



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SILVIO LUIZ DA SILVA CORRÊA

APLICAÇÕES COM SPLINE CÚBICO

SALINÓPOLIS

2023

SILVIO LUIZ DA SILVA CORRÊA

APLICAÇÕES COM SPLINE CÚBICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Salinópolis/Pará, como requisito final para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Amilcar Montalbán Sayago.

SALINÓPOLIS

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C824a Corrêa, Silvio Luiz da Silva.
Aplicações com Spline Cúbico / Silvio Luiz da Silva Corrêa. —
2023.
xxvi, 26 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Amilcar Montalbán Sayago
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade
Federal do Pará, Campus Universitário de Salinópolis, Curso de
Licenciatura em Matemática, Salinópolis, 2023.

1. Matemática . 2. Análise Numérica . 3. Aplicações . 4.
Spline Natural. 5. Spline Restrito . I. Título.

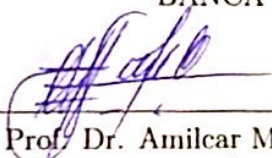
SILVIO LUIZ DA SILVA CORRÊA

APLICAÇÕES COM SPLINE CÚBICO

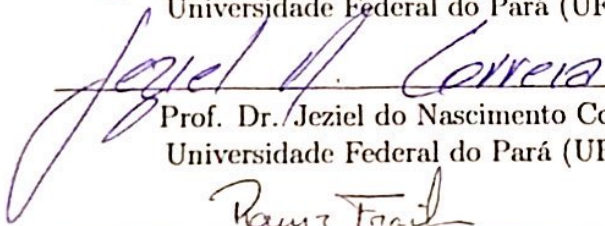
Trabalho de conclusão de Curso - TCC, apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, da faculdade de Matemática, Campus Universitário de Salinópolis/Pará, vinculada à Universidade Federal do Pará, como orientador o professor Dr. Amilcar montalban Sayago.

Aprovado em: 01/12/2023

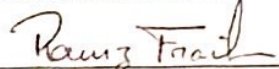
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Amilcar Montalbán Sayago (Orientador)
Universidade Federal do Pará (UFPA)



Prof. Dr. Jeziel do Nascimento Correia
Universidade Federal do Pará (UFPA)



Prof. Dr. Ramz Luiz Frailha Lopes
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Este trabalho é dedicado a todos aqueles que
me tornaram quem eu sou hoje.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, pelo dom da vida, e por me ajudar a ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo desse processo.

Agradeço imensamente ao prof. Amilcar, que não mediu esforços, pela transmissão de conhecimento, pelo constante empenho, pela sabedoria presente nos seus conselhos, conversas, não só para o trabalho aqui elaborado, como também para a vida.

Aos amigos e amigas que fiz na graduação e aos que mantive ao longo desses anos. Agradeço também ao fechamento em especial aos meus amigos Dian e Jesso.

Ao Luiz corrêa, não só por todo apoio e carinho, mas também por me proporcionar dia após dia momentos de muita felicidade. Agradeço ainda pela força em cada escolha tomada, por me incentivar e acreditar em mim, mesmo quando nem eu acreditei.

Por fim, ao meu pai, Lindomar, à minha mãe, Silvia, à minha tia, Sandra, e ao meu grande pai amigo, Amilton Foro, por torcerem pelo meu sucesso e cujo suporte, incentivo e apoio possibilitou essa jornada.

RESUMO

Mostra-se de forma didática a aplicação de métodos numéricos de interpolação spline cúbico. Obtem-se a figura do mapa de Salinópolis/PA por meio do spline livre ou natural e a figura do crescimento populacional de Salinópolis/PA do ano 2016 a 2022 através do spline restrito comparando com o modelo Maltusiano com taxa de crescimento populacional constante.

Palavras-chave: Interpolação spline cúbico. Spline natural. Spline restrito. Aplicações.

ABSTRACT

The application of numerical cubic spline interpolation methods is shown in a didactic manner. The figure of the map of Salinópolis/PA is obtained using the free or natural spline and the figure of population growth in Salinópolis/PA from 2016 to 2022 through the restricted spline comparing with the Maltusian model with population growth rate constant signal.

Keywords: Cubic spline interpolation. Natural spline. Restricted spline. Applications.

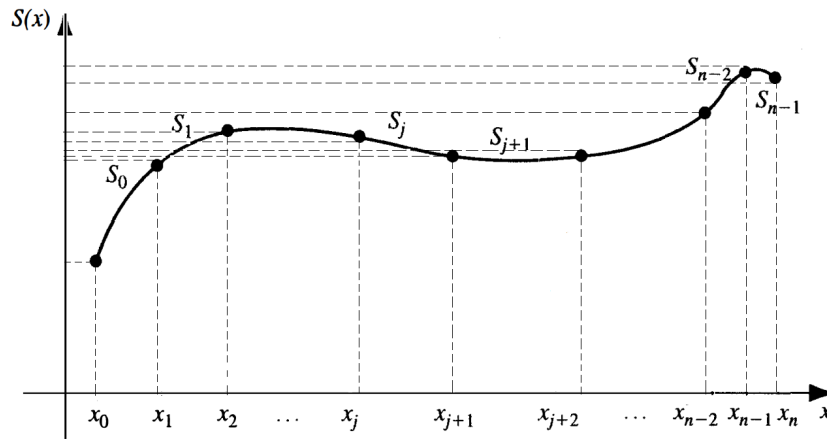
SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	SPLINE NATURAL	14
2.1	Spline natural	14
3	SPLINE RESTRITO	15
3.1	Spline restrito	15
4	APLICAÇÕES	18
4.1	Mapa de Salinópolis-PA com Spline Natural	18
4.2	Comparação da população de Salinópolis com o Spline Restrito e o modelo Malthusiano aos dados de IBGE	18
5	CONCLUSÃO	20

1 INTRODUÇÃO

Nesse trabalho vamos introduzir o spline cúbico, bem como apresentar aplicações pra o spline livre e spline restrito. Veremos não só, que pode ser gerado o mapa do município de Salinópolis-PA por meio da função spline livre e compara-lo com o original, como também é possível por meio da função spline restrito obter a taxa de crescimento populacional do município de Salinópolis-PA utilizando dados do censo e comparar com outro modelo matemático.

Figura 1: Spline cúbico



Fonte: Elaborado pelo Autor

De [4] tem-se a Definição 1.2

Definição 1.1. Dada uma função f em $[a, b]$ e um conjunto de nós $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ um interpolante de spline cúbico S para f é uma função que satisfaz as seguintes condições:

- (a) $S(x)$ é um polinômio cúbico, denotado $S_j(x)$, no subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$;
- (b) $S(x_j) = f(x_j)$ para cada $j = 0, 1, \dots, n$;
- (c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$;
- (d) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$;
- (e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$;
- (f) Uma das seguintes condições de contorno é satisfeita:
 - (i) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (Contorno livre ou natural)
 - (ii) $S'(x_0) = f'(x_0)$ e $S'(x_n) = f'(x_n)$ (Contorno Restrito).

Embora os splines cúbicos sejam definidos com outras condições de contorno, as condições dadas em (f) são suficientes neste caso. Quando ocorrem as condições de contorno livre, o spline é chamado de spline natural, e o traço do seu gráfico se aproxima da forma que uma longa haste flexível teria se a passássemos pelos pontos

$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$. Em termos gerais, aproximações mais exatas são alcançadas nas condições de contorno do assunto, uma vez que cobrem mais informações sobre a função, mas para que esse tipo de condição de contorno seja atendido é necessário ter os valores da derivada nos extremos ou uma aproximação precisa deles. Se quisermos construir o interpolante spline cúbico de uma determinada função f , aplicamos as condições da definição aos polinômios cúbicos, Figura 1:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3,$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$. Substituindo x por x_j em $S_j(x)$ é claro que $S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$. E se a condição (c) se aplica, já que $S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$, obtemos

$$a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3,$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$. Podemos simplificar o termo $x_{j+1} - x_j$ pela igualdade $h_j = x_{j+1} - x_j$, para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$. Se também definirmos $a_n = f(x_n)$, então a equação

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \quad (1.1)$$

será válida para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$. Analogamente, definindo $b_n = S'(x_n)$, temos

$$S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2,$$

o que implica $S'_j(x_j) = b_j$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$. Agora, aplicando a condição da definição 1.2-(d) obtemos

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 \quad (1.2)$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$. Definindo $c_n = S''(x_n)/2$ e aplicando a condição da definição 1.2-(e), obtem-se outra relação entre os coeficientes de S_j . Neste caso, para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$,

$$S''_j(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j)$$

e

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j \quad (1.3)$$

Isolando d_j na equação (1.3),

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} \quad (1.4)$$

e substituindo esse valor nas equações (1.1) e (1.2), para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$, obtem-se

as equações

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1})c_j + 3d_j h_j \quad (1.5)$$

e

$$\begin{aligned} b_{j+1} &= b_j + 2c_j h_j + 3\left(\frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}\right)h_j^2 \\ &= b_j + 2c_j h_j + (c_{j+1} - c_j)h_j \\ &= b_j + 2c_j h_j + c_{j+1} h_j - c_j h_j \\ &= b_j + h_j(c_j + c_{j+1}). \end{aligned}$$

A relação final envolvendo os coeficientes é obtida isolando b_j na equação (1.5)

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) \quad (1.6)$$

e então, com redução do índice, temos

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j)$$

substituindo esses valores na equação obtida da equação (1.6), com índice reduzido em 1, obtemos o sistema de equações lineares

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \quad (1.7)$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$. Este sistema contém apenas $\{c_j\}_{j=0}^n$ como incógnitas, pois os valores de $\{h_j\}_{j=0}^{n-1}$ e de $\{a_j\}_{j=0}^n$ são dados, respectivamente, pelo espaçamento dos nós $\{x_j\}_{j=0}^n$ e os valores de f nestes. Observe que, uma vez conhecidos os valores de $\{c_j\}_{j=0}^n$ encontrar o restante das constantes $\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$ a partir da equação (1.6) e $\{d_j\}_{j=0}^{n-1}$ da equação (1.3) é fácil construir os polinômios cúbicos $\{S_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$. A principal questão que surge em relação a esta construção é se os valores de $\{c_j\}_{j=0}^n$ podem ser determinados por meio do sistema de equações dado em (1.7) e, em caso afirmativo, se esses valores são únicos. O teorema a seguir indica que isso é possível quando uma das condições de contorno da parte (f) da definição é estabelecida.

De [7] tem-se a Definição 1.2

Definição 1.2. Diz-se que a matriz $A_{n \times n}$ é diagonal dominante quando

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (1.8)$$

é válida para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Dizemos que uma matriz diagonal dominante é estritamente diagonal dominante quando a desigualdade na equação (1.8) for estrita para cada n , ou seja, quando

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^n |a_{ij}|$$

é válida para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Uma matriz estritamente diagonal dominante em cada linha, o elemento na diagonal principal têm um módulo que é estritamente maior do que a soma dos módulos de todos os outros elementos naquela linha.

De [7] tem-se o Teorema 1.1

Teorema 1.1. *Uma matriz A estritamente diagonal dominante é não singular. Além disso, nesse caso, a eliminação de Gauss pode ser realizada em qualquer sistema linear da forma $AX = Q$ para obter a solução única sem trocas de linhas ou colunas, e os cálculos serão estáveis com relação ao crescimento de erros de arredondamento.*

A demonstração do Teorema 1.1 está no apêndice 5A.

Exemplo: Dado o sistema $AX = Q$ descrito por,

$$\begin{cases} 7c_1 + 2c_2 = 18 \\ 3c_1 + 5c_2 - 1c_3 = 23 \\ 2c_2 - 6c_3 = -24 \end{cases}$$

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é estritamente diagonal dominante, pois

$$|7| > |2| + |0|, |5| > |3| + |-1|, |-6| > |0| + |2|.$$

De [8] tem-se o modelo contínuo de Malthus. Usando o modelo malthusiano discreto dado por: $p(k+1) - p(k) = \partial p(k)$ onde ∂ é a taxa de crescimento populacional derivada da diferença de taxas de natalidade e mortalidade, $p(k+1) = p(k) + \partial p(k)$ fatorando tem-se

$$p(k+1) = (1 + \partial)p(k) \tag{1.9}$$

indutivamente temos, da equação 1.9

$$\begin{aligned}
 k = 0, \quad p(1) &= (1 + \partial)p(0) \\
 k = 1, \quad p(2) &= (1 + \partial)p(1) = (1 + \partial)^2 p(0) \\
 k = 2, \quad p(3) &= (1 + \partial)p(2) = (1 + \partial)^3 p(0) \\
 &\vdots \\
 k = t, \quad p(t) &= (1 + \partial)^t p(0).
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Da equação 1.10 tem-se a taxa de crescimento populacional em um intervalo de tempo t

$$\partial = \sqrt[t]{\frac{p(t)}{p(0)}} - 1. \tag{1.11}$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da equação 1.10, temos

$$\ln p(t) = \ln[(1 + \partial)^t p(0)],$$

por propriedade de logaritmo, obtemos

$$\ln(p(t)) = \ln(1 + \partial)^t + \ln(p(0)),$$

segue que

$$\ln(p(t)) = t \ln(1 + \partial) + \ln(p(0))$$

agora, aplicando a exponencial

$$e^{\ln(p(t))} = e^{t \ln(1 + \partial) + \ln(p(0))}$$

ademais

$$p(t) = e^{\ln p(0)} e^{\ln p(1 + \partial)^t},$$

temos daí,

$$p(t) = p(0) e^{\ln p(1 + \partial)^t}.$$

Fazendo $\gamma = \ln(1 + \partial)$, chegamos ao modelo contínuo de Malthus

$$p(t) = p(0) e^{\gamma t}. \tag{1.12}$$

2 SPLINE NATURAL

2.1 Spline natural

De [4], Condições de fronteira livres garantem um comportamento mais natural da spline nos extremos do intervalo, evitando forçar uma curvatura específica. Uma forma de definir as duas equações adicionais para completar o sistema (1.7) de equações de uma spline cúbica é impor condições de fronteira livres (ou naturais). Isso significa que a segunda derivada da spline em relação a x deve ser zero nos pontos extremos do intervalo, ou seja, $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$.

De [7] tem-se o Teorema 2.1.

Teorema 2.1. *Se definirmos f em $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, então f terá um único spline interpolante natural nos nós x_0, x_1, \dots, x_n ; isto é, que satisfaz as condições de contorno $S''(a) = 0$ e $S''(b) = 0$.*

Demonstração. Dado que f está definida no intervalo $[a, b]$ com nós x_0, x_1, \dots, x_n , queremos mostrar que existe um único interpolante de spline natural que satisfaça as condições de contorno $S''(a) = 0$ e $S''(b) = 0$ nos nós x_0, x_1, \dots, x_n . Primeiramente temos que as condições de contorno significam que $S''(a) = 0$ e $S''(b) = 0$. Agora, usando a forma geral dos splines cúbicos, temos:

$$S'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$$

e

$$S''(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j).$$

Aplicando as condições de contorno $S''(a) = 0$ e $S''(b) = 0$, obtemos as seguinte soluções para c_0 e c_n ,

$$S''(a) = 2c_0 + 6d_0(a - x_0) = 0$$

e

$$S''(b) = 2c_n + 6d_n(b - x_n) = 0.$$

Isso implica,

$$2c_0 = -6d_0(a - x_0) = 0 \tag{2.1}$$

e

$$2c_n = -6d_n(b - x_n) = 0. \tag{2.2}$$

As equações (2.1), (2.2) e (1.7), produzem um sistema linear descrito pela equação vetorial $AX = Q$,

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = 0 \\ h_0 c_0 + 2(h_0 + h_1)c_1 + h_1 c_2 = \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ h_1 c_1 + 2(h_2 + h_1)c_2 + h_2 c_3 = \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ h_{n-2}c_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})c_{n-1} + h_{n-1}c_n = \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ c_n = 0 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

onde A é a matriz $(n+1) \times (n+1)$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad X = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Analizando a matriz A tem-se que A é estritamente dominante em sentido diagonal, o que significa que o valor absoluto do elemento diagonal em cada linha é maior do que a soma do valor absoluto dos outros elementos da mesma linha. Em virtude do Teorema 1.1 temos que, uma matriz estritamente dominante em sentido diagonal possui uma solução única para o sistema linear e, portanto, o sistema linear $AX = Q$ tem uma única solução para c_0, c_1, \dots, c_n . Logo, existe um interpolante spline natural único que satisfaz as condições de contorno $S''(a) = 0$ e $S''(b) = 0$ nos nós x_0, x_1, \dots, x_n . \square

3 SPLINE RESTRITO

3.1 Spline restrito

De [5], o spline Restrito S é obtido pela escolha dos valores das derivadas primeiras primeiras de S nas extremidades do intervalo de interpolação. Isto diminui o número de variáveis para $n-2$, pois $S'(a)$ e $S'(b)$ deixam de ser incógnitas. Garantindo que a curva

tenha um comportamento específico nas extremidades, como uma inclinação fixa. Isto é, $S'(a) = f'(a)$ e $S'(b) = f'(b)$.

De [7] tem-se o Teorema 3.1.

Teorema 3.1. *Se f é definida em $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, e é diferenciável em a e b , então f possui um único spline restrito que interpola os nós x_0, x_1, \dots, x_n , ou seja, um interpolante spline que satisfaz as condições de contorno $S'(a) = f'(a)$ e $S'(b) = f'(b)$.*

Demonstração. Observe que, dado $f'(a) = S'(a) = S'(x_0) = b_0$ podemos usar a equação (1.6) para calcular o coeficiente b_j em $j = 0$ então, substituindo $j = 0$,

$$b_0 = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1).$$

Sabe-se que $f'(a)$ pode ser calculado usando a definição acima

$$f'(a) = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1),$$

multiplicando por 3 em ambos os lados e reorganizando para encontrar c_1 , obtemos:

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = -3f'(a) + \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0). \quad (3.1)$$

Analogamente, pode ser calculado $f'(b)$ usando a equação (1.6) para calcular b_j , com $j = n - 1$, ou seja,

$$b_{n-1} = \frac{1}{h_n - 1}(a_n - a_{n-1}) - \frac{h_n - 1}{3}(2c_{n-1} + c_n),$$

e

$$f'(b) = \frac{1}{h_n - 1}(a_n - a_{n-1}) - \frac{h_n - 1}{3}(2c_{n-1} + c_n)$$

multiplicando em ambos os lados por 3 para encontrar c_{n-1} , temos:

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}). \quad (3.2)$$

As equações (3.1),(3.2) e (1.7) determinam o sistema linear $BY = T$,

$$\left\{ \begin{array}{l} 2h_0c_0 + h_0c_1 = -3f'(a) + \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ h_0c_0 + 2(h_0 + h_1)c_1 + h_1c_2 = \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ h_1c_2 + 2(h_1 + h_2)c_3 + h_2c_4 = \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ h_{n-2}c_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1})c_{n-1} + h_{n-1}c_n = \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{array} \right. \quad (3.3)$$

onde,

$$B = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} -3f'(a) + \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{bmatrix} \quad e \quad Y = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Pelo Teorema 1.1 temos que a matriz B é estritamente diagonal dominante, o que implica que é invertível e, portanto, podemos resolver o sistema linear $BY = T$ usando a eliminação gaussiana para encontrar a solução única dos coeficientes c_0, c_1, \dots, c_n . Esses coeficientes determinam o spline cúbico que interpola os nós $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ e satisfaz as condições de contorno $S'(a) = f'(a)$ e $S'(b) = f'(b)$. \square

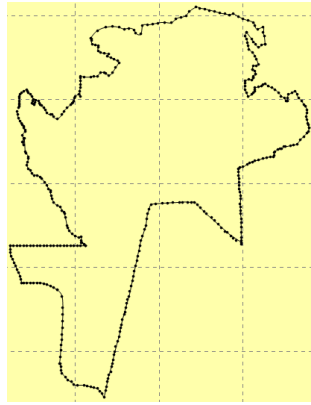
4 APLICAÇÕES

4.1 Mapa de Salinópolis-PA com Spline Natural

De [1], nas divisões territoriais de 31 de dezembro de 1936 e 31 de dezembro de 1937, a cidade era composta por 3 bairros: Salinas, Japerica e São João de Pirabas. Por decreto nacional de 31 de março de 1938, o município adquiriu a área de São João de Pirabas. A mudança no nome do lugar da cidade Salinas para Salinópolis foi alterada pela Portaria Estadual n° 4.505, de 30 de dezembro de 1943.

Pelo Teorema 2.1 obtem-se (a) da figura 2 ao tomar 417 pontos.

Figura 2: Mapa de Salinópolis-PA elaborado com Spline cúbico natural



(a) Spline natural Salinópolis-PA



(b) Mapa Salinópolis-PA, de [2]

4.2 Comparação da população de Salinópolis com o Spline Restrito e o modelo Malthusiano aos dados de IBGE

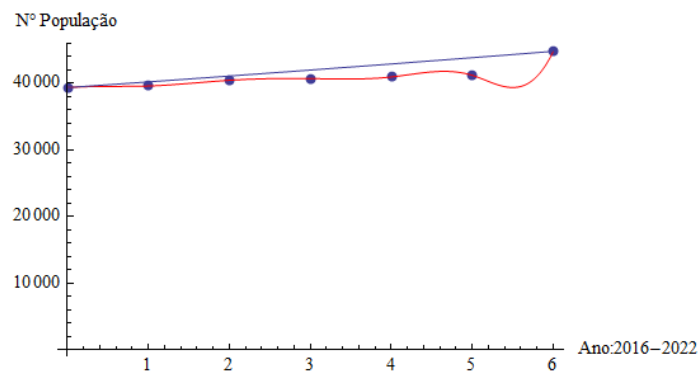
Tempo	Ano	População
0	2016	37.421
1	2017	39.569
2	2018	40.424
3	2019	40.675
4	2020	40.922
5	2021	41.164
6	2022	44.772

Tabela 1: De [3], Censo demográfico Salinópolis-PA

Seja 1.12, onde $\gamma = \ln(1 + \partial)$ e a taxa de crescimento dada por 1.11. Considerando a taxa de crescimento populacional constante e $t = 6$ da tabela 1, temos $\partial = \sqrt[6]{\frac{p(6)}{p(0)}} - 1 = 0,0218$. Calculando $\gamma = \ln(1 + \partial) = 0,0216$, $\partial = \sqrt[6]{\frac{p(6)}{p(0)}} - 1 = 0,0218$ substituindo

na equação contínua de malthus 1.12 obtem-se $p(t) = 39328 e^{0,0216t}$ para os dados da tabela entre ano e população. O gráfico da função contínua de Malthus 1.12 é de cor azul da figura 3. O gráfico da função spline restrito 3.1 é de cor vermelha conforme a figura 3. Para fazer o gráfico precisamos das derivadas primeiras nos extremos $p'(0)$ e $p'(6)$, isto é, $p'(0) = (39328)(0,0216) = 849,485$ e $p'(6) = (39328)(0,0216) = 967,031$

Figura 3: Spline cúbico restrito-Modelo contínuo Malthusiano



Fonte: Elaborado pelo Autor

5 CONCLUSÃO

Na aplicação 1 é demonstrado a definição de spline cúbico livre por meio da escolha de pontos. Primeiramente foi determinado as coordenadas x, y dos pontos desejados da Figura 3(b) do mapa, para isso fez-se uso de uma folha de papel milimetrado sobreposto a imagem do mapa e o entorno do mapa foi dividido em 19 intervalos contínuos para coletar os pontos desejados no interior de cada intervalo, ou seja, a cada ponto tomado se tinha um subintervalo. A partir da coleta de todos os pontos fez-se uso do software Wolfram Alpha resultando assim no Spline natural do mapa de Salinópolis da Figura 3(a).

No que se refere a aplicação 2 para ilustrar os modelos examinamos a demografia da cidade de Salinópolis/PA. Isto permite-nos analisar o comportamento desta população e fazer previsões futuras sobre o desenvolvimento da população urbana. Nós devemos fazer ajustes no modelo discreto de Malthus para formular o modelo contínuo. Tomando o censo de 2016 a 2022, e a partir daí considerando a população p no instante t dado em anos, obtemos a taxa de crescimento ou declínio ∂ dado por $p(t) = 39328 e^{0,0216t}$. Para o modelo spline restrito se fez necessário encontrar o valor de apoio da população $p'(0), p'(6)$. O modelo malthusiano é mais preciso se comparado ao spline restito, pois graficamente a simulação da dinâmica populacional restrita funcionou extremamente bem próximo da situação real, mas se aplica a melhor aproximação das simulações obtidas pelo modelo de Malthus. Observa-se também no modelo Malthus que no tempo $t = 6$ está muito próximo da situação real.

Referências

- [1] **Instituto brasileiro de Geografia e Estatística**, disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pa/salinopolis/historico>. Acesso em: 02 de agosto de 2023.
- [2] DE SOUZA, Deiliany Lima. Urbanização turística, políticas públicas e desenvolvimento: o caso de Salinópolis/PA. **Geografia em questão**, v. 7, n. 1, 2014.
- [3] **Instituto brasileiro de Geografia e Estatística**, disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pa/salinopolis/panorama>. Acesso em: 12 de agosto de 2023.
- [4] RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. Makron Books do Brasil, 1997.
- [5] JUSTO, Dagoberto Adriano Rizzotto et al. **Cálculo Numérico: um livro colaborativo (versão Python)**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Recuperado em, v. 16, 2019.
- [6] WENDROFF, Burton. **Análise numérica teórica** . Elsevier, 2014.
- [7] BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas; BURDEN, Annette M. **Análise numérica**. Cengage Learning, 2016.
- [8] BASSANEZI, Rodney C. **Equações diferenciais ordinárias-Um curso introdutório**. Coleção BCT-UFABC Textos Didáticos, 2011.

APÊNDICE

A - DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.1

Demonstração. (Do Teorema 1.1). Primeiramente, suponha por contradição que A é não singular. Considere o sistema linear descrito por $Ax = 0$ e suponha que exista uma solução $x = (x_i)$ diferente de zero para este sistema. Seja k um índice para o qual

$$0 < |x_k| = \max_{2 \leq j \leq n} |x_j|.$$

Dado que $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$, temos, quando $i = k$,

$$a_{kk}x_k = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{kj}x_j.$$

Da desigualdade triangular, temos

$$|a_{kk}||x_k| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |a_{kj}||x_j|,$$

então

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |a_{kj}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |a_{xj}|.$$

Daí tem-se uma contradição, pois A não é estritamente diagonal dominante. Ou seja, $x = 0$ é solução única para $Ax = 0$. O que é equivalente a matriz A ser não singular.

Já que A é estritamente diagonal dominante, a_{11} e $A^{(2)}$ pode ser formada. Assim, para cada $i = 2, 3, 4, \dots, n$.

$$a_{i1}^{(2)} = a_{i1}^{(1)} - \frac{a_{1j}^{(1)} a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad 2 \leq j \leq n.$$

Já que $a_{i1}^{(2)} = 0$, implica da desigualdade triangular que

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^{(2)}| = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n \left| a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{1j}^{(1)} a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \right| \leq \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^{(1)}| + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{1j}^{(1)} a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \right|.$$

Porém, já que A é estritamente diagonal dominante,

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^{(1)}| < |a_{ii}^{(1)}| - |a_{i1}^{(1)}|$$

e

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^{(1)}| < |a_{11}^{(1)}| - |a_{1i}^{(1)}|,$$

de forma que

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^{(2)}| < |a_{ii}^{(1)}| - |a_{i1}^{(1)}| + \frac{|a_{i1}^{(1)}|}{|a_{11}^{(1)}|} (|a_{11}^{(1)}| - |a_{1i}^{(1)}|) = \frac{|a_{i1}^{(1)}| |a_{1i}^{(1)}|}{|a_{11}^{(1)}|},$$

o que nos leva a

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^{(2)}| < |a_{ii}^{(2)}|.$$

Isso estabelece que a diagonal é estritamente diagonal dominante para as linhas 2, 3, ..., n. Como a primeira linha $A^{(2)}$ e A é a mesma, $A^{(2)}$ é estritamente diagonal dominante.

Esse processo é continuado de forma indutiva até que seja obtida $A^{(n)}$, que é triangular superior e estritamente diagonal dominante. Implicando que todos os elementos diagonais são diferentes de zero, logo, a eliminação de Gauss pode ser realizada sem trocas de linhas. A demonstração de estabilidade para esse procedimento pode ser encontrada em (Wendroff [6]) . \square

B - HISTÓRIA DE SALINÓPOLIS-PA

De [1], A atual cidade de Salinópolis , localizada na área geográfica natural de Salgado, com uma população de 44.772 habitantes, foi fundada durante o governo de André Vidal de Negreiros, que foi governador do estado do Maranhão e governador do estado do Pará. Suas origens históricas remontam a 1656, quando Negreros encarregou Feliciano Correa, o Capitão-Mor do Pará, de erguer uma torre de vigia para indicar o caminho para Barra de Belém por balas de canhão. A medida visa evitar que barcos afundem no recife ao largo da costa paraense.

O projeto é implementado em um terreno proeminente em uma ilha próxima à Baía de Virianduba. Com isso, a região prosperou e, em pouco tempo, ali se formou o povoado conhecido como Salinas, pois existia no litoral da região uma salina cuja mineração remonta à época colonial.

Em 1781, a área recebeu a categoria de freguesia de Nossa Senhora do Socorro de Salinas e Vila, que foi revogada em 1833.

Pela Lei Provincial n 1.081, de 11 de fevereiro de 1882, a vila foi elevada a Vila de Salinas, desmembrada da antiga cidade de Cintra, Maracanã. Instalado em 1884.

Elevou Salinas à condição de cidade e sede municipal pela Lei Estadual 797, de 22 de outubro de 1901.

Na divisão administrativa de 1911, a cidade é composta por 2 distritos: Salinas e São João de Pirabas.

Pelo Decreto Nacional n° 6, de 11 de abril de 1930, e n° 78, de 27 de dezembro

de 1930, o município de Salinas foi extinto e seu território incorporado ao município de Maracanã.

Separado do Maracanã pelo Decreto n° 1.002, de 29 de junho de 1933, foi novamente elevado à categoria de município com a denominação de Salinas.

C - SPLINE CÚBICO

De [7], A aproximação polinomial fragmentária também é conhecida como interpolação linear fragmentada ou interpolação por partes. Nesse método, ao invés de traçar uma única linha reta entre dois pontos, são traçadas múltiplas linhas retas entre cada par de pontos consecutivos

$$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$$

A aproximação por funções lineares apresenta uma desvantagem em relação à suavidade da função de interpolação nos extremos dos subintervalos. Isso ocorre porque não há garantia de que a função seja diferenciável nessas regiões. Em termos geométricos, isso significa que a função de interpolação não é suave nos pontos extremos.

Outro procedimento envolve o uso de polinômios de Hermite fracionários [7]. Se tivermos valores da função f e sua derivada f' nos pontos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, podemos usar o polinômio de Hermite de grau três em cada um dos subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ para obter uma função continuamente diferenciável no intervalo $[x_0, x_n]$. Para determinar o polinômio Hermite cúbico apropriado em um intervalo específico, precisamos apenas calcular $H_3(x)$ para esse intervalo. Como os interpolantes de Lagrange [7] necessários para calcular H_3 são de primeiro grau, o cálculo pode ser feito sem muita dificuldade. No entanto, para usar polinômios fracionários de Hermite em interpolação geral, precisamos saber a derivada da função que será aproximada, o que muitas vezes não é possível.

Estudaremos a aproximação de polinômios fragmentários que não requerem informações sobre a derivada, exceto, talvez, nos extremos do intervalo onde a função é aproximada.

O tipo mais simples de função polinomial fragmentária diferenciável em um intervalo entre $[x_0, x_n]$ é a função obtida ajustando um polinômio quadrático entre cada par consecutivo de nós. Isso é feito construindo uma quadrática em $[x_0, x_1]$ que concorda com a função em x_0 e em x_1 ; e assim por diante. Um polinômio quadrático geral tem três x e o coeficiente de $x^2 - y$ constantes arbitrárias, o coeficiente de apenas duas condições são necessárias para ajustar os dados nas extremidades de cada intervalo, portanto, há flexibilidade que permite selecionar o quadrático de modo que o interpolante tenha uma derivada contínua em $[x_0, x_n]$. O problema desse procedimento surge quando é necessário especificar as condições referentes a derivada da interpolante nos extremos x_0 e x_n . Não há constantes suficientes para garantir que as condições sejam satisfeitas.

A aproximação polinomial fragmentária mais comum usa polinômios entre cada par consecutivo de nós e é chamada de interpolação de Spline Cúbico. Um polinômio cúbico geral tem quatro constantes; assim, o procedimentos do spline cúbico oferece flexibili-

dade suficiente para garantir que o interpolante não seja apenas continuamente diferenciável no intervalo.

D - PONTOS DO MAPA

L112 = {(-4.1, 8.65), (-3.7, 9.1), (-3.2, 9.3), (-2.8, 9.35), (-2.4, 9.3), (-2.1, 9.2), (-1.8, 9.25), (-1.5, 9.15), (-1.4, 8.95), (-1.1, 8.9), (-1, 9.4), (-0.7, 9.45), (-0.4, 9.5), (-0.1, 9.55), (0.3, 9.6), (0.7, 9.57), (1, 9.8), (1.3, 9.9), (1.6, 10), (1.8, 10.25), (2.2, 10.5), (2.4, 10.45), (2.7, 10.4), (3, 10.3), (3.3, 10.25), (3.6, 10.15), (3.9, 10.1), (4.2, 10.05), (4.4, 10.1), (4.7, 9.95), (5, 9.8), (5.3, 9.7), (5.6, 9.6), (5.7, 9.4), (5.85, 9.2), (6.2, 9.3), (6.2, 9), (6.25, 8.8), (6.3, 8.3)};
L23 = {(5.2, 9), (5.5, 8.6), (5.6, 8.45), (5.75, 8.3), (5.9, 8.1), (6.1, 8.25), (6.3, 8.3)};
L34 = {(5.2, 9), (5.1, 8.8), (5.2, 8.6), (5.25, 8.4), (5.3, 8.2), (5.35, 8), (5.55, 7.8), (5.7, 7.6), (5.8, 7.4), (5.9, 7.1)};
L45 = {(5.8, 7), (5.6, 7), (5.55, 6.8)};
L5T = {(5.55, 6.8), (5.7, 6.7), (5.75, 6.5)};
LTU = {(5.6, 6.3), (5.6, 6.4), (5.75, 6.5)};
LU5 = {(5.1, 6.1), (5.35, 6.2), (5.5, 6.15), (5.6, 6.3)};
L56 = {(5.1, 6), (5.1, 5.8), (5.1, 5.6), (5.2, 5.4), (5.3, 5.2), (5.5, 5.3), (5.6, 5.4), (5.7, 5.5), (5.7, 5.6), (5.7, 5.7), (5.9, 5.75), (6.1, 5.8), (6.2, 5.9), (6.3, 5.95), (6.5, 5.8), (6.7, 5.7), (6.9, 5.6), (7.1, 5.4), (7.25, 5.2), (7.45, 5.1), (7.55, 4.9), (7.65, 4.9), (7.65, 5.1), (7.7, 5.3), (7.9, 5.4), (8.1, 5.5), (8.2, 5.3), (8.3, 5.1), (8.5, 4.9), (8.6, 4.7), (8.7, 4.6), (8.8, 4.4), (8.8, 4.2), (8.75, 4), (8.8, 3.8), (8.85, 3.6), (8.9, 3.5), (8.91, 3.3)};
L67 = {(4.7, 0.9), (4.8, 0.95), (5, 1), (5.25, 1.15), (5.4, 1.25), (5.55, 1.3), (5.7, 1.35), (5.9, 1.4), (6.2, 1.5), (6.4, 1.55), (6.6, 1.6), (6.8, 1.6), (6.85, 1.7), (6.85, 1.85), (6.9, 1.9), (7.05, 2.05), (7.2, 2.1), (7.3, 2.1), (7.4, 2.2), (7.5, 2.2), (7.8, 2.25), (8, 2.3), (8.2, 2.35), (8.4, 2.6), (8.6, 2.8), (8.8, 3), (8.9, 3.1), (8.91, 3.3)};
L78 = {(4.7, 0.9), (4.72, 0.7), (4.73, 0.5), (4.74, 0.3), (4.74, 0.1), (4.75, -0.1), (4.75, -0.3), (4.8, -0.5), (4.85, -0.7), (4.86, -0.9), (4.82, -1.2), (4.83, -1.4), (4.84, -1.6), (4.84, -1.8), (4.88, -2.1), (4.87, -2.3), (4.88, -2.6), (4.88, -2.9), (4.88, -3.2), (4.89, -3.4), (4.9, -3.6)};

L89 = {(-5.9, -10.7), (-5.88, -10.9), (-5.85, -11.1), (-5.8, -11.3), (-5.6, -11.5), (-5.45, -11.7), (-5.25, -11.8), (-5.1, -11.95), (-4.9, -12), (-4.5, -12), (-4.3, -12.05), (-4.1, -12.1), (-3.9, -12.15), (-3.7, -12.2), (-3.55, -12.35), (-3.4, -12.5), (-3.3, -12.7), (-3.2, -12.3), (-3.15, -12.1), (-3.1, -11.8), (-3.05, -11.6), (-3, -11.4), (-2.9, -11.2), (-2.85, -10.9), (-2.8, -10.7), (-2.75, -10.5), (-2.7, -10.2), (-2.65, -10), (-2.6, -9.7), (-2.5, -9.4), (-2.4, -9.1), (-2.35, -8.8), (-2.3, -8.6), (-2.25, -8.4), (-2.2, -8.1), (-2.1, -7.8), (-2.05, -7.65), (-2, -7.4), (-1.95, -7.1), (-1.9, -6.9), (-1.8, -6.7), (-1.75, -6.4), (-1.7, -6.1), (-1.6, -5.8), (-1.55, -5.5), (-1.5, -5.2), (-1.4, -4.9), (-1.35, -4.6), (-1.3, -4.3), (-1.2, -4), (-1.15, -3.7), (-1.1, -3.4), (-1, -3.1), (-0.9, -2.7), (-0.8, -2.5), (-0.75, -2.1), (-0.7, -1.8), (-0.6, -1.5), (-0.5, -1.25), (-0.2, -1.2), (0.2, -1.15), (0.5, -1.15), (0.8, -1.1), (1.2, -1.1), (1.4, -1.1), (1.7, -1.1), (1.9, -1.1), (2.1, -1.1), (2.25, -1.25), (2.45, -1.45), (2.65, -1.65), (2.8, -1.8), (3.1, -2), (3.3, -2.2), (3.5, -2.4), (3.7, -2.65), (3.9, -2.85), (4.05, -2.9), (4.25, -3.1), (4.4, -3.25), (4.6, -3.4), (4.9, -3.5)};
L910 = {(-5.95, -10.7), (-5.9, -10.3), (-5.88, -9.9), (-5.85, -9.6), (-5.8, -9.3), (-5.8, -9), (-5.79, -8.6), (-5.77, -8.2), (-5.75, -7.8), (-5.75, -7.4), (-5.8, -6.7), (-6.1, -6.3)};
L1011 = {(-8.9, -3.7), (-8.89, -3.9), (-8.88, -4.1), (-8.85, -4.3), (-8.75, -4.5), (-8.65, -4.7), (-8.55, -4.9), (-8.5, -5.1), (-8.4, -5.3), (-8.3, -5.5), (-8.25, -5.7), (-8.2, -5.9), (-8.1, -5.9), (-7.9, -5.9), (-7.7, -5.9), (-7.5, -5.9), (-7.3, -5.9), (-7.1, -5.9), (-6.9, -5.95), (-6.7, -6), (-6.5, -6.1), (-6.3, -6.2), (-6.1, -6.3)};
L1112 = {(-8.9, -3.7), (-8.7, -3.7), (-8.5, -3.7), (-8.3, -3.7), (-8.1, -3.7), (-7.9, -3.7), (-7.7, -3.7), (-7.5, -3.7), (-7.3, -3.7), (-7.1, -3.7), (-6.9, -3.7), (-6.7, -3.7), (-6.5, -3.7), (-6.3, -3.7), (-6.1, -3.7), (-5.9, -3.7), (-5.7, -3.7), (-5.5, -3.7), (-5.3, -3.7), (-5.1, -3.7), (-4.9, -3.7), (-4.7, -3.7), (-4.4, -3.7)};
L1213 = {(-8.5, 4.3), (-8.45, 4.1), (-8.4, 3.9), (-8.3, 3.7), (-8.2, 3.6), (-8.15, 3.5), (-8.1, 3.4), (-8.1, 3.3), (-8, 3.2), (-8, 3.1), (-8.15, 2.9), (-8.1, 2.7), (-8.15, 2.5), (-8.1, 2.3), (-8.05, 2.7), (-8, 1.9), (-7.95, 1.8), (-7.8, 1.6), (-7.8, 1.5), (-7.85, 1.3), (-7.9, 1.1), (-7.8, 0.9), (-7.7, 0.8), (-7.6, 0.6), (-7.45, 0.5), (-7.3, 0.5), (-7.1, 0.4), (-7, 0.3), (-6.85, 0.1), (-6.7, -0.1), (-6.6, -0.3), (-6.5, -0.4), (-6.5, -0.5), (-6.45, -0.7), (-6.4, -0.9), (-6.3, -1.1), (-6.1, -1.3), (-5.9, -1.4), (-5.8, -1.6), (-5.7, -1.7), (-5.65, -1.8), (-5.6, -2), (-5.5, -2.5), (-5.45, -2.65), (-5.35, -2.8), (-5.2, -3), (-5, -3.1), (-4.8, -3.2), (-4.65, -3.15), (-4.65, -3.5), (-4.6, -3.5), (-4.65, -3.4), (-4.5, -3.6), (-4.4, -3.7)};

L1314 = {(-8.4, 4.5), (-8.35, 4.6), (-8.35, 4.7), (-8.35, 4.8), (-8.35, 4.9), (-8.35, 5.1), (-8.35, 5.2), (-8.3, 5.3), (-8.2, 5.4), (-8.1, 5.5), (-7.9, 5.6), (-7.85, 5.5), (-7.8, 5.4), (-7.7, 5.3), (-7.6, 5.2), (-7.5, 5)};
L1415 = {(-7.5, 5), (-7.55, 4.9), (-7.6, 4.8)};
L1516 = {(-7.5, 4.75), (-7.45, 4.7), (-7.4, 4.85), (-7.35, 4.95), (-7.2, 4.9), (-7.15, 4.8), (-7.1, 4.7), (-7, 4.65), (-6.9, 4.5), (-6.8, 4.4), (-6.7, 4.2), (-6.5, 4.1), (-6.4, 4.1), (-6.3, 4), (-6.1, 3.85), (-5.8, 4.1), (-5.7, 4.3), (-5.5, 4.5), (-5.3, 4.7), (-5.2, 4.8), (-5.15, 4.85), (-5.1, 4.9), (-5.05, 5.1), (-5, 5.2), (-4.8, 5.3), (-4.7, 5.2), (-4.75, 5.5), (-4.7, 5.7), (-4.7, 5.9), (-4.7, 6.1), (-4.7, 6.3), (-4.7, 6.4), (-4.5, 6.35), (-4.1, 6.35), (-3.9, 6.4), (-3.7, 6.4), (-3.5, 6.6), (-3.3, 6.6), (-3.2, 6.55), (-3, 6.45), (-2.8, 6.6), (-2.6, 6.9), (-2.4, 7.2)};
L161 = {(-2.5, 7.3), (-2.7, 7.4), (-2.9, 7.5), (-3.1, 7.6), (-3, 7.7), (-3.3, 7.75), (-3.5, 7.8), (-3.65, 7.9), (-3.65, 8.1), (-3.65, 8.2), (-3.8, 8.25), (-4, 8.3), (-4.05, 8.5), (-4.05, 8.6), (-4.1, 8.65)};