



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

PEDRO JÚNIOR DOS SANTOS ANDRÉ

**FUNÇÃO QUADRÁTICA CONTEXTO E APLICAÇÕES NO COTIDIANO**

Abaetetuba - Pará

2018

PEDRO JÚNIOR DOS SANTOS ANDRÉ

## **FUNÇÃO QUADRÁTICA CONTEXTO E APLICAÇÕES NO COTIDIANO**

Trabalho de Conclusão de curso apresentado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará, Campus de Abaetetuba, como requisito final para obtenção do Grau de Licenciatura Plena em Matemática, sob a orientação do Prof. Me. Raimundo das Graças Carvalho de Almeida.

Abaetetuba – Pará

2018

PEDRO JÚNIOR DOS SANTOS ANDRÉ

## **FUNÇÃO QUADRÁTICA CONTEXTO E APLICAÇÕES NO COTIDIANO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática. Orientador prof. Me. Raimundo das Graças carvalho de Almeida.

Data de apresentação: 03 de setembro de 2018

Conceito:

**BANCA EXAMINADORA:**

---

Prof. Me. Raimundo das Graças Carvalho de Almeida  
Orientador

---

Prof. Dr. Aubedir Seixas Costa  
Membro

---

Prof. Me. Genivaldo Dos Passos Corrêa  
Membro

Abaetetuba-Pará

2018

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, que é minha luz e a minha família por  
todo o apoio.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado saúde e conhecimentos para a realização deste trabalho, e por estar todos os dias ao meu lado nos momentos difíceis.

Ao prof.<sup>o</sup>. Raimundo que aceitou o desafio de orientar e ajudar a elaborar este trabalho.

Aos meus familiares e amigos que me apoiaram em todos os momentos da minha vida acadêmica.

A todos os professores da Faculdade de Matemática que fizeram parte da minha formação.

Às amigas que eu desenvolvi durante esse período na UFPA, que sempre me deram força e contribuíram tanto na minha vida pessoal quanto profissional. Enfim, serei eternamente grato a todos que sempre contribuíram direta ou indiretamente no desenvolvimento desse trabalho e na realização desse sonho.

*“Matemática não é resumida em regras”*

***Artur Avila***

## RESUMO

O presente trabalho inicia-se com um breve histórico sobre função, dando destaque a alguns matemáticos que tiveram fundamental importância para o seu desenvolvimento. Faz também uma abordagem dos conceitos de função, conceitos estes que foram fundamentais para a construção desse trabalho. Posteriormente abordou-se à evolução da função quadrática, falando dos matemáticos e sua respectiva importância para o desenvolvimento da função quadrática ao longo da história. Adentrando no assunto de função quadrática foram abordadas as definições, os gráficos, a forma canônica, zeros da função quadrática, máximo da função e mínimo, o vértice da parábola, a imagem, e o eixo de simetria e por último foi desenvolvido as aplicações da função quadrática em diversas situações do cotidiano.

Palavras-Chave: Função quadrática. Cotidiano. Aplicações.

## **ABSTRACT**

The present work begins with a brief history about function, giving prominence to some mathematicians who had fundamental importance for its development. It also makes an approach to the concepts of function, concepts that were fundamental for the construction of this work. Later on, the evolution of quadratic function was discussed, speaking of mathematicians and their respective importance for the development of quadratic function throughout history. Entering the quadratic function subject were the definitions, graphs, canonical form, zeros of the quadratic function, maximum of the function and minimum, the vertex of the parabola, the image, and the axis of symmetry, and finally the applications of the quadratic function in several everyday situations.

Keywords: Quadratic function. Daily. Applications.

## LISTRA DE FIGURAS

<b>Figura 1-</b> Conjunto X e Y, uma função $f: X \rightarrow Y$ .....	14
<b>Figura 2-</b> Parábola com Concavidade para Cima.....	17
<b>Figura 3-</b> Parábola com Concavidade para Baixo.....	17
<b>Figura 4-</b> Gráficos do Parâmetro $a$ , nas Funções.....	18
<b>Figura 5-</b> Gráficos do Parâmetro $a$ , nas Funções.....	19
<b>Figura 6-</b> Gráfico da Função $y = x^2 - 4x + 3$ , com os Pontos de Abscissas 1 e 3..	22
<b>Figura 7-</b> Máximo da Função Quadrática.....	23
<b>Figura 8-</b> Mínimo da Função Quadrática.....	24
<b>Figura 9-</b> Parábola com o Vértice.....	25
<b>Figura 10-</b> Imagem da Função Quadrática: $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -2\}$ .....	26
<b>Figura 11-</b> Parábola da Função Quadrática com Eixo de Simetria.....	27
<b>Figura 12-</b> Jardim com Canteiro.....	28
<b>Figura 13-</b> Jardim com Canteiro.....	29
<b>Figura 14-</b> Gráfico da Variação.....	30
<b>Figura 15-</b> Modelo Matemático do Terreno.....	31
<b>Figura 16-</b> Campo do Futebol, Trajetória da Bola.....	32
<b>Figura 17-</b> Sitio com Região Ampliada.....	33
<b>Figura 18-</b> Campo de Futebol.....	34
<b>Figura 19-</b> Trajetória do Míssil.....	35
<b>Figura 20-</b> Gráfico Descrevendo a Trajetória do Míssil.....	37

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	11
<b>CAPÍTULO 1- CONTEXTO HISTÓRICO DE FUNÇÃO E A EVOLUÇÃO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA</b> .....	13
1.1- A EVOLUÇÃO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA.....	14
<b>CAPITULO 2- FUNÇÃO QUADRÁTICA</b> .....	16
2.1- GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA.....	16
<b>2.1.1- Concavidade voltada para cima</b> .....	16
<b>2.1.2- Concavidade voltada para baixo</b> .....	17
<b>2.1.3- Parâmetro a</b> .....	17
2.2- FORMA CANÔNICA.....	19
<b>2.2.1- Decorrências da Forma Canônica</b> .....	20
2.3- ZEROS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA.....	21
2.4- MÁXIMO DA FUNÇÃO.....	22
2.5- MÍNIMO DA FUNÇÃO.....	23
2.6- VÉRTICE DA PARÁBOLA.....	24
2.7- IMAGEM.....	25
2.8- EIXO DE SIMETRIA.....	26
<b>CAPÍTULO 3 - APLICAÇÕES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA NO COTIDIANO</b> .....	28
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	40
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	41

## INTRODUÇÃO

Apesar de a Matemática estar presente em nosso cotidiano, são comuns os educandos não se atentarem para esse contexto, deixando certo distanciamento entre a matemática ensinada nas escolas e a praticada no dia a dia. Por isso, o presente trabalho faz-se um estudo da função quadrática, objetivando dar maior ênfase nas aplicações no cotidiano, pois se acredita que o desenvolvimento de trabalhos dessa natureza, podem contribuir, em um futuro próximo, para a evolução e melhoria da educação.

Nesse sentido, o interesse em desenvolver esse tema surgiu da necessidade em mostrar alternativas no estudo da função quadrática, visando destacar suas aplicações em varias situações e problemáticas frequentes, e para realizar uma pesquisa mais aprofundada nessa área, uma vez que este campo é muito amplo. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), precisa-se desenvolver de forma contextualizada a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real. Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

O estudo de funções constitui um dos temas mais importantes do programa de matemática do ensino básico. Sua abordagem pode se iniciar no ensino fundamental e se estender até a educação superior. Mas, nessa pesquisa, optou-se por se fazer um estudo no nível básico de ensino, visto que nesse nível o tema permite desenvolver as habilidades do aluno em analisar problemas, através da relação entre expressões algébricas e gráficos, possibilitando obter a solução desejada.

A partir da escolha do tema o presente trabalho iniciou-se com estudo criterioso e com bases fundamentadas nas contribuições de vários autores como: BRASIL (1999), DANTE (2010, 2013), ELON (2005), IEZZI (2004,) e também outros autores foram fundamentais para a compreensão e análises realizadas nessa pesquisa bibliográfica.

Este texto se encontra estruturado da seguinte forma: no primeiro capítulo é desenvolvido o contexto histórico da função quadrática, dando ênfase a matemáticos que tiveram papel fundamental no seu desenvolvimento. No segundo, foram desenvolvidos tópicos sobre o assunto, abordando suas principais

características e apresentando-as as definições, conceitos básicos e gráficos. No terceiro capítulo, trata-se de algumas aplicações da função quadrática no cotidiano, que foram solucionados de acordo com as bases teóricas, desenvolvidas no capítulo 2.

Nas últimas décadas, o ensino da Matemática no Brasil vem apresentando progressos importantes com propostas de novas metodologias como utilização de jogos educativos, materiais concretos, pesquisas que visam relacionar a matemática com a vida diária dos alunos. Mas, em muitas escolas principalmente da rede pública, a matemática ainda é ensinada de forma tradicional, sem muitos atrativos para o aluno e por esse motivo, o ensino da função quadrática acaba se tornando difícil para alguns alunos, deixando um grande número deles, sem interesse no assunto.

Pensando nesse problema busca-se desenvolver o presente trabalho, visando relacionar a matemática ensinada nas escolas, com a vida fora de sala de aula, com o intuito de que a matemática e uma ciência que consegue explicar vários fatos e acontecimentos presente no dia a dia.

## CAPÍTULO 1- CONTEXTO HISTÓRICO DE FUNÇÃO E A EVOLUÇÃO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Nesse capítulo, será abordado o contexto histórico de função e em especial da função quadrática, apresentando vários matemáticos que ao longo da história da matemática contribuíram em estudos bastante importantes na compreensão da função quadrática.

Sendo assim já se percebe através dos babilônicos por volta do ano 2000 a.C que ao construírem tabelas em argila onde para cada valor na primeira coluna existia um outro número na segunda e que na multiplicação desses números havia outro relacionado, percebemos a ideia de função.

Ao longo da História vários matemáticos contribuíram para que se chegasse ao conceito de função atual, o matemático alemão Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646 – 1716) atribui-se a denominação função que usamos hoje. Que usou para descrever uma quantidade relacionada a uma curva, como, por exemplo, a inclinação ou um ponto qualquer situado nela.

O matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) escreveu uma primeira definição de função muito semelhante àquela que se usa atualmente:

“Uma variável  $y$  se diz função de uma variável  $x$  se, para todo valor atribuído a  $x$ , corresponde, por alguma lei ou regra, um único valor de  $y$ ”. Nesse caso,  $x$  denomina-se variável independente e  $y$ , variável dependente.

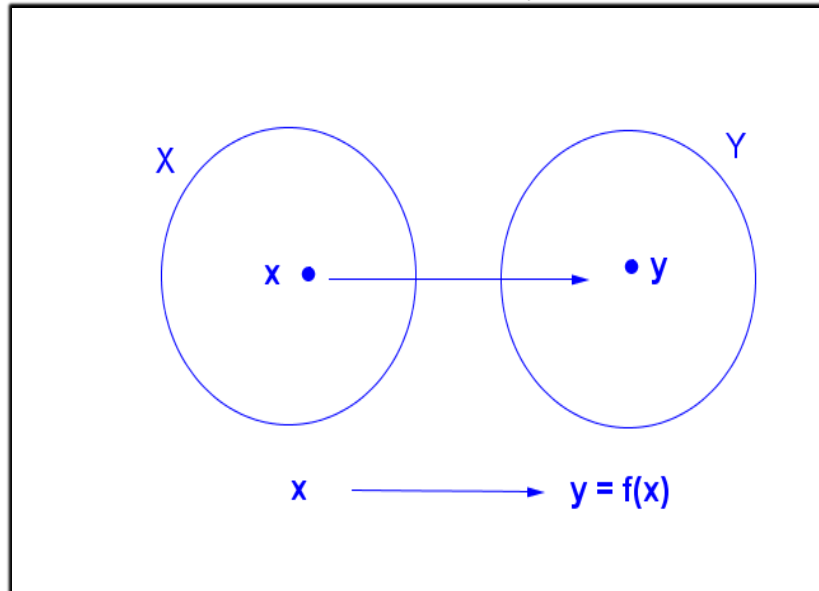
Em sua única obra a respeito da Teoria Algébrica dos Números, ele deu uma definição moderna de função.

“Chama-se função de uma ou de várias quantidades a toda expressão de cálculo na qual essas quantidades entrem de alguma maneira, combinadas ou não com outras quantidades cujos valores são dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da função podem receber Todos os valores possíveis. Assim, nas funções são consideradas apenas as quantidades assumidas como variáveis e não as constantes que aparecem combinadas a elas”. (MENDES, 1994; p.37).

Já no fim do século XIX, com a disseminação da teoria dos conjuntos, tornou-se possível a definição formal do conceito de função por meio de conjuntos:

“Dados os conjuntos  $X$  e  $Y$ , uma função  $f: X \rightarrow Y$  (lê-se: uma função de  $X$  em  $Y$ ) é uma regra que determina como associar a cada elemento  $x \in X$  um único  $y = f(x) \in Y$ ”. Veja a seguir na figura 1.

**Figura 1:** Conjuntos  $X$  e  $Y$ , uma função  $f: X \rightarrow Y$



Fonte: Autor, 2018

O conceito de função é um dos mais importantes da matemática e ocupa lugar de destaque em vários de seus campos, bem como em outras áreas do conhecimento. O conceito básico é o seguinte: toda vez que temos dois conjuntos e algum tipo de associação entre eles, que faça corresponder a todo elemento do primeiro conjunto um único elemento do segundo, ocorre uma função.

### 1.1- A EVOLUÇÃO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

A função quadrática tem sua evolução associada ao desenvolvimento da resolução representação gráfica das equações de 2º grau.

Na primeira metade do século IV, Diofanto de Alexandria (409 - 329 a.C ), por muito considerado a “pai da álgebra”, apresentou, em Aritmética, soluções algébricas para diversos tipos de equações de 2º grau.

Euclides (325-265 a.C), em 300 a.C, registrou, na sua obra Os Elementos, processos geométricos de soluções de algumas equações de 2º grau, já desenvolvidas por volta de 500 ac pelos pitagóricos.

Entre os árabes, já no século IX, podemos destacar Abu Abdullah Mohammed Ben Musa Al-Khowarismi (790 – 850), que em sua obra Al-jabr, da qual deriva o nome “álgebra”, expõem processos de resolução de equações, especialmente as de 2º grau.

Também os hindus Brahmagupta (~ 598 – 670) e Bhaskara Akaria (1114 – 1185) desenvolveram processos de resolução de equações de 2º graus, os matemáticos da época usavam várias regras para resolver equações do segundo grau, por causa da falta de uma notação algébrica, bem como o uso de métodos geométricos para deduzir as regras.

No século XVII, o matemático francês François Viète (1540 – 1603), a quem devemos grande parte da generalização da notação algébrica atual, notabilizou-se pelo desenvolvimento de métodos de resolução de equações quadráticas.

O formato atual (expressão literal igualada à zero) é devido a Thomas Harriot (1560 – 1621) e a representação gráfica dessa equação é encontrada nos trabalhos de Descartes.

Galileu Galilei (1564-1642) como o que fez surgir o interesse em debater os axiomas, mensuráveis e que, portanto poderiam ser relacionados por fórmulas. Seu principal interesse era entender como os fenômenos ocorriam, com o intuito de descrever as mudanças da natureza. Foi o estudo do movimento que originou o conceito de uma função ou de uma relação entre variáveis. Porém Galileu não formalizou explicitamente a palavra função.

Foi somente no século XVIII, que o conceito de função surgiu explicitamente na matemática. Leonhard Euler (1707-1783) definiu funções no sentido analítico, segundo o qual uma função não necessitava unicamente de uma expressão analítica, introduzindo o símbolo  $f(x)$ . O mesmo matemático diferenciou as funções contínuas e descontínuas, levando em consideração a lei de formação de cada função. As que fossem definidas por apenas uma expressão analítica seriam definidas como contínua e caso essa lei mudasse em qualquer intervalo do domínio automaticamente se classificaria como descontínua ou mista.

## CAPITULO 2- FUNÇÃO QUADRÁTICA

Nesse capítulo, serão abordados assuntos que servirão de pré-requisitos para que o leitor obtenha uma melhor compreensão acerca do tema desse trabalho. Será apresentado de forma sucinta, um estudo sobre a função quadrática abordando suas principais características e apresentando-as as definições, conceitos básicos e gráficos.

Definição:

Uma função  $f$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  recebe o nome de função quadrática ou do 2º grau quando associa a cada  $x \in \mathbb{R}$  o elemento  $(ax^2 + b + c) \in \mathbb{R}$ , em que  $a, b, c$  são números reais dados e  $a \neq 0$ . Nesse caso, escreve-se.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Exemplo: a)  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  em que  $a = 1, b = -3, c = 2$

Exemplo: b)  $f(x) = x^2 - 4$  em que  $a = 1, b = 0, c = -4$

Exemplo: c)  $f(x) = -3x^2$  em que  $a = -3, b = 0, c = 0$

### 2.1- GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

O gráfico da função quadrática é uma parábola, que pode ter dois comportamentos, concavidade para cima ou para baixo o que vai nos dizer essas duas situações e o parâmetro  $a$  da função.

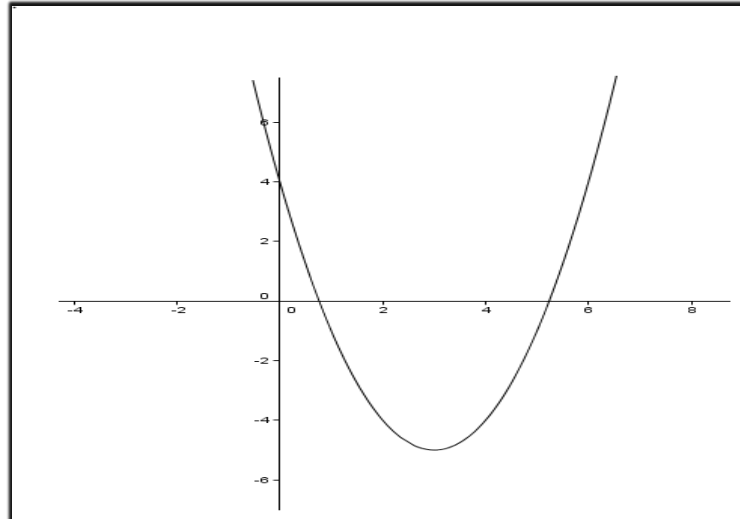
O gráfico cartesiano de uma função quadrática, de domínio no conjunto dos números  $\mathbb{R}$  e de coeficiente reais, é uma curva denominada parábola com um eixo de simetria paralelo ao eixo  $Y$ .

Para fazer o gráfico da função quadrática, devemos descobrir pontos que pertencem à parábola e representa-los no plano cartesiano.

#### 2.1.1- Concavidade voltada para cima

Se  $a$  for maior que zero, na função  $f(x) = x^2 - 6x + 4$ , a concavidade estar voltada para cima. Como no gráfico a seguir:

**Figura 2:** Parábola com Concavidade para Cima.

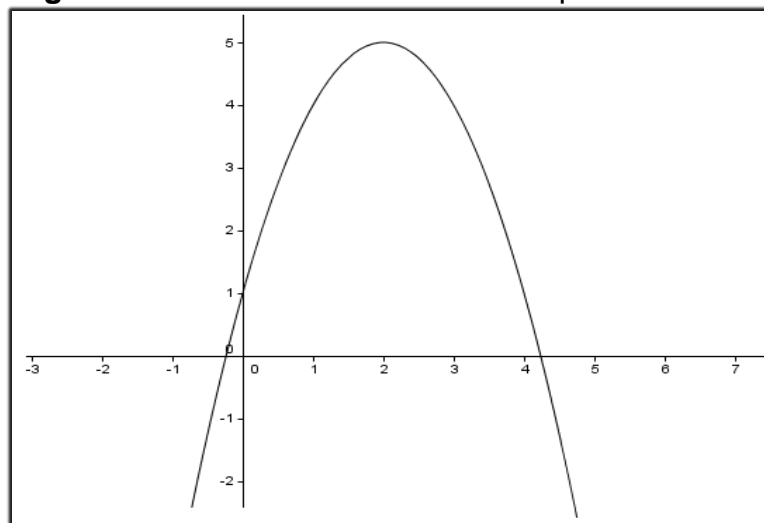


Fonte: Autor, 2018

### 2.1.2 - Concavidade voltada para baixo

Se  $a$  for menor que zero, na função  $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ , a concavidade estar voltada para baixo. Como no gráfico a seguir:

**Figura 3:** Parábola com Concavidade para Baixo.



Fonte: Autor, 2018

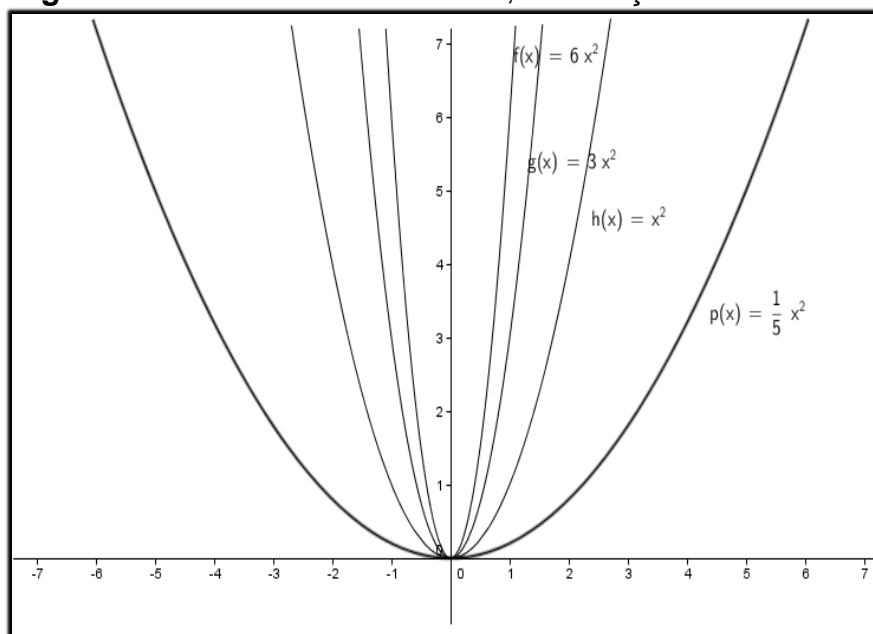
### 2.1.3- Parâmetro ou coeficiente $a$ :

Vamos estudar o efeito do parâmetro ou coeficiente  $a$ , na parábola da função quadrática dada  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , através de uma representação gráfica.

Este parâmetro é responsável pela concavidade e abertura da parábola. Além disso, quanto maior for o valor absoluto de  $a$ , menor será a abertura da parábola (parábola mais “fechada”) e quanto menor o valor absoluto de  $a$ , maior será a abertura da parábola, independentemente da concavidade sendo para cima ou para baixo.

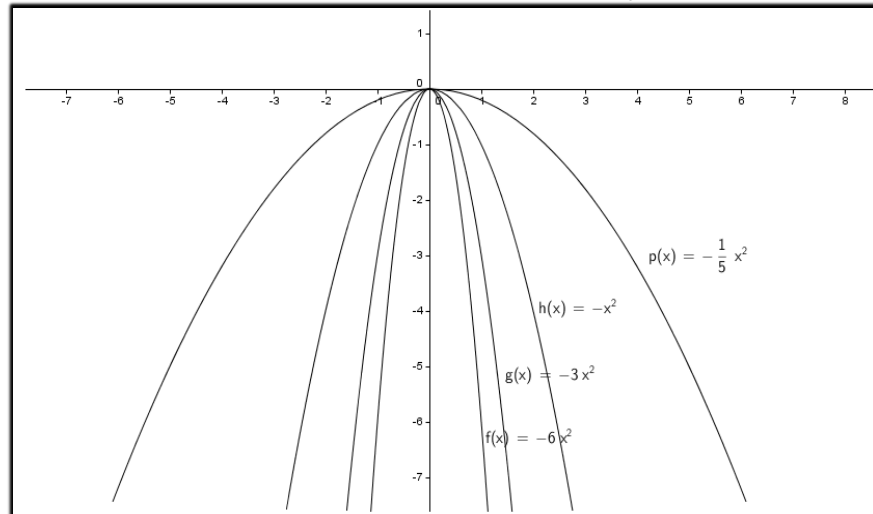
- Temos que, se  $a > 0$ , a concavidade da parábola está voltada para cima, também se observa a variação do valor de  $a$ . Como representar-se no gráfico a seguir:

**Figura 4:** Gráficos do Parâmetro  $a$ , nas funções.



Fonte: Autor, 2018

- Temos que, se  $a < 0$ , a concavidade da parábola para baixo e a variação no valor de  $a$ . Como é observado no gráfico a seguir:

**Figura 5:** Gráficos do Parâmetro  $a$ , nas funções.

Fonte: Autor, 2018

## 2.2- FORMA CANÔNICA

Para iniciarmos um estudo analítico mais detalhado da função quadrática, vamos primeiramente transformá-la em outra forma mais conveniente, chamada forma canônica.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right]$$

As duas primeiras parcelas dentro dos colchetes são as mesmas duas parcelas do desenvolvimento do quadrado:

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

Completando o quadrado, pode-se escrever:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[ x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right],$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] \text{ (forma canônica)}$$

A forma canônica tem algumas consequências. Em primeiro lugar, ela conduz imediatamente à fórmula que dá as raízes da equação  $ax^2 + bx + c = 0$ . Com efeito, sendo  $a \neq 0$ , temos as seguintes equivalências:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4)$$

A passagem da linha (2) para a linha (3) só tem sentido quando o discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$  é  $\geq 0$ . Caso seja o  $\Delta < 0$ , a equivalência entre as linhas (1) e (2) significa que a equação dada não possui solução real, pois o quadrado de  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$  não pode ser negativo.

Outra maneira de escrever a forma canônica é  $f(x) = a(x - m)^2 + k$ , em que  $m = -\frac{b}{2a}$  e  $k = f(m)$ , chamando de  $m = -\frac{b}{2a}$  e  $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ , concluímos que  $k = f(m)$ .

### 2.2.1- Decorrências da forma canônica

- Valor mínimo e máximo da função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Considere a seguinte função quadrática  $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ .

Neste caso, se observa:

$$m = \frac{5}{6} \text{ e } k = f\left(\frac{5}{6}\right) = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{6}\right) + 2 = -\frac{1}{12}$$

E a forma canônica é dada por  $f(x) = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}$ .

Analisando essa forma canônica, podemos concluir que o menor valor de  $f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  é  $-\frac{1}{12}$ . Isso ocorre quando  $x = \frac{5}{6}$ .

- Zeros da função quadrática e raízes da equação correspondente

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2 \Rightarrow f(x) = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} \text{ (forma canônica)}$$

$$3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} = 0 \Rightarrow 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{12} \Rightarrow \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \Rightarrow x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$x - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = 1$$

$$x - \frac{5}{6} = -\frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Logo, os zeros de  $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$  são 1 e  $\frac{2}{3}$ , que são também as raízes da equação  $3x^2 - 5x + 2 = 0$ .

### 2.3- ZEROS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Os zeros ou raízes da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  são os valores de  $x$  reais tais que  $f(x) = 0$  e, portanto, as soluções da equação do segundo grau.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Representando  $4ac - b^2$  por  $\Delta$  e utilizar a forma canônica, obtido no item anterior, se consegue chegar na fórmula das raízes da função quadrática.

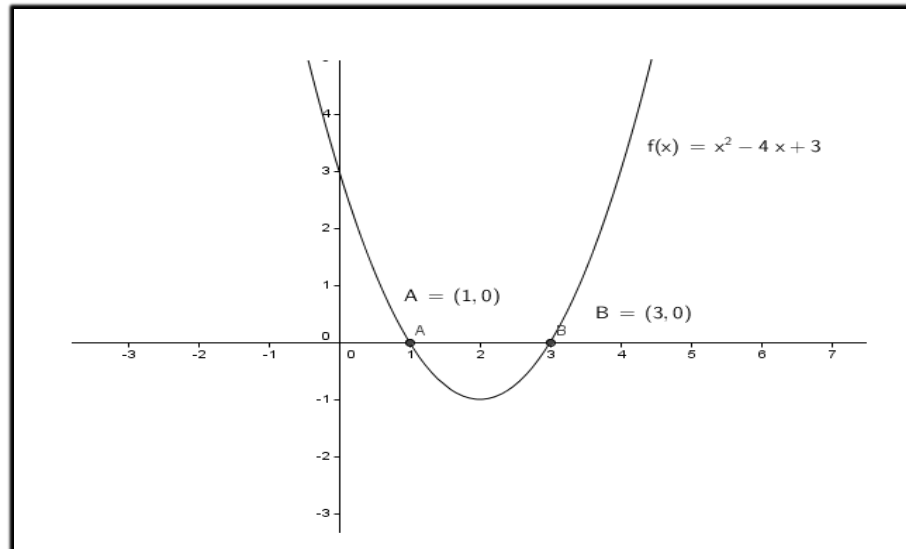
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0 \Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Observação. A tão conhecida fórmula geral de resolução da equação do 2º grau acima, não foi desenvolvida pelo matemático indiano Bhaskara, que, conforme Boyer (2001) foi “o mais importante matemático do século XII”, a tal expressão, fórmula de Bhaskara, “leva o nome de fórmula de Bhaskara devido ao fato de ter sido publicada em um livro escrito por esse famoso matemático hindu do Século 12”.

Interpretando geometricamente, dizemos que os zeros da função quadrática são as abscissas (A B) dos pontos onde a parábola corta o eixo dos X.

Exemplo: Construindo o gráfico da função  $y = x^2 - 4x + 3$  podemos notar que a parábola corta o eixo dos  $x$  nos pontos de abscissas 1 e 3, que são raízes da equação  $x^2 - 4x + 3$ .

**Figura 6:** Gráfico da Função  $y = x^2 - 4x + 3$ , com os Pontos de Abscissas 1 e 3.



Fonte: Autor, 2018

Observe que a existência de raízes reais para equação do segundo grau  $ax^2 + bx + c = 0$  fica condicionada ao fato de  $\sqrt{\Delta}$  ser real, essa existência depende do valor obtido para o radicando  $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$  chamado discriminante. Assim, temos três casos a considerar:

1º Caso: Para delta maior que zero, temos.

Se  $\Delta > 0$ , a equação apresentará duas raízes distintas, que são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2º Caso: Para delta igual a zero, temos.

Se  $\Delta = 0$ , a equação apresentará duas raízes iguais, que são:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3º Caso: Para delta menor que zero, temos.

Se  $\Delta < 0$ , já nesse caso  $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$ , diremos que a equação não apresenta raízes reais.

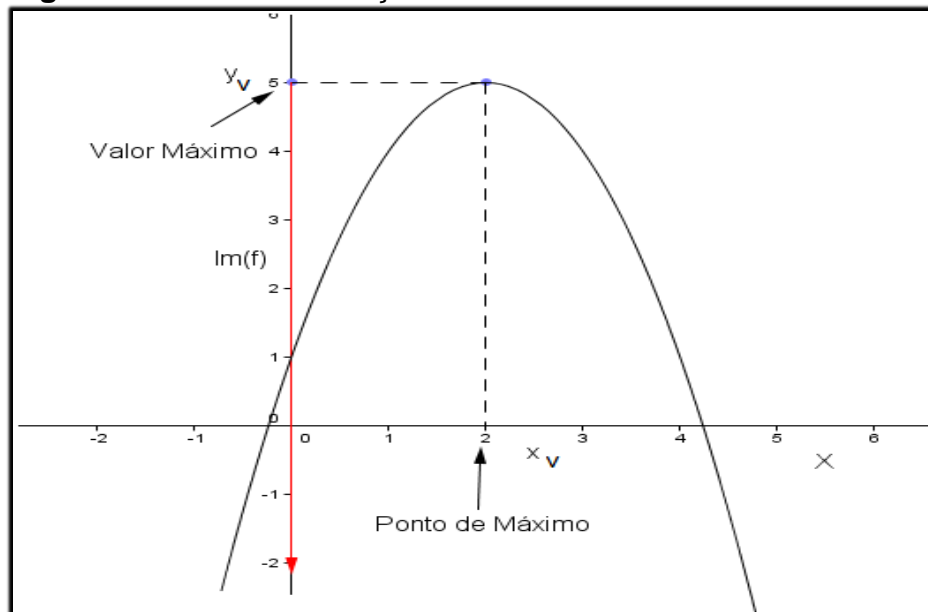
## 2.4- MÁXIMO DA FUNÇÃO

Definição:

Dizemos que o número  $y_M \in Im(f)$  é o valor máximo da função  $y = f(x)$  se, e somente se,  $y_M \geq y$  para qualquer  $y \in Im(f)$ . O número  $x_M \in D(f)$  tal que  $y_M = f(x_M)$  é chamado ponto de máximo da função.

Para um melhor entendimento, veja o gráfico a seguir:

**Figura 7: Máximo da Função Quadrática**



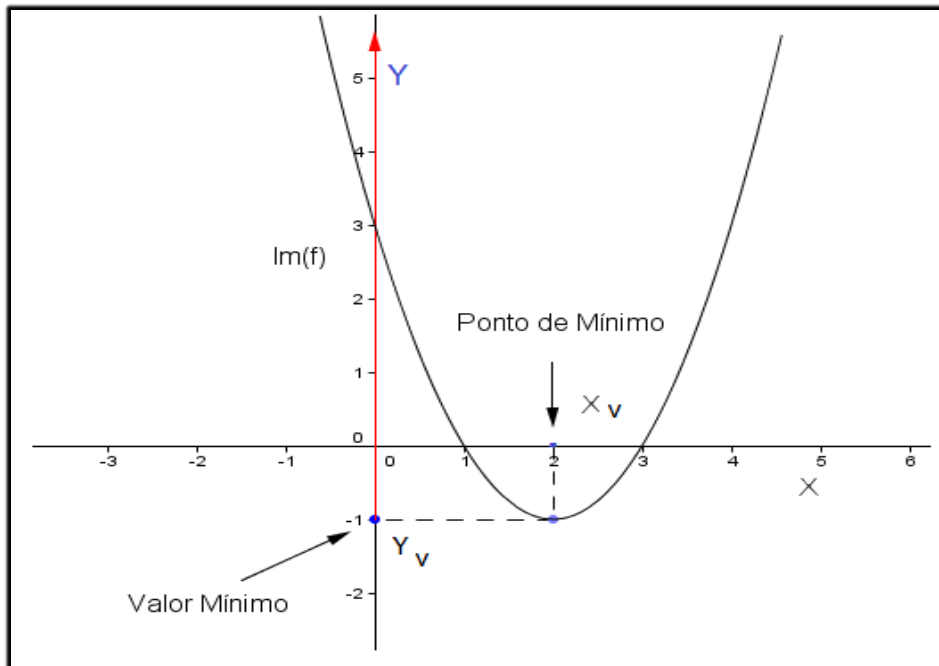
Fonte: Autor, 2018

## 2.5- MÍNIMO DA FUNÇÃO

Definição:

Dizemos que o número  $y_m \in Im(f)$  é o valor mínimo da função  $y = f(x)$  se, e somente se,  $y_m \leq y$  para qualquer  $y \in Im(f)$ . O número  $x_m \in D(f)$  é chamado ponto de mínimo da função.

Para um melhor entendimento, veja o gráfico a seguir:

**Figura 8:** Mínimo da Função Quadrática

Fonte: Autor, 2018

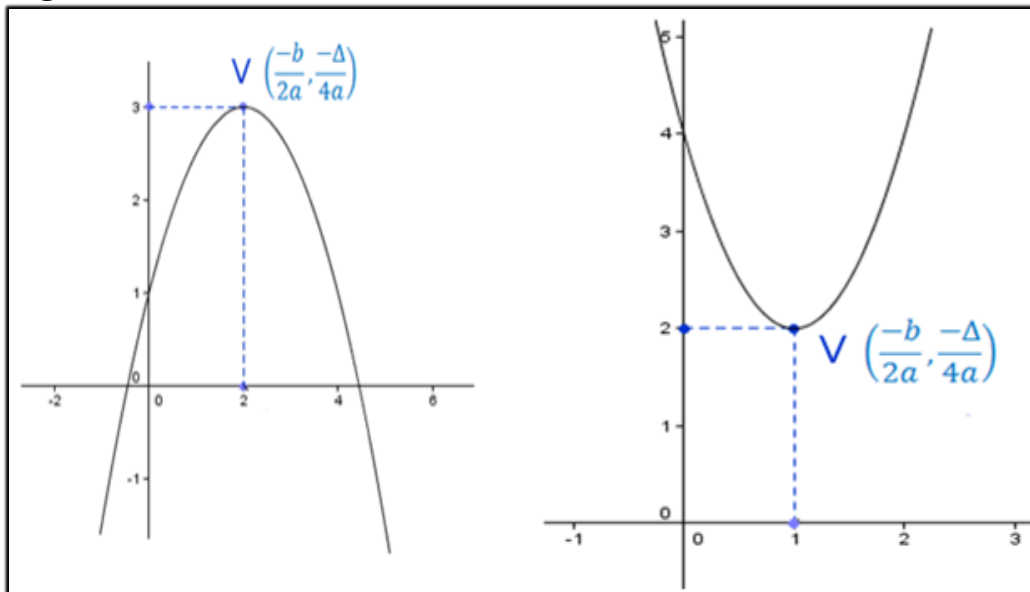
Conhecendo as coordenadas do vértice de uma parábola, pode-se determinar a imagem da função quadrática relacionada a ela e também o valor máximo e o valor mínimo dessa função.

## 2.6- VÉRTICE DA PARÁBOLA

A determinação do vértice da parábola ajuda na elaboração do gráfico e permite determinar imagem da função, bem como seu valor máximo ou mínimo.

Uma das maneiras de determinar o vértice é lembrar que a parábola, que representa uma função quadrática, é simétrica em relação a um eixo vertical. Determinando a posição desse eixo, encontraremos a abscissa do vértice, e com a abscissa do vértice obteremos a ordenada.

O ponto  $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$  é chamado vértice da parábola, indica o ponto de mínimo (se  $a > 0$ ) ou de máximo (se  $a < 0$ ). Seu vértice  $V$  tem valor máximo ou mínimo em  $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ . Observe os gráficos a seguir:

**Figura 9:** Parábola com o Vértice

Fonte: Autor, 2018

## 2.7- IMAGEM

Para determinarmos a imagem da função quadrática, tomemos inicialmente a função na forma canônica e representando  $4ac - b^2$  por  $\Delta$ :

$$f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Ou seja,  $f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ . Observamos que  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ ; então temos que considerar dois casos:

1º caso:

Se  $a > 0 \Rightarrow a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ , e, portanto:

$$y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y \geq y_V$$

2º caso:

Se  $a < 0 \Rightarrow a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \leq 0$ , e, portanto:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y \leq y_v$$

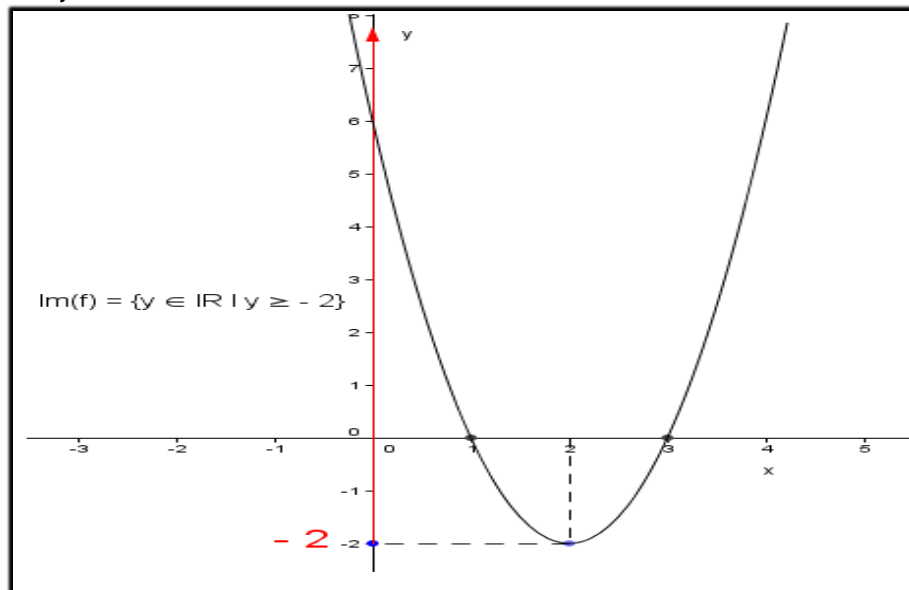
Ou seja:

$$a > 0 \Rightarrow \text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{-\Delta}{4a}\right\}$$

$$a < 0 \Rightarrow \text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{-\Delta}{4a}\right\}$$

A seguir observe o gráfico para se entender melhor o contexto.

**Figura 10:** Imagem da Função Quadrática:  $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -2\}$



Fonte: Autor, 2018

## 2.8- EIXO DE SIMETRIA

Temos o seguinte, Teorema:

“O gráfico da função quadrática admite um eixo de simetria perpendicular ao eixo dos x e que passa pelo vértice.”

Os pontos da reta perpendicular ao eixo dos x e que passa pelo vértice da parábola obedecem à equação  $x = \frac{-b}{2a}$ , pois todos os pontos dessa reta têm abscissa  $\frac{-b}{2a}$ .

Para provarmos que a parábola tem eixo de simetria na reta  $x = \frac{-b}{2a}$ , devemos mostrar que dado um ponto  $A\left(\frac{-b}{2a} + r, y\right)$ , com  $r \in \mathbb{R}$ , pertencente ao gráfico da função, existe  $B\left(\frac{-b}{2a} - r, y\right)$  também pertencente ao gráfico da função.

Tomando a função quadrática na forma canônica

$$f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

E considerando que  $A\left(\frac{-b}{2a} - r, y\right)$  pertence ao gráfico da função, temos:

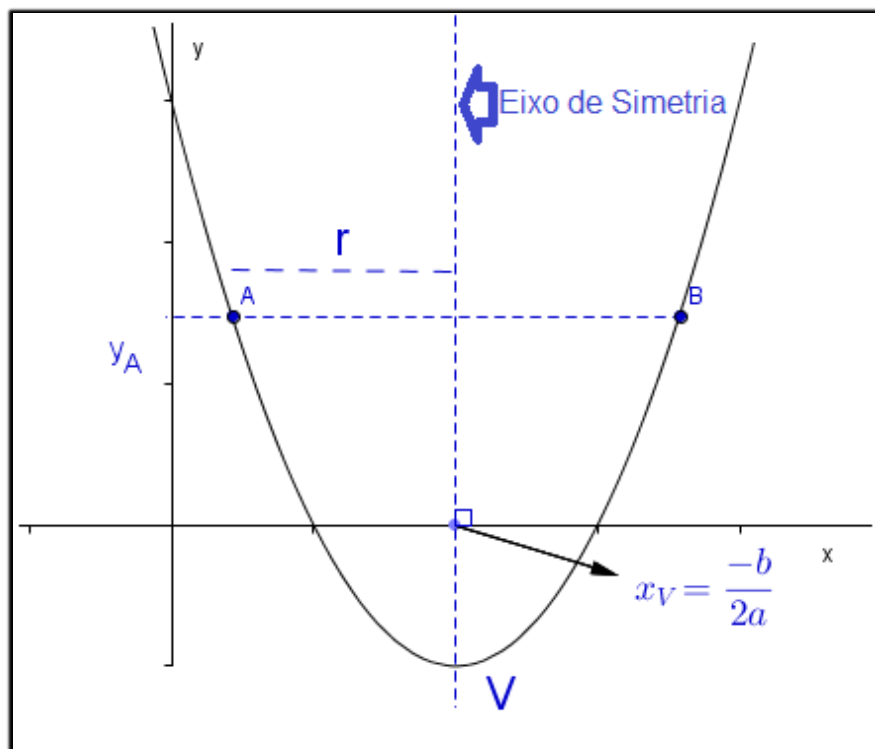
$$y = f\left(\frac{-b}{2a} - r\right) = a \left[ \left( \frac{-b}{2a} - r + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \left[ (-r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \left[ (r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] =$$

$$a \left[ \left( \frac{-b}{2a} + r + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = f\left(\frac{-b}{2a} + r\right), \text{ provando que } B\left(\frac{-b}{2a} + r, y\right) \text{ também pertence}$$

ao gráfico da função. (IEZZI. 2004, p. 136).

A seguir observam-se o gráfico para um melhor entendimento do contexto.

**Figura 11:** Parábola da Função Quadrática com Eixo de Simetria



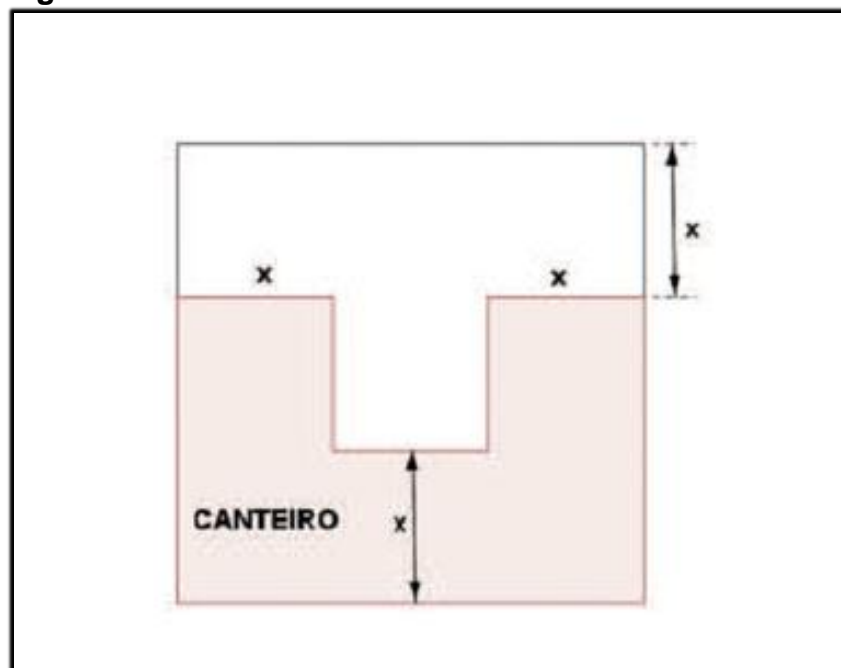
Fonte: Autor, 2018

### CAPÍTULO 3- APLICAÇÕES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA NO COTIDIANO

Neste capítulo, trata-se de algumas aplicações da função quadrática, em diferentes áreas, que acontece habitualmente. No desenvolvimento dos problemas propostos empregar-se-ão os métodos de resoluções desenvolvidos no capítulo anterior.

Aplicação1: Desejamos construir um canteiro, para plantações, em um grande jardim de formato quadrado de  $36 \text{ m}^2$  de área, como mostra a figura a seguir, com  $0 < x < 3$ . (Fundação CECIERJ, Disponível em: ceja\_matematica\_unidade\_17.pdf).

**Figura 12:** Jardim com Canteiro



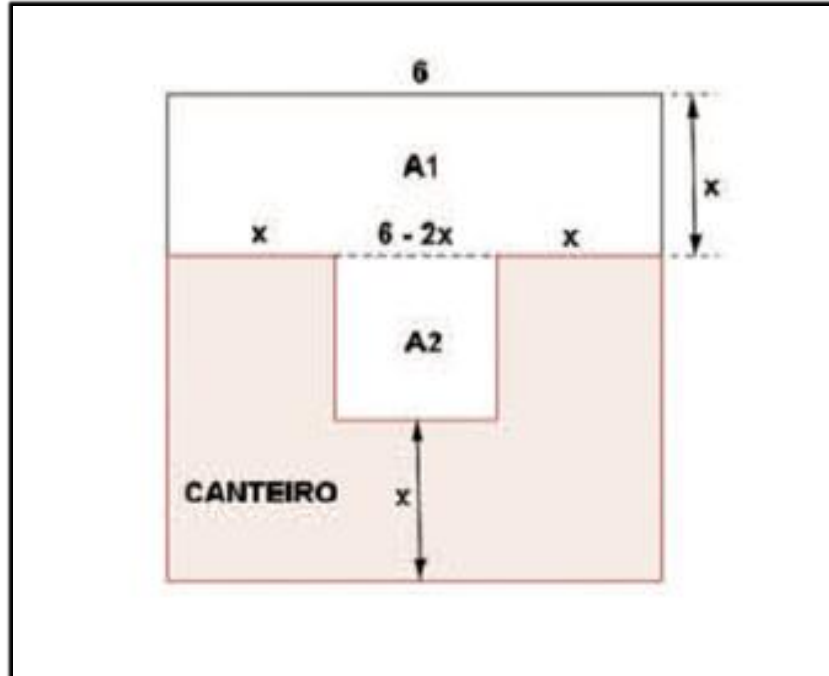
Fonte: Fundação CECIERJ

- Se  $x = 2$ , qual será a área do canteiro?
- Mostre que a área do canteiro depende do valor de  $x$ .
- Para que valor de  $x$  esse canteiro terá a maior área possível?
- Qual é o valor dessa área?
- É possível observar graficamente a variação dessa área em função de  $x$ . Construa um gráfico que dá a área do canteiro (no eixo  $y$ ) em função do valor de  $x$ .

Solução:

Como o jardim tem formato quadrado de área  $36 \text{ m}^2$ , temos que o lado deste é igual a  $6 \text{ m}$ . Para calcularmos a área do canteiro ( $A$ ), devemos subtrair da área do jardim as áreas dos retângulos  $A1$  e  $A2$  indicadas na figura a seguir.

**Figura 13:** Jardim com Canteiro



Fonte: Fundação CECIERJ

$A = 36 - A1 - A2$ , como  $A1 = 6 \cdot x$  e  $A2 = (6 - 2x)^2$ , então:

$$A = 36 - 6x - (6 - 2x)^2 = 36 - 6x - (36 - 24x + 4x^2) = 36 - 6x - 36 + 24x - 4x^2,$$

Logo, temos:

$$A(x) = -4x^2 + 18x$$

Pois, a área desse canteiro é expressa por uma função quadrática. Vamos responder aos itens do enunciado desse exemplo.

a) Para  $x = 2$ , a área do canteiro é:

$$A(x) = -4(2)^2 + 18(2) = -16 + 36 = 20 \text{ m}^2.$$

b) A expressão  $A = -4x^2 + 18x$  mostra que o valor de ( $A$ ) depende do valor de  $x$ , isto é, ao variarmos o valor de  $x$ , variamos também do valor de ( $A$ ).

c) Note que a função quadrática que dá o valor de  $A$  em função de  $x$  possui coeficiente a negativo. Dessa forma, ( $A$ ) possui um valor máximo dado pela fórmula  $-\frac{\Delta}{4a}$  e o valor de  $x$  para que tal fato ocorra é dado pela fórmula

$$-\frac{b}{2a}.$$

$$\text{Assim, } x_{max} = -\frac{b}{2a} = \frac{-18}{2(-4)} = \frac{-18}{-8} = 2,25$$

Logo, o valor de x é 2,25 m.

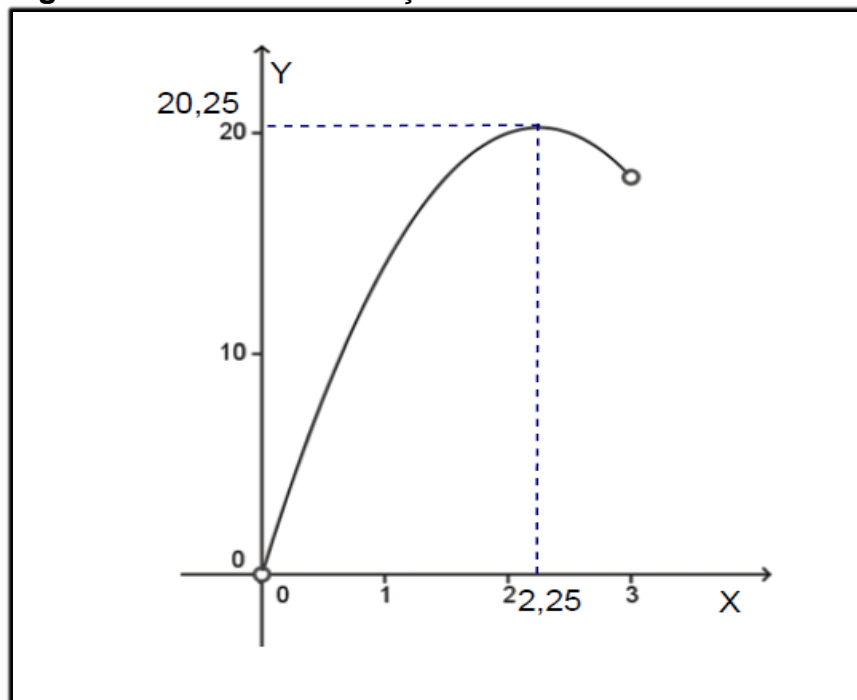
d) Utilizando a fórmula  $-\frac{\Delta}{4a}$ , temos que:

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 18^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 0 = 324$ , e que a área máxima do canteiro é.

$$A_{max} = \frac{\Delta}{4a} = \frac{-324}{4(-4)} = \frac{-324}{-16} = 20,25m^2$$

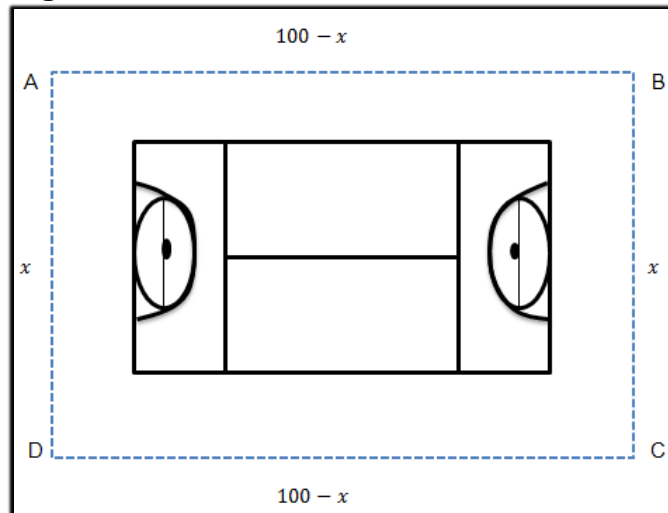
d) Vamos construir o gráfico que dá a variação da área em função do comprimento x. Note que x não pode assumir qualquer valor real, mas apenas valores entre 0 e 3.

**Figura 14:** Gráfico da Variação



Fonte: Autor, 2018

Aplicação2: Os diretores de um centro esportivo desejam cercar com tela de alambrado o espaço em volta de uma quadra de basquete retangular. Tendo recebido 200m de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com tela para que a área seja a maior possível. (DANTE. 2010, p. 150).

**Figura 15:** Modelo matemático do terreno

Fonte: Autor, 2018

**Solução:**

Pode-se ilustrar o problema com o retângulo A, B, C e D, com dimensões  $x$  por  $100 - x$ , pois o perímetro é de 200m. Observe que a área do terreno a cercar é dada em função da medida  $x$ , ou seja:

$$\begin{aligned} f(x) &= (100 - x) \cdot x \\ &= 100x - x^2 \\ &= -x^2 + 100x \end{aligned}$$

A área máxima procurada é o valor máximo da função  $f(x) = -x^2 + 100x$ . A área assume o valor máximo no vértice da parábola, ou seja, quando:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-1)} = -\frac{100}{-2} = 50 \text{ (largura)}$$

Observa-se então que a área máxima a ser cercado é uma região quadrada cujo lado mede 50 m.

**Aplicação3:** A trajetória da bola, em um chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que sua altura  $h$ , em metros,  $t$  segundos após o chute, seja dada por  $h = -t^2 + 6t$ , responda: (DANTE. 2013, p. 123)

**Figura 16:** Campo de Futebol, trajetória da bola



Fonte: DANTE. 2013, p. 123

- Em que instante a bola atinge a altura máxima?
- Qual é a altura máxima atingida pela bola?

Solução:

De acordo com a imagem acima se percebe a bola descrevendo uma parábola com concavidade voltada para baixo, com tudo, vai existir um ponto de máximo, pois o parâmetro ou coeficiente  $a$  da função  $h(t) = -t^2 + 6t$  dada na questão é negativo, contudo, usam-se as formulas a seguir:

$$t_V = -\frac{b}{2a} \text{ e } h_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

Ponto de máximo:  $V(t_V, h_V)$ .

- A bola atinge a sua altura máxima quando:

$$t_V = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3s$$

Logo, a bola atinge a altura máxima 3 segundos após o chute.

- A altura máxima atingida pela bola é:

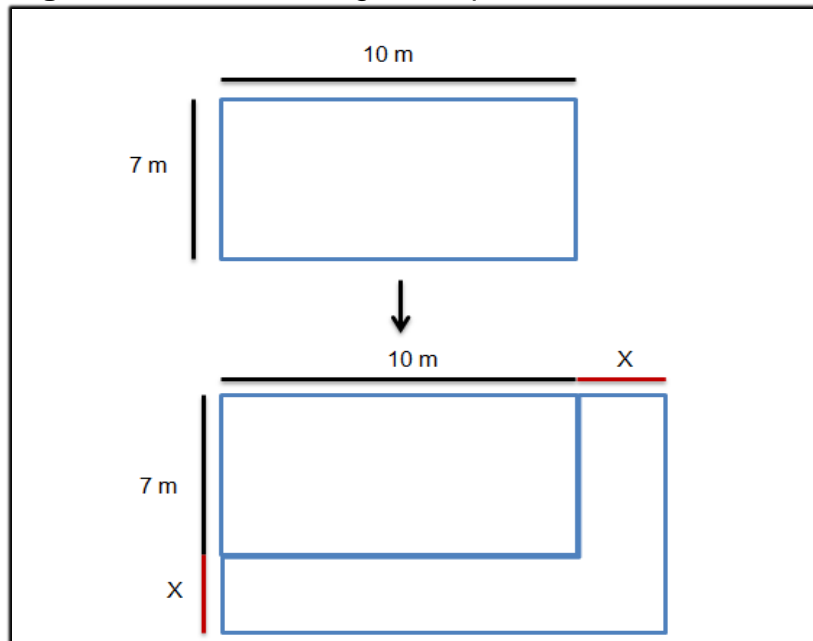
$$h_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-36}{4(-1)} = \frac{-36}{-4} = 9$$

$$\text{ou } h(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 = -9 + 18 = 9$$

A altura máxima atingida pela bola é 9 metros.

Aplicação4: Fernando tem em seu sitio uma região retangular que é utilizada para o plantio de morangos. Com o objetivo de aumentar a produção, ele pretende ampliar essa região em uma mesma, medida, tanto no comprimento quanto na largura, como mostra a figura. (SOUZA. 2010, p. 116)

**Figura 17:** Sitio com Região Ampliada



Fonte: Autor, 2018

Solução:

Podemos representar a área ( $f$ ) dessa região após a ampliação em função da medida  $x$  indicada.

$$f(x) = (7 + x) \cdot (10 + x)$$

$$f(x) = 70 + 7x + 10x + x^2$$

$$f(x) = x^2 + 17x + 70$$

A fórmula obtida corresponde à lei da função que expressa a área da região após a ampliação. Esse é um exemplo de uma função quadrática.

Se considerarmos  $x = 3$ , isto é, se a região for ampliada em 3m na largura e no comprimento, podemos calcular sua área a partir dessa função.

$$f(x) = x^2 + 17x + 70$$

$$f(3) = 3^2 + 17 \cdot 3 + 70$$

$$= 9 + 51 + 70$$

$$= 130m^2$$

Aplicação5: Um campeonato de futebol vai ser disputado por 10 clubes pelo sistema em que todos jogam contra todos em dois turnos. Vamos verificar quantos jogos serão realizados. (IEZZI. 2010, p. 93)

**Figura 18:** Campo de Futebol



Fonte: [https://www.google.com.br/=campeonato+de+futebol&oq=campeonat&gs\\_l=img](https://www.google.com.br/=campeonato+de+futebol&oq=campeonat&gs_l=img)

Solução:

Conta-se o número de jogos que cada clube fará “em casa”, ou seja, no seu campo: 9 jogos. Como são 10 clubes, o total de jogos será:

$$10 \cdot 9 = 90$$

Se o campeonato fosse disputado por 20 clubes (como e o campeonato brasileiro), poderíamos calcular quantos jogos seriam realizados usando o mesmo raciocínio:

$$20 \cdot 19 = 380 \text{ jogos}$$

Enfim, para cada número de clube ( $x$ ), é possível calcular o número de jogos do campeonato ( $y$ ). O valor de  $y$  é função de  $x$ .

A regra que permite calcular  $y$  a partir de  $x$  é a seguinte:

$$y = x \cdot (x - 1)$$

$$y = x^2 - x$$

Usando a função obtida podem-se calcular contos jogos serão realizados, observe o calculo a seguir:

$$y = 20^2 - 20$$

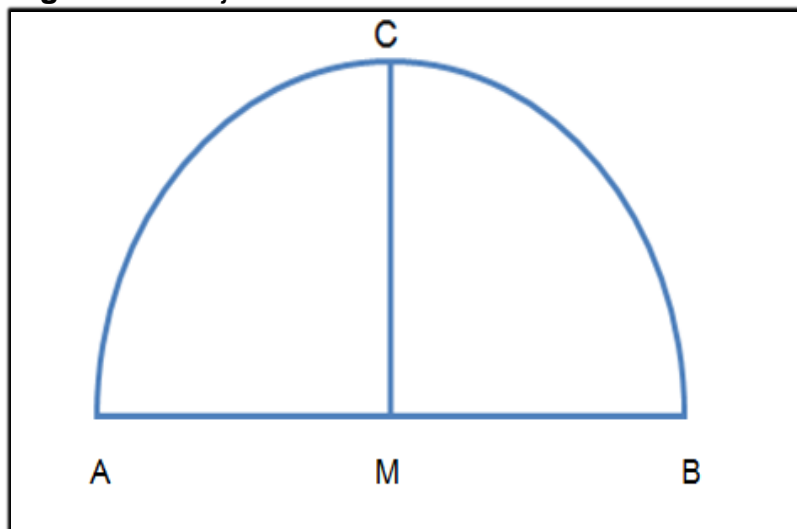
$$y = 400 - 20$$

$$y = 380 \text{ jogos}$$

**Aplicação6:** Com um histórico de disparar mísseis em momentos de atrito diplomático, a Coreia do Norte já havia anunciado que realizaria manobras militares durante o mês de julho de 2009, e pediu ao Japão que não se aproximasse de sua costa no período.

Considere os testes realizados com mísseis de curto alcance, cujo alcance máximo é de 400 km, e a trajetória do míssil descrito pela função  $y = -x^2 + 400x$ , em que  $x$  e  $y$  são dados em km. O míssil foi lançado a partir do ponto A (0,0). Determine as coordenadas dos pontos B, C e M. (DANTE. 2010 p. 198)

**Figura 19:** Trajetória do Míssil



Fonte: Autor, 2018

**Solução:**

Inicialmente precisa-se determinar o valor do delta, obtendo o valor do mesmo inicia-se o calculo das coordenadas.

$$y = -x^2 + 400x$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = 400^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0$$

$$\Delta = 160.000 - 0$$

$$\Delta = 160.000$$

Para determinar a coordenada do ponto C precisa-se calcular é o vértice da parábola, seu ponto máximo e valor máximo:  $C\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ .

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-400}{2(-1)} = \frac{-400}{-2} = 200$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-160.000}{4 \cdot (-1)} = \frac{-160.000}{-4} = 40.000$$

Logo, a coordenada do ponto C = (200, 40.000) km.

Para determinar a coordenada do ponto M precisa-se calcular seu ponto de máximo:  $B(x_V)$

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{-400}{2 \cdot (-1)} = \frac{-400}{-2} = 200$$

Logo, a coordenada do ponto M = (200, 0) km.

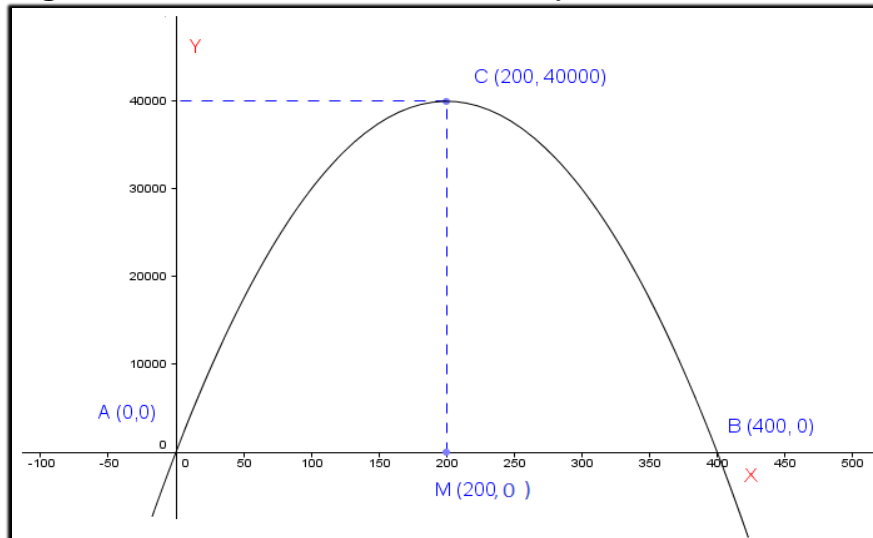
Para determinar o ponto B precisa-se calcular a raiz da função. Neste caso, interpretando geometricamente, o  $\Delta > 0$ , ou seja, a equação  $-x^2 + 400x = 0$  possui duas raízes, chamados  $x_1$  e  $x_2$ .

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-400 + 400}{2(-1)} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-400 - 400}{2 \cdot (-1)} = \frac{-800}{-2} = 400$$

Logo, a coordenada do ponto B = (400, 0) km.

Para entendermos melhor observamos o gráfico a seguir:

**Figura 20:** Gráfico Descrevendo a Trajetória do Míssil

Fonte: Autor, 2018

**Aplicação7:** Um ônibus de 40 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa exigiu de cada passageiro R\$ 20,00 mais R\$ 2,00 por lugar vago. Qual o número de passageiros para que a rentabilidade da empresa seja máxima? (DANTE. 2013, p. 125).

**Solução:**

Determina-se inicialmente a lei de formação da função lucro  $L(x)$  a partir do produto das equações  $40 - x$  (diferença do número de lugares que o ônibus possui com o número de lugares vazios) e  $20 + 2x$  (soma de 20,00 com 2,00 arrecadado de cada passageiro por lugar vago), isto é,  $L(x) = (40 - x) \cdot (20 + 2x)$ , desenvolvendo o produto, e dividindo por 2 temos:

$$\begin{aligned}
 L(x) &= (40 - x) \cdot (20 + 2x) \\
 &= 800 + 80x - 20x - 2x^2 \\
 &= -2x^2 + 60x + 800 \div 2 \\
 &= -x^2 + 30x + 400
 \end{aligned}$$

Em seguida determinamos a abscissa do vértice,  $x_V = -\frac{b}{2a}$  da parábola que representa a lei da função lucro  $L(x) = (40 - x) \cdot (20 + 2x)$ , assim estaremos

determinando número de passageiros necessários para que a rentabilidade da empresa seja máxima.

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

$$= -\frac{30}{2 \cdot (-1)} = \frac{-30}{-2} = 15$$

Portanto, o número de passageiros necessários para que a rentabilidade da empresa seja máxima, é de 15 passageiros.

Aplicação8: Os alunos de uma turma fizeram uma coleta para juntar R\$ 405, 00, custo de uma excursão. Todos contribuíram igualmente.

Na última hora, porém, dois alunos desistiram. Com isso, a parte de cada aluno sofreu um aumento de um real e vinte centavos. Quantos alunos tem a turma? (ELON. 2005, p. 159)

Solução:

Denotemos por  $x$  o número de alunos da turma. O que era estipulado que cada um pagasse era  $\frac{405}{x}$ . Com a desistência de dois alunos, passou a ser  $\frac{405}{x-2}$ . Se há menos alunos dividindo a conta, é óbvio que o valor que cada um tem que pagar aumenta. A diferença entre estes dois valores é de R\$ 1,20. Logo:

$$\frac{405}{x-2} - \frac{405}{x} = 1,2$$

Multiplicando ambos os lados por  $x \cdot (x - 2)$  e desenvolvendo, temos:

$$405x - 405(x - 2) = 1,2x(x - 2) \Rightarrow 405x - 405x + 810 = 1,2x^2 - 2,4x$$

$$\Rightarrow 1,2x^2 - 2,4x - 810 = 0$$

Dividindo a expressão por 1,2, temos:

$$x^2 - 2x - 675 = 0$$

Usando a fórmula geral, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-675)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 2700}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2704}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 52}{2}$$

Como  $x$  é o número de alunos da turma e queremos o  $x > 0$ , temos:

$$x = \frac{2 + 52}{2}$$

$$x = \frac{54}{2}$$

$$x = 27$$

Assim, há na turma 27 alunos.

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

O presente trabalho contribuiu de maneira significativa para minha formação acadêmica, ampliando meus conhecimentos sobre o assunto, dando uma maior segurança para que em futuro próximo, possibilitando trabalhar na sala de aula.

Por isso, foram desenvolvidas as aplicações da função quadrática em varias situações do cotidiano, mostrando que a matemática é uma ciência bastante importante para o dia a dia das pessoas e dando possibilidades para que os profissionais da educação mostrem aos alunos em sala de aula a matemática que estão estudando pode ser aplicada para resolver problemas do mundo real.

Acredita-se que os objetivos deste trabalho foram alcançados, pois considerando o livro didático um instrumento importante no processo ensino e aprendizagem onde o professor o tem como ferramenta de trabalho e o aluno como de estudo no contexto escolar, mas o mesmo não tem o objetivo de fazer suas questões nos acontecimentos diários, atento a essa questão desenvolvemos o tema proposto, função quadrática contexto e aplicações no cotidiano.

## REFERÊNCIAS

- BOYER, C. B. (2001). **História da Matemática**. Edgard Blucher, São Paulo, 2ª edição.
- BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília: MEC/Semtec, 1999.
- DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 2 ed. São Paulo: ÁTICA, 2013
- DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 1 ed. São Paulo: ÁTICA, 2010;
- IEZZI, Gelson. **Matemática: Ciência e Aplicações. 1 Ensino Médio**. 6 ed. São Paulo: SARAIVA, 2010;
- IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar 1**. 8 ed. São Paulo: ATUAL, 2004;
- LIMA, Elon L. **A Matemática do Ensino Médio Vol. 1**. 2 ed. Rio de Janeiro: S.B.M, 2005;
- MENDES, M.H.M. **O Conceito de Função: Aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau**. Dissertação de mestrado. PUC: RJ, 1994.
- SOUZA, Joamir R. **Novo Olhar Matemática**. - 1 ed. São Paulo: FTD, 2010;

