



**SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL  
FACULDADE DE MATEMÁTICA**

**AILTON GOMES DO NASCIMENTO**

**O PENSAMENTO COMBINATÓRIO DE ESTUDANTES DO 6º ANO DO  
ENSINO FUNDAMENTAL**

**CASTANHAL-PA  
2020**

AILTON GOMES DO NASCIMENTO

O PENSAMENTO COMBINATÓRIO DE ESTUDANTES DO 6º ANO DO ENSINO  
FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Castanhal, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob a orientação da Prof. Dr. Fabio Colins da Silva.

CASTANHAL  
2020

O PENSAMENTO COMBINATÓRIO DE ESTUDANTES DO 6º ANO DO ENSINO  
FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à banca examinadora como requisito parcial  
para a obtenção do Grau em Licenciatura Plena em Matemática.

Data da aprovação: 18/ 02 / 2020.

Conceito: \_\_\_\_\_

BANCA EXAMINADORA

Orientador: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Fabio Colins da Silva/IEMCI/UFPA

Membro Interno: \_\_\_\_\_

Profa. Dra. Kátia Liége Nunes Gonçalves/FACMAT/UFPA

Membro Interno: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Renato Germano Reis Nunes/FACMAT/UFPA

Membro Externo: \_\_\_\_\_

Prof. Me. Maurício dos Santos Macedo/SEDUC-PA

A Deus que é minha energia nesta trajetória e a minha família que é o meu bem maior, pela qual são merecedoras de todo esse esforço.

## AGRADECIMENTOS

Chegado ao fim de uma jornada é momento de agradecer, reconhecendo todos que ajudaram de alguma forma nessa luta, fazendo também parte dessa conquista.

Dessa forma, agradeço primeiro a Deus, pelo dom da vida e por mais essa graça concedida!

A minha família, que é o meu alicerce e minha fonte de inspiração, por ter me apoiado sempre nessa caminhada.

A minha mãe, Sebastiana Nascimento, que mesmo com suas limitações sempre foi minha incentivadora, me apoiando e me dando forças para que eu conseguisse meus objetivos.

Ao meu pai, Vitor Nascimento, que sempre acreditou em mim e mesmo com todas as dificuldades sempre me apoiou nesta jornada.

A minha esposa Lena Ribeiro, pelo companheirismo e paciência que teve comigo ao longo desses anos; também lhe agradeço pelas suas contribuições imensuráveis e pelas vezes que nela “descarreguei” as minhas frustrações, quero agora compartilhar essa conquista.

As minhas duas princesas (Maria Ludmila e Maria Emanuela), que sempre carregaram o fardo junto comigo, porém com seus carinhos puderam recarregar minhas forças para que não desistisse dessa jornada.

As diretoras e aos alunos do 6º ano da Escola Estadual de Canutama, meu muito obrigado.

Ao meu amigo e irmão, Hercules que durante esta jornada acadêmica fomos suporte um para o outro, como também na vida pessoal, onde que as dificuldades foram enfrentadas e juntos pudemos superar esses longos anos.

Aos meus amigos de faculdade Brenielle, Janaina, Denilton, Demeson e Jéssica Gama, pela amizade verdadeira e companheirismo que em muitos trabalhos acadêmicos foram suportes para chegar até aqui.

Aos colegas de licenciatura de Matemática pela amizade e pelas trocas de experiências, enriquecendo meu aprendizado.

Ao professor Fabio Colins, pela paciência e pelas valiosas orientações que contribuíram para a realização desse trabalho.

À professora Maria Eliana, que quando professora substituta na FACMAT, apostou em mim para participar do seu projeto de extensão, projeto esse que enriqueceu grandiosamente em minha vida acadêmica e profissional.

À professora Kátia Liége, que com sua sabedoria conduziu-nos a despertar para que não ficássemos presos ao TCC e por sua dedicação incansável frente a FACMAT.

Aos demais professores da FACMAT Roberta, Paula, Carla, Geraldo, Nildsen, Marcos, Edilberto, Artur Almeida, Frayzen e Samuel pelos ensinamentos e compartilhamentos de conhecimento.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente, àqueles que acreditaram na minha capacidade e me deram forças para continuar nessa jornada. A todos aqueles que acreditaram na concretização desse trabalho, muito obrigado!

## LISTA COMPARTILHADA

### LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Resoluções do problema de arranjo 1 realizado pelos participantes da pesquisa .....	14
Quadro 2: Resoluções do problema de combinação 1 realizado pelos participantes da pesquisa .....	20
Quadro 3: Resoluções do problema de combinação 2 realizado pelos participantes da pesquisa .....	22
Quadro 4: Estratégias de resoluções do problema de permutação 1 apresentadas pelos participantes da pesquisa .....	27

### LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Registro do princípio multiplicativo utilizado como estratégia pelo participante 4 .....	17
Figura 2: Possibilidades de sequências expressas por meio de diagrama de árvore .....	29
Figura 3: Estratégia de resolução apresentada pelo participante 5 .....	30
Figura 4: Estratégia de resolução apresentada pelo participante 2 .....	31

## RESUMO

O ensino de Matemática, na perspectiva dessa pesquisa, vai além de aprender a aplicar fórmulas em situações problemas. É necessário desenvolver habilidades que permitam refutar resultados, questionar determinados procedimentos de cálculo e relacionar diferentes caminhos de resolução de um problema. Assim, o valor da resposta correta cede espaço para o processo de resolução. Nesse sentido, esta pesquisa tem como objetivo propor atividades de matemática para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental sobre pensamento combinatório para investigar o desenvolvimento do raciocínio combinatório e o conceito de combinação por meio de estratégias pessoais. A discussão teórica que fundamenta as análises está pautada, principalmente, nos estudos de Hazzan; Borba, Aquino, entre outros. A pesquisa assumiu uma abordagem qualitativa do tipo exploratória e foi desenvolvida em uma escola pública da rede municipal de Benevides (PA) com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental durante as aulas de Matemática das oficinas do projeto do governo federal intitulado Novo Mais Educação. O material empírico foi construído a partir dos registros das resoluções das atividades propostas e esse material foi utilizado na análise de forma interpretativa. A pesquisa apontou que o processo de interpretação das estratégias utilizadas pelos estudantes para resolver problemas de combinatória possibilita ao professor perceber o conhecimento matemático mobilizado nas resoluções e, principalmente, a compreensão sobre a linguagem matemática.

**Palavras-chave:** Pensamento combinatório. Ensino. Matemática.

## **ABSTRACT**

The teaching of mathematics, in the perspective of this research, goes beyond learning to apply formulas in problem situations. It is necessary to develop skills to refute results, question certain calculation procedures and relate different ways of solving a problem. Thus, the value of the correct answer gives way to the resolution process. In this sense, this research aims to propose mathematics activities for students in the 6<sup>th</sup> year of elementary school on combinatorial thinking to investigate the development of combinatorial reasoning and the concept of combination through personal strategies. The theoretical discussion that underlies the analyzes is based, mainly, on the studies of Hazzan; Borba, Aquino and others. The research took an exploratory qualitative approach and was developed in a public school in the municipal network of Benevides (PA) with students from the 6<sup>th</sup> year of elementary school during the mathematics classes of the workshops of the federal government project called Novo Mais Educação. The empirical material was built from the records of the resolutions of the proposed activities and this material was used in the analysis in an interpretative way. The research pointed out that the process of interpreting the strategies used by students to solve combinatorial problems allows the teacher to perceive the mathematical knowledge mobilized in the resolutions and, mainly, the understanding of the mathematical language.

**Keywords:** Combinatorial thinking. Teaching. Mathematics.

## SUMÁRIO

<b>CONSIDERAÇÕES INICIAIS</b> .....	10
<b>SEÇÃO I: OS PROBLEMAS DE ARRANJOS</b> .....	13
<b>SEÇÃO II: OS PROBLEMAS DE COMBINAÇÃO</b> .....	19
<b>SEÇÃO III: OS PROBLEMAS DE PERMUTAÇÃO</b> .....	25
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	33
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	35

## CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A maneira como enxergamos o mundo, o modo como o mundo está organizado, o jeito que ele se comporta pode levar-nos a fazermos várias perguntas: de quantos modos podemos investir uma certa quantia na bolsa de valores? De quantos modos podemos montar um conjunto de roupas com três peças? De quantas maneiras podemos organizar uma certa quantidade de pessoas em uma fila de banco? De quantos modos você pode combinar o lanche das crianças? De quantas maneiras pode-se fazer o rodízio de funcionários de uma empresa? A lista de perguntas continua e a resposta para isso é observar certos padrões.

Quase tudo ao nosso redor está organizado em padrões, matematicamente falando. De modo que esses padrões podem ser estudados e analisados quanto a forma como podem estar organizados diante de nós. A forma como organizamos as palavras em uma frase, a forma como organizamos os móveis dentro de casa, a forma como sentamos nas carteiras na sala de aula. A lista de objetos que nos oferecem estes padrões é praticamente interminável. É nesse contexto, a fim de estudar os padrões na hora de organizá-los, que é necessário a Análise Combinatória.

Nesse contexto, o ensino de Matemática na Educação Básica precisa, sobretudo, ter significado para o estudante e, sempre que necessário, estabelecer conexões com outras áreas do conhecimento. As atividades matemáticas precisam dialogar com o cotidiano dos sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem e articular diferentes temas da própria Matemática.

Uma possibilidade de conexão entre os temas da Matemática está no bloco de conteúdos intitulado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática de *Tratamento da Informação*. Nesse bloco, estão relacionados estudos relativos a noções de probabilidade, estatística e combinatória. Em relação à combinatória os PCN destacam que o ensino não pode ser baseado na simples aplicação de fórmulas, pois o que se espera é fomentar nos estudantes o pensamento combinatório.

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) reforça essa ideia. O documento destaca a importância de nas aulas de Matemática abordar o ensino a partir do letramento matemático. Assim, as aulas precisam ser organizadas com o intuito de propor atividades com o objetivo de que os estudantes tenham a oportunidade de raciocinar, representar ideias matemáticas, comunicar e argumentar

por meio da linguagem matemática e resolver problemas utilizando ferramentas e conceitos matemáticos.

O pensamento combinatório ou a combinação são temas que podem ser introduzidos nos anos iniciais do Ensino Fundamental, aprofundados nos anos finais do Ensino Fundamental e consolidados no Ensino Médio. Esse tema da Matemática aborda técnicas de contagem de possíveis agrupamentos a partir de elementos dados e da condição determinada. Nestes termos, como estão organizadas as atividades sobre pensamento combinatório nas aulas de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental?

É nesse contexto que esta pesquisa tem como objetivo geral *analisar as distintas maneiras utilizadas pelos estudantes para combinar elementos de uma coleção por meio de estratégias pessoais*, a partir de atividades de matemática propostas para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental sobre pensamento combinatório. Em termos de objetivos específicos, tais como: *investigar a resolução de situações-problema que abordem o princípio multiplicativo de contagem; desenvolver o raciocínio combinatório e o conceito de combinação por meio do processo fundamental da contagem*.

A pesquisa foi de abordagem qualitativa e do tipo exploratória. Ela foi desenvolvida com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental que participam das aulas do Projeto Novo Mais Educação de uma escola da rede estadual em Benevides (PA). O estudo foi realizado durante cinco semanas com uma carga horária de 30 horas. As atividades foram organizadas em formato de oficinas de Matemática que ocorreram no contra turno das aulas regulares.

As análises foram realizadas a partir dos registros das resoluções das atividades propostas em sala de aula. Esses registros serviram como material para análise interpretativa. Foram selecionados para análise os registros dos participantes que atendessem ao objetivo principal da pesquisa.

Ressaltamos que, a estrutura textual segue uma abordagem flexível construída a partir de uma intrínseca relação entre teoria e prática, de modo que os achados na pesquisa são entrelaçados com os referenciais que fundamentam a experiência e as percepções dos sujeitos envolvidos. Dentre os autores e documentos que nos

fundamentamos para a produção interpretativa destacam-se Hazzan (1993); Brasil (1998); Itacarambi (2010); Borba (2010); e Aquino (2013).

Este trabalho está estruturado em três seções. Na primeira seção, discute-se a análise interpretativa de problemas de arranjos, ou seja, uma sequência de  $n$  elementos, em que cada elemento pertence ao conjunto  $A$ , e são todos distintos. Na segunda seção, aborda-se a análise interpretativa de problemas de combinação, ou seja, um agrupamento de  $m$  elementos de um conjunto  $B$  sem que se considere a ordem da combinação desses elementos.

Na terceira seção, é realizada a análise interpretativa de problemas de permutação, ou seja, a combinação de todos os elementos de um conjunto  $C$ , que devem ser escolhidos, para serem ordenados de maneiras distintas, mas a ordem em que os elementos são colocados gera novas possibilidades. Na parte final do texto, são realizadas as reflexões finais sobre as estratégias de resolução de problemas de combinação e as contribuições da pesquisa para a formação inicial do pesquisador, para o ensino de matemática e para o papel do estudante no processo de ensino e de aprendizagem.

Portanto, interpretar as estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução dos problemas de pensamento combinatório possibilita compreender o raciocínio lógico, o conhecimento sobre a linguagem matemática e a construção do conhecimento matemático nas aulas de matemática.

## SEÇÃO I: OS PROBLEMAS DE ARRANJOS

A combinatória tem como objetivo trabalhar formas de descobrir métodos que possa contar os elementos de um determinado conjunto e desenvolver formas de seu agrupamento. Em um primeiro momento vemos como desnecessário é o conhecimento desses métodos, haja vista que os números sejam pequenos. Contudo, quando trabalhado com números maiores, percebemos a grande necessidade desses métodos, tornando-se quase impossível a sua não utilização.

Segundo Hazzan (1993, p. 02), “a análise combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, agrupamentos formados sob certas condições”. No entanto, nem sempre se faz necessário utilizar um método específico, pois em situações que envolvem pequenos grupos de elementos pode-se recorrer ao processo de contagem.

Desse modo, foram propostos aos estudantes participantes da pesquisa dois problemas de arranjo que poderiam ser resolvidos por meio de processo de contagem. Abaixo são apresentados os problemas.

**Problema de Arranjo 1:** *Uma turma resolver escolher um representante de turma, candidataram-se 3 pessoas (Maria, João e Antônia). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice representante?*

**Problema de Arranjo 2:** *Para ocupar os cargos de coordenador e de vice-coordenador do grêmio estudantil, candidataram-se 4 alunos (Renato, Pedro, João e Vitor). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o coordenador e o vice-coordenador?*

No problema de arranjo 1 temos um conjunto, do qual seus elementos podem ser ordenados. Em relação à seleção, de um grupo maior, são formados subgrupos. No problema citado, há um conjunto de três elementos (Maria, João e Antônia), e a partir dele deve-se formar subgrupos com dois elementos (Maria e Antônia) cada um, sendo o primeiro o representante e o segundo o vice representante. No que se refere a ordem dos elementos, escolher Maria como representante e Antônia como vice é diferente de eleger Antônia como representante e Maria como vice. Nesse caso, a ordenação dos elementos cria uma possibilidade de contagem porque as posições que cada um ocupa dentro do grupo representado segue uma lógica numérica.

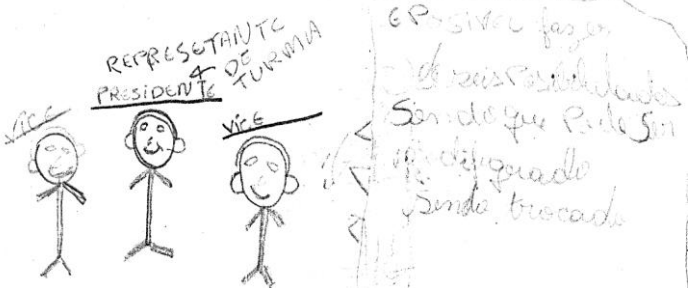
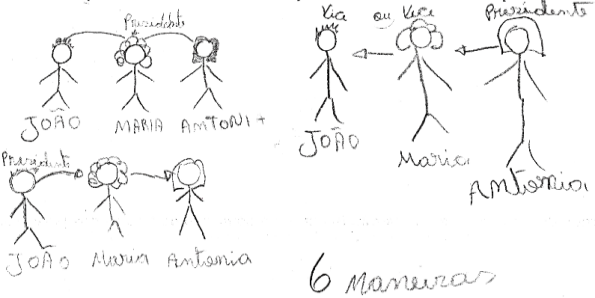
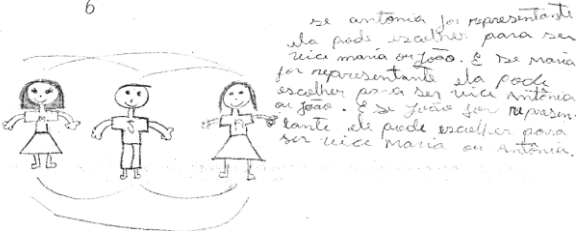
A partir da fundamentação matemática de Hazzan (1993, p. 17), a definição de arranjo é dada da seguinte maneira:

Seja  $M$  um conjunto com  $m$  elementos, isto é,  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ . Chama-se arranjo com repetição dos  $m$  elementos, tomados  $r$  a  $r$ , toda sequência de  $r$  elementos formados com elementos de  $M$ , não necessariamente distintos. E são denotados por:

$$A_{m,r} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \dots (m - [r + 2]) \cdot (m - [r + 1]) = m! / (m-r)!$$

Os problemas propostos aos participantes não exigiram a aplicação de fórmula, pois poderiam ser resolvidos por meio de contagem, cujos valores numéricos são representados nas imagens do quadro 1.

**Quadro 1:** resoluções do problema de arranjo 1 realizado pelos participantes da pesquisa

Participantes	Registros das resoluções
Participante 1	
Participante 2	
Participante 3	
Participante 4	<p>Pode ser de seis maneiras como ser:</p> <p>Se JOAO for Representante - MARIA e Antonia a sua vice</p> <p>Se MARIA for " " " JOAO e ANTONIA a sua vice</p> <p>Se ANTONIA for " " " JOAO e MARIA a sua vice</p> <p>Se JOAO for Representante</p> <p>Se MARIA for Representante</p> <p>Se ANTONIA for Representante</p>

A partir do quadro acima, é possível inferir que os três participantes compreenderam as características do arranjo. Na justificativa do *participante 1* fica mais evidente essa compreensão quando afirma que **é possível fazer de seis possibilidades, sendo que pode ser diferenciado quando trocado**. Primeiramente, ele desenha algumas possibilidades de combinação e isso evidencia a compreensão de que um conjunto maior pode gerar conjuntos menores, ou seja, de um conjunto com três elementos (Maria; João; Antônia) pode formar conjuntos com dois elementos (Maria; João) ou (João; Maria).

Outra evidência no registro do *participante 1* refere-se à compreensão de que a ordem dos elementos gera novas possibilidades. Isso é destacado quando ele apresenta a justificativa da resolução: **sendo que pode ser diferenciado quando trocado**. Interessante destacar que além de formar os arranjos de maneira correta em cada subconjunto de dois elementos, destaca as possibilidades de escolher uma mesma pessoa para ser representante em uma situação e vice representante em outra. Com esse procedimento de combinações, ele esgota todas as possibilidades.

Nesse contexto, Aquino (2013) afirma que o estudo da análise combinatória desde os anos iniciais da Educação Básica é essencial para a formação dos indivíduos conscientes e críticos. E isso pode ser dado a partir da exploração de situações simples do cotidiano. A exploração do pensamento combinatório nas aulas de matemática ajuda a desenvolver inúmeras habilidades lógicas, por exemplo: observação; levantamento de hipóteses; investigação; sistematização e generalização.

O *participante 2* demonstra compreensão sobre o processo combinatório, isso fica evidente no seu registro, principalmente quando desenha os três personagens do problema e os nomeia conforme cargo concorrido (representante e vice-representante) sem modificar suas posições, apenas os seus cargos. A estratégia utilizada pelo participante demonstra que tem domínio da situação.

Os registros possibilitam inferir que, por meio das situações de pensamento combinatório, os participantes apreenderam o objeto de conhecimento matemático e tornaram-se capazes de construir modelos matemáticos mental pleno de significados, ou seja, os participantes foram capazes de compreender e interpretar o contexto matemático proposto.

É nessa perspectiva que o documento *Parâmetros Curriculares de Matemática* (PCN) destaca a importância do trabalho, desde os anos iniciais da Educação Básica, com situações problemas de pensamento combinatório:

O emprego de problemas envolvendo combinatória leva o aluno desde cedo a desenvolver procedimentos básicos como a organização dos dados em tabelas gráficos e diagramas bem como a classificação de eventos segundo uns critérios mais úteis não só em matemática como também outros campos o que reforça a argumentação dos defensores de seu uso desde as séries iniciais do ensino fundamental (BRASIL, 1998, p. 52).

Por isso, desde os anos iniciais do ensino fundamental, os PCN de matemática reconhecem a importância de se trabalhar a análise combinatória. Isto porque o aprendizado da análise combinatória inclui diretamente o aprendizado de diversos outros conteúdos matemáticos, por exemplo, números; operações; espaço e forma; grandezas e medidas e o tratamento da informação (AQUINO, 2013). Além de estar relacionada diretamente com outras áreas do conhecimento, assim como a estatística e a probabilidade e, conseqüentemente, envolve problemas do Processo Fundamental da Contagem (PFC).

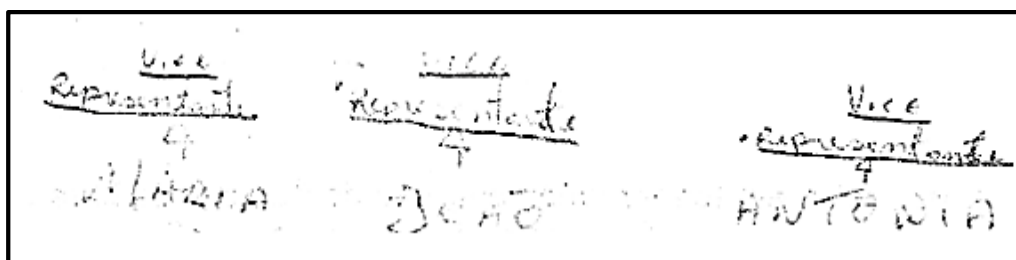
Um aspecto que merece destaque no trabalho com a resolução de problemas de pensamento combinatório refere-se ao processo de leitura (compreensão e interpretação do texto) e de escrita (registro do pensamento combinatório). Nesse sentido, a resolução de problemas de combinatória pode ser compreendida como um processo de investigação, cujo ponto de partida tomado pelos participantes foi a análise qualitativa da situação. Esse processo de análise qualitativa nem sempre é evidente nas situações problema, mas o *participante 3* deixa claro esse processo de análise em seu registro ao realizar a seguinte escrita: **Ora, se Antônia for a representante, ela pode escolher para ser seu vice a Maria ou o João. E se Maria for a representante, ela poderá escolher para ser seu vice a Antônia ou o João? E se João for o representante, ele pode escolher para ser seu vice a Maria ou a Antônia?**

A referida situação problema possibilita concluir que o participante tem ideia da situação. Ele a delimitou por meio de um processo de interpretação claro e objetivo. Nesse processo de análise qualitativa, os dados quantitativos deixaram de ser prioridade, o que exigiu do participante compreensão e interpretação da situação proposta.

O registro mostra que o participante precisou realizar conjecturas, aproximações e tomar decisões sem recorrer diretamente às operações aritméticas. A solução foi dada pelo processo de contagem. Ele mostra que a compreensão do problema foi influenciada por fatores matemáticos e não matemáticos. Um dos fatores não matemáticos está na compreensão de que todos podem assumir a função de representante ou de vice representante. Nesse sentido, Aquino (2013, p.18) destaca que “o trabalho com problemas combinatórios tem como finalidade explorar as diversas formas de representação dos casos possíveis de uma situação combinatória”.

É nessa perspectiva apresentada por Aquino (2013) que o *participante 4* destaca o processo de resolução do problema de combinatória, pois segundo seu registro escrito apresenta a compreensão da ideia de princípio multiplicativo como estratégia de resolução do problema proposto. A compreensão do princípio fica explícita na imagem abaixo:

**Figura 1:** registro do princípio multiplicativo utilizado como estratégia pelo participante 4



**Fonte:** Diário de Pesquisa, 2019.

A proposta de atividade atendeu, segundo a figura 1, um dos objetivos que os PCN de matemática preconizam. Por exemplo, o objetivo de “levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para aplicação de cálculo de probabilidades” (BRASIL, 1998, p. 52).

As resoluções apresentadas pelos participantes mostraram que a leitura dos problemas de arranjos exigiu não somente a compreensão, mas também a compreensão dos termos específicos referentes à linguagem matemática, ou seja, suas relações lógicas e que muitas vezes não fazem parte da experiência dos alunos.

Assim, a proposta apresentada aos participantes apontou a necessidade de se ensinar, nas aulas de matemática, a ler um texto de problemas matemáticos.

Para isso, quanto maior for a diversidade de problemas de pensamento combinatório propostos aos alunos, melhor será o desenvolvimento de habilidades relacionadas a esse campo da Matemática, pois isso pode possibilitar a construção de um raciocínio combinatório mais complexo e elaborado.

O problema é um portador textual (ITACARAMBI, 2010), portanto, os professores de Matemática precisam ensinar e promover em suas aulas situações de aprendizagem de leitura e de escrita de textos. Essas são competências linguística e matemática necessárias, pois há, neste tipo de texto, palavras que têm significados distintos (de natureza matemática) e que podem dificultar a compreensão do contexto. Essas habilidades estão presentes nos problemas de combinatória propostos aos participantes da pesquisa, conforme discutido na próxima sessão.

## SEÇÃO II: PROBLEMAS DE COMBINAÇÃO

Os problemas de combinação podem ser construídos a partir de um contexto social. Nessa direção, a situação problema assume o papel de instrumento de contextualização, a partir do momento em que é proposto aos alunos situações que exigem uma solução matemática qualitativa.

A análise matemática qualitativa de uma situação problema pode ser realizada em forma de debate coletivo para que os participantes da discussão estabeleçam a natureza do problema e o objetivo que se busca, ou seja, a solução. Para Itacarambi (2010, p. 15), ao fazer a análise qualitativa num ambiente de debate coletivo, “os alunos começam a fazer conjecturas que posteriormente se transformam em hipóteses que orientam a resolução e indicam os dados que se deve buscar”.

Segundo Aquino (2013), observar resultados obtidos pelo aluno, sem usar fórmulas prontas, é útil para fazer a representação dos registros aos educandos para um melhor entendimento no cálculo das possibilidades, além de ajudá-los a diferenciar as situações que envolvem arranjo e combinação. Situações de ensino dessa natureza possibilitam a participação ativa dos alunos e o envolvimento e a compreensão dos conceitos básicos de análise combinatória.

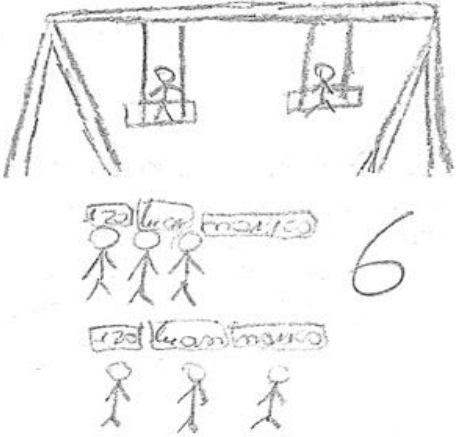
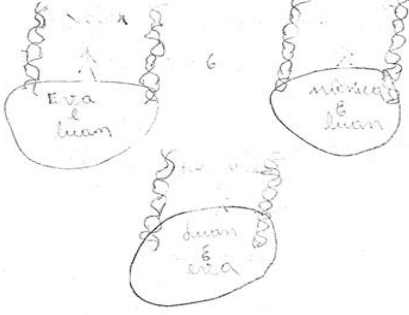
Para análise do pensamento combinatório dos participantes, foram construídos e aplicados dois problemas de combinação. São eles:

***Problema de Combinação 1:*** Para brincar em um balanço, podem participar duas crianças de cada vez. Eva, Luan e Mônica estão aguardando para brincarem. De quantas maneiras diferentes podem ser formados grupos para brincar no balanço?

***Problema de Combinação 2:*** Um grupo de cinco alunos resolveram formar uma comissão de três alunos para representar a turma em uma reunião. Quantas comissões diferentes podem ser formadas?

Nesses tipos de problema as estratégias de solução não estão prontas de imediato, pois ao se depararem com os problemas os participantes precisaram construir estratégias. Nesse sentido, o quadro 2 apresenta algumas respostas referentes ao *Problema de Combinação 1*

**Quadro 2:** Resoluções do problema de combinação 1 realizado pelos participantes da pesquisa

Participantes	Registros das resoluções
<p><i>Participante 1</i></p>	
<p><i>Participante 2</i></p>	

**Fonte:** Diário de Pesquisa, 2019.

No problema de combinação 1, tem-se apenas um conjunto a partir do qual são ordenados elementos (Eva, Luan, Mônica). Análogo aos problemas de arranjo, em relação à escolha, de um grupo maior, no caso do problema 1 são três crianças, é necessário a organização de subgrupos com apenas duas crianças de cada vez. Em relação à ordenação, quando brincam juntas Eva e Mônica é a mesma coisa que brincar Mônica e Eva, isto é, a ordem em que as crianças brincam no balanço não gera nova possibilidade, ou seja, nos subgrupos a ordem dos elementos não gera um novo agrupamento.

O fato de a ordem não gerar nova possibilidade, foi um aspecto do problema de combinação não considerado na resolução apresentada pelos participantes 1 e 2, pois ambos propõem a resposta “6”. Percebe-se que os alunos, influenciados pelo problema anterior, não desempenharam uma análise qualitativa mais detalhada.

Assim, trabalhar a interpretação dos problemas de combinatória é um direcionamento para a prática do professor de Matemática.

Nessa situação de erro, o professor pode intervir realizando questionamentos orais sobre os dados e as condições apresentadas pela situação problema. Pode ainda simular a situação e criar um contexto de resolução, mas tomar cuidado para não oferecer respostas prontas e nem fazer desse momento didático um processo de ações obrigatórias ou passos a seguir conforme apresentado pelo professor, isso poderia tirar a autonomia dos alunos.

As resoluções dos participantes 1 e 2 mostraram a importância do papel do erro no processo de ensino e aprendizagem. Nesta pesquisa, considera-se o processo de aprender como um movimento de idas e vindas, envolvendo tentativas, levantamento de hipóteses ou suposições e a realização de ações que expressam o pensamento e a linguagem matemática do aluno.

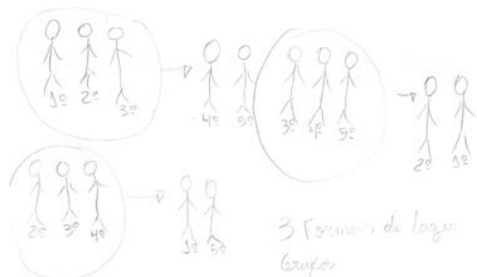
Conforme destaca Itacarambi (2010, p. 17), “o erro não é apenas uma resposta incorreta, ou algo falso a ser corrigido, envolve, todo um processo de pensamento, uma forma de raciocinar que necessita ser discutida”. Então, o erro também indica aprendizagem, por isso é comum os alunos errarem em suas tentativas de aprender. O erro significa uma lógica, pois nas respostas dos alunos foram utilizados elementos combinatórios relacionados às situações de problemas de arranjo, onde a ordem implica em novas possibilidades.

Entretanto, o participante 3 ao apresentar o seguinte resultado “Luan e Monica; Luan e Eva; Monica e Eva”, demonstra a compreensão do problema proposto, de forma que identificou que a ordem não importava, sendo assim, Lua e Monica; e Monica e Luan se identifica com uma só dupla diferente da questão anterior que a posição gerava nova possibilidade de formação de dupla.

O erro pode tornar-se o elemento direcionador da prática docente, pois é partindo das dificuldades dos estudantes que o professor é estimulado a criar estratégias de ensino, assim como, quando o estudante reconhece a diferença entre o seu erro seu acerto adquire a consciência de que já aprendeu determinado conteúdo (BRASIL, 1998). É interessante que o professor esteja atento ao erro como possibilidade de ensino e o aluno como possibilidade de aprendizagem. Dessa forma, as oficinas realizadas auxiliaram essas compreensões aos estudantes e ao mesmo

tempo nos aproximaram a essa percepção teórica e prática. E como ilustração dessa ideia/erro observa-se a construção do participante 1 no quadro 3:

**Quadro 3:** Resoluções do problema de combinação 2 realizado pelos participantes da pesquisa

Participantes	Registros das resoluções
Participante 1	
Participante 2	<p>ACS CSB ACS CBJ AJB</p> <p>Maya Clara Sâmela Bianca Tamilly</p>
Participante 3	<p>123</p> <p>124</p> <p>125</p> <p>134</p> <p>135</p> <p>143</p> <p>154</p> <p>153</p> <p>124</p> <p>125</p> <p>153</p> <p>152</p> <p>142</p> <p>143</p> <p>145</p> <p>12345</p>

**Fonte:** Diário de Pesquisa, 2019.

No problema de combinação 2, é apresentado aos alunos um conjunto de 5 pessoas onde deveria ser formados subgrupos (comissão) de três alunos onde a ordem dos membros não importa no subgrupo. Desse modo, o participante 1 em sua análise compreendeu o fato de os subgrupos não se repetirem ou seja, a ordem não

importava, porém conseguiu identificar apenas 3 subgrupos: subgrupo A (1, 2, 3); subgrupo B (3, 4, 5) e subgrupo C (2, 3, 4).

O pensamento combinatório expressado pelo estudante, mesmo que caracterize um erro, mostra seu potencial diante de problemas de natureza combinatória. Nesse caso, cabe ao professor fomentar ainda mais esse tipo de atividade nas aulas de Matemática, pois como um profissional que pode trabalhar a partir de evidências, precisa identificar maneiras de fomentar essas habilidades apresentadas pelos estudantes e planejar outras atividades nessa direção para ampliar a compreensão dos sujeitos em relação ao pensamento combinatório (BORBA, 2010).

A resolução proposta pelo participante 2 é apresentada de forma equivocada. No entanto, pode-se inferir, que ele nomeia os participantes do grupo (*Allyce; Clara; Bianca; Sâmela e Jamily*) como forma de estratégia de resolução. Isso facilita a formação de novos subgrupos e contribui para compreender melhor o problema. Os subgrupos foram os seguintes: subgrupo 1 (A, C, S); subgrupo 2 (C, J, S); subgrupo 3 (A, C, S); subgrupo 4 (C, B, J); subgrupo 5 (A, J, B).

Apesar de não ter tido sucesso na resolução, os registros mostram que o estudante compreende o princípio do pensamento combinatório. Conforme pesquisas desenvolvidas por Borba (2010); Pessoa e Borba (2011), os estudantes podem sentir algumas dificuldades na resolução de problemas de combinatória. Por exemplo: não conseguir realizar uma listagem de possibilidades de combinação ou não esgotar todas as possibilidades de combinações por não as visualizar.

Os problemas dessa natureza são complexos de compreensão, sobretudo, os problemas que geram um número maior de possibilidades. Desse modo, cada vez mais fica difícil discernir quando a ordem é ou não importante para gerar novos agrupamentos (PESSOA; BORBA, 2011). Outras dificuldades surgiram durante a resolução dos problemas, por exemplo, muitos participantes não conseguiram construir relações corretas nos agrupamentos e enfrentavam a situação problema por um processo cognitivo que não estava relacionado com a habilidade exigida pela tarefa. Além disso, surgiram dúvidas em relação ao tipo de operação aritmética utilizar para encontrar a solução do problema.

Esse tipo de situação problema pode servir como meios de o professor avaliar o desempenho de seus alunos e repensar sua prática, pois o professor reflexivo utiliza esses meios para aprimorar sua ação pedagógica. Sobre isso, os PCN de Matemática orientam que:

Ao levantar indícios sobre o desempenho dos alunos, o professor deve ter claro o que pretende obter e que uso fará desses indícios. Nesse sentido, a análise do erro pode ser uma pista interessante e eficaz. Na aprendizagem escolar o erro é inevitável e, muitas vezes, pode ser interpretado como um caminho para buscar o acerto. Quando o aluno ainda não sabe como acertar, faz tentativas, à sua maneira, construindo uma lógica própria para encontrar a solução. (BRASIL, 1998, p. 37)

As respostas dos participantes apontaram para o fato de que a forma como o problema está apresentado ao estudante pode ser determinante para o sucesso do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática. Assim, de posse dos registros o professor pode avaliar os processos cognitivos adjacentes às estratégias utilizadas para a resolução do problema. Nesse sentido, “os resultados expressos pelos instrumentos de avaliação, sejam eles provas, trabalhos, postura em sala, constituem indícios de competências e como tal devem ser considerados” (BRASIL, 1998, p. 37). Nesse contexto, a tarefa do professor pode ser de realizar um processo de interpretação das evidências sinalizadas nos registros dos estudantes e, a partir disso, reorganizar a atividade pedagógica.

### SEÇÃO III: PROBLEMAS DE PERMUTAÇÃO

Os problemas de pensamento de combinatório possibilitam ao estudante despertar a curiosidade e a necessidade de solucionar o problema proposto. O trabalho com os problemas que envolvem pensamento combinatório, como os problemas de permutação, desencadeiam a construção de outros significados às situações matemáticas vivenciadas.

Nesse sentido, os problemas de permutação envolvem parte da análise combinatória que analisa de quantas formas podemos organizar elementos dentro de um objeto. É o caso de arranjo com repetição, mas quando  $r = m$  (HAZZAN, 1993). Um exemplo dado por Hazzan (1993, p. 18) consiste no caso de: “De quantas formas podem 5 pessoas ficar em fila indiana?”.

Nestes termos, pode-se formar um conjunto  $M$  com  $m$  elementos, ou seja,  $M = \{1,2,3,4, 5\}$ . Assim, pode-se permutar todos os elementos de  $M$ . Então, cada forma de ficar em fila indiana é uma permutação das cinco pessoas. Desse modo, a quantidade de permutações, isto é, modos de ficarem em fila indiana será determinada pela multiplicação entre os elementos de  $M$  ( $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ). Logo, tem-se 120 maneiras. Esse processo ilustra uma situação de permutação simples. No entanto, o que mais interessa analisar nesta pesquisa não é o resultado da multiplicação, mas os procedimentos ou estratégias utilizadas para resolver os problemas propostos.

Desse modo, a atual pesquisa tem como um dos objetivos analisar as distintas maneiras utilizadas pelos estudantes para combinar elementos de uma coleção por meio de estratégias pessoais. No entanto, sem que os estudantes recorram às fórmulas prontas.

Sobre o desenvolvimento do pensamento combinatório, os PCN orientam que as aulas de matemática podem ser organizadas em torno de atividades de contagem de agrupamentos, mesmo que de modo informal e direto, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998).

A partir dessas reflexões e do objetivo da pesquisa, *analisar as distintas maneiras utilizadas pelos estudantes para combinar elementos de uma coleção por meio de estratégias pessoais*, foram elaborados e propostos dois problemas de permutação aos participantes, são estes:

**Problema de Permutação 1:** *Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?*

**Problema de Permutação 2:** *Duas moedas foram lançadas, ao mesmo tempo, duas vezes. Quais são os possíveis resultados das faces voltadas para cima?*

Nesses problemas, há ideias sobre o princípio multiplicativo. No problema 1, tem-se apenas um conjunto **M** do qual são usados todos os elementos **n** (três porta-retratos), que devem ser selecionados para serem ordenados de formas diferentes. Desse modo, os participantes podem formar grupo de porta-retratos distintos. Por exemplo, formar o subconjunto  $F = \{\text{MÃE}; \text{PAI}; \text{IRMÃO}\}$  é diferente de formar o subconjunto  $G = \{\text{MÃE}; \text{IRMÃO}; \text{PAI}\}$ , isto é, a ordem em que os porta-retratos ou que os elementos do conjunto **M** são colocados gera novas possibilidades.



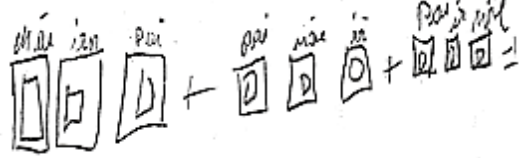
Esse tipo de problema de permutação, segundo Aquino (2013), pode levar os estudantes a obterem diversos tipos de respostas, seja por meio de desenhos, diagrama de árvore, tabelas, entre outras estratégias de resolução. Essa perspectiva de trabalho desenvolve nos estudantes a superação de muitas dificuldades na aprendizagem matemática.

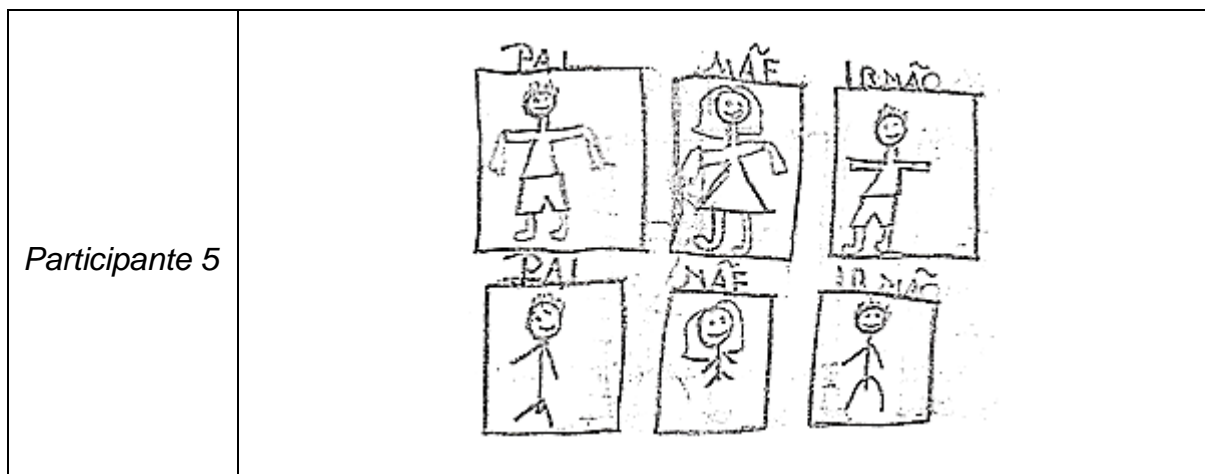
Os dois problemas de permutação fomentam a criatividade e uma visão diferenciada da matemática escolar, pois as aulas enfadonhas podem ganhar ludicidade e o estudante participa mais das atividades. Ele ao ser provocado e desafiado desperta a atenção para o problema proposto. A sala de aula torna-se um ambiente de confronto de ideias e espaço de debate. Para Aquino (2013, p. 19)

é necessário, portanto, o desenvolvimento de trabalhos que levem à superação destas dificuldades, dando “liberdade” aos alunos para resolverem problemas do tipo combinatório utilizando-se de estratégias diferenciadas e por diferentes formas de representação. Além disso, é importante também que se proporcionem momentos de discussão na sala de aula, para que os alunos apresentem suas próprias ideias e dúvidas, tornando-os co-autores na construção do próprio saber (AQUINO, 2013, p. 19).

As distintas ideias e procedimentos de resolução que são apresentados no quadro 4 mostram o processo de construção da autonomia dos estudantes, pois durante o desenvolvimento das oficinas pedagógicas eles tiveram a oportunidade de expressar, por meio dos registros, suas formas de pensamento combinatório.

**Quadro 4:** estratégias de resoluções do problema de permutação 1 apresentadas pelos participantes da pesquisa

Participantes	Registros das resoluções
Participante 1	<p>1. pai, mãe, irmão</p> <p>2. irmão, mãe, pai</p> <p>3. mãe, pai, irmão</p> <p>4. pai, irmão, mãe</p> <p>5. irmão, pai, mãe</p> <p>6. mãe, irmão, pai</p>
Participante 2	 <p>1º → [PAI] - [MÃE] - [IRMÃO]</p> <p>2º → [PAI] - [IRMÃO] - [MÃE]</p> <p>3º → [MÃE] - [PAI] - [IRMÃO]</p> <p>4º → [PAI] - [MÃE] - [IRMÃO]</p> <p>5º → [MÃE] - [IRMÃO] - [PAI]</p> <p>6º → [IRMÃO] - [MÃE] - [PAI]</p>
Participante 3	 <p>1º [Pai] [Mãe] [Irmão] + [Mãe] [Pai] [Irmão]</p> <p>2º [Mãe] [Irmão] [Pai] + [Pai] [Mãe] [Irmão]</p> <p>3º [Irmão] [Pai] [Mãe] + [Irmão] [Mãe] [Pai]</p>
Participante 4	<p>três pernas diferentes.</p>  <p>[Mãe] [irmão] [Pai] + [Pai] [Mãe] [irmão] + [irmão] [Pai] [Mãe] =</p>



**Fonte:** Diário de Pesquisa, 2019.

Conforme os registros das estratégias utilizadas pelos participantes para solucionar os problemas propostos, atende às orientações dadas pelos PCN em relação ao trabalho com atividades de pensamento combinatório para os anos finais do Ensino Fundamental. Assim, os problemas de contagem têm como objetivo:

levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para aplicação do cálculo de probabilidades (BRASIL, 1998, p. 52).

Os registros do quadro 4 possibilitam inferir que quanto maior a diversidade de problemas que o aluno possa enfrentar na hora de aprender análise combinatória, melhor será para desenvolver as habilidades que possibilitem o seu raciocínio de modo mais complexo e elaborado.

Os participantes 1 e 2 exploraram diversas possibilidades de permutar os retratos. Diferentemente dos demais participantes, eles apresentaram um número maior de permutações e chegaram à solução do problema proposto. Segundo Aquino (2013, p. 18):

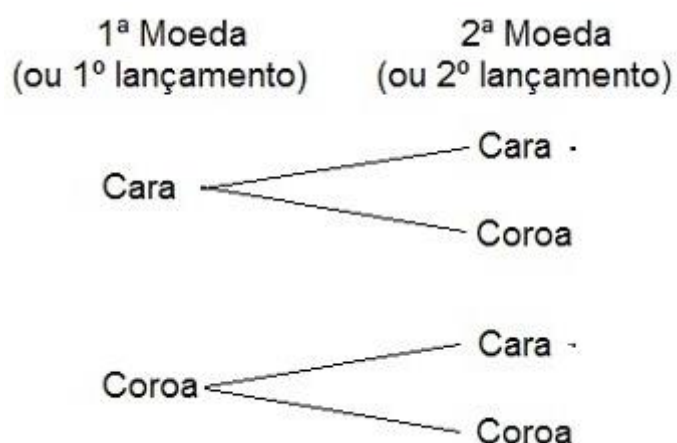
O trabalho com problemas combinatórios no decorrer do terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental, tem como finalidade explorar as diversas formas de representação dos casos possíveis de uma situação combinatória, assim como a compreensão da ideia pelo princípio multiplicativo, como estratégia de resolução para os problemas de contagem desenvolvendo o raciocínio combinatório, importante em matemática, mas em outras áreas do conhecimento também.

Para Moura *et al* (2008) destacam que nas atividades de resolução de problemas os estudantes são motivados desde que a situação proposta seja criativa e reflexiva. Assim, as atividades realizadas na pesquisa possibilitaram explorar, concomitantemente, situações de representação dos registros e de contagem na

perspectiva de que os estudantes construíssem a ideia de princípio multiplicativo como recurso para a resolução de problemas de pensamento combinatório diversos.

O segundo problema de permutação (*Duas moedas foram lançadas, ao mesmo tempo, duas vezes. Quais são os possíveis resultados das faces voltadas para cima?*) mobilizou conhecimentos sobre o princípio fundamental da contagem (PFC). Nele o estudante precisaria construir um número de  $n$ -*uplas* ordenadas – sequência de  $n$  elementos – que poderiam ser obtidas por meio de um diagrama de árvore, conforme a figura 2.

**Figura 2:** possibilidades de sequências expressas por meio de diagrama de árvore

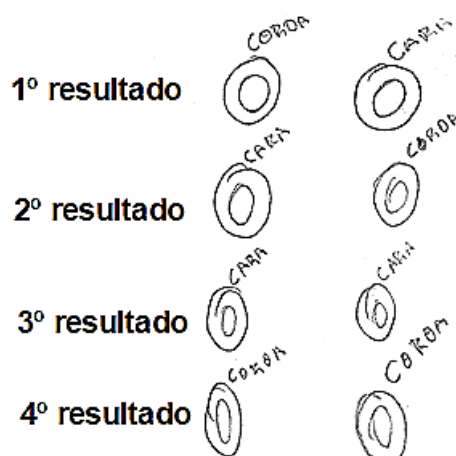


**Fonte:** o autor, 2019.

Conforme o diagrama de árvore da figura 2, existem os seguintes resultados: (cara, cara); (cara, coroa); (coroa, cara); (coroa, coroa). Portanto, existe a possibilidade de quatro resultados distintos.

As possibilidades de sequências de resultados foram encontradas por diversos alunos, mesmo que não recorressem ao diagrama de árvore. O participante 4 resolveu por meio de representação pictórica das moedas, conforme a figura 3.

**Figura 3:** estratégia de resolução apresentada pelo participante 5



**Fonte:** Diário de pesquisa, 2019.

O participante 5 estabelece um processo de resolução em que considera uma nova possibilidade sempre que muda a ordem. Por exemplo, os resultados 1 e 2 mostram essa compreensão. Para Pessoa (2014, p. 43) o “incentivo ao uso de diferentes estratégias poderá ajudar o aluno a melhor representar seu pensamento em relação à resolução dos problemas combinatórios”. As diversas representações do pensamento combinatório expressadas pelos estudantes podem ser utilizadas em intervenções de ensino e na organização didática da aula.

A figura 3, exemplifica uma das resoluções corretas do problema de permutação 2. Esses registros mostram que os participantes, de modo geral, usam uma lista de possibilidades como estratégia de resolução, dessa forma eles conseguem esgotar todas as possibilidades e resolver o problema. Pessoa (2014, p. 44) afirma que “essa estratégia de resolução é a mais utilizada por estudantes de diferentes anos de escolarização e tem se mostrado muito eficaz principalmente quando é feita de maneira sistematizada”.

Todos os participantes apresentaram, de qualquer forma, uma maneira sistematizada para resolver o problema de permutação. A sistematização da resolução consiste em criar lista de possibilidades de forma organizada, buscar fixar o primeiro elemento e listar todas as possibilidades com ele, em seguida, fixar o segundo elemento para listar novas possibilidades e assim sucessivamente com todos os demais elementos (PESSOA, 2014).

No segundo problema de permutação, os participantes sistematicamente listaram duas possibilidades para os resultados dos lançamentos das duas moedas. Primeiramente, fixaram uma das faces das moedas (cara ou coroa) e somente depois fixaram os outros possíveis resultados.

**Figura 4:** estratégia de resolução apresentada pelo participante 2

1: -> Cara e coroa.  
 2: -> Coroa e coroa.  
 3: -> Cara e cara.  
 4: -> Coroa e cara

**Fonte:** Diário de pesquisa, 2019.

O material empírico produzido durante o processo de investigação possibilitou perceber que a estratégia de escrever ou desenhar as possibilidades de resolução geraram, além de um procedimento de solução, a compreensão dos processos cognitivos subjacentes ao desenvolvimento das atividades propostas.

Esses problemas de pensamento combinatório mobilizam diversos processos cognitivos, tais como: inferir, analisar, conjecturar etc. Assim,

O desenvolvimento do raciocínio combinatório é um processo longo, é preciso, portanto, que durante a escolarização os diferentes tipos de problemas sejam trabalhados e que haja um aprofundamento contínuo, para que estratégias próprias dos estudantes, mais informais, sejam gradativamente transformadas em procedimentos mais formais e sistematizados (PESSOA, 2014, p. 50).

Esse trabalho com problemas de pensamento combinatório desde os anos iniciais de escolarização, no caso desta pesquisa no 6º ano do Ensino Fundamental, amplia o desenvolvimento e a qualidade do raciocínio combinatório, mesmo que os estudantes recorram aos processos de resolução a partir de escrita e de desenhos, ou mesmo oralmente. Para Borba (2010), a resolução dos problemas de combinatório pode dar-se por meio de representações simbólicas coerentes com as situações propostas e que isso vai possibilitar, gradualmente, a construção de processos formais de resolução, por exemplo o uso de fórmulas.

O uso de fórmulas para a resolução de problemas de Análise Combinatória propostos no Ensino Médio poderia ser a consolidação do pensamento combinatório

introduzido e aprofundado no Ensino Fundamental. A aplicação de fórmulas para problemas de combinatória poderia configurar a consolidação de estratégias de resolução por meio de desenhos. Ou ainda, poderia ser a sistematização das estratégias de solução de problemas de combinatória utilizadas nos anos iniciais de escolarização.

A exploração de problemas de pensamento combinatório ajudará no estudo de probabilidades, uma vez que os currículos de Matemática do Ensino Fundamental preconizam o trabalho com situações de natureza aleatória. Assim, os PCN orientam o trabalho do professor na direção de que o estudante:

compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis) (BRASIL, 1998, p. 40).

O desenvolvimento de habilidades relacionadas ao pensamento combinatório contribuirá para que os estudantes amenizem suas dificuldades em mapear todas as possibilidades do espaço amostral de um experimento aleatório. Portanto, a construção de representações simbólicas com desenhos, com quadros ou com árvore de possibilidades ajudam os estudantes compreenderem as chances de ocorrer um determinado resultado.

Nessa perspectiva, o trabalho com o pensamento combinatório desde o Ensino Fundamental, além de mobilizar conteúdos procedimentais, contribui para a aprendizagem de outros conteúdos conceituais relacionados intrinsecamente à Análise Combinatória, como por exemplo a probabilidade.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa, que teve como objetivo geral analisar as distintas maneiras utilizadas pelos estudantes para combinar elementos de uma coleção por meio de estratégias pessoais, possibilitou perceber que os estudantes, de modo geral, conseguem identificar características dos problemas de combinatória por meio de sistematização de suas estratégias de resolução. Eles percebem com mais facilidade as relações de permutação em que a ordem não influencia no resultado. No entanto, nos problemas em que a ordem cria novas possibilidades aumenta a dificuldade na resolução, visto que precisava esgotar todas as novas combinações.

A revisão da literatura realizada durante o desenvolvimento da pesquisa possibilitou compreender as orientações dadas pelos documentos curriculares sobre a inserção de conteúdos relacionados à Análise Combinatória desde os anos iniciais de escolarização, portanto, a proposta da pesquisa estava articulada com tais orientações. Essa inserção também foi identificada na leitura de livros didáticos quando se realizou a investigação sobre os conteúdos do 6º ano do Ensino Fundamental.

A pesquisa apontou que atividades desafiadoras, como as propostas aos participantes, provocam maior interação entre os estudantes e o professor durante as aulas de matemática. Os problemas em que os estudantes não precisavam aplicar fórmulas prontas, mas encontrar seus próprios procedimentos de resolução, foram convidativos à aprendizagem e mobilizaram diversos processos cognitivos (inferir, analisar, avaliar, refutar).

Outros aspectos que merecem destaque referem-se ao uso de materiais manipuláveis nas aulas de matemática e à criação de situações problemas com base em contextos próximos das vivências dos estudantes. Quando o professor propõe a utilização de materiais manipuláveis na resolução de um problema de combinatória isso pode estimular o estudante a criar diversas estratégias de solução, dentre elas estão: a listagem ou árvore de possibilidades de combinações e os desenhos. Propor problemas que surgem do contexto do estudante gera a curiosidade e a criatividade, pois quanto mais próximo estiver de sua realidade, maior é seu interesse em querer resolvê-lo.

Dessa forma, pode-se inferir que esta pesquisa contribuiu para que o ensino de matemática na Educação Básica seja considerado com mais seriedade, onde o estudante seja protagonista no processo de ensino e de aprendizagem e que o professor de matemática seja a ponte entre o sujeito e o conhecimento.

Por fim, em relação às contribuições da pesquisa para minha formação docente, este trabalho possibilitou perceber que o ensino de matemática pode ser desafiador, mas no sentido de que os estudantes se sintam motivados a aprender, e que o professor pode utilizar os registros dos estudantes como uma bússola que indique o direcionamento da aprendizagem. Além disso, este trabalho contribuiu para que pudesse enxergar o quanto a forma que ensinamos faz diferença no aprendizado dos estudantes e que as dificuldades que muitos apresentam sobre a compreensão da linguagem matemática pode serem superadas com aulas criativas e desafiadoras.

## 7. REFERÊNCIAS

AQUINO, Claudivania de Alencar de. **Introduzindo o pensamento combinatório nos anos finais do ensino fundamental**: uma proposta de ensino. Juazeiro, Autêntica, 2013.

BORBA, Rute. **O raciocínio combinatório na educação básica**. *In*: Anais... X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador-BA, 2010.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática 5<sup>a</sup> à 8<sup>a</sup> séries. Secretaria de Educação Básica. Brasília: SEB, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Secretaria de Educação Básica. Brasília: SEB, 2017.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**: combinatória e probabilidade. 6. ed. São Paulo: Atual, 1993.

ITACARAMBI, Ruth Ribas. **Resolução de Problemas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**: construção de uma metodologia. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

MOURA, Anna Regina Lanner de. *et al.* Resolver Problemas: o lado lúdico do ensino de matemática. *In*: BRASIL. **Pró-Letramento em Matemática**. Secretaria de Educação Básica. Brasília: SEB, 2008.

PESSOA, Cristiane. BORBA, Rute. **Quem Dança com quem**: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1<sup>a</sup> à 4<sup>a</sup> série. *ZETETIKÉ*. Campinas, v.17, n.31, jan/jun, 2011.

PESSOA, Cristina Azevedo dos Santos. O Ensino de Combinatória no Ciclo de Alfabetização. *In*: BRASIL. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**: alfabetização matemática. Secretaria de Educação Básica. Brasília: SEB, 2014.