



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

TATIARA DE NAZARÉ COSTA MARTINS

**DA NATUREZA À BOLSA DE VALORES: IDENTIFICANDO A
SEQUÊNCIA DE FIBONACCI PRESENTE NO DIA A DIA**

**ABAETETUBA-PA
2022**

TATIARA DE NAZARÉ COSTA MARTINS

**DA NATUREZA À BOLSA DE VALORES: IDENTIFICANDO A
SEQUÊNCIA DE FIBONACCI PRESENTE NO DIA A DIA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para
obtenção do grau de Licenciatura em Matemática,
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus
Universitário de Abaetetuba, Universidade Federal
do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Rômulo Corrêa Lima.

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

M379n Martins, Tatiara de Nazaré Costa.
Da natureza à bolsa de valores : Identificando a sequência de Fibonacci presente no dia a dia / Tatiara de Nazaré Costa Martins. — 2022.
27 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Rômulo Corrêa Lima
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, , 3, Abaetetuba, 2022.

1. Sequência de Fibonacci . 2. Número de ouro. 3. Aplicação . I. Título.

CDD 515.24

TATIARA DE NAZARÉ COSTA MARTINS

**DA NATUREZA À BOLSA DE VALORES: IDENTIFICANDO A
SEQUÊNCIA DE FIBONACCI PRESENTE NO DIA A DIA**

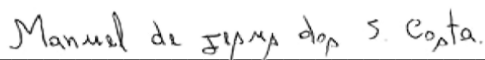
Trabalho de Conclusão de Curso orientado pelo Prof. Dr. Rômulo Correa Lima, apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus universitário de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção de grau de licenciada em Matemática.

Aprovado em: 23 / 02 / 2022.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Rômulo Corrêa Lima
Orientador – FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA



Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa
Membro – FACET/Campus de Abaetetuba/UFPA



Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa
Membro – FADECAM/Campus de Abaetetuba/UFPA

AGRADECIMENTOS

À Deus, pelo amor e misericórdia em minha vida em momentos difíceis, a minha fé foi o que me manteve firme em meu propósito, dando-me coragem para prosseguir.

Agradeço imensamente a minha família que esteve sempre presente, me apoiando e acreditando em meu potencial, em memória ao meu pai de coração José Vale da Costa que não está entre nós mais foi o meu maior incentivador.

Aos professores que tive a honra de conhecer durante o curso e que se tornaram minha inspiração ao compartilharem seus conhecimentos e experiências de profissão, em especial ao Prof. Dr. Rômulo Correa, meu orientador e amigo. Agradeço a compreensão e dedicação. Sou grata aos professores Jose Francisco e Manoel costa por comporem a banca avaliadora.

Aos amigos que ganhei no decorrer do curso, reuníamos em horários variados para estudarmos e incentivarmos uns aos outros, em especial a Ariany Dias e a Josiane Silva que foram essenciais nesse processo. A equipe de apoio do Campus quem mantém um ambiente limpo e acolhedor para todos os que ali estão.

Por fim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente nessa construção profissional que desde criança foi minha paixão, ser professora.

DA NATUREZA À BOLSA DE VALORES: IDENTIFICANDO A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI PRESENTE NO DIA A DIA

Tatiara Nazaré Costa Martins¹

Rômulo Corrêa Lima²
Manuel de Jesus dos Santos Costa³
José Francisco da Silva Costa⁴

RESUMO

O presente trabalho destaca a sequência de Fibonacci e o número de ouro presentes em vários contextos do dia a dia e sua relevância nesses ambientes. Nesse sentido, o objetivo do trabalho é apresentar a intrínseca presença dos números de Fibonacci na produção artística, na flora, fauna, no ambiente de publicidade e no mercado financeiro das bolsas de valores. Para alcançar essa proposta, foi realizada uma revisão bibliográfica dos principais autores que abordam a sequência de Fibonacci, considerando sua definição, propriedades e aplicabilidade. Assim, constatou-se que a sequência de Fibonacci presente em elementos naturais ou nas criações humanas sempre apresenta harmonia visual e estética. Essa matemática se observa por meio de suas proporções numéricas e que essas proporções também podem ser utilizadas nas estimativas de naturezas caóticas e dinâmicas como a bolsa de valores.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci; Número de ouro; Aplicações.

FROM NATURE TO THE STOCK EXCHANGE: IDENTIFYING THE FIBONACCI SEQUENCE PRESENT IN EVERYDAY

ABSTRACT

The present work highlights the Fibonacci sequence and the number of gold present in various everyday contexts and their relevance in these environments. In this sense, the objective of the work is to present the intrinsic presence of Fibonacci numbers in artistic production, in flora, fauna, in the advertising environment and in the financial market of stock exchanges. To achieve this proposal, a bibliographic review of the main authors that approach the Fibonacci sequence was carried out, considering its definition, properties and applicability. Thus, it was found that the Fibonacci sequence present in natural elements or in human creations always presents visual and aesthetic harmony. This mathematics is observed through its numerical proportions and that these proportions can also be used in the estimation of chaotic and dynamic natures such as the stock market.

Keywords: Fibonacci Sequence; Gold Number; Applications.

¹ Graduanda do curso de Licenciatura em matemática do Campus Universitário de Abaetetuba-UFPA.

² Orientador.

³ Membro da banca de avaliação.

⁴ Membro da banca de avaliação.

1 – INTRODUÇÃO

Uma das discussões que vem atravessando séculos e gerando grandes debates entre os matemáticos é o seguinte questionamento: Será que a matemática é invenção humana ou ela já existe por si mesma e que o homem por meio de seus raciocínios lógicos consegue identificá-la e sistematizá-la? Essa pergunta é relevante, uma vez que ao considerar certos ambientes naturais do reino animal, vegetal e até mesmo do universo, observam-se as presenças de padrões numéricos, os quais estão intimamente ligados à natureza do objeto, como se o elemento se constituísse a partir desses padrões. Para uma abordagem mais sistemáticas, indicam-se os seguintes trabalhos: Contador (2011), Mendes (2007), Eves (2011) e Gundlach (1992).

Um desses padrões é a sequência numérica de Fibonacci. A sequência tem o nome, em homenagem ao matemático italiano Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, que no século XIII estabeleceu por meio da sistematização lógico formal, a compreensão de uma sequência numérica em que cada termo é obtido somando-se os dois anteriores. Séculos se passam e a sequência não foi devidamente estudada, apenas no século XVIII, que o matemático escocês Robert Simpson, em 1753, descobre, ao observar que a razão entre um elemento da sequência pelo seu antecessor tende a um limite numérico, conhecido como número de ouro (ϕ), o qual era conhecido séculos antes de Cristo pelos gregos e egípcios (EVES, 2011).

Nesse sentido, a relevância deste trabalho se estabelece quando se considera que a sequência de Fibonacci está presente no dia-a-dia, uma vez que ela pode ser utilizada para descrever desde fenômenos naturais até a interpretação de sistemas aleatórios, como por exemplo, as bolsas de valores. A partir disso, tomou-se como objetivo geral do trabalho, apresentar a intrínseca presença dos números de Fibonacci na produção artística, na natureza, no ambiente de publicidade e no mercado financeiro das bolsas de valores. Em consonância com o objetivo geral, foram definidos como objetivos específicos, apresentar a definição de sequência numérica, sequência de Fibonacci, o número de ouro, estabelecer a relação entre sequência de Fibonacci e o número de ouro.

Para o desenvolvimento do trabalho, optou-se pela metodologia qualitativa, do tipo exploratória, cujo método adotado foi a pesquisa bibliográfica, uma vez que foram realizados levantamentos de informações e conhecimentos acerca do tema estabelecido por meio de materiais bibliográficos já publicados, possibilitando diversos diálogos de autores e dados. E, a fim de possibilitar a compreensão do leitor, o trabalho foi estruturado em quatro tópicos: Introdução, aportes teóricos, onde se encontra a sequência de Fibonacci? e conclusão, que permitirá ao leitor o entendimento sistemático do trabalho e a que ele se propõe.

2 – APORTES TEÓRICOS

Por mais simples e lógicas que pareçam, em um primeiro momento, as ideias matemáticas necessitam de uma estruturação lógica, fundamentada por meios de definições e teoremas, que possibilitam a sistematização do conhecimento por meio de uma formalização universal. É por isso que na matemática, qualquer conhecimento sempre estará alicerçado em bases lógicas sólidas para que não existam incongruências de resultados. Nesse sentido, busca-se por meio deste tópico apresentar a estruturação lógica das sequências, apresentando suas definições e algumas propriedades mais importantes, para assim ter uma base sólida quando for explorada a sequência de Fibonacci.

2.1 SEQUÊNCIA NUMÉRICA

As primeiras experiências do ser humano com as sequências numéricas se dão com os números naturais, em que são evidenciadas as sequências dos números pares, dos ímpares, dos múltiplos de 2, entre outras. Essa noção é muito importante, pois permite que o aluno consiga visualizar outras organizações numéricas que apresentam específicas propriedades. De maneira formal, segundo Lima (2019, p. 78), uma sequência pode ser definida da seguinte forma:

Definição 1: Uma sequência de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto \mathbb{R} dos números reais. O valor de $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será representada por x_n , e chamado termo de ordem n , ou n -ésimo termo da sequência. Para representar a sequência, escreve-se: $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n) , para indicar a sequência x .

O autor alerta para que não haja confusão entre a sequência x com o conjunto $x(\mathbb{N})$ dos seus termos. Neste caso, usa-se a seguinte notação: $x(\mathbb{N}) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

Quando se estuda sequências numéricas, busca-se entender se uma sequência converge para um número real ou se ela é divergente. De posse dessa informação, muitas inferências e propriedades das sequências são estabelecidas. Por isso, faz-se necessário definir convergência de sequência, que para Lima (2019, p.79), a define da seguinte forma:

Definição 2: Uma sequência (x_n) , converge para um número $x_0 \in \mathbb{R}$ se dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|x_n - x_0| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$. Neste caso, dizemos que a sequência (x_n) é convergente e tem limite x_0 , ou seja, $x_n \rightarrow x_0$.

Uma das formas mais comuns de sequência são as recorrentes, em que cada termos é determinado por uma dada função dos termos anteriores, a sequência de Fibonacci é recorrente,

como será apresentado nos próximos tópicos. Sobre essas sequências é relevante destacar que “o termo geral de uma sequência é definido por uma função de um ou mais de seus termos precedentes. A sequência se chama, então, apropriadamente, indutiva ou recorrente” (ÁVILA, 2006, p. 91).

Em termos matemáticos, dado um número $k > 0$, uma sequência recorrente de ordem k , é uma sequência de modo que cada termo é função dos k termos anteriores. Assim,

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_{n+1}, x_n), \forall n \in \mathbb{N}$$

Sequências formadas a partir dessa estrutura são amplamente encontradas em diversas aplicações, nas mais diversas áreas, suas elaborações são trivialmente fáceis de serem obtidas.

De acordo com Markushévick (1986, p.7), “O conceito de sequências recorrentes é uma generalização dos conceitos de progressão aritmética e geométrica. Também compreende casos particulares de sequências dos quadrados e cubos dos números naturais, as sucessões dos valores das decomposições dos números racionais (em geral, toda sucessão periódica)”.

Definição 3: Seja a sequência $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$. Se existe um número natural k e os números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ (real ou complexo), tal que um certo número n e para todos os números seguintes, a relação $u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n$, ($n \geq m \geq 1$) é definida como equação recorrente de ordem k .

Markushévick (1986), classificou as recorrências em duas: De primeira ordem (Quando o n -ésimo termo da sequência está em função de seu antecessor imediato) e de segunda ordem (Quando o n -ésimo termo da sequência está em função de seus dois antecessores imediatos).

Como exemplos, temos os seguintes casos:

-Progressão geométrica (P.G)

Sejam os seguintes termos

$$u_1 = a, u_2 = aq, u_3 = aq^2, \dots, u_n = aq^{n-1}, \dots$$

$$u_{n+1} = qu_n$$

Assim, $k = 1$ e $a_1 = q$, torna a progressão geométrica uma sequência recorrente linear de primeira ordem.

-Progressão aritmética (P.A)

Sejam os termos de uma P.A, $u_1 = a, u_2 = a + d, u_3 = a + 2d, \dots, u_n = a + (n - 1)d, \dots$

Temos,

$$u_{n+1} = u_n + d$$

Considerando as relações correspondentes dos valores sucessivos de n ,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + d \text{ e } u_{n+1} = u_n + d$$

Subtraindo membro a membro,

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$$

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

Assim, $k = 2$ e $a_1 = 2$ e $a_2 = -1$, mostra que a progressão aritmética é uma sequência recorrente linear de segunda ordem (MARKUSHÉVICK, 1986).

2.2 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A sequência de Fibonacci está associada à criação do seguinte problema em 1202: “A partir de um casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais de coelhos existirão após 12 meses, supondo-se que: nenhum coelho morre, todo casal de coelhos tem um primeiro casal de filhotes com dois meses de idade e, após ter o primeiro casal de filhotes, gera um novo casal todo mês” (AZEVEDO, 2001, p.1).

Ao observar o enunciado do problema, a quantidade de coelhos a cada mês pode ser obtida considerando uma sequência recorrente, uma vez que cada termo a partir do terceiro é obtido pela soma dos dois termos anteriores.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233$$

Considerando F_n ⁵, o n -ésimo termo, pode-se inferir a seguinte relação:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \geq 3.$$

Ao analisar a sequência estabelecida, vê-se claramente que cada termo da sequência é obtido, a partir do terceiro, como a soma dos outros dois números anteriores a ele, o seja, se trata de uma sequência de recorrência de segunda ordem.

2.3 PROPRIEDADES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A sequência de Fibonacci apresenta diversas propriedades, as quais têm interseção com outras áreas da matemática, como teoria dos números, geometria, problemas de fatoração entre outros (GUNDLACH, 1992). Por questões de objetivo, neste trabalho serão apresentadas somente as propriedades elementares.

Propriedade 1: *A soma dos n primeiros números de Fibonacci é igual a $F_{n+2} - 1$.*

⁵ A partir daqui, substituiremos o $x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_{n+1}, x_n)$ por $F_{n+k} = f(F_{n+k-1}, F_{n+k-2}, \dots, F_{n+1}, F_n)$, para representar a sequência de Fibonacci.

Prova.

Utilizando a definição da sequência de Fibonacci, temos:

$$F_1 = F_3 - F_2 = F_3 - 1$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$F_3 = F_5 - F_4$$

$$F_4 = F_6 - F_5$$

.....

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

Realizando a soma membro a membro e realizando as simplificações, temos:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Propriedade 2: *A soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices ímpares é igual a F_{2n} .*

Prova:

Ao observar a sequência de Fibonacci, temos:

$$F_1 = F_2$$

$$F_3 = F_4 - F_2$$

$$F_5 = F_6 - F_4$$

.....

$$F_{2n-3} = F_{2n-2} - F_{2n-4}$$

$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

Realizando a soma membro a membro e realizando as simplificações, temos:

$$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

Propriedade 3: *A soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices pares é igual a $F_{2n+1} - 1$.*

Prova:

Temos que:

$$F_2 = F_3 - F_1$$

$$F_4 = F_5 - F_3$$

$$F_6 = F_7 - F_5$$

.....

$$F_{2n-2} = F_{2n-1} - F_{2n-3}$$

$$F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n-1}$$

Tomando a soma membro a membro, temos:

$$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

2.4 O NÚMERO DE OURO

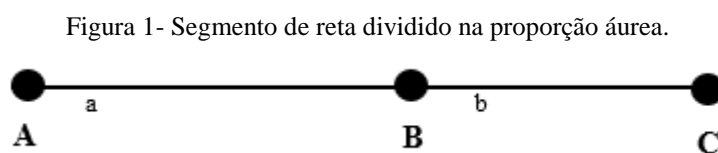
A existência de números irracionais que são facilmente encontrados em fórmulas, das mais diversas áreas como geometria, álgebra, topologia, etc., são bem conhecidas. Como exemplo temos o número π (Pi) e o número e (Número de Euler). No entanto, existe um número irracional que é conhecido como número de ouro ou proporção áurea, o qual representa beleza e harmonia (MENDES, 2007; NETO, 2013; ZAHN, 2011). Esse número é representado pela letra grega ϕ (Phi), cuja valor é:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\phi \approx 1,6180339887498948482045868343656 \dots$$

Definição 4: Diz-se que um ponto divide um segmento de reta em média e extrema razão ou em seção áurea, se o mais longo dos segmentos é média geométrica entre o menor e o segmento todo. A razão entre o maior segmento e o menor segmento chama-se razão áurea (SILVA, 2015, p. 26) (.).

A ideia geométrica da obtenção do número de ouro, pode ser obtido considerando a figura 1.



Fonte: Autoria própria

Temos que:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$a^2 = ab + b^2$$

$$\frac{a^2}{b^2} = 1 + \frac{a}{b}$$

Fazendo $\phi = \frac{a}{b}$, teremos:

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos:

$$\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Observando que $\phi = \frac{a}{b} > 0$, então:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\phi \approx 1,6180339887498948482045868343656 \dots$$

Esse número está presente nas obras “Os Elementos” de Euclides, nos papiros⁶ egípcios que relatam a construção das pirâmides, também eram conhecidos pelos pitagóricos, que ao construírem o pentagrama fizeram utilização desse número, uma vez que:

A razão áurea fascinou os antigos gregos e, por razões estéticas, foi largamente usada por artistas e arquitetos. Ela é conhecida desde os pitagóricos (século V a.C.). Essa razão foi descoberta no pentágono regular, que exhibe segmentos divididos na razão áurea. Talvez esse tenha sido o motivo que levou os discípulos de Pitágoras a adotarem o pentagrama (pentágono regular estrelado) como símbolo de sua seita. (LAURO, 2005, p. 07).

As perfeições das proporções estabelecidas em uma figura geométrica, que estavam relacionadas com o número de ouro, foram suficientes para chamar a atenção dos gregos, uma vez que eles tinham apreço pela estética, beleza e perfeição, comumente valorizada nesse período por meio de suas obras artísticas, matemáticas ou arquitetônicas (AZEVEDO, 2001).

2.5 A RELAÇÃO ENTRE A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO: A ESPIRAL ÁUREA

De maneira empírica, considerando a sequência de Fibonacci,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \dots$$

observa-se que:

$$\frac{3}{2} = 1,5; \frac{5}{3} = 1,66 \dots; \frac{8}{5} = 1,6; \frac{13}{8} \approx 1,625; \frac{21}{13} \approx 1,615; \dots; \frac{1597}{987} \approx 1,6180; \dots$$

Nota-se a existência de uma relação entre a sequência de Fibonacci e o número de ouro que é dado pelo seguinte limite:

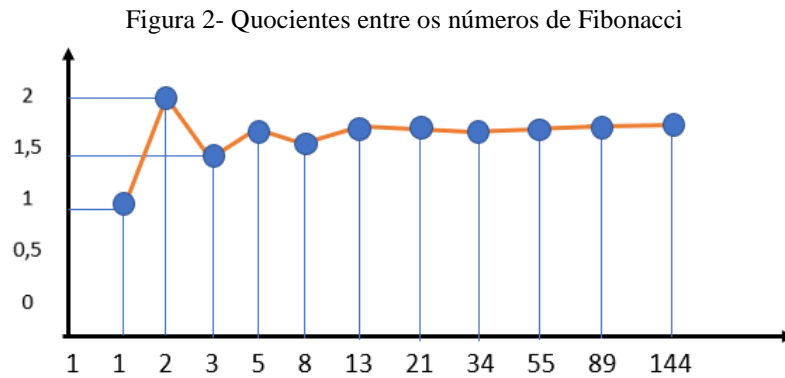
$$\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

Assim,

$$\phi \approx 1,6180339887498948482045868343656 \dots$$

⁶ Papiro de Rhind. Nesse papiro, o número de Ouro é chamado de “razão sagrada”.

Essa relação acima estabelecida não foi conhecida por Fibonacci, foi o matemático escocês Robert Simpson, em 1753, que percebeu a relação e a formalizou, provando a relação por meio de da teoria de limites. Ferreira (2007), apresentou em seu trabalho um gráfico dos quocientes em função dos números que compõem a sequência, mostrando a convergência da sequência para o valor de ϕ , conforme pode ser visto na figura 2.



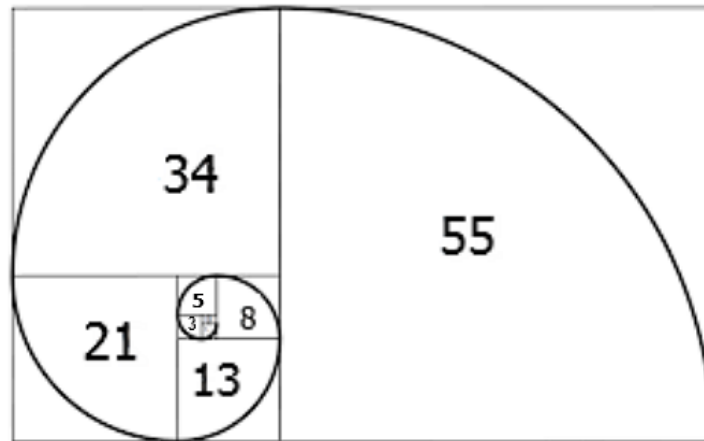
Fonte: Autoria própria

Quanto maior for o número de Fibonacci, dividido pelo seu antecessor, mais próximo o resultado estará do número de ouro. Também, utilizando retângulos áureos, juntamente com as sequências de Fibonacci é possível construir uma espiral, chamada de Espiral áurea ou logarítmica, como nos atesta Livio (2008, p. 140): “A espiral logarítmica e a Razão Áurea caminham de mãos dadas”. Para construir essa espiral, considera-se a descrição feita por Silva (2015, p. 36):

“Tomemos um quadrado de lado $l = 1$. Agora coloquemos dois destes quadrados, um sobre o outro, obtendo um retângulo de lados 1 e 2. A partir do lado maior construímos um quadrado de lado 2 na parte esquerda dos quadrados de lado 1. Note que os dois quadrados de lado 1 junto com o de lado 2 formam um retângulo de lado 3. A partir deste lado traçamos, na parte de baixo, um outro quadrado, obtendo um retângulo de lados 3 e 5. Agora, é só repetirmos o procedimento e formarmos outros quadrados de lados 5, 8, 13, 21 e assim sucessivamente, onde cada lado do quadrado é igual ao maior lado do retângulo anterior. Agora, com o auxílio de um compasso, traçamos um quarto de círculo nos quadrados de lados: $l = 21, l = 13, l = 8, l = 5, l = 3, l = 2$ e $l = 1$, obtendo a espiral áurea.”

A figura 3 permite a visualização desses passos

Figura 3- Construção da espiral áurea a partir da utilização da sequência de Fibonacci como lados de quadrados.



Fonte: Reis (2019)

De posse desses aportes teóricos, será possível analisar, utilizando fundamentação lógico matemática alguns elementos na arte, na natureza, design de produtos e bolsa de valores que possibilitam a visualização dos padrões da sequência de Fibonacci e do número de ouro, o que será feito na próxima seção.

3 – ONDE SE ENCONTRA A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI?

Este tópico, começa com uma pergunta: O que há de comum entre as pirâmides de Gizé, a obra Monalisa, de Leonardo da Vinci, a figura do “Homem Vitruviano” e os slogan do Twitter e da Pepsi?

Aparentemente não existe nenhuma relação. No entanto, por mais estranho que pareça, todos esses elementos citados fazem uso da sequência de Fibonacci e do número de ouro. Por que a Pepsi e Twitter fariam utilização dessa sequência e desse número? Como já foi comentado, os objetos que fazem utilização da relação entre o número de ouro e sequência de Fibonacci, compartilham de uma harmonia visual, que é bastante agradável para quem observa (FREITAS, 2008).

Isso explicaria o fascínio das pessoas que ao admirarem Monalisa, as pirâmides ou até mesmo as páginas do Twitter, sentem conforto visual. Mas esse fascínio visual não está somente nessas imagens, a seguir será explorado diversos ambientes em que isso pode ser observado.

3.1 – NA NATUREZA

A natureza é um ambiente em que facilmente se encontram padrões numéricos, desde os fenômenos periódicos, atmosféricos, na fauna e na flora (MENDES, 2007). Para citar alguns exemplos da sequência de Fibonacci e do número de ouro na natureza, serão tomados elementos da

fauna, da flora e do universo observável.

3.1.1 - Fauna

No trabalho de Freitas (2008), destaca-se o antílope (*Antilope cervicapra*), o camaleão (*Chamaeleonidae*) e o Nautilus marinho (*Nautilus pompilius*), como animais que apresentam a sequência de Fibonacci e o número de ouro por meio da espiral áurea. o antílope em seus chifres, o camaleão em sua cauda e o Nautilus em sua estrutura interna, conforme pode ser visualizado na figura 4.

Figura 4- Exemplos da formação da espiral áurea no antílope, no camaleão e no Nautilus



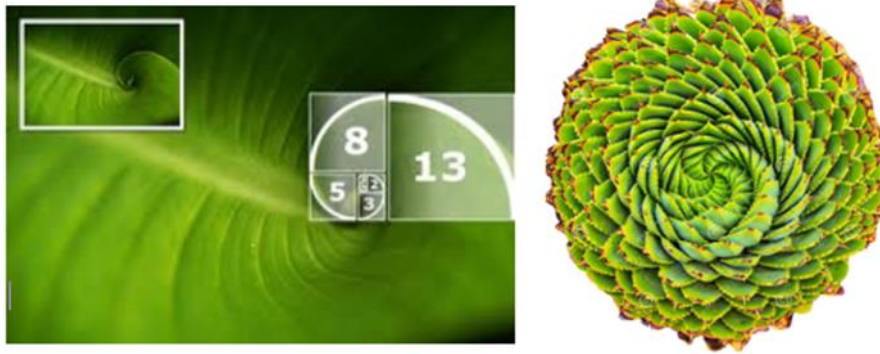
Fonte: Freitas (2008)

Apesar dos diferentes habitats, a presença do número de ouro e a sequência de Fibonacci em suas estruturas são evidentes.

3.1.2 - Flora

Alguns seres do reino vegetal também apresentam a espiral áurea, pois segundo Zahn (2011) e Passi e Rodrigues (2013), esse padrão pode ser observado arranjo de folhas, ramos e troncos de plantas, pétalas de flores e sementes. Nos arranjos de folhas, temos as bromélias e as aloés Espiral, que “obedecem a regra de formação da espiral áurea. De acordo com muitos biólogos, este arranjo é relevante na captação uniforme de raios solares e no escoamento das águas das chuvas” (ZAHN, 2011, p. 41). A forma geométrica apresentada pela bromélia e aloés é perfeitamente apropriada para a captação de água, como se disposição das folhas funcionassem como condutores de água das extremidades até ao centro, conforme mostrado na figura 5.

Figura 5- Padrão de espiral áureo nas folhas da bromélia e da aloés.



Fonte: Passi e Rodrigues (2013)

Em se tratando de ramos e troncos de plantas, a planta *Achillea ptarmica* é uma perfeita representante em evidenciar a sequência de Fibonacci, pois ao se observar a estrutura do caule e galhos, pode-se constatar que o crescimento acompanha uma sequência lógica, que contempla os quatro primeiros números de Fibonacci, como pode ser visto na figura 6.

Figura 6 - Os números de Fibonacci aparecem na formação do caule *Achillea ptarmica*.



Fonte: Neto (2013)

No caso das flores, muitas apresentam a quantidade de suas pétalas e a distribuição das mesmas fazendo uso da sequência de Fibonacci, é o caso do lírio que tem três pétalas, a primula tem cinco pétalas, o delfínio oito pétalas, a erva de São Tiago treze pétalas e a chicória vinte e uma pétalas, como mostrado na figura 7.

Figura 7 – As quantidades de pétalas do lírio, da primula, do delfínio, da erva de São Tiago e da chicória, nesta ordem, formam parte da sequência de Fibonacci.



Fonte: Livio (2008)

Deve-se observar que a flor margarida pode ter 13, 21 ou 34 pétalas, já os girassóis dependendo do seu tamanho podem ter 21, 34, 55, 89 ou 144 pétalas, organizadas em espiras, na

primeira fileira. Na segunda fileira podem ter 34, 55, 89, 144 ou 233, organizadas em espiras. Na terceira 55, 89, 144, 233 ou 377 e assim sucessivamente, sendo que todos esses números são parte da sequência de Fibonacci (MENDES, 2007), figura 8.

Figura 8 - 55 espiras à esquerda e 34 a direita

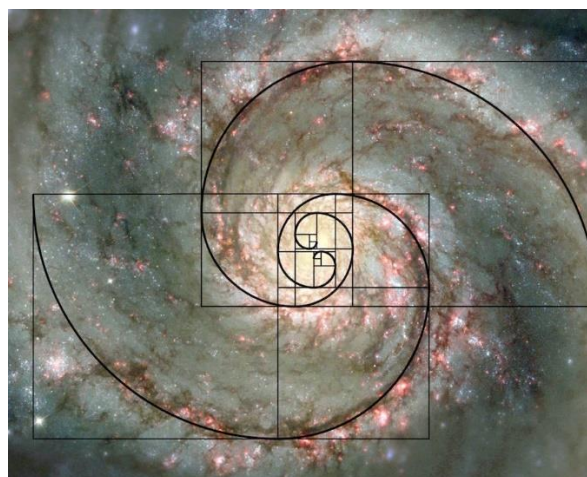


Fonte: Mendes (2007)

3.1.3 - Galáxias e furacões

O atual sistema de classificação de galáxias foi modificado e corrigido várias vezes, mas os astrônomos ainda reconhecem os cinco principais tipos de galáxias. São elas: espirais, espirais barradas, elípticas, lenticulares e irregulares. Na figura 8, destaca-se a galáxia espiral e sua forma que obedece à espiral áurea. No caso particular, as galáxias espirais têm núcleo inchado de estrelas mais velhas da população das quais saem “braços” espirais destacados por regiões de formação de estrelas e aglomerados brilhantes de estrelas luminosas de vida curta (SPARROW, 2018).

Figura 9 - Comparação entre as formas de uma galáxia e a espiral áurea.



Fonte: Sparrow (2018),

Um furacão (figura 10), trata-se de um tipo de ciclone tropical que tem origem em águas oceânicas, caracterizando grandes áreas de nuvens carregadas que só podem ser observados através das imagens de satélites, podendo causar graves consequências quando atinge áreas urbanas (ARRUDA, 2013).

Figura 10-Confrontação entre os formatos de um furacão e da espiral áurea.



Fonte: Arruda (2013)

Também, sua forma está relacionada com a espiral áurea.

3.2 – NAS ARTES E PUBLICIDADES

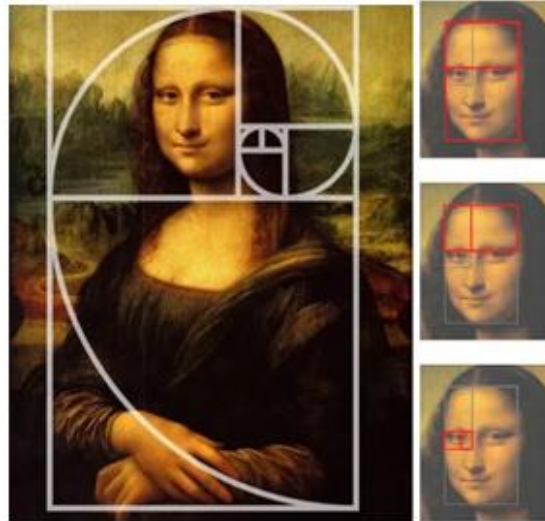
As criações artísticas e publicitárias chamam muita atenção das pessoas que apreciam, isso acontece por várias razões, sejam pelas cores, pelos desenhos ou pelos designs. Muitas dessas criações utilizam em suas elaborações a sequência de Fibonacci e o número de ouro, permitindo que as criações apresentem “algo diferenciado” (ZAHN, 2011).

3.2.1 Artes

Nas artes, especialmente na renascença⁷, muitas obras apresentam a espiral áurea em suas elaborações, a mais famosa é o quadro de Leonardo da Vinci, *A Mona Lisa*, a qual está apresentada na figura 11, na qual as relações são entre seu tronco e cabeça e também entre elementos do rosto (FREITAS, 2008).

Figura 11- A Mona Lisa e a espiral áurea

⁷ Renascimento, Renascença ou Renascentismo são os termos usados para identificar o período da história da Europa aproximadamente entre meados do século XIV e o fim do século XVI.



Fonte: Freitas (2008)

Como já mencionado, a utilização do número de ouro e a sequência de Fibonacci tem a única intenção, obter harmonia, beleza e perfeição. Outros dois exemplos, apesar de épocas distintas, também fizeram uso do número de ouro, na arquitetura tem-se o templo de Parthenon e, em outro exemplo nas artes, tem-se a obra de Sandro Botticelli, *O nascimento de Vênus* (FREITAS, 2008), figura 12.

Figura 12- O Parthenon e o nascimento de Vênus em contraposição com as espirais áureas.

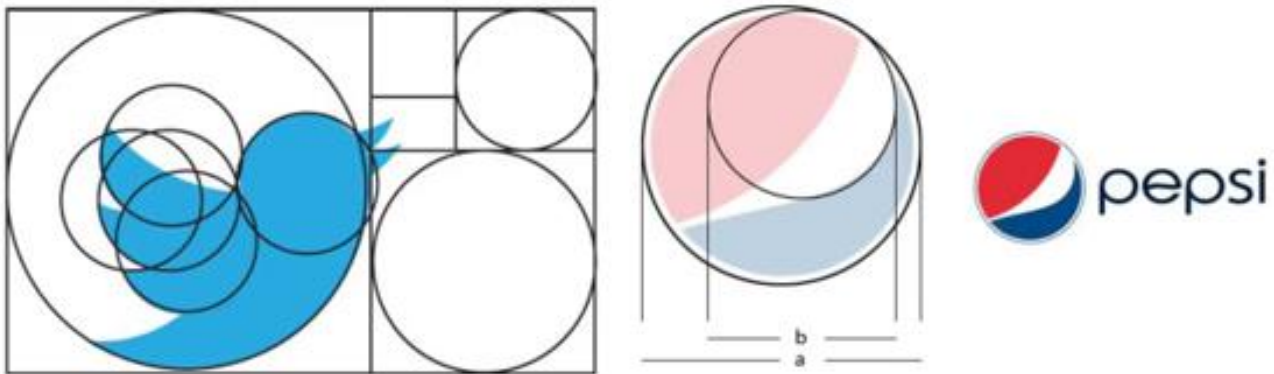


Fonte: Freitas (2008, p. 28)

3.2.2 Publicidades

Como foi apresentado, a sequência de Fibonacci e o número de ouro pode ser encontrado em diversos períodos da história, nas mais diversas obras, desde arquiteturas ou pinturas. No entanto, sua utilização também se faz presente no meio publicitário atual, é o caso dos slogans do Twitter e da Pepsi, como é possível ser visto na figura 13.

Figura 13- A proporção áurea no uso da criação de slogans do Twitter e da Pepsi.



Fonte: Canva (2021)

Sobre o logotipo do Twitter usa-se a geometria e “é baseado nos círculos perfeitos para equilibrar, ordenar e harmonizar”. No caso da Pepsi “é baseado em dois círculos que se cruzam seguindo a Proporção Áurea. Embora o círculo menor não seja muito evidente, ele forma a base da parte branca que fica no centro do logotipo” (CANVA, 2021).

4 – BOLSA DE VALORES

De tudo que foi apresentado até agora, pode-se fazer o seguinte questionamento: Será que a sequência de Fibonacci e o número de ouro estão presentes somente em naturezas lineares, ou seja, que não apresentam indeterminações e aleatoriedade?

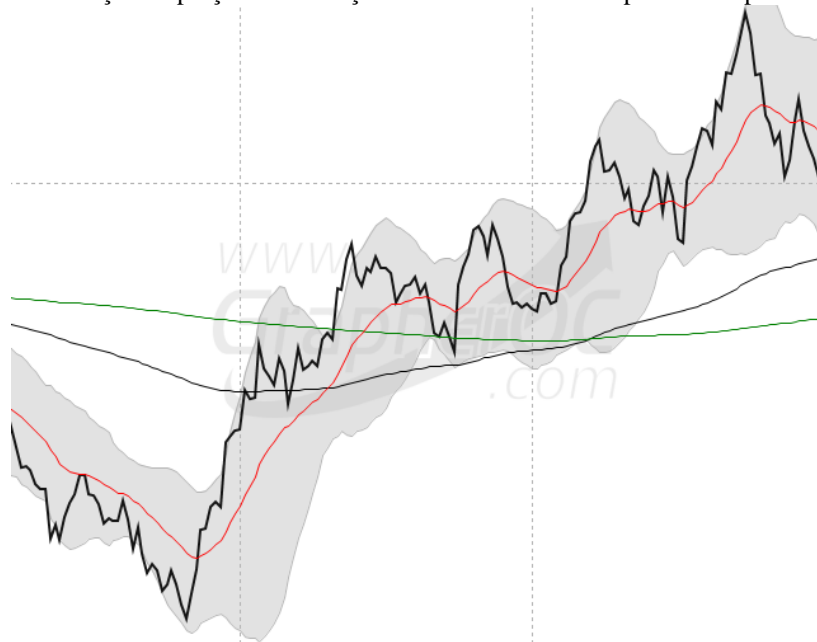
Em um primeiro momento a resposta seria sim, uma vez que a relação entre a sequência e o número de ouro apresenta harmonia visual e estética. No entanto, Elliott (1994), no contexto caótico das bolsas de valores, devidos às oscilações de subida e queda das ações, é possível encontrar a sequência de Fibonacci, uma vez que:

Elliott defende a ideia que as flutuações do mercado seguem um padrão de crescimento e decrescimento que pode ser analisado segundo os números de Fibonacci, uma vez determinada a escala de observação. Defende que as relações entre picos e vales do gráfico da flutuação de bolsa tendem a seguir razões numéricas aproximadas das razões de dois números consecutivos da sequência de Fibonacci (BELINI, 2015, p. 66).

A movimentação de mercado não acontece em de forma linear. Há um crescimento, seguido de uma correção⁸, não necessariamente nessa ordem, conforme mostrado na figura 14. Para Elliott (1994), esse fenômeno de crescimento (progressão) de mercado se dá em formas de ondas.

⁸ A correção se trata de uma retração do movimento de alta ou de baixa, mas que não reveste a tendência maior de crescimento ou de queda. Essa retração acontece para que outros investidores façam parte dessa tendência de um preço melhor (BELINI, 2015).

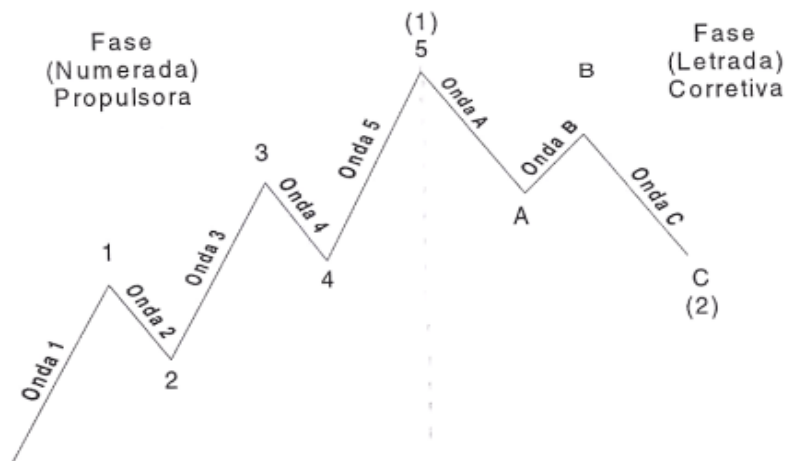
Figura 14- Variação de preços de uma ação na bolsa de valores representada pela linha preta.



Fonte: investimentonabolsa.com

Desse modo, a teoria das ondas de Elliott afirma que, nos mercados, progressões têm uma estrutura específica de cinco ondas. Três dessas ondas, classificadas como 1, 3, 5, efetuam um movimento direcional a favor da tendência e são separadas por duas interrupções contra a tendência, que são classificadas como ondas 2 e 4 (BELMONT, 2010, p. 34). este comportamento pode ser visto na figura 15.

Figura 15- Ciclo das ondas de Elliott



Fonte: Frost e Prechter (2002)

Outra forma de expandir a compreensão sobre as propriedades da sequência de Fibonacci se dá por meio da razão inversa entre os elementos da sequência, também gera uma constante⁹ (FROST e PRECHTER (2002):

⁹ Os matemáticos designaram estes valores como *phi* (0,618) e *Phi* (1,618).

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584...

Utilizando a seguinte relação,

$$\Phi = \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

Observa-se que:

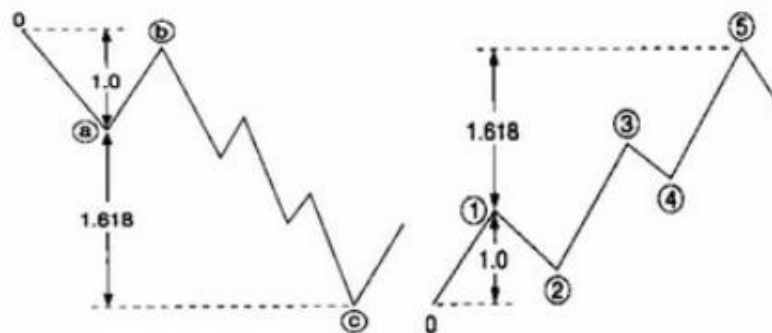
$$\frac{2}{3} = 0,6666 \dots; \frac{3}{5} = 0,6; \frac{5}{8} = 0,625; \frac{8}{13} \approx 0,6153; \frac{13}{21} \approx 0,6190; \dots; \frac{987}{1597} \approx 0,6180; \dots$$

$$\Phi \approx 0,618 \approx 61,8\%$$

deve-se observar que ao dividir esses números, alternando a sequência, pulando um elemento da sequência, por exemplo, 55/144, se obtém um segundo nível percentual de aproximadamente de 38,2%, que ao somar ao percentual do número de ouro obtém-se 100% (FROST e PRECHTER (2002)).

Ao analisar a figura 16, Ribeiro (2014, p. 135) destaca que “O número de ouro de Fibonacci está presente na análise da evolução do movimento de um índice bolsista. Se considerarmos o valor entre o início do ciclo e o primeiro pico, e compararmos este valor com o valor do pico máximo obtemos o número de ouro.”

Figura 16- Obtenção do número de ouro nas ondas de Elliot.



Fonte: Belini (2015)

O que Elliott (1994) descobriu foi que os números de Fibonacci podem ser utilizados na análise técnica, especialmente na teoria das ondas, que permite a determinação das porcentagens de correção para cada tendência, de crescimento ou decréscimo, ou seja, de subida ou queda em cada investimento. Evidenciando que se trata de previsão de caráter matemático, dentro de um contexto com parâmetros, não é uma previsão do futuro. Os parâmetros mais importantes são, segundo Ribeiro (2014, p. 136), as porcentagens de 61,8% e 38,2% para estabelecer o nível máximo

e o nível mínimo, respectivamente, numa correção de um movimento.

Com essas fermentas à disposição, o trader¹⁰ deve ficar atento, uma vez que os percentuais 38,2% e 61,8% são indicativos que os preços das ações tendem a passar por um período de correção. Em termos práticos, os números de Fibonacci identificam zonas de alerta, indicando possíveis resistências, suportes ou reversões.

Na prática, isso pode ser observado na figura 17, que representa a variação de um investimento em uma determinada plataforma de investimento.

Figura 17- Variação de um investimento real



Fonte: Costa *et al*, (2022)

Assim, de maneira geral, pode-se afirmar que os percentuais de Fibonacci marcam os pontos antes de uma reversão, permitindo que o trader consiga efetuar suas operações orientado por essas leituras de gráficos do movimento de bolsa de valores (RIBEIRO, 2014), essas situações podem ser observadas na figura 18.

Existem muitas outras formas de operar as bolsas de valores utilizando outros elementos da sequência de Fibonacci. No entanto, para a proposta deste trabalho, considerando os objetivos estabelecidos, o que foi apresentado evidencia a importância dessa sequência em vários campos da vida humana e da natureza.

¹⁰ O trader é um investidor do mercado financeiro que busca ganhar dinheiro com operações de curto prazo, aproveitando-se da volatilidade do mercado (MODALMAIS, 2022). Disponível em: <https://www.modalmiais.com.br/blog/o-que-e-trader>. Acesso em: 29 de jan. 2022.

Figura 18- Expansão e retração de Fibonacci.



Fonte: Modalmais (2022)

CONCLUSÃO

Ao concluir este trabalho, constatou-se que a sequência de Fibonacci se apresenta em vários ambientes. Apesar da simplicidade da sequência, sua aplicabilidade é ampla e diversificada, permitindo que o matemático interaja com outras áreas do conhecimento e sua propriedade de razão entre termos, qualquer termo pelo seu antecedente, gera o número de ouro, presente nas proporções áureas, muito venerado desde antes de Cristo pelos gregos.

A sequência de Fibonacci não é um conhecimento do passado, é atual e está sendo utilizado em várias construções arquitetônicas, design de slogan das grandes marcas mundiais, pois apresenta a capacidade de harmonizar o campo visual, tornando a imagem ou objeto agradável de se observar. Outro ponto a ser destacado é a espiral áurea, que é a combinação da sequência de Fibonacci e do número de ouro, por meio da criação de quadrados e retângulos. Essa organização sequencial, por meio dos números da sequência possibilitam a criação dessa curva, que como foi visto está presente na natureza das mais variadas formas, apresentando beleza, estética e harmonia.

O que o trabalho destacou foi a possibilidade de aplicação da sequência de Fibonacci em sistemas aleatórios, no caso as bolsas de valores, que apesar das oscilações constantes entre crescimento e queda, é possível usar parâmetros para estimar até que ponto podem ocorrer essas expansões e retrações usando o número de ouro. Aplicações como essas mostram a dinamicidade das sequências de Fibonacci, e permite que áreas complexas sejam estudadas e estimadas, por meio da sequência.

Esta abordagem do estudo da sequência de Fibonacci, contextualizado pela temática, proporciona o entendimento da aplicação desses números e como a matemática está presente no dia a dia e que assuntos como esses podem ser trabalhados em sala de aula a partir da realidade material, para depois fazer uma abordagem mais abstrata. Por isso, dada à importância do assunto, e a limitação do tema, torna-se necessário o desenvolvimento de outras pesquisas que contribuam, especialmente em contextualizar a matemática no ambiente educacional, favorecendo a interação do aluno com a matemática por meio da realidade em que está inserido.

A proposta aqui apresentada é uma parte de um todo que ainda está em desenvolvimento e precisa ser ampliada, já que existem outros desdobramentos de aplicações da sequência de Fibonacci que podem ser tomados como ideia de pesquisa.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDRINO, I.P. Dissertação de Mestrado: **A matemática natural**. Disponível em: <http://www.dm.ufrpe.br>. Acesso em: 20 de jan. 2022.
- ÁVILA, G. S. S. **Análise matemática para licenciatura**. São Paulo: Blucher, 2006.
- AZEVEDO, A. **Sequências de Fibonacci**. Revista do Professor de Matemática 45, Universidade de Brasília, 2001.
- BELINI, M. M. **A razão áurea e a sequência de Fibonacci**- São Carlos, 2015.
- BELMONT, D. F. S. **Teoria das Ondas de Elliott: Uma Aplicação ao Mercado de Ações da Bm & Fbovespa**. Dissertação (Mestrado). Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/5048?locale=pt_BR#:~:text=Resumo%3A,produtos%20geram%20processos%20de%20volatilidade. Acesso em 12 de jan. 2022.
- CANVA. **O que é proporção áurea? O que você precisa saber e como usar**. Disponível em: https://www.canva.com/pt_br/aprenda/o-que-e-proporcao-aurea/. Acesso em: 20 de jan. 2022.
- CONTADOR, P. R. M. **A Matemática na arte e na vida**. 2nd. ed. São Paulo - SP: Editora Livraria da Física, 2011.
- ELLIOTT, R.N. **Como funciona o princípio da onda e sua correlação com as Leis matemáticas**. New Classics, Nova York, 1994.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H.Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 20 11.
- FREITAS, F. M. de. **A proporção áurea e curiosidades históricas ligadas ao desenvolvimento da ciência**. UFSC, Florianópolis, 2008. Disponível em: <site:<http://www.africamae.com.br/wp-content/pdf/aurea.pdf>>. Acesso em: 10 de jan. 2022.
- FROST, A. J. E. PRECHTER, R. R. **O Princípio da Onda de Elliott**. Rio de Janeiro: Editec, 2002.
- GUNDLACH, B. H. **Números e numerais: tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**. São Paulo- SP: Editora Atual, 1992.
- LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro. IMPA, 2019.
- MARKUSHÉVICK, A. I. **Lecciones populares de matemática: Sucesiones Recurrentes**. Editorial Mir. Moscú, terceira edición, 1986.
- MENDES, F. M. P. **A Matemática na natureza**. Dissertação (Mestrado). Universidade De Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, 2007. Disponível em:http://repositorio.utad.pt/bitstream/10348/74/1/msc_fmpmendes.pdf . Acesso em: 10 de jan. 2022.
- NETO, P. R. de S. **A aplicação do Número de ouro como Recurso Metodológico no Processo de Ensino-aprendizagem**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013. Disponível em: http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/515/2011_00411_PABLO_ROBERTO_DE_SOUSA_NETO.pdf?sequence=1 . Acesso em: 11 jan. 2022.
- PASSI, D. C.; RODRIGUES, C. T. V. **Sequência de Fibonacci**. 22 f. — Unicamp, Campinas - SP, 2013. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/DC_M1_FM_2013.pdf . Acesso em: 05 jan. 2022.

REIS, F. I. **Matematicando: A espiral áurea.** disponível em:

<http://topicosmatematicos.blogspot.com/2019/03/a-espiral-aurea.html>. Acesso em: 02 de fev. 2022.

RIBEIRO, S. C. A. **Aplicação do Princípio das Ondas de Elliott à Bolsa Portuguesa.** Disponível em:

<https://repositorio.ual.pt/bitstream/11144/431/1/Aplica%C3%A7%C3%A3o%20do%20Principio%20das%20Ondas%20de%20Elliott%20%C3%A0%20Bolsa%20Portuguesa.pdf>. Acesso em: 16 de

jan. 2022.

SILVA, R. L. **A sequência de Fibonacci e o número de ouro:** contexto histórico, propriedades, aplicações e propostas de atividades didáticas para alunos do primeiro ano do ensino médio.

Dissertação (Mestrado). Disponível em: <http://www2.uesb.br>. Acesso em: 11 de jan. 2022.

SPARROW, G. **50 ideias de astronomia que você precisa conhecer.** 1ª edição. São Paulo:

Planeta, 2018.

ZAHN, M. **Sequência de Fibonacci e o número de ouro.** Rio de Janeiro - RJ: Editora Ciência Moderna Ltda, 2011.