, \cdot]$ é antisimétrico, logo $[A_\eta, A_\xi]^t = -[A_\eta, A_\xi]$.

Dados E e F espaços vetoriais de dimensões finitas munidos de produto interno, e as transformações

lineares $A, B : E \rightarrow F$, o traço $tr(A^t B)$ define em $\mathcal{L}(E, F)$ um produto interno dado por:

$$\langle A, B \rangle = tr(A^t B).$$

Em particular, $tr(A^t A) = \langle A, A \rangle = |A|^2$.

Lema 5. *Sejam $\varphi : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana M^n em \bar{M}^{n+m} com vetor curvatura média \vec{H} paralelo, e (e_1, \dots, e_{n+m}) um referencial ortonormal adaptado à M em uma vizinhança $\bar{U} \subset \bar{M}$ de p . Então,*

$$\begin{aligned} (\nabla^{\perp,2}\alpha)(e_k, e_l) &= \sum_i \left\{ \nabla_i^\perp (\bar{R}(e_i, e_k)e_l)^\perp + \nabla_k^\perp ((\bar{R}(e_i, e_l)e_i)^\perp - 2\alpha(\nabla_l e_i, e_i)) \right. \\ &\quad \left. + (R^\perp(e_i, e_k)\alpha)(e_i, e_l) \right\} \end{aligned}$$

Demonstração.

Sabendo que α e R são tensoriais, logo não dependem do referencial, é suficiente considerar o referencial adaptado a M como sendo construído a partir de um referencial geodésico em p . Logo, a restrição de (e_1, \dots, e_{n+m}) a $U \subset M$ é um referencial geodésico em p . Assim, pela Equação de Codazzi (2.9) e denotando por \bar{R} o tensor de curvatura de \bar{M} , temos em p ,

$$\begin{aligned} (\nabla^{\perp,2}\alpha)(e_k, e_l) &= \sum_i (\nabla_i^\perp \nabla_i^\perp \alpha)(e_k, e_l) \\ &= \sum_i \left\{ \nabla_i^\perp ((\nabla_i^\perp \alpha)(e_k, e_l)) \right\} - \sum_i \left\{ (\nabla_i^\perp \alpha)(\nabla_i e_k, e_l) - (\nabla_i^\perp \alpha)(e_k, \nabla_i e_l) \right\} \\ &= \sum_i \left\{ \nabla_i^\perp ((\bar{R}(e_i, e_k)e_l)^\perp + (\nabla_k^\perp \alpha)(e_i, e_l)) \right\} \\ &= \sum_i \left\{ \nabla_i^\perp (\bar{R}(e_i, e_k)e_l)^\perp + (\nabla_i^\perp \nabla_k^\perp \alpha)(e_i, e_l) + (\nabla_k^\perp \alpha)(\nabla_i e_l, e_l) \right. \\ &\quad \left. + (\nabla_k^\perp \alpha)(e_i, \nabla_i e_l) \right\} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Equação} \\ \text{de} \\ \text{Codazzi} \end{array} \right\}$$

$$\therefore (\nabla^{\perp,2}\alpha)(e_k, e_l) = \sum_i \left\{ \nabla_i^\perp (\bar{R}(e_i, e_k)e_l)^\perp + (\nabla_i^\perp \nabla_k^\perp \alpha)(e_i, e_l) \right\} \quad (3.1)$$

Considerando o segundo termo da expressão acima, e lembrando que R^\perp é o tensor de curvatura do fibrado TM^\perp (2.6), temos

$$\sum_i (\nabla_i^\perp \nabla_k^\perp \alpha)(e_i, e_l) = \sum_i (\nabla_k^\perp \nabla_i^\perp \alpha + \nabla_{[e_i, e_k]}^\perp \alpha + R^\perp(e_i, e_k)\alpha)(e_i, e_l)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \{ (\nabla_k^\perp \nabla_i^\perp \alpha)(e_i, e_l) + (\nabla_{[e_i, e_k]}^\perp \alpha)(e_i, e_l) + (R^\perp(e_i, e_k) \alpha)(e_i, e_l) \} \\
&= \sum_i \{ \nabla_k^\perp ((\nabla_i^\perp \alpha)(e_i, e_l)) \} - \sum_i \{ (\nabla_i^\perp \alpha)(\nabla_k e_i, e_l) - (\nabla_i^\perp \alpha)(e_i, \nabla_k e_l) + (\nabla_{\nabla_i e_k - \nabla_k e_i}^\perp \alpha)(e_i, e_l) \} \\
&\quad + (R^\perp(e_i, e_k) \alpha)(e_i, e_l) \} \\
&= \sum_i \{ \nabla_k^\perp ((\nabla_i^\perp \alpha)(e_i, e_l)) + (R^\perp(e_i, e_k) \alpha)(e_i, e_l) \}
\end{aligned}$$

onde aplicamos na penúltima linha a simetria da conexão. Assim, podemos reescrever (3.1) como

$$(\nabla^{\perp, 2} \alpha)(e_k, e_l) = \sum_i \{ \nabla_i^\perp (\bar{R}(e_i, e_k) e_l)^\perp + \nabla_k^\perp ((\nabla_i^\perp \alpha)(e_i, e_l)) + (R^\perp(e_i, e_k) \alpha)(e_i, e_l) \} \quad (3.2)$$

Aplicando novamente a equação de Codazzi (2.9) e usando a simetria da Equação de Codazzi, o segundo termo do lado direito de (3.2) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\sum_i (\nabla_i^\perp \alpha)(e_l, e_i) &= \sum_i \{ (\nabla_l^\perp \alpha)(e_i, e_i) + (\bar{R}(e_i, e_l) e_i)^\perp \} \\
&= \sum_i \{ \nabla_l^\perp (\alpha(e_i, e_i)) - 2\alpha(\nabla_l e_i, e_i) + (\bar{R}(e_i, e_l) e_i)^\perp \} \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Observe que ao derivar o vetor curvatura média $\vec{H} \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_l^\perp \vec{H} &= \nabla_l^\perp \left(\frac{1}{n} \sum_i \alpha(e_i, e_i) \right) = \frac{1}{n} \sum_i \nabla_l^\perp (\alpha(e_i, e_i)) \\
\therefore n \nabla_l^\perp \vec{H} &= \sum_i \nabla_l^\perp (\alpha(e_i, e_i))
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima na equação (3.3)

$$\begin{aligned}
\sum_i (\nabla_i^\perp \alpha)(e_l, e_i) &= \sum_i \nabla_l^\perp (\alpha(e_i, e_i)) + \sum_i (-2\alpha(\nabla_l e_i, e_i) + (\bar{R}(e_i, e_l) e_i)^\perp) \\
&= n \nabla_l^\perp \vec{H} + \sum_i (-2\alpha(\nabla_l e_i, e_i) + (\bar{R}(e_i, e_l) e_i)^\perp)
\end{aligned}$$

Como a imersão φ tem vetor curvatura média paralelo (Definição 27), temos

$$\sum_i (\nabla_i^\perp \alpha)(e_l, e_i) = \sum_i \{ (\bar{R}(e_i, e_l) e_i)^\perp - 2\alpha(\nabla_l e_i, e_i) \}$$

Substituindo este resultado em (3.2), obtemos

$$\begin{aligned}
(\nabla^{\perp, 2} \alpha)(e_k, e_l) &= \sum_i \{ \nabla_i^\perp (\bar{R}(e_i, e_k) e_l)^\perp + \nabla_k^\perp ((\bar{R}(e_i, e_l) e_i)^\perp - 2\alpha(\nabla_l e_i, e_i)) \\
&\quad + (R^\perp(e_i, e_k) \alpha)(e_i, e_l) \}
\end{aligned}$$

□

Observação 5. Na demonstração do Lema 5 temos que α é na verdade um objeto do fibrado de aplicações bilineares $\varepsilon = \text{Bil}(TM \oplus_W TM; TM^\perp)$, isto é, $\alpha \in \Gamma(\varepsilon)$. Além disso, o tensor de curvatura $R^\perp(e_i, e_k)\alpha$ é uma restrição do tensor de curvatura R^ε a TM^\perp . Para saber mais consulte [Caminha \[2014\]](#).

Lema 6. Sejam \bar{M}^{n+m} uma variedade riemanniana localmente simétrica, $\varphi : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana n -dimensional M^n em \bar{M}^{n+m} com vetor curvatura média \vec{H} paralelo, e (e_1, \dots, e_{n+m}) um referencial ortonormal adaptado à M em uma vizinhança $\bar{U} \subset \bar{M}$ de p . Então,

$$\begin{aligned}
(\nabla^{\perp,2}\alpha)(e_k, e_l) &= \sum_i \left\{ \left(\bar{R}(e_i, \alpha(e_k, e_l))e_i + 2\bar{R}(e_i, e_l)\alpha(e_k, e_i) + 2\bar{R}(e_i, e_k)\alpha(e_i, e_l) \right)^\perp \right\} \\
&\quad + (\bar{R}(n\vec{H}, e_k)e_l)^\perp + \sum_i \left\{ \alpha(e_k, (\bar{R}(e_l, e_i)e_i)^\top) + \alpha((\bar{R}(e_k, e_i)e_i)^\top, e_l) \right. \\
&\quad \left. + 2\alpha((\bar{R}(e_k, e_i)e_l)^\top, e_i) \right\} + \sum_i \left\{ \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)}e_k, e_i) - \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)}e_i, e_k) \right\} \\
&\quad + \alpha(A_{\eta\vec{H}}e_k - \sum_i A_{\alpha(e_k, e_i)}e_i, e_l) \\
&\quad + \sum_i \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)}e_k - A_{\alpha(e_k, e_l)}e_i, e_i) \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Demonstração.

Assim como no Lema 5, podemos considerar (e_1, \dots, e_n) como sendo um referencial ortonormal geodésico em uma vizinhança $U \subset M$ de p . Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
(\nabla^{\perp,2}\alpha)(e_k, e_l) &= \sum_i \left\{ \nabla_i^\perp (\bar{R}(e_i, e_k)e_l)^\perp + \nabla_k^\perp ((\bar{R}(e_i, e_l)e_i)^\perp - 2\alpha(\nabla_l e_i, e_i)) \right. \\
&\quad \left. + (R^\perp(e_i, e_k)\alpha)(e_i, e_l) \right\} \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Deste modo, analisando individualmente cada componente desta equação

$$1) \sum_i \nabla_k^\perp (2\alpha(\nabla_l e_i, e_i))$$

Escrevendo $\nabla_l e_i$ na base e_j , temos

$$\nabla_l e_i = \sum_j \langle \nabla_l e_i, e_j \rangle e_j$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_i \nabla_k^\perp (2\alpha(\nabla_l e_i, e_i)) &= 2 \sum_{i,j} \nabla_k^\perp (\alpha(\langle \nabla_l e_i, e_j \rangle e_j, e_i)) \\
&= 2 \sum_{i,j} \nabla_k^\perp \langle \nabla_l e_i, e_j \rangle (\alpha(e_j, e_i)) \\
&= 2 \sum_{i,j} \{ e_k \langle \nabla_l e_i, e_j \rangle \alpha(e_j, e_i) + \langle \nabla_l e_i, e_j \rangle \nabla_k^\perp \alpha(e_j, e_i) \} \\
&= 2 \sum_{i,j} e_k \langle \nabla_l e_i, e_j \rangle \alpha(e_j, e_i)
\end{aligned}$$

Permutando os índices i e j

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j} e_k \langle \nabla_l e_i, e_j \rangle \alpha(e_j, e_i) + \sum_{i,j} e_k \langle \nabla_l e_j, e_i \rangle \alpha(e_i, e_j) \\
&= \sum_{i,j} e_k (\langle \nabla_l e_i, e_j \rangle + \langle \nabla_l e_j, e_i \rangle) \alpha(e_i, e_j) \\
&= \sum_{i,j} e_k (e_l \langle e_i, e_j \rangle) \alpha(e_i, e_j) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Nos itens 2) e 3) utilizaremos as definições de conexão normal (Definição 24) e de segunda forma fundamental (Definição 22), juntamente com o fato de \bar{M} ser localmente simétrica (Definição 17). Deste modo, temos

$$\begin{aligned}
2) \sum_i \nabla_k^\perp (\bar{R}(e_i, e_l) e_i)^\perp \\
\sum_i \nabla_k^\perp (\bar{R}(e_i, e_l) e_i)^\perp &= \sum_i (\bar{\nabla}_k (\bar{R}(e_i, e_l) e_i)^\perp)^\perp \\
&= \sum_i \left(\bar{\nabla}_k (\bar{R}(e_i, e_l) e_i - (\bar{R}(e_i, e_l) e_i)^\top) \right)^\perp \\
&= \sum_i \left(\bar{\nabla}_k (\bar{R}(e_i, e_l) e_i) - \bar{\nabla}_k (\bar{R}(e_i, e_l) e_i)^\top \right)^\perp \\
&= \sum_i \left\{ \left((\bar{\nabla}_k \bar{R})(e_i, e_l) e_i + \bar{R}(\bar{\nabla}_k e_i, e_l) e_i \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \bar{R}(e_i, \bar{\nabla}_k e_l) e_i + \bar{R}(e_i, e_l) \bar{\nabla}_k e_i \right)^\perp \right. \\
&\quad \left. - \left(\nabla_k (\bar{R}(e_i, e_l) e_i)^\top + \alpha(e_k, (\bar{R}(e_i, e_l) e_i)^\top) \right)^\perp \right\}
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\nabla_k(\bar{R}(e_i, e_l)e_i)^\top &= (\nabla_k \bar{R})(e_i, e_l)e_i + R(\nabla_k \bar{e}_i, e_l)e_i + R(e_i, \nabla_k \bar{e}_l)e_i + R(e_i, e_l)\nabla_k \bar{e}_i \\ &= 0\end{aligned}\tag{3.7}$$

Então,

$$\begin{aligned}&= \sum_i \left\{ \left(\bar{R}(\bar{\nabla}_k e_i, e_l)e_i + \bar{R}(e_i, \bar{\nabla}_k e_l)e_i + \bar{R}(e_i, e_l)\bar{\nabla}_k e_i \right)^\perp \right. \\ &\quad \left. - \left(\alpha(e_k, (\bar{R}(e_i, e_l)e_i)^\top) \right)^\perp \right\} \\ &= \sum_i \left\{ \left(\bar{R}(\nabla_k \bar{e}_i + \alpha(e_k, e_i), e_l)e_i + \bar{R}(e_i, \nabla_k \bar{e}_l + \alpha(e_k, e_l))e_i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{R}(e_i, e_l)(\nabla_k \bar{e}_i + \alpha(e_k, e_i)) \right)^\perp - \alpha(e_k, (\bar{R}(e_i, e_l)e_i)^\top) \right\} \\ &= \sum_i \left\{ \left(\bar{R}(\alpha(e_k, e_i), e_l)e_i + \bar{R}(e_i, \alpha(e_k, e_l))e_i + \bar{R}(e_i, e_l)\alpha(e_k, e_i) \right)^\perp \right. \\ &\quad \left. - \alpha(e_k, (\bar{R}(e_i, e_l)e_i)^\top) \right\}\end{aligned}\tag{3.8}$$

$$3) \sum_i \nabla_i^\perp (\bar{R}(e_i, e_k)e_l)^\perp$$

$$\begin{aligned}\sum_i \nabla_i^\perp (\bar{R}(e_i, e_k)e_l)^\perp &= \sum_i \left(\bar{\nabla}_i (\bar{R}(e_i, e_k)e_l - (\bar{R}(e_i, e_k)e_l)^\top) \right)^\perp \\ &= \sum_i \left\{ \left((\bar{\nabla}_i \bar{R})(e_i, e_k)e_l + \bar{R}(\bar{\nabla}_i e_i, e_k)e_l + \bar{R}(e_i, \bar{\nabla}_i e_k)e_l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{R}(e_i, e_k)\bar{\nabla}_i e_l \right)^\perp - \left(\bar{\nabla}_i (\bar{R}(e_i, e_k)e_l)^\top \right)^\perp \right\} \\ &= \sum_i \left\{ \left(\bar{R}(\nabla_i \bar{e}_i + \alpha(e_i, e_i), e_k)e_l + \bar{R}(e_i, \nabla_i \bar{e}_k + \alpha(e_i, e_k))e_l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{R}(e_i, e_k)(\nabla_i \bar{e}_l + \alpha(e_i, e_l)) \right)^\perp \right. \\ &\quad \left. - \left(\nabla_i (\bar{R}(e_i, e_k)e_l)^\top + \alpha(e_i, (\bar{R}(e_i, e_k)e_l)^\top) \right)^\perp \right\}\end{aligned}$$

Utilizando novamente (3.7) e a noção de curvatura média (Definição 2.7), temos

$$\begin{aligned}&= \sum_i \left\{ \left(\bar{R}(\alpha(e_i, e_i), e_k)e_l + \bar{R}(e_i, \alpha(e_i, e_k))e_l + \bar{R}(e_i, e_k)\alpha(e_i, e_l) \right)^\perp \right. \\ &\quad \left. - \alpha(e_i, (\bar{R}(e_i, e_k)e_l)^\top) \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\bar{R}(n\vec{H}, e_k)e_l + \sum_i \left\{ \bar{R}(e_i, \alpha(e_i, e_k))e_l + \bar{R}(e_i, e_k)\alpha(e_i, e_l) \right\} \right)^\perp \\
&\quad - \sum_i \alpha(e_i, (\bar{R}(e_i, e_k)e_l)^\top)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$4) \sum_i (R^\perp(e_i, e_k)\alpha)(e_i, e_l)$$

$$\begin{aligned}
\sum_i (R^\perp(e_i, e_k)\alpha)(e_i, e_l) &= \sum_i (\nabla_i^\perp \nabla_k^\perp \alpha - \nabla_k^\perp \nabla_i^\perp \alpha - \cancel{\nabla_{[e_i, e_k]}^\perp} \alpha)(e_i, e_l) \\
&= \sum_i \left\{ (\nabla_i^\perp \nabla_k^\perp \alpha)(e_i, e_l) - (\nabla_k^\perp \nabla_i^\perp \alpha)(e_i, e_l) \right\} \begin{array}{l} \text{Diferencial} \\ \text{Covariante} \end{array} \\
&= \sum_i \left\{ \nabla_i^\perp ((\nabla_k^\perp \alpha)(e_i, e_l)) - \nabla_k^\perp ((\nabla_i^\perp \alpha)(e_i, e_l)) \right\} \\
&= \sum_i \left\{ \nabla_i^\perp (\nabla_k^\perp (\alpha(e_i, e_l)) - \alpha(\nabla_k e_i, e_l) - \alpha(e_i, \nabla_k e_l)) \right. \\
&\quad \left. - \nabla_k^\perp (\nabla_i^\perp (\alpha(e_i, e_l)) + \alpha(\nabla_i e_i, e_l) + \alpha(e_i, \nabla_i e_l)) \right\} \\
&= \sum_i \left\{ \nabla_i^\perp \nabla_k^\perp (\alpha(e_i, e_l)) - \nabla_i^\perp (\alpha(\nabla_k e_i, e_l)) - \nabla_i^\perp (\alpha(e_i, \nabla_k e_l)) \right. \\
&\quad \left. - \nabla_k^\perp \nabla_i^\perp (\alpha(e_i, e_l)) + \nabla_k^\perp (\alpha(\nabla_i e_i, e_l)) + \nabla_k^\perp (\alpha(e_i, \nabla_i e_l)) \right\}
\end{aligned}$$

Como $\nabla_{[e_i, e_k]} \alpha(e_i, e_l) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \left\{ R^\perp(e_i, e_k)\alpha(e_i, e_l) - \nabla_i^\perp (\alpha(\nabla_k e_i, e_l)) - \nabla_i^\perp (\alpha(e_i, \nabla_k e_l)) \right. \\
&\quad \left. + \nabla_k^\perp (\alpha(\nabla_i e_i, e_l)) + \nabla_k^\perp (\alpha(e_i, \nabla_i e_l)) \right\}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\nabla_i^\perp (\alpha(\nabla_k e_i, e_l)) &= (\nabla_i^\perp \alpha)(\cancel{\nabla_k e_i}, e_l) + \alpha(\nabla_i \nabla_k e_i, e_l) + \alpha(\cancel{\nabla_k e_i}, \cancel{\nabla_i e_l}) \\
&= \alpha(\nabla_i \nabla_k e_i, e_l)
\end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever a equação (3.10)

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \left\{ R^\perp(e_i, e_k)\alpha(e_i, e_l) - \alpha(\nabla_i \nabla_k e_i, e_l) - \alpha(\nabla_i \nabla_k e_l, e_i) \right. \\
&\quad \left. + \alpha(\nabla_k \nabla_i e_i, e_l) + \alpha(\nabla_k \nabla_i e_l, e_i) \right\} \\
&= \sum_i \left\{ R^\perp(e_i, e_k)\alpha(e_i, e_l) + \alpha(\nabla_k \nabla_i e_i - \nabla_i \nabla_k e_i, e_l) + \alpha(\nabla_k \nabla_i e_l - \nabla_i \nabla_k e_l, e_i) \right\} \\
&= \sum_i \left\{ R^\perp(e_i, e_k)\alpha(e_i, e_l) + \alpha(R(e_k, e_i)e_i, e_l) + \alpha(R(e_k, e_i)e_l, e_i) \right\}
\end{aligned}$$

Aplicando as equações de Ricci (2.12) e de Gauss (2.8) na equação acima, temos

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \left\{ \left(\bar{R}(e_i, e_k) \alpha(e_i, e_l) \right)^\perp - \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)} e_i, e_k) + \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)} e_k, e_i) \right. \\
&\quad + \alpha\left((\bar{R}(e_k, e_i) e_i)^\top - A_{\alpha(e_k, e_i)} e_i + A_{\alpha(e_i, e_i)} e_k, e_l \right) \\
&\quad \left. + \alpha\left((\bar{R}(e_k, e_i) e_l)^\top - A_{\alpha(e_k, e_l)} e_i + A_{\alpha(e_i, e_l)} e_k, e_i \right) \right\} \\
&= \sum_i \left\{ \left(\bar{R}(e_i, e_k) \alpha(e_i, e_l) \right)^\perp - \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)} e_i, e_k) + \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)} e_k, e_i) \right\} \\
&\quad + \sum_i \alpha\left((\bar{R}(e_k, e_i) e_i)^\top, e_l \right) + \alpha\left(A_{n\vec{H}} e_k - \sum_i A_{\alpha(e_k, e_i)} e_i, e_l \right) \\
&\quad + \sum_i \alpha\left((\bar{R}(e_k, e_i) e_l)^\top, e_i \right) + \sum_i \alpha\left(A_{\alpha(e_i, e_l)} e_k - A_{\alpha(e_k, e_l)} e_i, e_i \right) \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Substituindo os valores das equações (3.6), (3.8), (3.9), (3.11) na equação (3.5), encontramos

$$\begin{aligned}
(\nabla^{\perp, 2} \alpha)(e_k, e_l) &= \sum_i \left\{ \left(\underbrace{\bar{R}(\alpha(e_k, e_i), e_l) e_i + \bar{R}(e_i, \alpha(e_k, e_l)) e_i}_{1} + \underbrace{\bar{R}(e_i, e_l) \alpha(e_k, e_i)}_1 \right)^\perp \right. \\
&\quad \left. - \alpha\left(e_k, \underbrace{(\bar{R}(e_i, e_l) e_i)^\top}_{\text{antisimetria}} \right) \right\} \\
&\quad + \left(\bar{R}(n\vec{H}, e_k) e_l + \sum_i \left\{ \underbrace{\bar{R}(e_i, \alpha(e_i, e_k)) e_l}_1 + \underbrace{\bar{R}(e_i, e_k) \alpha(e_i, e_l)}_2 \right\} \right)^\perp \\
&\quad - \sum_i \alpha\left(e_i, \underbrace{(\bar{R}(e_i, e_k) e_l)^\top}_3 \right) \\
&\quad + \sum_i \left\{ \left(\underbrace{\bar{R}(e_i, e_k) \alpha(e_i, e_l)}_2 \right)^\perp - \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)} e_i, e_k) + \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)} e_k, e_i) \right\} \\
&\quad + \sum_i \alpha\left((\bar{R}(e_k, e_i) e_i)^\top, e_l \right) + \alpha\left(A_{n\vec{H}} e_k - \sum_i A_{\alpha(e_k, e_i)} e_i, e_l \right) \\
&\quad + \sum_i \alpha\left((\bar{R}(e_k, e_i) e_l)^\top, e_i \right) + \sum_i \alpha\left(A_{\alpha(e_i, e_l)} e_k - A_{\alpha(e_k, e_l)} e_i, e_i \right)
\end{aligned}$$

Reescrevendo a equação anterior, considerando que os termos com índice 2 são iguais, assim como os termos com índice 3, e aplicando nos termos com índice 1 a seguinte igualdade

$$\sum_i \left\{ \bar{R}(\alpha(e_k, e_i), e_l) e_i + \bar{R}(e_i, \alpha(e_k, e_l)) e_l \right\} = \sum_i \bar{R}(e_i, e_l) \alpha(e_k, e_i),$$

dada pela 1ª identidade de Bianchi (1.5), temos que

$$(\nabla^{\perp, 2} \alpha)(e_k, e_l) = \sum_i \left\{ \left(\bar{R}(e_i, \alpha(e_k, e_l)) e_i + 2\bar{R}(e_i, e_l) \alpha(e_k, e_i) + 2\bar{R}(e_i, e_k) \alpha(e_i, e_l) \right)^\perp \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + (\bar{R}(n\vec{H}, e_k)e_l)^\perp + \sum_i \left\{ \alpha(e_k, (\bar{R}(e_l, e_i)e_i)^\top) + \alpha((\bar{R}(e_k, e_i)e_i)^\top, e_l) \right. \\
& + \left. 2\alpha((\bar{R}(e_k, e_i)e_l)^\top, e_i) \right\} + \sum_i \left\{ \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)}e_k, e_i) - \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)}e_i, e_k) \right\} \\
& + \alpha(A_{n\vec{H}}e_k - \sum_i A_{\alpha(e_k, e_i)}e_i, e_l) \\
& + \sum_i \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)}e_k - A_{\alpha(e_k, e_l)}e_i, e_i)
\end{aligned}$$

□

Para o próximo lema, é necessário recordarmos os seguintes resultados.

Seja $\{e_\xi\}_{\xi=n+1}^{n+m}$ uma base de $\mathfrak{X}(U)^\perp$, temos

$$\begin{aligned}
\alpha(e_i, e_l) &= \sum_\xi \langle \alpha(e_i, e_l), e_\xi \rangle e_\xi \\
&= \sum_\xi \langle A_\xi e_l, e_i \rangle e_\xi
\end{aligned}$$

Além disso, seja $f \in C^\infty(M)$, temos

$$\begin{aligned}
A_{fe_\xi}e_i &= -(\bar{\nabla}_i f e_\xi)^\top \\
&= -(f\bar{\nabla}_i e_\xi + e_i(f)e_\xi)^\top \\
&= -(f\bar{\nabla}_i e_\xi)^\top \\
&= fA_\xi e_i
\end{aligned}$$

Assim, para $\alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)}e_k, e_i)$, temos

$$\begin{aligned}
\alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)}e_k, e_i) &= \sum_\xi \alpha(A_{\langle A_\xi e_l, e_i \rangle e_\xi}e_k, e_i) \\
&= \sum_\xi \langle A_\xi e_l, e_i \rangle \alpha(A_\xi e_k, e_i)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Lema 7. *Seja M^n uma variedade riemanniana imersa isometricamente em \bar{M}^{n+m} . Então, para todo $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, vale as seguintes igualdades*

$$\begin{aligned}
a) \quad & \langle \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)}e_k, e_i) - \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)}e_i, e_k), N \rangle = \sum_\xi \langle e_l, A_\xi [A_N, A_\xi] e_k \rangle \\
b) \quad & \langle \alpha(A_{n\vec{H}}e_k - A_{\alpha(e_k, e_i)}e_i, e_l), N \rangle = \langle e_l, A_N A_{n\vec{H}}e_k \rangle - \sum_\xi \langle A_N A_\xi^2 e_k, e_l \rangle
\end{aligned}$$

$$c) \langle \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)} e_k - A_{\alpha(e_k, e_l)} e_i, e_i), N \rangle = \sum_{\xi} \{ \langle A_{\xi} A_N A_{\xi} e_k, e_l \rangle - \langle A_{\xi} e_k, e_l \rangle \text{tr}(A_N A_{\xi}) \}$$

onde A é o operador de forma, \vec{H} o vetor curvatura média e (e_1, \dots, e_{n+m}) um referencial ortonormal adaptado a uma vizinhança $\bar{U} \subset \bar{M}$ de p .

Demonstração.

a) Utilizando o resultado obtido em (3.12), tem-se

$$\begin{aligned} & \sum_i \langle \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)} e_k, e_i) - \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)} e_i, e_k) N \rangle \\ &= \sum_{i, \xi} \left\{ \langle A_{\xi} e_l, e_i \rangle \langle \alpha(A_{\xi} e_k, e_i), N \rangle - \langle A_{\xi} e_l, e_i \rangle \langle \alpha(A_{\xi} e_i, e_k), N \rangle \right\} \\ &= \sum_{i, \xi} \left\{ \langle A_{\xi} e_l, e_i \rangle \langle A_{\xi} e_k, A_N e_i \rangle - \langle A_{\xi} e_l, e_i \rangle \langle A_{\xi} e_i, A_N e_k \rangle \right\} \end{aligned}$$

Como o operador de forma é autoadjunto, encontramos

$$\begin{aligned} &= \sum_{i, \xi} \left\{ \langle A_{\xi} e_l, e_i \rangle \langle A_N A_{\xi} e_k, e_i \rangle - \langle A_{\xi} e_l, e_i \rangle \langle e_i, A_{\xi} A_N e_k \rangle \right\} \\ &= \sum_{i, \xi} \left\{ \langle A_{\xi} e_l, A_N A_{\xi} e_k \rangle - \langle A_{\xi} e_l, A_{\xi} A_N e_k \rangle \right\} \\ &= \sum_{i, \xi} \left\{ \langle A_{\xi} e_l, A_N A_{\xi} e_k - A_{\xi} A_N e_k \rangle \right\} \\ &= \sum_{i, \xi} \langle e_l, A_{\xi} [A_N, A_{\xi}] e_k \rangle \end{aligned} \tag{3.13}$$

b) Por (3.12), temos

$$\begin{aligned} \langle \alpha(A_{n\vec{H}} e_k - \sum_i A_{\alpha(e_k, e_i)} e_i, e_l), N \rangle &= \langle \alpha(A_{n\vec{H}} e_k, e_l), N \rangle - \sum_{i\eta} \langle A_{\xi} e_k, e_i \rangle \langle \alpha A_{\xi} e_i, e_l \rangle, N \rangle \\ &= \langle A_N e_l, A_{n\vec{H}} e_k \rangle - \sum_{i, \xi} \langle A_{\xi} e_k, e_i \rangle \langle A_N e_l, A_{\xi} e_i \rangle \\ &= \langle e_l, A_N A_{n\vec{H}} e_k \rangle - \sum_{i, \xi} \langle A_{\xi} e_k, e_i \rangle \langle A_{\xi} A_N e_l, e_i \rangle \\ &= \langle e_l, A_N A_{n\vec{H}} e_k \rangle - \sum_{\xi} \langle A_{\xi} e_k, A_{\xi} A_N e_l \rangle \\ &= \langle e_l, A_N A_{n\vec{H}} e_k \rangle - \sum_{\xi} \langle A_N A_{\xi}^2 e_k, e_l \rangle \end{aligned}$$

c) Aplicando novamente (3.12)

$$\begin{aligned}
& \langle \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)} e_k - A_{\alpha(e_k, e_l)} e_i, e_i), N \rangle \\
&= \sum_{\xi} \{ \langle A_{\xi} e_l, e_i \rangle \langle \alpha(A_{\xi} e_k, e_i), N \rangle - \langle A_{\xi} e_k, e_l \rangle \langle \alpha(A_{\xi} e_i, e_i), N \rangle \} \\
&= \sum_{\xi} \{ \langle A_{\xi} e_l, e_i \rangle \langle A_N e_i, A_{\xi} e_k \rangle - \langle A_{\xi} e_k, e_l \rangle \langle A_N e_i, A_{\xi} e_i \rangle \} \\
&= \sum_{\xi} \{ \langle A_{\xi} e_l, e_i \rangle \langle e_i, A_N A_{\xi} e_k \rangle - \langle A_{\xi} e_k, e_l \rangle \langle e_i, A_N A_{\xi} e_i \rangle \} \\
&= \sum_{\xi} \{ \langle A_{\xi} e_l, A_N A_{\xi} e_k \rangle - \langle A_{\xi} e_k, e_l \rangle \text{tr}(A_N A_{\xi}) \} \\
&= \sum_{\xi} \{ \langle e_l, A_{\xi} A_N A_{\xi} e_k \rangle - \langle A_{\xi} e_k, e_l \rangle \text{tr}(A_N A_{\xi}) \}
\end{aligned}$$

□

Com posse destes resultados, podemos enunciar e demonstrar a fórmula de Simons (3.14).

Teorema 4. *Sejam \overline{M}^{n+m} um espaço localmente simétrico de dimensão $n+m$ e $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana n -dimensional M^n em \overline{M}^{n+m} . Se φ tem vetor curvatura média \vec{H} paralelo, então,*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Delta(|\alpha|^2) &= |\nabla^{\perp} \alpha|^2 + \sum_{i,k,l} \langle \overline{R}(e_i, \alpha(e_k, e_l)) e_i, \alpha(e_k, e_l) \rangle + 4 \sum_{i,k,l} \langle \overline{R}(e_i, e_l) \alpha(e_k, e_i), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\
&+ \sum_{k,l} \langle \overline{R}(n\vec{H}, e_k) e_l, \alpha(e_k, e_l) \rangle + 2 \sum_{i,k,l} \langle \alpha((\overline{R}(e_l, e_i) e_i)^{\top}, e_k), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\
&+ 2 \sum_{i,k,l} \langle \alpha((\overline{R}(e_k, e_i) e_l)^{\top}, e_i), \alpha(e_k, e_l) \rangle + \sum_{\mu, \xi} \text{tr}(A_{\xi}) \text{tr}(A_{\mu}^2 A_{\xi}) - \sum_{\mu, \xi} (\text{tr}(A_{\mu} A_{\xi}))^2 \\
&- \sum_{\mu, \xi} |[A_{\mu}, A_{\xi}]|^2
\end{aligned} \tag{3.14}$$

onde α é a segunda forma fundamental de φ , (e_1, \dots, e_n) e $(e_{n+1}, \dots, e_{n+m})$ são referenciais ortonormais arbitrários para $\mathfrak{X}(U)$ e $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$, respectivamente, definidos no aberto $U \subset M$, \overline{R} é o operador de curvatura de \overline{M} e A_{ξ} é o operador de Weingarten de φ na direção de e_{ξ} .

Demonstração.

Inicialmente observe que o segundo membro da fórmula (3.14) não depende do referencial, devido a este ser constituído apenas pelos tensores α e R . Assim, podemos fixar um referencial

ortonormal (e_1, \dots, e_{n+m}) em uma vizinhança $\bar{U} \subset \bar{M}$ de p , tal que $U = \bar{U} \cap M$ e (e_1, \dots, e_n) é um referencial ortonormal para $\mathfrak{X}(U)$, geodésico em p . Então, utilizando a definição de Laplaciano em um referencial geodésico (2.14), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta(|\alpha|^2) &= \frac{1}{2} \sum_i e_i(e_i(|\alpha|^2)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,k,l} e_i(e_i \langle \alpha(e_k, e_l), \alpha(e_k, e_l) \rangle) \\
&= \sum_{i,k,l} e_i \langle \nabla_i^\perp(\alpha(e_k, e_l)), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\
&= \sum_{i,k,l} e_i \langle (\nabla_i^\perp \alpha)(e_k, e_l) + \alpha(\nabla_i e_k, e_l) + \alpha(e_k, \nabla_i e_l), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\
&= \sum_{i,k,l} \left\{ e_i \langle (\nabla_i^\perp \alpha)(e_k, e_l), \alpha(e_k, e_l) \rangle + e_i \langle \alpha(\nabla_i e_k, e_l), \alpha(e_k, e_l) \rangle \right. \\
&\quad \left. + e_i \langle \alpha(e_k, \nabla_i e_l), \alpha(e_k, e_l) \rangle \right\} \\
&= \sum_{i,k,l} \left\{ \langle \nabla_i^\perp((\nabla_i^\perp \alpha)(e_k, e_l)), \alpha(e_k, e_l) \rangle + \langle (\nabla_i^\perp \alpha)(e_k, e_l), \nabla_i^\perp(\alpha(e_k, e_l)) \rangle \right. \\
&\quad + \langle \nabla_i^\perp(\alpha(\nabla_i e_k, e_l)), \alpha(e_k, e_l) \rangle + \langle \alpha(\nabla_i e_k, e_l), \nabla_i^\perp(\alpha(e_k, e_l)) \rangle \\
&\quad \left. + \langle \nabla_i^\perp(\alpha(e_k, \nabla_i e_l)), \alpha(e_k, e_l) \rangle + \langle \alpha(e_k, \nabla_i e_l), \nabla_i^\perp(\alpha(e_k, e_l)) \rangle \right\} \quad (3.15)
\end{aligned}$$

onde usamos na última igualdade a compatibilidade com a métrica (Definição 11) e o fato do referencial ser geodésico em p .

Analisando cada termo da equação acima separadamente, temos em p

1)

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_i^\perp((\nabla_i^\perp \alpha)(e_k, e_l)), \alpha(e_k, e_l) \rangle &= \langle (\nabla_i^\perp \nabla_i^\perp \alpha)(e_k, e_l) + (\nabla_i^\perp \alpha)(\nabla_i e_k, e_l) \\
&\quad + (\nabla_i^\perp \alpha)(e_k, \nabla_i e_l), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\
&= \langle (\nabla_i^\perp \nabla_i^\perp \alpha)(e_k, e_l), \alpha(e_k, e_l) \rangle
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_i^\perp \alpha)(e_k, e_l), \nabla_i^\perp(\alpha(e_k, e_l)) \rangle &= \langle (\nabla_i^\perp \alpha)(e_k, e_l), (\nabla_i^\perp \alpha)(e_k, e_l) + \alpha(\nabla_i e_k, e_l) \\
&\quad + \alpha(e_k, \nabla_i e_l) \rangle \\
&= \langle (\nabla_i^\perp \alpha)(e_k, e_l), (\nabla_i^\perp \alpha)(e_k, e_l) \rangle
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\langle \nabla_i^\perp(\alpha(\nabla_i e_k, e_l)), \alpha(e_k, e_l) \rangle &= \langle (\nabla_i^\perp \alpha)(\cancel{\nabla_i e_k}, e_l) \rangle + \alpha(\cancel{\nabla_i \nabla_i e_k}, e_l) \\ &\quad + \alpha(\cancel{\nabla_i e_k}, \cancel{\nabla_i e_l}), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}\langle \nabla_i^\perp(\alpha(e_k, \nabla_i e_l)), \alpha(e_k, e_l) \rangle &= \langle (\nabla_i^\perp \alpha)(e_k, \cancel{\nabla_i e_l}) \rangle + \alpha(\cancel{\nabla_i e_k}, \cancel{\nabla_i e_l}) \\ &\quad + \alpha(e_k, \cancel{\nabla_i \nabla_i e_l}), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Substituindo esses resultados em (3.15), tem-se

$$\sum_{i,k,l} \left\{ \langle (\nabla_i^\perp \nabla_i^\perp \alpha)(e_k, e_l), \alpha(e_k, e_l) \rangle + \langle (\nabla_i^\perp \alpha)(e_k, e_l), (\nabla_i^\perp \alpha)(e_k, e_l) \rangle \right\} \quad (3.16)$$

Podemos reescrever (3.16) utilizando o Laplaciano (2.15) e a norma ao quadrado da segunda forma fundamental (2.4), obtendo

$$\frac{1}{2} \Delta(|\alpha|^2) = \langle \nabla^{\perp,2} \alpha, \alpha \rangle + |\nabla^\perp \alpha|^2 \quad (3.17)$$

Para calcularmos

$$\langle \nabla^{\perp,2} \alpha, \alpha \rangle = \sum_{k,l} \langle (\nabla^{\perp,2} \alpha)(e_k, e_l), \alpha(e_k, e_l) \rangle \quad (3.18)$$

Observe que, pelo Lema 6

$$\begin{aligned}(\nabla^{\perp,2} \alpha)(e_k, e_l) &= \sum_i \left\{ \left(\bar{R}(e_i, \alpha(e_k, e_l)) e_i + 2\bar{R}(e_i, e_l) \alpha(e_k, e_i) + 2\bar{R}(e_i, e_k) \alpha(e_i, e_l) \right)^\perp \right\} \\ &\quad + (\bar{R}(n\vec{H}, e_k) e_l)^\perp + \sum_i \left\{ \alpha(e_k, (\bar{R}(e_l, e_i) e_i)^\top) + \alpha((\bar{R}(e_k, e_i) e_i)^\top, e_l) \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha((\bar{R}(e_k, e_i) e_l)^\top, e_i) \right\} + \sum_i \left\{ \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)} e_k, e_i) - \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)} e_i, e_k) \right\} \\ &\quad + \alpha(A_{\eta\vec{H}} e_k - \sum_i A_{\alpha(e_k, e_i)} e_i, e_l) \\ &\quad + \sum_i \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)} e_k - A_{\alpha(e_k, e_l)} e_i, e_i) \quad (3.19)\end{aligned}$$

Como queremos calcular (3.18), considere inicialmente, lembrando que $\alpha \in \Gamma(TM^\perp)$

$$\begin{aligned} & \sum_{k,l} \left\langle \sum_i \left\{ \bar{R}(e_i, \alpha(e_k, e_l))e_i + 2\bar{R}(e_i, e_l)\alpha(e_k, e_i) + \underbrace{2\bar{R}(e_i, e_k)\alpha(e_i, e_l)}_1 \right\} \right. \\ & \quad + (\bar{R}(n\vec{H}, e_k)e_l)^\perp + \sum_i \left\{ \alpha(e_k, (\bar{R}(e_l, e_i)e_i)^\top) + \alpha(\underbrace{(\bar{R}(e_k, e_i)e_i)^\top}_2, e_l) \right. \\ & \quad \left. \left. + 2\alpha((\bar{R}(e_k, e_i)e_l)^\top, e_i) \right\}, \alpha(e_k, e_l) \right\rangle \end{aligned}$$

trocando os índices mudos k, l das equações 1 e 2, e somando o resultado dos termos comuns, obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{i,k,l} \langle \bar{R}(e_i, \alpha(e_k, e_l))e_i, \alpha(e_k, e_l) \rangle + 4 \sum_{i,k,l} \langle \bar{R}(e_i, e_l)\alpha(e_k, e_i), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\ & + \sum_{k,l} \langle \bar{R}(n\vec{H}, e_k)e_l, \alpha(e_k, e_l) \rangle + 2 \sum_{i,k,l} \langle \alpha(e_k, (\bar{R}(e_l, e_i)e_i)^\top), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\ & + 2 \sum_{i,k,l} \langle \alpha((\bar{R}(e_k, e_i)e_l)^\top, e_i), \alpha(e_k, e_l) \rangle \end{aligned} \quad (3.20)$$

Para os termos restantes da equação (3.19)

$$\begin{aligned} & \sum_{k,l} \left\langle \sum_i \left\{ \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)}e_k, e_i) - \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)}e_i, e_k) \right\} + \alpha(A_{n\vec{H}}e_k - \sum_i A_{\alpha(e_k, e_i)}e_i, e_l) \right. \\ & \quad \left. + \sum_i \alpha(A_{\alpha(e_i, e_l)}e_k - A_{\alpha(e_k, e_l)}e_i, e_i), \alpha(e_k, e_l) \right\rangle, \end{aligned}$$

considere o Lema 7, e tome $\alpha(e_k, e_l) = N$. Logo,

$$\begin{aligned} & = \sum_{k,l} \left\{ \sum_\xi \langle e_l, A_\xi[A_N, A_\xi]e_k \rangle + \langle e_l, A_N A_{n\vec{H}}e_k \rangle \right. \\ & \quad \left. - \sum_\xi \langle A_N A_\xi^2 e_k, e_l \rangle + \sum_\xi \left\{ \langle A_\xi A_N A_\xi e_k, e_l \rangle - \langle A_\xi e_k, e_l \rangle \text{tr}(A_N A_\xi) \right\} \right\} \end{aligned}$$

Utilizando a definição de colchetes, temos

$$\begin{aligned} & = \sum_{k,l} \left\{ \langle e_l, A_N A_{n\vec{H}}e_k \rangle - \sum_\xi \langle A_\xi e_k, e_l \rangle \text{tr}(A_N A_\xi) + \sum_\xi \langle e_l, A_\xi[A_N, A_\xi]e_k - A_N A_\xi^2 e_k + A_\xi A_N A_\xi e_k \rangle \right\} \\ & = \sum_{k,l} \left\{ \langle e_l, A_N A_{n\vec{H}}e_k \rangle - \sum_\xi \langle A_\xi e_k, e_l \rangle \text{tr}(A_N A_\xi) + \sum_\xi \langle e_l, A_\xi[A_N, A_\xi]e_k - [A_N, A_\xi]A_\xi e_k \rangle \right\} \\ & = \sum_{k,l} \left\{ \langle e_l, A_N A_{n\vec{H}}e_k \rangle - \sum_\xi \langle A_\xi e_k, e_l \rangle \text{tr}(A_N A_\xi) + \sum_\xi \langle e_l, A_\xi[A_N, A_\xi]e_k - [A_N, A_\xi]A_\xi e_k \rangle \right\} \\ & = \sum_{k,l} \left\{ \langle e_l, A_N A_{n\vec{H}}e_k \rangle - \sum_\xi \langle A_\xi e_k, e_l \rangle \text{tr}(A_N A_\xi) + \sum_\xi \langle e_l, [A_\xi, [A_N, A_\xi]]e_k \rangle \right\} \end{aligned}$$

Considerando $N = \alpha(e_k, e_l) = \sum_{\mu} \langle A_{\mu} e_k, e_l \rangle e_{\mu}$, ao utilizarmos uma ideia análoga a (3.12),

obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{k,l,\mu} \langle A_{\mu} e_k, e_l \rangle \langle e_l, A_{\mu} A_{n\vec{H}} e_k \rangle - \sum_{k,l,\mu,\xi} \langle A_{\xi} e_k, e_l \rangle \langle A_{\mu} e_k, e_l \rangle \text{tr}(A_{\mu} A_{\xi}) \\ & + \sum_{k,l,\mu,\xi} \langle A_{\mu} e_k, e_l \rangle \langle e_l, [A_{\xi}, [A_{\mu}, A_{\xi}]] e_k \rangle \end{aligned} \quad (3.21)$$

Analisando individualmente cada um dos termos da equação acima, encontramos

1) Observe que por (2.7), temos $n\vec{H} = \sum_{\xi} \text{tr}(A_{\xi}) e_{\xi}$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{k,l,\mu} \langle A_{\mu} e_k, e_l \rangle \langle e_l, A_{\mu} A_{n\vec{H}} e_k \rangle &= \sum_{k,\mu} \langle A_{\mu} e_k, A_{\mu} A_{n\vec{H}} e_k \rangle \\ &= \sum_{k,\mu,\xi} \text{tr}(A_{\xi}) \langle A_{\mu} e_k, A_{\mu} A_{\xi} e_k \rangle \\ &= \sum_{k,\mu,\xi} \text{tr}(A_{\xi}) \langle e_k, A_{\mu}^2 A_{\xi} e_k \rangle \\ &= \sum_{\mu,\xi} \text{tr}(A_{\xi}) \text{tr}(A_{\mu}^2 A_{\xi}) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \sum_{k,l,\mu,\xi} \langle A_{\xi} e_k, e_l \rangle \langle A_{\mu} e_k, e_l \rangle \text{tr}(A_{\mu} A_{\xi}) &= \sum_{k,\mu,\xi} \langle A_{\xi} e_k, A_{\mu} e_k \rangle \text{tr}(A_{\mu} A_{\xi}) \\ &= \sum_{\mu,\xi} \text{tr}(A_{\mu} A_{\xi}) \text{tr}(A_{\mu} A_{\xi}) \\ &= \sum_{\mu,\xi} (\text{tr}(A_{\mu} A_{\xi}))^2 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \sum_{k,l,\mu,\xi} \langle A_{\mu} e_k, e_l \rangle \langle e_l, [A_{\xi}, [A_{\mu}, A_{\xi}]] e_k \rangle &= \sum_{k,\mu,\xi} \langle A_{\mu} e_k, [A_{\xi}, [A_{\mu}, A_{\xi}]] e_k \rangle \\ &= \sum_{\mu,\xi} \text{tr}(A_{\mu} [A_{\xi}, [A_{\mu}, A_{\xi}]]) \\ &= \sum_{\mu,\xi} \text{tr}(A_{\mu} A_{\xi} [A_{\mu}, A_{\xi}] - A_{\mu} [A_{\mu}, A_{\xi}] A_{\xi}) \\ &= \sum_{\mu,\xi} \{ \text{tr}(A_{\mu} A_{\xi} [A_{\mu}, A_{\xi}]) - \text{tr}(A_{\mu} [A_{\mu}, A_{\xi}] A_{\xi}) \} \end{aligned}$$

Sabendo que $[A_\mu, A_\xi]^t = -[A_\mu, A_\xi]$, e que $tr(AB) = tr(BA)$, tem-se

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu, \xi} \{ tr(A_\mu A_\xi [A_\mu, A_\xi]) - tr([A_\mu, A_\xi] A_\xi A_\mu) \} \\
&= \sum_{\mu, \xi} \{ tr(A_\mu A_\xi [A_\mu, A_\xi]) - tr(A_\xi A_\mu [A_\mu, A_\xi]) \} \\
&= \sum_{\mu, \xi} \{ tr((A_\mu A_\xi - A_\xi A_\mu) [A_\mu, A_\xi]) \} \\
&= \sum_{\mu, \xi} \{ tr([A_\mu, A_\xi] [A_\mu, A_\xi]) \} \\
&= - \sum_{\mu, \xi} tr([A_\mu, A_\xi] [A_\mu, A_\xi]^t) \\
&= - \sum_{\mu, \xi} |[A_\mu, A_\xi]|^2
\end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrados em (3.21), podemos reescrever essa equação da seguinte forma

$$\sum_{\mu, \xi} tr(A_\xi) tr(A_\mu^2 A_\xi) - \sum_{\mu, \xi} (tr(A_\mu A_\xi))^2 - \sum_{\mu, \xi} |[A_\mu, A_\xi]|^2 \quad (3.22)$$

Reunindo (3.20) e (3.22), mostramos que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla^{\perp, 2} \alpha, \alpha \rangle(e_k, e_l) &= \sum_{i, k, l} \langle \bar{R}(e_i, \alpha(e_k, e_l)) e_i, \alpha(e_k, e_l) \rangle + 4 \sum_{i, k, l} \langle \bar{R}(e_i, e_l) \alpha(e_k, e_i), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\
&+ \sum_{k, l} \langle \bar{R}(n \bar{H}, e_k) e_l, \alpha(e_k, e_l) \rangle + 2 \sum_{i, k, l} \langle \alpha(e_k, (\bar{R}(e_l, e_i) e_i)^\top), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\
&+ 2 \sum_{i, k, l} \langle \alpha((\bar{R}(e_k, e_i) e_l)^\top, e_i), \alpha(e_k, e_l) \rangle + \sum_{\mu, \xi} tr(A_\xi) tr(A_\mu^2 A_\xi) \\
&- \sum_{\mu, \xi} (tr(A_\mu A_\xi))^2 - \sum_{\mu, \xi} |[A_\mu, A_\xi]|^2
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado supracitado em (3.18), obtemos (3.14). □

Uma consequência da fórmula de Simons é o seguinte resultado.

Corolário 4. *Seja \bar{M}^{n+m} uma variedade riemanniana de dimensão $n+m$, com curvatura seccional constante e igual a c . Se $\varphi : M^n \rightarrow \bar{M}_c^{n+m}$ é uma imersão isométrica mínima de uma variedade n -dimensional M^n em \bar{M}_c^{n+m} , então*

$$\frac{1}{2} \Delta(|\alpha|^2) = |\nabla^{\perp} \alpha|^2 + nc|\alpha|^2 - \sum_{\mu, \xi} (tr(A_\mu A_\xi))^2 - \sum_{\mu, \xi} |[A_\mu, A_\xi]|^2, \quad (3.23)$$

onde α é a segunda forma fundamental de φ , $\{e_{n+1}, \dots, e_{n+m}\}$ é um referencial ortonormal arbitrário para $\mathfrak{X}(U)^\perp$, definido em um aberto $U \subset M$, e A_ξ é o operador de forma de φ na direção e_ξ , para $n+1 \leq \xi \leq n+m$.

Demonstração.

Nas condições estabelecidas por hipótese, e considerando os termos da equação (3.14), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta(|\alpha|^2) &= |\nabla^\perp \alpha|^2 + \sum_{i,k,l} \langle \bar{R}(e_i, \alpha(e_k, e_l))e_i, \alpha(e_k, e_l) \rangle + 4 \sum_{i,k,l} \langle \bar{R}(e_i, e_l)\alpha(e_k, e_i), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\ &+ \sum_{k,l} \langle \bar{R}(n\vec{H}, e_k)e_l, \alpha(e_k, e_l) \rangle + 2 \sum_{i,k,l} \langle \alpha((\bar{R}(e_l, e_i)e_i)^\top, e_k), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\ &+ 2 \sum_{i,k,l} \langle \alpha((\bar{R}(e_k, e_i)e_l)^\top, e_i), \alpha(e_k, e_l) \rangle + \sum_{\mu,\xi} \text{tr}(A_\xi)\text{tr}(A_\mu^2 A_\xi) - \sum_{\mu,\xi} (\text{tr}(A_\mu A_\xi))^2 \\ &- \sum_{\mu,\xi} |[A_\mu, A_\xi]|^2 \end{aligned}$$

Analisando separadamente cada termo desta equação e considerando que pelo fato da curvatura seccional ser constante vale o Lema 4, isto é, $R = cR'$, onde $R'(X, Y, W) = \langle Y, W \rangle X - \langle X, W \rangle Y$, temos

1)

$$\begin{aligned} \sum_{i,k,l} \langle \bar{R}(e_i, \alpha(e_k, e_l))e_i, \alpha(e_k, e_l) \rangle &= \sum_{i,k,l} \langle c(\langle \alpha(e_k, e_l), e_i \rangle e_i - \langle e_i, e_i \rangle \alpha(e_k, e_l)), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\ &= \sum_{k,l} \langle -c n \alpha(e_k, e_l), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\ &= -nc|\alpha|^2 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} 4 \sum_{i,k,l} \langle \bar{R}(e_i, e_l)\alpha(e_k, e_i), \alpha(e_k, e_l) \rangle &= 4 \sum_{i,k,l} \langle c(\langle e_l, \alpha(e_k, e_i) \rangle e_i - \langle e_i, \alpha(e_k, e_i) \rangle e_l), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

3)

$$\sum_{k,l} \langle \bar{R}(n\vec{H}, e_k)e_l, \alpha(e_k, e_l) \rangle = 0, \text{ pois } \vec{H} = 0 \text{ (Definição 26).}$$

4)

$$\begin{aligned}
2 \sum_{i,k,l} \langle \alpha((\bar{R}(e_l, e_i)e_i)^\top, e_k), \alpha(e_k, e_l) \rangle &= 2 \sum_{i,k,l} \langle \alpha(c(\langle e_i, e_i \rangle e_l - \langle e_l, e_i \rangle e_i), e_k), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\
&= 2c \sum_{i,k,l} \{ \langle \alpha(n e_l, e_k), \alpha(e_k, e_l) \rangle - \langle \alpha(\delta_{li} e_i, e_k), \alpha(e_k, e_l) \rangle \} \\
&= 2cn|\alpha|^2 - \sum_{i,k,l} 2c\delta_{li} \langle \alpha(e_i, e_k), \alpha(e_k, e_l) \rangle
\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}
2 \sum_{i,k,l} \langle \alpha((\bar{R}(e_k, e_i)e_l)^\top, e_i), \alpha(e_k, e_l) \rangle &= 2 \sum_{i,k,l} \langle \alpha(c(\langle e_i, e_l \rangle e_k - \langle e_k, e_l \rangle e_i), e_i), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\
&= 2 \sum_{i,k,l} \langle \alpha(c(\delta_{il} e_k - \delta_{kl} e_i), e_i), \alpha(e_k, e_l) \rangle \\
&= 2c \sum_{i,k,l} \{ \delta_{il} \langle \alpha(e_k, e_i), \alpha(e_k, e_l) \rangle - \delta_{kl} \langle \alpha(e_i, e_l), \alpha(e_k, e_l) \rangle \} \\
&= 2c \sum_{i,k,l} \delta_{il} \langle \alpha(e_k, e_i), \alpha(e_k, e_l) \rangle
\end{aligned}$$

6)

$$\sum_{\mu, \xi} tr(A_\xi) tr(A_\mu^2 A_\xi) = 0,$$

pois como a imersão isométrica é mínima, temos

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_j tr(A_{\eta_j}) \eta_j = 0 \Leftrightarrow tr(A_{\eta_j}) = 0$$

Reunindo os seis resultados acima e substituindo em (3.14), obtemos

$$\frac{1}{2} \Delta(|\alpha|^2) = |\nabla^\perp \alpha|^2 + nc|\alpha|^2 - \sum_{\mu, \xi} (tr(A_\mu A_\xi))^2 - \sum_{\mu, \xi} |[A_\mu, A_\xi]|^2$$

□

Para o que segue, dizemos que uma variedade diferenciável M é *fechada* se M for compacta e sem bordo. Além disso, considere o seguinte teorema, conhecido como *teorema da Divergência*, cujo o enunciado pode ser encontrado conforme apresentado em [Caminha \[2014\]](#), Teorema A.52, página 385.

Teorema 5. *Seja M^n uma variedade riemanniana compacta orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se o bordo de M é munido com a orientação e a métrica induzida pela inclusão $j : \partial M \rightarrow M$ e v denota a normal unitária exterior a M ao longo de ∂M , então*

$$\int_M (\operatorname{div} X) dM = \int_{\partial M} \langle X, v \rangle d(\partial M)$$

onde o segundo membro da igualdade acima deve ser interpretado como sendo igual a 0, caso $\partial M = \emptyset$.

Com o intuito de enunciar a celebre desigualdade integral de Simons para imersões mínimas em uma esfera euclidiana, faz-se necessário o resultado a seguir.

Lema 8. *Se A e B são matrizes $n \times n$, com B simétrica, então*

$$|[A, B]|^2 \leq 2|A|^2|B|^2.$$

Demonstração.

Dado que B é simétrica temos, pelo teorema espectral para matrizes simétricas, que B é diagonalizável sobre \mathbb{R} , e existe uma matriz ortogonal P tal que $P^{-1}BP = D$, onde D é uma matriz diagonal cujas entradas são $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. (Consulte [Coelho and Lourenço \[2020\]](#) ou [Lima \[2008\]](#))

Sabemos que a matriz $A' = P^{-1}AP$ é semelhante a matriz A . Por outro lado, temos que $|A|^2 = \operatorname{tr}(AA^t)$, e utilizando o fato de que todas as matrizes de um operador, em um espaço de dimensão finita, tem o mesmo traço, isto é, o traço de uma matriz associado a um operador é invariante por semelhança, temos

$$|A|^2 = \langle A, A \rangle = \operatorname{tr}(AA^t) = \operatorname{tr}(P^{-1}A.A^tP) = \operatorname{tr}((P^{-1}AP)(P^{-1}A^tP))$$

Como P é ortogonal, vale a igualdade $(P^{-1}AP)^t = (P^{-1}A^tP)$. Então,

$$\operatorname{tr}((P^{-1}AP)(P^{-1}AP)^t) = |P^{-1}AP|^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |[A, B]|^2 &= |P^{-1}[A, B]P|^2 = |P^{-1}(AB - BA)P|^2 = |P^{-1}ABP - P^{-1}BAP|^2 \\ &= |P^{-1}APP^{-1}BP - P^{-1}BPP^{-1}AP|^2 \end{aligned}$$

Tomando $C = P^{-1}AP = (c_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$.

$$= |CD - DC|^2 = |(\lambda_i c_{ij}) - (\lambda_j c_{ij})|^2 = |(\lambda_i - \lambda_j) c_{ij}|^2 = \sum_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 c_{ij}^2$$

Sabendo que

$$0 \leq (a + b)^2 \Rightarrow -2ab \leq a^2 + b^2 \Rightarrow (a - b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

Então,

$$\begin{aligned} &= \sum_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 c_{ij}^2 \leq 2 \sum_{i \neq j} (\lambda_i^2 + \lambda_j^2) c_{ij}^2 = 2 \sum_{i \neq j} \lambda_i^2 c_{ij}^2 + 2 \sum_{i \neq j} \lambda_j^2 c_{ij}^2 \\ &\leq 2 \left(\sum_{ij} c_{ij}^2 \right) \left(\sum_k \lambda_k^2 \right) = 2|C|^2 |D|^2 \\ &= 2|A|^2 |B|^2 \end{aligned}$$

□

Teorema 6 (Simons). *Se M^n é uma variedade riemanniana n -dimensional fechada e orientada, e $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+m}$ é uma imersão isométrica mínima, então*

$$\int_M |\alpha|^2 \left(n - \left(2 - \frac{1}{m} \right) |\alpha|^2 \right) dM \leq 0$$

Em particular, se $|\alpha|^2 < \frac{n}{2 - \frac{1}{m}}$ em M , então $|\alpha|^2 = 0$, isto é, M é totalmente geodésica.

Demonstração.

Nas notações do Corolário 4, se A é a matriz $m \times m$ cuja entrada (μ, ξ) é $tr(A_\mu A_\xi)$, isto é, $A = (a_{\mu\xi})$, $1 \leq \mu, \xi \leq m$, $a_{\mu\xi} = tr(A_\mu A_\xi)$, então A é simétrica. Portanto, no ponto p , podemos escolher a parte normal $\{e_{n+1}, \dots, e_{n+m}\}$ do referencial de tal forma que A seja diagonal, isto é, $tr(A_\mu A_\xi) = 0$ para $\mu \neq \xi$. Uma vez fixada tal escolha, temos pela equação (3.23)

$$\frac{1}{2} \Delta(|\alpha|^2) = |\nabla^\perp \alpha|^2 + n|\alpha|^2 - \sum_{\mu} (tr(A_\mu^2))^2 - \sum_{\mu, \xi} |[A_\mu, A_\xi]|^2 \quad (3.24)$$

e segue do lema anterior que

$$\sum_{\mu} (tr(A_\mu^2))^2 + \sum_{\mu, \xi} |[A_\mu, A_\xi]|^2 \leq \sum_{\mu} |A|^4 + 2 \sum_{\mu \neq \xi} |A_\mu|^2 |A_\xi|^2 \quad (3.25)$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{\mu} |A_{\mu}|^2\right)^2 &= \left(|A_1|^2 + \sum_{\mu=2} |A_{\mu}|^2\right)^2 \\
&= |A_1|^4 + 2|A_1|^2 \cdot \sum_{\mu=2} |A_{\mu}|^2 + \left(\sum_{\mu=2} |A_{\mu}|^2\right)^2 \\
&= \sum_{\mu} |A_{\mu}|^4 + \sum_{\mu \neq \xi} |A_{\mu}|^2 |A_{\xi}|^2.
\end{aligned}$$

Então,

$$2 \sum_{\mu \neq \xi} |A_{\mu}|^2 |A_{\xi}|^2 = 2 \left(\sum_{\mu} |A_{\mu}|^2\right)^2 - 2 \sum_{\mu} |A_{\mu}|^4$$

Assim, substituindo este valor em (3.25)

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu} |A|^4 + 2 \sum_{\mu \neq \xi} |A_{\mu}|^2 |A_{\xi}|^2 &= \sum_{\mu} |A|^4 + 2 \left(\sum_{\mu} |A_{\mu}|^2\right)^2 - 2 \sum_{\mu} |A_{\mu}|^4 \\
&= 2 \left(\sum_{\mu} |A_{\mu}|^2\right)^2 - \sum_{\mu} |A_{\mu}|^4
\end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\sum_{\mu} |A_{\mu}|^4 \geq \frac{1}{m} \left(\sum_{\mu} |A_{\mu}|^2\right)^2$$

temos que

$$\begin{aligned}
2 \left(\sum_{\mu} |A_{\mu}|^2\right)^2 - \sum_{\mu} |A_{\mu}|^4 &\leq 2 \left(\sum_{\mu} |A_{\mu}|^2\right)^2 - \frac{1}{m} \left(\sum_{\mu} |A_{\mu}|^2\right)^2 \\
&= \left(2 - \frac{1}{m}\right) \left(\sum_{\mu} |A_{\mu}|^2\right)^2 \\
&= \left(2 - \frac{1}{m}\right) |\alpha|^4
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Aplicando essa desigualdade em (3.24), obtemos

$$\frac{1}{2} \Delta(|\alpha|^2) \geq |\nabla^{\perp} \alpha|^2 + n|\alpha|^2 - \left(2 - \frac{1}{m}\right) |\alpha|^4$$

Integrando tal desigualdade sobre M , temos, por um lado, que, pelo teorema da divergência

$$\int_M \Delta(|\alpha|^2) dM = \int_{\partial M} \langle \nabla |\alpha|^2, \nu \rangle d(\partial M) = 0, \text{ pois } M \text{ é fechada. Por outro lado,}$$

$$0 = \frac{1}{2} \int_M \Delta(|\alpha|^2) dM \geq \int_M \left(|\nabla^\perp \alpha|^2 + n|\alpha|^2 - \left(2 - \frac{1}{m}\right) |\alpha|^4 \right) dM$$

$$\geq \int_M |\alpha|^2 \left(n - \left(2 - \frac{1}{m}\right) |\alpha|^2 \right) dM$$

Por fim, se $n - \left(2 - \frac{1}{m}\right) |\alpha|^2 > 0$, isto é, $n / \left(2 - \frac{1}{m}\right) > |\alpha|^2$ em M , segue que $|\alpha|^2 = 0$, e portanto, M é totalmente geodésica.

□

3.1 Comentários Finais

A Desigualdade Integral de Simons (Teorema 6) é um resultado de classificação de imersões isométricas mínimas na esfera \mathbb{S}^{n+m} . Para o caso em que $|\alpha|^2 < n / \left(2 - \frac{1}{m}\right)$, a variedade M é totalmente geodésico, e como exemplo, temos os grandes círculos. Uma pergunta natural a ser feita é o que acontece se $|\alpha|^2 = n / \left(2 - \frac{1}{m}\right)$.

Motivados pelas ideias de J. Simons (1968), S. Chern, Do Carmo e S. Kobayashi (1970), determinaram todas as subvariedades mínimas que satisfazem $|\alpha|^2 = n / \left(2 - \frac{1}{m}\right)$, mostrando que ou $m = 1$ e M é um toro de Clifford mínimo $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^{n-m}$ em \mathbb{S}^{n+1} , ou $m \geq 2$, e nesse caso, temos $m = n = 2$, e M é uma superfície de Veronese. Neste artigo, Chern propôs a seguinte questão: Seja M^n uma hipersuperfície fechada minimamente imersa em \mathbb{S}^{n+1} ($n \geq 2$) com curvatura escalar constante. Seja A o conjunto de valores possíveis para a curvatura escalar de M . A é um conjunto discreto de números reais? (Lusala, Scherfner e Sousa Jr 2005)

Posteriormente, essa questão ficou conhecida como a conjectura de Chern para hipersuperfícies isoparamétricas em esferas.

Conjectura: *Seja M uma hipersuperfície fechada e minimamente imersa na esfera \mathbb{S}^{n+1} com curvatura escalar constante. Então M é isoparamétrica.* (Verstraelen [1986])

onde uma hipersuperfície em um espaço de curvatura constante é chamada de isoparamétrica se todos os autovalores do operador de forma (shape operator) são funções constantes.

H. Alencar e Do Carmo (1994) obtiveram uma generalização natural em relação ao trabalho supracitado, considerando o caso em que o vetor curvatura média é constante (teorema 1.5).

Para isso, eles definiram uma aplicação ϕ que relaciona a curvatura média e a segunda forma fundamental, e uma constante $B_H \neq 0$ que depende de H e n , tal que:

Teorema 1.5. *Se $|\phi|^2 \leq B_H$ para todo $p \in M$, então:*

1. $|\phi|^2 \equiv 0$ e M é totalmente umbílica, ou $|\phi|^2 \equiv B_H$.
2. $|\phi|^2 \equiv B_H$ se, e somente se:
 - (a) $H = 0$ e M^n é um toro de Clifford em \mathbb{S}^{n+1} ;
 - (b) $H \neq 0$, $n > 3$, e M^n é um $H(r)$ -toro com $r^2 < (n - 1)/n$;
 - (c) $H \neq 0$, $n = 2$, e M^n é um $H(r)$ -toro com $r^2 \neq (n - 1)/n$.

Neste trabalho, eles calcularam o laplaciano da norma ao quadrado dessa aplicação ϕ , apresentada por S.Cheng e S.Yau (1977), para uma aplicação linear simétrica que satisfaça a equação de Codazzi.

Mais recentemente, A.Caminha (2006) obteve uma generalização para a desigualdade integral de Simons para r -hipersuperfícies mínimas da esfera (teorema 4.5), utilizando um operador diferenciável de segunda ordem ($L_r(f)$). Esse operador, para $r=0$, coincide com o laplaciano de M . Portanto, podemos observar que até os dias atuais o trabalho de J. Simons continua sendo base para muitos outros resultados significativos.

Referências Bibliográficas

- H. Alencar and M. P. Do Carmo. Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 120(4):1223–1229, 1994.
- A. Caminha. On hypersurfaces into riemannian spaces of constant sectional curvature. *Kodai Mathematical Journal*, 29:185–210, 2006.
- A. Caminha. *Tópicos de Geometria Diferencial*. SBM, 1ª edition, 2014.
- S. Y. Cheng and S. T. Yau. Hypersurfaces with constant scalar curvature. *Mathematische Annalen*, 225:195–204, 1977.
- S.-S. Chern, M. P. Do Carmo, and S. Kobayashi. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length. *Functional Analysis and Related Fields*, pages 59–75, 1970.
- B. Chow, P. Lu, and L. Ni. *Hamilton’s Ricci flow*, volume 77. American Mathematical Society, Science Press, 2023.
- F. U. Coelho and M. L. Lourenço. *Curso de Álgebra Linear, Um Vol. 34*. Edusp, 2ª edition, 2020.
- M. P. Do Carmo. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- M. P. Do Carmo. *Geometria riemanniana*. IMPA, 6ª edition, 2019.
- J. M. Lee. *Smooth manifolds*. Springer, 2012.
- E. L. Lima. *Álgebra linear*. Coleção matemática universitária. IMPA, 2008.
- T. Lusala, M. Scherfner, and L. A. M. Sousa Jr. Closed minimal willimore hypersurfaces of $\mathbb{S}^5(1)$ with constant scalar curvature. *Asian Journal of Mathematics*, pages 65–78, 2005.

- B. O’neill. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic press, 1983.
- L. S. Rocha. Uma desigualdade integral para hipersuperfícies com curvatura escalar constante. 2020.
- J. Simons. Minimal varieties in riemannian manifolds. *Annals of Mathematics*, pages 62–105, 1968.
- L. Verstraelen. Sectional curvature of minimal submanifolds. *Proceedings of the Workshop on Differential Geometry*, pages 48–62, 1986.