



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO MARAJÓ - BREVES
FACULDADE DE CIÊNCIAS NATURAIS

KÉLLEN GARCIA DE MELO

CONEXÕES ENTRE INTEGRAÇÃO NO PLANO COMPLEXO E A FÍSICA
DOS ISOLANTES TOPOLÓGICOS

BREVES-PA
2021

KÉLLEN GARCIA DE MELO

**CONEXÕES ENTRE INTEGRAÇÃO NO PLANO COMPLEXO E A
FÍSICA DOS ISOLANTES TOPOLÓGICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Faculdade de Ciências Naturais da Universidade Federal
do Pará, como requisito parcial para obtenção do grau
de Licenciado em Ciências Naturais.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Oliveira do Nascimento.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M528c Melo, Kéllen Garcia de.
 Conexões entre a integração no plano complexo e a física dos
 isolantes topológicos / Kéllen Garcia de Melo. — 2021.
 35 f. : il. color.

 Orientador(a): Prof. Dr. Leandro Oliveira do Nascimento
 Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade
 Federal do Pará, Campus Universitário de Breves, Faculdade de
 Ciências Naturais, Breves, 2021.

 1. Integração no plano complexo. 2. Isolantes topológicos.
 3. Winding number. I. Título.

CDD 530.1

KÉLLEN GARCIA DE MELO

CONEXÕES ENTRE INTEGRAÇÃO NO PLANO COMPLEXO E A
FÍSICA DOS ISOLANTES TOPOLÓGICOS

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Faculdade de Ciências
Naturais da Universidade Federal do Pará,
como requisito parcial para obtenção do
grau de Licenciado em Ciências Naturais,
aprovado com o conceito
EXCELENTE.

Data de aprovação: 01/12/2021

Conceito: EXCELENTE

BANCA EXAMINADORA

Leandro Oliveira do Nascimento

Prof. Dr. Leandro Oliveira do Nascimento
UFPA-FACIN-BREVES (Orientador)

Manolo Cleiton Costa de Freitas

Prof. Dr. Manolo Cleiton Costa de Freitas
UFPA-FACIN-BREVES (MEMBRO)

Vanilson G. Pereira

Prof. Msc. Vanilson Gomes Pereira
UFPA-FAMAT-BREVES (MEMBRO EXTERNO)

Edielson dos Santos Barbosa

Prof. Esp. Edielson dos Santos Barbosa
SEMED-PORTEL (MEMBRO EXTERNO)

BREVES
2021

À minha família, pelo incentivo e apoio incondicional durante toda essa caminhada.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me auxiliar em toda minha jornada, permitindo concluir mais uma trajetória em minha vida, me mantendo firme até aqui.

À minha família pelo apoio incondicional, em especial aos meus pais, Nevis Garcia e Wanderley Melo, e minha avó Raimunda Garcia, que sempre estiveram ao meu lado, incentivando nos momentos difíceis, me apoiando em todas as minhas decisões.

Gratidão ao meu orientador Prof. Dr. Leandro Oliveira do Nascimento, pela oportunidade de trabalhar em um projeto de iniciação científica, por ter acreditado no meu potencial e ter continuado a me orientar, mesmo com meus atrasos para a finalização deste trabalho, por toda a paciência e compreensão que teve comigo durante toda a graduação.

Ao corpo docente da FACIN-CUMB, que não mediu esforços para ajudar e contribuir para um melhor aprendizado, por todos os ensinamentos que permitiram que eu pudesse hoje estar concluindo este trabalho.

Ao meu namorado, Felipe Patrick Cunha Leão, pelo incentivo, apoio, companheirismo e, por todo carinho que sempre teve comigo.

Aos amigos que ganhei na universidade, em especial, Euziane Galvão, Maiara Medeiros, Crislaine Moreira e Yann Ricardo, que sempre estiveram ao meu lado durante estes 4 anos de muitos desafios, foi bom poder contar com vocês durante toda essa caminhada.

“Educar verdadeiramente não é apenas ensinar novos fatos ou enumerar fórmulas prontas, mas sim preparar a mente para pensar”

Albert Einstein

RESUMO

No presente trabalho foi realizada uma revisão literária sobre integração no plano complexo e aspectos gerais da teoria de estados topológicos da matéria. Apresentamos uma breve revisão, sobre o histórico e definição do conjunto de números complexos z , necessário para estudarmos a integração no plano complexo. Discutimos, detalhadamente, o winding number (número de preenchimento), um invariante topológico característico de sistemas em $(1+1)$ D. Este objeto matemático quando aplicado à banda de energia dos isolantes topológicos é capaz de descrever as fases topológicas (número de preenchimento diferente de zero) e fase não topológica (número de preenchimento igual a zero). Em seguida apresenta-se o conceito sobre os isolantes topológicos (IT's), dando ênfase à sistemas que apresentam fases topológicas, como o efeito Hall quântico (EHQ), que ocorre quando elétrons são sujeitos a um forte campo magnético; e o poliacetileno, um polímero orgânico formado por cadeias de carbono contendo ligações conjugadas ($C=C$). Também, solucionamos cálculos na integração do plano complexo, obtendo um resultado que satisfaz o teorema do resíduo. Além disso, destacamos a importância das pesquisas na área de sistemas com fases topológicas, tendo em vista que, estes serão de grande utilidade no campo da ciência e tecnologia.

Palavras-chave: Números complexos z , winding number, integração no plano complexo, isolantes topológicos.

ABSTRACT

In the present work, a literary review was carried out on integration in the complex plane and general aspects of the theory of topological states of matter. We present a brief review, on the history and definition of the set of complex numbers z , necessary to study the integration in the complex plane. We discuss in detail the winding number, a topological invariant characteristic of systems in (1+1) D. This mathematical object, when applied to the energy band of topological insulators, is able to describe the topological phases (filling number non-zero) and non-topological phase (fill number equal to zero). Then, the concept of topological insulators (IT's) is presented, emphasizing systems that present topological phases, such as the quantum Hall effect (EHQ), which occurs when electrons are subjected to a strong magnetic field; and polyacetylene, an organic polymer formed by carbon chains containing conjugated bonds ($C=C$). Also, we solve calculations in the complex plane integration, obtaining a result that satisfies the residual theorem. Furthermore, we highlight the importance of research in the area of systems with topological phases, considering that these will be of great use in the field of science and technology.

Keywords: Complex z numbers, winding number, complex plane integration, topological insulators.

LISTA DE ILUSTRAÇÃO

Figura 1 -	O Plano complexo.....	16
Figura 2 -	Representação do plano complexo da função analítica $f(z)$	20
Figura 3 -	Mostra três curvas realizando uma volta ao redor do ponto z_0 , com o mesmo winding number.....	22
Figura 4 -	Representação gráfica da resistência Hall em função de um campo magnético.....	26
Figura 5 -	Condutância Hall representada em vermelho e a resistência longitudinal em verde.....	27
Figura 6 -	Representação estrutural de um segmento <i>trans</i> – poliacetileno.....	29
Figura 7 -	Esquematização das bandas de energia: A) Banda de valência parcialmente preenchida; B) Banda de valência preenchida sobrepondo-se à banda de condução; C) Banda de valência inteiramente preenchida e uma banda de gap fazendo a separação da banda de condução; D) Banda de valência completamente preenchida e uma banda de gap estreita separando-a da banda de condução.....	30
Figura 8 -	Banda de energia: A) Polaron; B) Bipolaron.....	31

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	11
2	OBJETIVOS.....	13
2.1	OBJETIVO GERAL.....	13
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	13
3	OS NÚMEROS COMPLEXOS Z.....	14
3.1	NÚMEROS COMPLEXOS Z : $z = x + yi$	15
3.2	REPRESENTAÇÃO: $z = re^{i\varphi}$	16
4	INTEGRAÇÃO NO PLANO COMPLEXO.....	18
4.1	TEOREMA DO RESÍDUO.....	18
4.2	WINDING NUMBER.....	21
5	ISOLANTES TOPOLÓGICOS.....	24
5.1	EFEITO HALL QUÂTINCO.....	25
5.2	POLIACETILENO.....	27
6	CONCLUSÃO.....	32
	REFERÊNCIAS.....	33

1 INTRODUÇÃO

Um dos aspectos característicos do progresso da civilização humana foi sua dependência no desenvolvimento e aplicações de novos materiais (CGEE, 2010), na qual muitos apresentavam propriedades especiais, como por exemplo, o silício, “considerado o material mais investigado do século passado devido a rápida evolução de computadores baseados em *chips* de silício” (CHAVES & SHELLARD, 2005, p.74). Além disso, pesquisas voltadas ao estudo da matéria condensada obtiveram grande destaque, tornando-se uma das grandes inovações científicas das últimas décadas, como a descoberta da supercondutividade, superfluidez, estados topológicos da matéria, o qual daremos ênfase nesse trabalho.

A comunidade científica até alguns anos atrás, considerava que a existência de materiais bidimensionais (2D) era inviável, pois esse tipo de cristal não seria termodinamicamente estável. No entanto, em 2004, os pesquisadores Andre Geim e Konstantin Novoselov da Universidade de Manchester na Inglaterra, obtiveram através do processo de esfoliação mecânica um material bidimensional, formado apenas por átomos de carbono, o grafeno, possuindo uma única estrutura planar com os átomos ligados numa rede em formato de hexágonos, denominado de favo de mel. Esta molécula possui características peculiares, que a torna uma forte candidata a substituta do silício (SÁ, 2011; LOPES, 2010). Essa descoberta resultou na premiação do Nobel de Física no ano de 2010, que lhes foi conferido ressaltando a importância de seus estudos para a ciência.

Atualmente o grafeno é um dos principais focos de pesquisa de diversos cientistas. No entanto, esse material vem sendo estudado há mais de 60 anos e algumas de suas propriedades físicas foram observadas, como a alta condutividade térmica, e a resistência mecânica centenas de vezes superior à do aço. Porém, as características que mais chamam a atenção são as eletrônicas; sua utilização como um material integrante dos eletrodos de uma bateria, por exemplo, pode solucionar as limitações tanto das baterias como dos supercapacitores convencionais (SÁ, 2011; VIEIRA & VILAR, 2017). Além das possibilidades de tecnologias, a realização experimental do grafeno possibilitou a previsão teórica de um novo estado da matéria, chamado de Efeito Hall Quântico de Spin (EHQS), um exemplo de estado topológico.

A descoberta de estados topológicos da matéria proporcionou um novo tipo de classificação para determinados sistemas de matéria condensada (MELO, 2016). Dessa forma, efeitos como transporte eletrônico spin-dependente sem dissipação e carga, são caracterizadas

pela ordem topológica das bandas eletrônicas. No caso de materiais bidimensionais, exibem comportamento isolante no centro e condutor nas bordas vigente em meios que exibem estados metálicos em suas fronteiras.

Em 2016 o prêmio Nobel de física foi atribuído aos físicos David Thouless, Michael Kosterlitz e Duncan Haldane, em reconhecimento às suas grandes contribuições pela descoberta das fases topológicas da matéria, destacando a importância da topologia nas propriedades de sistemas eletrônicos. Podemos citar o efeito Hall quântico (EHQ), descoberto em 1980, como o mais famoso exemplo de sistema que apresenta esse fenômeno de transição de fase topológica. É caracterizado por apresentar uma propagação unidirecional de estados metálicos nas bordas de sistemas eletrônicos bidimensionais, na presença de um campo magnético externo ortogonal aplicado no sistema. Uma peculiaridade importante desse sistema é que no seu interior permanece com um gap de energia em seu espectro, uma característica típica de isolantes. De acordo com Silva (2016), o transporte eletrônico ainda ocorre, devido à presença de estados metálicos na borda do sistema com uma orientação específica de circulação, que aparece com a quebra da simetria de reversão temporal pelo campo magnético externo. Ou seja, é um sistema que não é totalmente isolante e, nem de fato um metal.

As propriedades evidenciadas nos materiais topológicos viabilizam o avanço na área da computação quântica. Pesquisadores esperam que, eventualmente, esses materiais possam alcançar aplicações em chips de computadores mais rápidos e eficazes, tal ideia motivou uma mudança na arquitetura de computadores e o uso da física quântica para elaboração de novos algoritmos, levando a criação de supercomputadores, os chamados computadores quânticos. Atualmente, sabe-se que a empresa canadense D-Wave fabrica esse tipo de computador e, apresentou seu primeiro computador quântico (D-Wave One) no ano de 2011, no entanto, esse aparelho ainda não é comercializado para atividades do dia a dia, mas já vem sendo utilizado para realizar tarefas específicas como decifrar DNA, quebra de criptografia, entre outros (SILVA, 2017).

Estudos mostram que materiais com essas características, já estão sendo utilizados como laboratórios virtuais para testar previsões sobre partículas elementares exóticas, isso mostra o quanto temos avançado na área de materiais topológicos e sistemas que apresentam fases topológicas e, que futuramente muitas dessas pesquisas envolvendo estes materiais poderão ser realizadas fora dos laboratórios.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral desse trabalho é fazer uma revisão literária sobre isolantes topológicos na área de física teórica, demonstrando a importância de ferramentas matemáticas como winding number e o teorema do resíduo para descrever essas fases topológicas.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Discutir o conceito de isolantes topológicos;
- Estudar a importância do Teorema do Resíduo para descrever o Winding Number (número de preenchimento);
- Mostrar a relação do teorema do resíduo em aplicações de integrais no plano complexo.

3 OS NÚMEROS COMPLEXOS

Os estudos sobre números complexos se desenvolveram, gradualmente, assim como os demais conjuntos numéricos. Durante anos, determinar o valor da raiz quadrada de um número negativo foi desafiador para os matemáticos, pois acreditavam que esses números não apresentariam raiz. Mesmo quando equações quadráticas já eram resolvidas por métodos de solução de radicais, sempre a fórmula levava a resultados associados a números negativos ou a raízes quadradas de números negativos, indicava-se a inexistência de soluções (JÚNIOR, 2009). No entanto, no século XVI alguns matemáticos perceberam que este problema se estendia não apenas às equações do segundo grau, aparecendo também nas equações de terceiro grau.

O século XVI foi um período marcado por diversas disputas entre matemáticos, sempre buscando reconhecimento por seus trabalhos. De acordo com Cerri & Monteiro (2001, p. 2), “no meio da disputa entre Cardano e Tartaglia pela resolução de equação do 3 grau, é que se percebeu que os números reais não eram suficientes e as primeiras ideias da criação do conjunto dos números complexos surgiram”. Contudo, os matemáticos Scipione del Ferro (1465-1526) e Niccolò Fontana (1499-1557), também conhecido como Tartaglia, foram os primeiros a conseguir encontrar e dar solução para as equações cúbicas.

No mesmo período que Tartaglia ganhara notoriedade por seus feitos, Girolamo Cardano (1501-1576) teve conhecimento de que este havia encontrado a solução geral para equações de terceiro grau, sabendo disso, Cardano insistiu incansavelmente para que lhe fosse revelado tudo sobre a forma de resolução das equações cúbicas. Apesar de ter o pedido negado diversas vezes, Tartaglia acabou confidenciando sob a condição de que Cardano não revelasse nada a respeito. Conforme qualquer um poderia prever, Cardano quebrou todas as promessas e, em 1545, fez publicar na *Ars Magna* a fórmula de Tartaglia. No final, como em muitos outros casos, a posteridade não fez justiça a Tartaglia: sua fórmula é até hoje conhecida como “Fórmula de Cardano” (CERRI & MONTEIRO, 2001).

A partir dos trabalhos de Cardano e de outros estudiosos, passaram a desenvolver diversas pesquisas sobre esse impasse na matemática, alcançando uma formalização rigorosa com Friedrich Gauss (177-1855) que divulgou a representação geométrica dos números complexos.

No entanto, os números complexos não se limitam apenas à matemática, além de desempenharem um importante papel em seus mais diferentes ramos, passaram a ser

utilizados em diversas áreas do conhecimento humano, dentre eles, a física, uma das áreas em que mais se aplica o uso desses números em situações reais para solucionar problemas.

3.1 NÚMEROS COMPLEXOS Z

Um número complexo z é, basicamente, a soma de um número real x e um número imaginário yi (y é real, no entanto, o produto yi é imaginário). “Um número complexo é um número de forma $x + yi$, com x e y reais e $i = \sqrt{-1}$ ” (LIMA *et. al*, 1998, p.161). Portanto, é possível calcular a raiz quadrada de qualquer número negativo usando i .

Definição:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-1} \quad (3.1)$$

De acordo com Lima *et. al* (1998), fixando um sistema de coordenadas no plano, o complexo $z = x + yi$ é representando pelo ponto $P(x, y)$. Note que, z é como um vetor com duas componentes reais, na qual, o ponto P é denominado imagem do complexo z , sendo, x o eixo real e y é o eixo imaginário. “A cada número complexo $z = x + yi$ vamos associar o ponto do plano cartesiano determinado pelo par ordenado de números reais (x, y) ” (PAIVA, 1999, p.393). Tais eixos devem ser ortogonais, devido, os números reais não se misturarem com os números imaginários.

Dessa forma, é possível concluir que se $y = 0$ o número complexo será um número real, na qual, $z = x + 0i \rightarrow z = x$. Logo dizemos que, o conjunto de números reais pertencem ao conjunto de números complexos.

Dado um número complexo $z = x + yi = (x, y)$, o conjugado, de z é apresentado como z^*

$$z^* = x - yi, \quad (3.2)$$

note que obtemos o conjugado do número complexo apenas mudando o sinal de sua parte imaginária. É fácil observar que complexos conjugados possuem imagens simétricas em relação ao eixo real, portanto, o produto é um número real.

$$z \cdot z^* = (x + yi) \cdot (x - yi) \quad (3.3)$$

$$z \cdot z^* = x^2 - y^2 i^2 \quad (3.4)$$

Note que o produto de $z \cdot z^*$ tem como resultado o módulo quadrático de z ($|z|^2$).

Entretanto, $i^2 = -1$, então substituindo na equação (3.4), temos

$$z \cdot z^* = x^2 - y^2 \cdot (-1) \quad (3.5)$$

$$z \cdot z^* = x^2 + y^2 \quad (3.6)$$

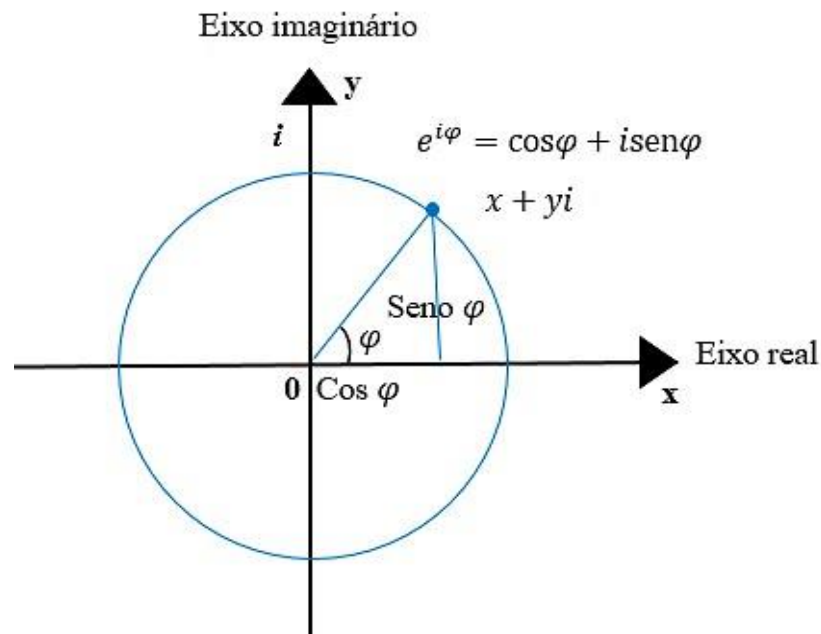
Portanto, temos que $z \cdot z^* = |z|^2$.

3.2 REPRESENTAÇÃO: $z = re^{i\varphi}$

Os números complexos z podem ser representados através de pontos em um plano formando dois eixos em que, o eixo horizontal representa os números reais e o eixo vertical os números imaginários, esse plano é chamado de Plano complexo, veja na Figura 1.

Considerando um círculo unitário com centro na origem do plano complexo, no qual é traçado um ponto que vai da origem até um ponto qualquer desse círculo, nota-se que obtemos um número complexo $z = (\cos \varphi, \sin \varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$, como mostra na figura 1 abaixo.

Figura 1 - O Plano complexo



Fonte: Produção do próprio autor

Observe que esse número apresenta módulo quadrático, $|z|^2 = 1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi$. Para reescrever o número complexo z de uma forma mais simples, usamos a equação de Euler, que é dada por:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad (3.7)$$

$$(e^{i\varphi})^* = e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \quad (3.8)$$

Permitindo obter uma representação polar do número complexo. Dado um número complexo $z = (x, y) = x + yi$, conseguimos reescrevê-lo da seguinte maneira: $z = re^{i\varphi}$, sendo que $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\varphi = \tan^{-1}(y/x)$.

Precisamos determinar z tal que $\sqrt{-1} = z$, onde $-1 = z^2 = (re^{i\varphi})^2 = r^2 re^{2i\varphi} = r^2 [\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)]$, na qual a última igualdade é satisfatória para $r = 1$, sendo sempre positivo, e para $2\varphi = \pi \pm 2n\pi$, sendo n um número natural. Então, note que para $n = 0$, temos $\cos(\pi) = -1$ e $\sin(\pi) = 0$, e para $n = 1$ teremos $\cos(3\pi) = -1$ e $\sin(3\pi) = 0$ e assim por diante, ou seja, o n representa o número de voltas realizadas no círculo no plano complexo.

Essa revisão sobre números complexos será necessária para estudarmos a integração no plano complexo.

4 INTEGRAÇÃO NO PLANO COMPLEXO

Os exemplos de isolantes topológicos que discutimos aqui (poliacetileno e grafeno) mostram que, do ponto de vista matemático, precisamos definir quantidades que sejam invariantes por deformações de uma curva (no caso da cadeia de átomos carbono do poliacetileno) e de uma superfície (no caso da rede hexagonal do grafeno). Uma quantidade muito elementar seria o número de “furos” em uma determinada geometria. Imagine que você tem uma esfera feita de massa de modelar. Por mais que você estique e amasse essa esfera (faça deformações), o número de furos dessa massa de modelar não muda, ou seja, é zero (0). Se, por outro lado, você faz um furo (1) essa quantidade não vai mudar por deformações. Dizemos, por força de definição, que o estado $n=0$ é trivial e $n=1$ é topológico. Essa analogia permanece verdadeira ao estudarmos a energia dos elétrons das bandas de valência e condução dos isolantes topológicos. Essa banda de energia faz o papel de esfera de massa de modelar. Nos casos em que a topologia é trivial, não existem estados de energia zero e no caso em que a topologia é não trivial existem estados de energia zero. O número de estados com energia igual a zero faz o papel do número de furos da esfera de massa de modelar, seguindo a nossa analogia. Esse número, como mostraremos a seguir, é o winding number w ou número de preenchimento.

Curiosamente, esse tratamento matemático pode ser efetuado naturalmente na área de integração no plano complexo, como veremos a seguir.

4.1 TEOREMA DO RESÍDUO

Considerando uma função $f(z)$ analítica em uma área D conexa, em que a mesma não apresenta interrupções, se assume uma Série de Laurent nas proximidades do ponto z_0 , dada por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (4.1)$$

Agora é necessário determinar a integral fechada I no plano complexo, fornecida por

$$I = \oint_c f(z) dz. \quad (4.2)$$

Observe que a curva C precisa considerar z_0 , devido a Série de Laurent operar nas proximidades do ponto z_0 . Utilizando a eq. (4.1) na eq. (4.2), obtemos o seguinte

$$I = \oint_C f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n. \quad (4.3)$$

Neste momento definimos a curva C como um círculo em torno do ponto z_0 . Assim, temos

$$z - z_0 = e^{i\theta} \rightarrow dz = e^{i\theta} i d\theta \quad (4.4)$$

Usando os termos da equação (4.4) na (4.3), obtemos

$$I = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \oint_{\theta} a_n e^{i\theta n} e^{i\theta} i d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i a_n \int_0^{2\pi k} e^{i\theta(n+1)} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n I_n; \quad (4.5)$$

em que,

$$I_n = \oint_{\theta}^{2\pi k} e^{i\theta(n+1)} d\theta \quad (4.6)$$

onde k é um inteiro representando o número de voltas em torno de z_0 . Agora, devemos calcular a integral da equação (4.6) dependente n . Primeiramente, observe que para $n = -1$, temos $I_{-1} = 2\pi k$. Para $n \neq -1$, o $I_n = 0$. No entanto, se consideramos uma volta no sentido anti-horário em torno do ponto z_0 , temos $k = 1$, logo obtemos a seguinte equação

$$I = \oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}. \quad (4.7)$$

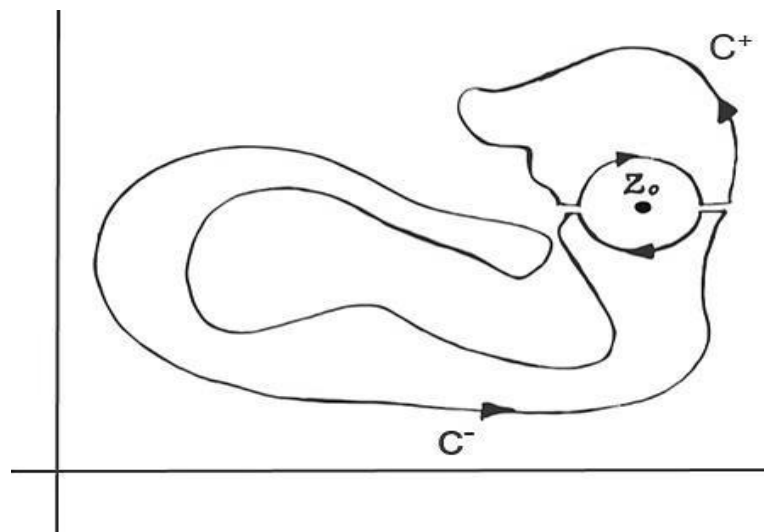
Repare que a equação que acabamos de obter, é o chamado teorema do resíduo, visto que, o coeficiente a_{-1} da Série de Laurent é denominado de resíduo. Note que, a integral I é dependente de apenas um coeficiente a_{-1} . Entretanto, se caso C não percorra o ponto z_0 , $I = 0$, ou seja, o resíduo é zero. Consequentemente, para uma função analítica $f(z)$, obtemos

$$I = \oint_C f(z)dz = 0, \quad (4.8)$$

se C não circular nenhum pólo de $f(z)$.

É fundamental mostrar que independente da curva C , a eq. (4.7) ainda é útil, porém, lembre-se que no início deste tópico assumimos que C é um círculo, mas isso não é uma regra geral. Para demonstrar de forma mais clara, vamos utilizar o gráfico mostrado na figura 2, no qual podemos observar que as curvas C_+ e C_- apesar de passarem nas proximidades do pólo z_0 , nenhuma delas o englobam. Logo, o valor das duas curvas é igual a zero.

Figura 2 - Representação do plano complexo da função analítica $f(z)$



Fonte: Produção do próprio autor.

$$\oint_{C_+} f(z) dz = 0, \quad (4.9)$$

e

$$\oint_{C_-} f(z) dz = 0, \quad (4.10)$$

Entretanto, repare que um círculo é formado em volta desse ponto originado pelas curvas C_+ e C_- , a qual chamaremos de curva γ , a mesma satisfaz

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}, \quad (4.11)$$

Isto, está de acordo com o que foi demonstrado na eq. (4.7). Contudo, imagine que exista uma outra curva C e, que esta seja formada pela união de das curvas γ , C_+ , C_- , então teremos $C = \gamma + C_+ + C_-$. Dessa forma temos a seguinte equação

$$\oint_c f(z)dz = \oint_\gamma f(z)dz + \oint_{c_+} f(z)dz + \oint_{c_-} f(z)dz, \quad (4.12)$$

Logo, utilizando a eq. (4.9) e a eq. (4.10), temos

$$\oint_c f(z)dz = \oint_\gamma f(z)dz = 2\pi ia_{-1}, \quad (4.13)$$

note que, mesmo não sendo um círculo C também satisfaz o teorema do resíduo. Portanto, C pode ser uma curva qualquer que engloba o pólo z_0 .

4.2 WINDING NUMBER

A descoberta de um novo estado físico da matéria despertou um grande interesse na comunidade científica, em especial na física, a qual cada vez mais pesquisas são desenvolvidas para estudar o que conhecemos como estados topológicos da matéria. Os grandes responsáveis por esse feito foram três físicos ingleses, que no ano de 2016 foram premiados com o Nobel de Física, por suas várias e importantes contribuições no estudo de transições de fase topológicas e, mais genericamente, na descoberta de fases topológicas da matéria (Silva, 2016). Suas descobertas fornecem uma nova visão da física em relação aos materiais topológicos, por exemplo, a forma como alguns isolantes podem conduzir eletricidade no decorrer de uma camada de átomos únicos em suas superfícies, tendo o efeito Hall quântico como o mais famoso exemplo desse sistema.

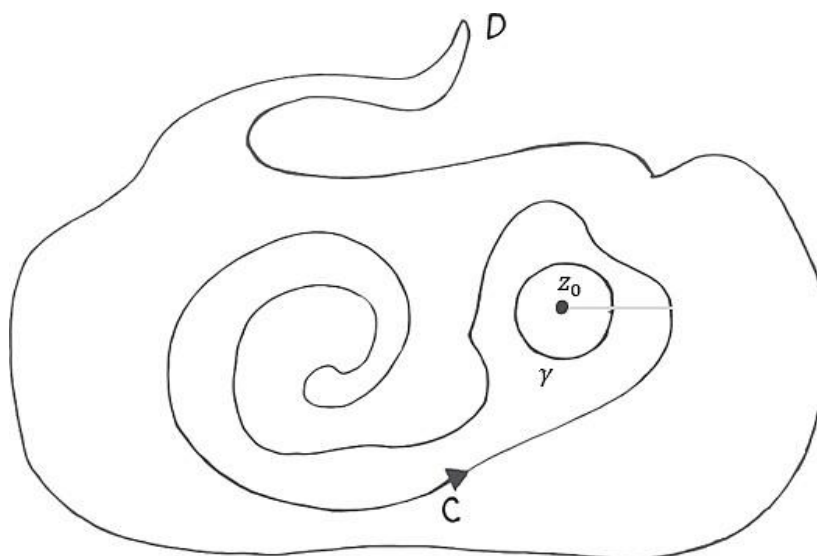
No entanto, a grande façanha que possibilitou esses estudos foram os cálculos da matemática, utilizados para descrever esses fenômenos físicos, como o cálculo do winding number w , uma das ferramentas matemáticas que viabilizou o desenvolvimento dessas pesquisas.

O w é uma invariante topológica característica de sistemas em (1+1) D que apresenta duas dimensões, uma espacial e uma temporal. Um exemplo perfeito desse sistema é o poliacetileno, no qual nota-se uma cadeia linear de átomos de carbono ligados, devido a sua dimensão mais importante ser a distância estabelecida no decorrer da cadeia de carbono, assim como a variação de tempo.

O w é conhecido como o número de voltas ao redor de um ponto, isso significa que ele descreve a volta que a curva C faz em torno de um ponto qualquer z_0 , logo o w é igual a 1. Portanto, cada uma das curvas completa apenas uma volta ao redor do ponto, na qual todas (curvas C , D e γ) apresentam o mesmo w .

Analise a figura 3 abaixo e, veja que γ é o círculo em torno do ponto z_0 , C e D são curvas complexas que realizam uma volta ao seu redor. Note que, mesmo sendo distintas umas das outras, essas curvas possuem o mesmo w é igual a 1, assim, dizemos que as três possuem a mesma topologia. Entretanto, se alguma curva não englobar o ponto, seu w será igual a 0, devido não realizar a volta em torno do z_0 , de acordo com a definição estabelecida no início.

Figura 3 - Mostra três curvas realizando uma volta ao redor do ponto z_0 , com o mesmo winding number.



Fonte: Produção do próprio autor.

Agora é necessária uma expressão matemática que viabilize o w de uma curva qualquer. Levando em conta a curva γ para determinar o w , sendo γ um círculo e também a curva mais simples, diferentemente das outras duas curvas, ao traçarmos um eixo horizontal e um vertical em torno do ponto z_0 obtemos um sistema de coordenadas partindo do seu ponto de origem z_0 , em que $z_0 = 0$.

Adotando a definição de que a curva γ seja um círculo unitário, temos um ciclo trigonométrico para o ângulo θ formado entre o vetor que sai da origem, ponto z_0 , até o círculo e o eixo horizontal. Digamos que $\theta = 0$ e, ao iniciarmos uma volta em torno do ponto no sentido anti-horário atingiremos o ponto $\theta = 2\pi$, que descreve uma volta completa no

ciclo, então, $\Delta\theta = 2\pi$ é variação do ângulo após uma volta no sentido anti-horário. O fato de ter uma única volta completa ao redor do ponto z_0 , nos permite deduzir que w é igual a 1, portanto, a única possibilidade é de $w = \Delta\theta/2\pi$. Demonstrando essa equação em uma representação de integral temos

$$w = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} d\theta = \frac{2\pi - 0}{2\pi} \quad (4.14)$$

Conforme o número de voltas que poderíamos completar em torno do ponto, o ângulo final seria $\theta = 2\pi n$, na qual n é um número inteiro. As curvas apresentam sinais diferentes dependendo da sua trajetória, quando as curvas são realizadas no sentido horário apresentam sinal negativo (-) e, para as curvas no sentido anti-horário o sinal é positivo (+). Dessa maneira, temos

$$w = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} d\theta = \frac{\pm 2\pi n - 0}{2\pi} = \pm n \quad (4.15)$$

Note que conseguimos obter o winding number w em sua definição mais geral, porém, podemos calculá-lo de várias maneiras, dentre essas formas usando os números complexos z . Então, podemos escrever da seguinte forma

$$w = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z} \quad (4.16)$$

Portanto, se γ é um círculo, logo $z = Re^{i\theta}$, em que R é a constante e igual a 1, além do mais, $dz = e^{i\theta} i d\theta$ e $dz/z = i d\theta$. Agora, substituindo estes valores na eq. (4.16) conseguimos reobter a eq. (4.14), logo podemos mostrar que a definição de w através de números complexos z está correta.

5 ISOLANTES TOPOLÓGICOS

O desenvolvimento da física da matéria condensada, é constantemente estimulada pelas descobertas de novos materiais. Nesse sentido, os materiais apresentam propriedades mecânicas quânticas únicas de importância particular. A existência de tais materiais é justificada dentro de um conceito de ordem topológica, introduzindo parâmetros de ordem que são frequentemente expressos como integrais invariantes no espaço de momento (ANDO, 2013; OLSHANETSKY *et. all*, 2015). Na existência de simetria de inversão do tempo, os materiais que apresentam intervalos entre as bandas de energia são classificados como invariantes topológicos, assumindo dois valores (1 ou 0) que proporciona a diferenciação entre isolantes topológicos (IT's) e isolantes normais.

De acordo com Hasan & Kane (2010, p.1), “um isolante topológico, como um isolante comum, possui uma lacuna de energia que separa a banda eletrônica mais alta ocupada da banda vazia mais baixa”, tais bandas podem estar ocupadas por elétrons de spin *up* ($\uparrow$) ou spin *down* ($\downarrow$), ou não. E entre esses estados surge uma diferença de energia, entre o nível ocupado mais alto (banda de valência) e o nível desocupado mais baixo (banda de condução), denominada *gap* de energia. Entretanto, a superfície de um isolante topológico apresenta estados que não possuem intervalos protegidos por simetria de inversão do tempo.

Os isolantes topológicos (IT's) estão diretamente ligados ao estado quântico inteiro 2D (bidimensional), na qual, também possuem estados de bordas únicas. Os estados de superfície (ou borda) de um isolante topológico levam a um estado condutor com propriedades diferentes de qualquer outro sistema eletrônico unidimensional (1D) ou 2D conhecido. Nesse sentido, dizemos que um determinado material possui características de um isolante, quando o *gap* de energia entre a banda de valência e a banda de condução tiver um valor muito maior do que $k_B T$ (HASAN & KANE, 2010; SILVA, 2018). Já no caso dos isolantes, os elétrons encontram-se todos fortemente ligados aos seus átomos, isto possibilita a formação de camadas fechadas e tornando-os eletricamente inertes. Porém, nos casos em que o *gap* de energia é semelhante a $k_B T$, é caracterizado como um semicondutor e se não existe o *gap*, o material é denominado como um condutor.

A ideia de ordem topológica é regularmente utilizada para definir estados quânticos fracionários intrinsecamente associados, que precisam de uma abordagem internamente de diversos corpos. “Contudo, considerações topológicas também se aplicam aos estados quânticos de número inteiro mais simples, para o qual uma descrição adequada pode ser

formulada em termos de mecânica quântica de partículas únicas” (HASAN & KANE, 2010, p.2). Assim, os isolantes topológicos se assemelham ao efeito Hall quântico, devido a presença de uma lacuna de energia que possui uma única partícula, onde, as interações de elétron-elétron não alteram o estado de maneira essencial.

Dessa forma, se considerarmos essa definição como base, veremos que para o caso de uma interface que divide dois estados isolantes, no qual, um apresentará topologia trivial e o outro com topologia não trivial, não existirá nenhum processo que possibilite conectar adiabaticamente as hamiltonianas dos dois sistemas, consequentemente, ocorrerá o fechamento do *gap* de energia. Isso faz com que ocorra uma alteração do invariante topológico do sistema, ou seja, da sua classe topológica, o que dá origem aos estados condutores de superfície, observados tanto no efeito Hall quântico, quanto nos isolantes topológicos (SILVA, 2018).

Neste capítulo daremos ênfase à dois exemplos de sistemas que apresentam fases topológicas, o efeito Hall quântico e o poliacetileno.

5.1 EFEITO HALL QUÂNTICO

No ano de 1980, um século após a descoberta do Efeito Hall, Klaus Von Klitzing, G. Dorda e M. Pepper, estudando a baixas temperaturas a interface entre dois semicondutores sob influência de um forte campo magnético (SILVA, 2018; ABDALA, 2015), descobrem que esse processo possibilita que os elétrons sintam uma força de Lorentz perpendicular, provocando uma movimentação de partículas carregadas em sentido circular. Analogamente, ao que ocorre no efeito Hall, a corrente elétrica passa a ser deslocada ao longo das bordas desses materiais, no qual o fluxo dessa corrente será unidimensional e sem apresentar dissipação, enquanto, o seu interior se torna um isolante. Essa descoberta acabou rendendo a Klaus Von Klitzing o Prêmio Nobel de Física de 1985.

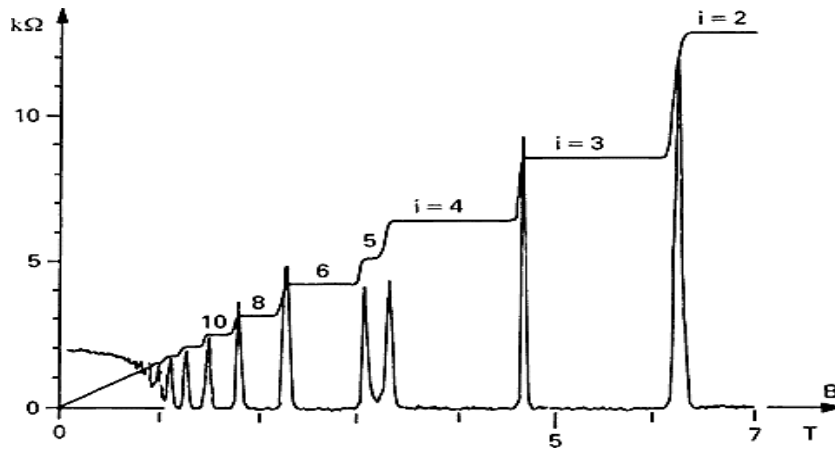
No entanto, diferentemente, do que acontecia no efeito Hall para essas novas condições, a condutividade transversal não possuía um comportamento linear com a variação do campo magnético B , dessa forma, passaria ser quantizada em patamares de $\frac{e^2}{h}$. De acordo com Silva (2018), este novo efeito foi denominado de Efeito Hall Quântico (Quantum Hall Effect-QHE), para o qual a condutividade transversal σ_{xy} passa a ser dada:

$$\sigma_{xy} = n \frac{e^2}{h}, n \quad , \quad (5.1)$$

note que, e é a carga elementar, h é a constante de Planck e n um número inteiro que depende da topologia de bandas sob influência de um campo magnético B . Devido ao material estudado por Klitzing apresentar esse fenômeno, foi considerado o primeiro isolante topológico (IT), onde o termo *topológico*, “vem do fato que a função de onda descrevendo os estados eletrônicos, geram um espaço de Hilbert que apresenta uma topologia não trivial” (ABDALLA, 2015, p. 1), isto, significa que há uma inversão das bandas de energia, uma peculiaridade que sistemas com *gaps* apresentam, em que para modificar a topologia é necessário que o *gap* feche na interface.

Na figura 4 podemos analisar a demonstração experimental do efeito Hall quântico, o qual é indicado por “degraus”, que se formam nas medidas da condutância Hall ρ_{xy} , das variações no valor da resistência longitudinal σ_{xx} em função do campo magnético B aplicado perpendicularmente e, pelo índice i que aponta o número que quantiza ρ_{xy} .

Figura 4 - Representação gráfica da resistência Hall em função de um campo magnético.

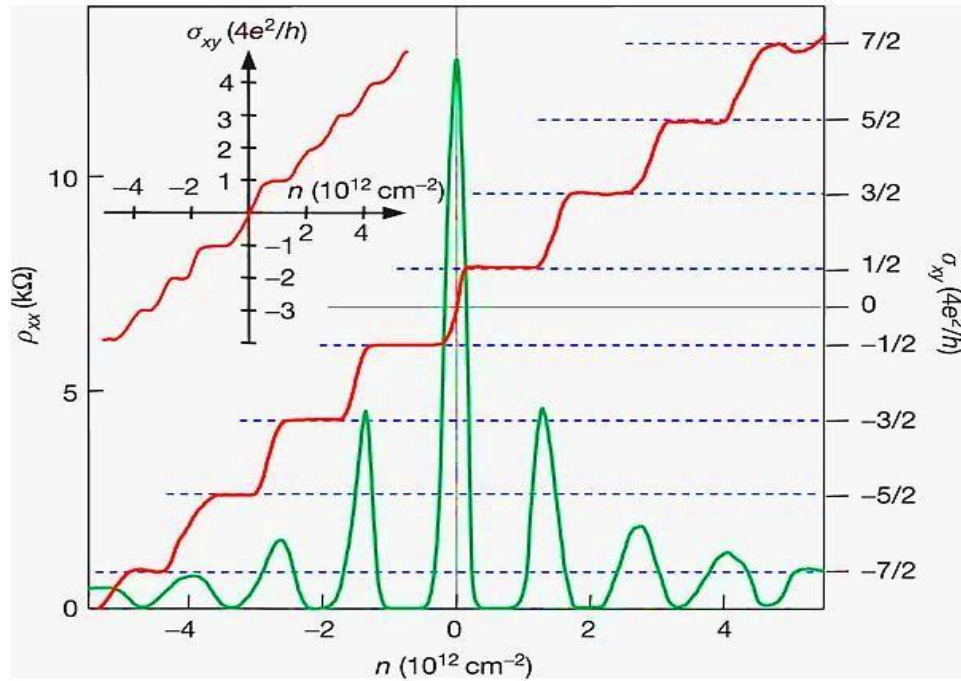


Fonte: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1998/press-release/>

Um exemplo de sistema que apresenta o EHQ, é o grafeno, nele o processo pode ser observado em temperatura ambiente, ao contrário dos sistemas convencionais nos quais são observados o mesmo efeito em temperaturas acima de 30K. Isto é, devido à elevada natureza incomum dos portadores de carga do grafeno, que se comportam como partículas relativistas (férmions de Dirac) sem massa e se movem com pouca dispersão em condições normais de ambiente (BUENO, 2011; NOVOSELOV *et al.*, 2007). Veja abaixo na figura 5, o EHQ em uma amostra de grafeno, esta observação experimental mostra que o efeito Hall quântico é de forma não convencional, devido ao espaçamento dos platôs do grafeno ser $4e^2/h$ (BUENO,

2011), em contrapartida, no efeito Hall habitual acontecem com etapas pela metade e em múltiplos inteiros desse valor.

Figura 5 - Condutância Hall representada em vermelho e a resistência longitudinal em verde.



Fonte: <https://www.nature.com/articles/nature04233>.

No ano de 2005, os cientistas Kane e Mele estudando no grafeno o acoplamento spin-órbita propõe um análogo ao EHQ, que foi chamado de efeito Hall quântico de spin (EHQS). Esse efeito é essencialmente dois efeitos Hall quântico para elétrons com polaridades opostas. No sistema grafeno, cuja a interação spin-órbita abre um *gap* de energia, dois canais de cargas contra propagam-se em cada borda com spin opostos (ROCHA, 2004; KANE & MELE, 2005 *apud* ABDALLA, 2015). Essa interação spin-órbita apresenta uma função semelhante ao campo magnético que é emitido no EHQ, no entanto, preserva a simetria de reversão temporal. Levando em conta a simetria de reversão temporal, conseguimos associar os elétrons em pares de Kramer que originam quiralidades opostas. O acoplamento spin-órbita nesse efeito deve ser grande para que ocorra uma inversão dos caracteres da banda de valência com a banda de condução (ROCHA, 2004).

5.2 POLIACETILENO

A alta condutividade que alguns polímeros apresentam chamou a atenção da comunidade científica desde a sua descoberta, na década de 70, pelos pesquisadores Alan Mac

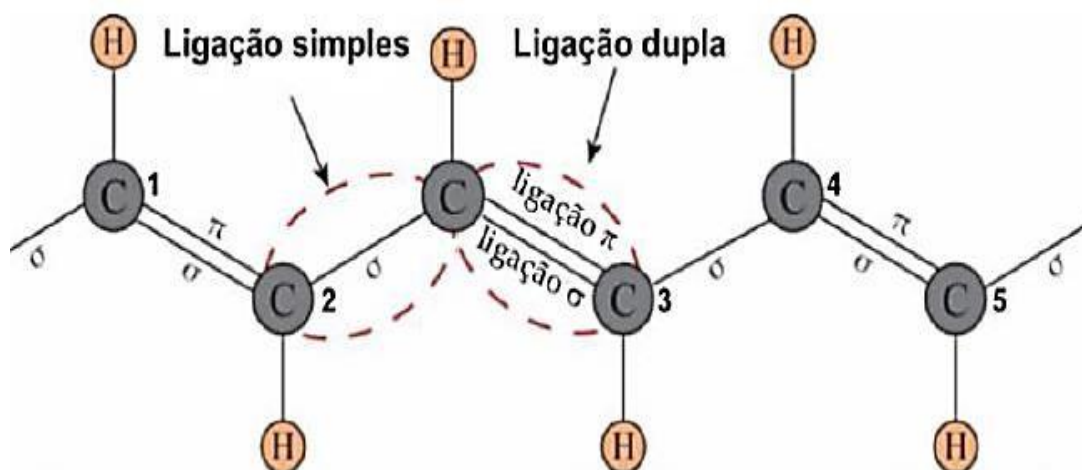
Diarmid, Alan Heeger e Hideki Shirakawa. Eles conseguiram produzir o primeiro “metal orgânico”, ao descobrirem que a “técnica de oxidação com vapor de cloro, bromo ou iodo possibilitava produzir filmes de poliacetileno 10^9 vezes mais condutoras do que o original” (LIMA *et al*, 2018, p. 2-3). Após a descoberta do poliacetileno, outros polímeros como polianilina, polipirrol, começaram a ser estudados promovendo um campo de pesquisa maior com polímeros condutores. E no ano 2000, o trabalho destes pesquisadores lhes rendeu a premiação com o Prêmio Nobel de Química.

Diversas pesquisas têm sido desenvolvidas com maior enfoque na capacidade condutiva dos polímeros, como o poliacetileno. Atualmente, são considerados como uma nova classe de materiais, denominados de “metais sintéticos”, pois combinam propriedades químicas e mecânicas de polímeros convencionais com propriedades elétricas, eletrônicas, magnéticas e ópticas de metais (ALMADA, 2007). Isso, proporcionou uma série de aplicações de dispositivos como, sensores, revestimento anticorrosivo, diodos emissores de luz, transistores de efeito de campo, entre outras coisas.

O poliacetileno, polímero orgânico, é formado por cadeias de carbono contendo ligações duplas C=C, apresentando uma alternância entre ligações simples (σ) e duplas (σ e π), (Figura 6). Segundo Medeiros *et. al* (2012), enquanto que uma ligação simples (ou ligação sigma, σ) é forte e contém mais elétrons localizados, a ligação pi, π , é mais fraca e contém elétrons menos localizados, isso permite o fluxo dos elétrons em condições específicas. Facilmente, os elétrons de caráter π podem sofrer oxidação ou redução, ou seja, perdem e ganham elétrons através do processo de dopagem realizado por agentes de transferência de cargas, na qual, a condução ocorre devido a movimentação dos elétrons que estão presentes nessas ligações, originando um íon polimérico, “sem, no entanto, destruir as ligações σ que são responsáveis em manter a estabilidade da macromolécula” (ALMADA, 2007, p. 1).

Esses agentes de carga que efetuam a redução ou oxidação do polímero, tornando-o, de isolante para condutor são chamados de dopantes, em analogia aos semicondutores inorgânicos (AUGUSTO, 2009; SANTANA, 2012), resultando, em elétrons desemparelhados e deslocalizados no decorrer da cadeia polimérica, onde são neutralizados por meio da entrada e saída de cátions ou ânions.

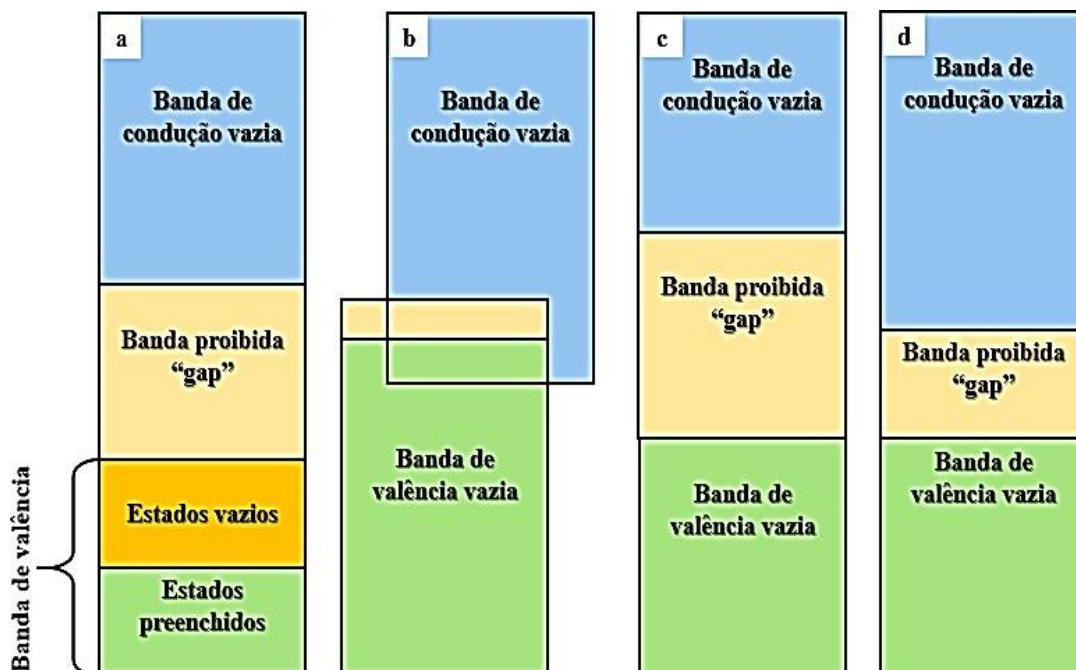
Figura 6: Representação estrutural de um segmento *trans* – poliacetileno.



Fonte: adaptado Lima *et al*, 2018.

A condutividade do poliacetileno, assim como em semicondutores inorgânicos, pode ser explicada através da teoria de bandas, conhecida também como “modelo de bandas”, (Figura 7), onde, “os orbitais atômicos de cada átomo se sobrepõem com os mesmos orbitais de seus átomos vizinhos em todas as direções e produzem orbitais moleculares semelhantes aos de moléculas pequenas” (LIMA *et al*, 2018, p. 3). Dessa forma, geram agregados de átomos que formam bandas eletrônicas, no qual os níveis eletrônicos ocupados por maior energia, constituem a banda de valência (BV) e os níveis vazios de menor energia, formam a banda de condução (BC). Essas bandas separam-se por uma faixa de energia, chamada de “*gap*”, cuja largura determina as propriedades elétricas intrínsecas do material (FORNAZIER, 2009).

Figura 7: Esquematisação das bandas de energia: A) Banda de valência parcialmente preenchida; B) Banda de valência preenchida sobrepondo-se à banda de condução; C) Banda de valência inteiramente preenchida e uma banda de gap fazendo a separação da banda de condução; D) Banda de valência completamente preenchida e uma banda de gap estreita separando-a da banda de condução.



Fonte: Produção do próprio autor

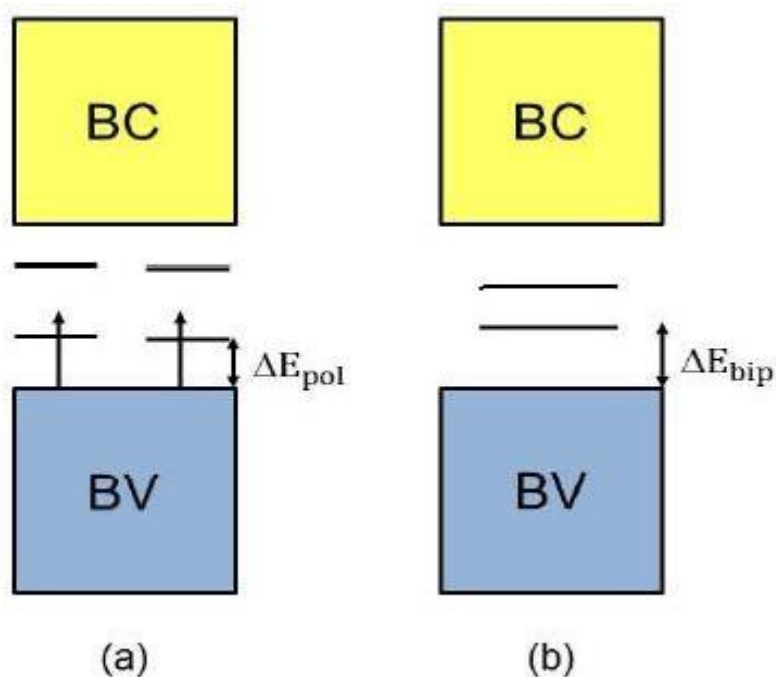
No caso de oxidação ou redução, o poliacetileno tem elétrons retirados do topo da banda de valência ou adicionados na banda de condução, isto, origina bandas de valências semipreenchidas, como nos metais. No entanto, considerando o caso de oxidação observamos que, a remoção inicial de um elétron da cadeia leva à formação de um estado eletrônico denominado “polaron” (ZOPPI & DE PAOLI, 1993), pode-se interpretar esse processo, como a redistribuição de elétrons π polarizando a cadeia polimérica localmente, originando uma alteração de pequeno alcance na distribuição espacial desses átomos.

O polaron consiste em um íon radical que apresenta uma carga unitária, ligado a uma interferência no retículo e à origem de estados localizados no *bandgap*. Segundo Bredas & Street (1985), isto deve ser enfatizado que, no caso de formação de polaron, a BV permanece cheia e a BC vazia e, não exhibe manifestação de natureza metálica, dado que o nível parcialmente preenchido se localiza na banda de *gap*.

No entanto, se outro elétron é removido do polímero já oxidado contendo um polaron, duas situações podem acontecer: o elétron é removido da cadeia polimérica e ocasiona a formação de mais um estado polaron ou é removido do estado polaron já existente (ZARBIN, 1997; LIMA *et al*, 2018). No segundo caso, ocorre a criação de um bipolaron, descrito como

um par de cargas semelhantes (Spin=0) associado à forte alteração no retículo, (Figura 8), ele tem seu desenvolvimento favorecido em relação à formação dos dois polaron, uma vez que, o ganho de energia decorrente da interação de duas cargas com o retículo é maior do que a repulsão de Coulomb entre as duas cargas do mesmo sinal confinado no mesmo local (BREDAS & STREET, 1985).

Figura 8 - Banda de energia: A) Polaron; B) Bipolaron.



Fonte: adaptado Lima *et al*, 2018.

Dessa forma, o poliacetileno, assim como nos semicondutores precisa ser dopado para apresentar uma condutividade maior, porém, um nível de dopagem maior é necessário para polímeros condutores, quando comparados com os semicondutores inorgânicos (MEDEIROS *et. All*, 2012). No entanto, diferentemente, de semicondutores, os portadores de cargas no poliacetileno não serão elétrons ou buracos que estão localizados no interior das bandas, mas sim defeitos carregados, polarons e bipolarons, que se encontram por toda a extensão da cadeia polimérica. Esta característica influencia exatamente no transporte no interior da cadeia polimérica

6 CONCLUSÃO

Este trabalho é resultado de uma revisão literária, onde foram apresentados alguns conceitos básicos sobre a teoria de isolantes topológicos, juntamente com ferramentas matemáticas que possibilitaram a conclusão desta monografia. Além de destacar, os principais cientistas que proporcionaram uma visibilidade maior aos estudos de fenômenos na área da matéria condensada.

Abordamos, brevemente, o conceito sobre números complexos, o qual foi de grande relevância para que pudéssemos desenvolver os cálculos e obter resultados satisfatórios para demonstrar o Winding number e, a integração no plano complexo. Desenvolvemos alguns exemplos concretos de integrais que podem ser resolvidas com o auxílio do teorema do resíduo. Essas integrais possuem grande analogia com a definição de fases topológicas, pois o winding number (quando diferente de zero) significa um sistema com fase topológica. Para isso, entretanto, é necessário substituir z pela energia do sistema (ou Hamiltoniano de Bloch). Esse ponto não foi abordado nessa monografia, mas seria uma continuação natural.

Para concluir nossa analogia entre integração no plano complexo e estados topológicos da matéria, precisamos notar que z deve ser substituído por $h(k)$, sendo $h(k)$ uma função (chamada de Hamiltoniano de Bloch) e k o momento linear do elétron. Nesse caso, $h(k)$ faz o papel de número complexo, mas note que $h(k)$ é na verdade uma função complexa, o que não altera o caráter topológico de w ou n .

Determinar explicitamente $h(k)$ para o poliacetileno e grafeno envolveria, entretanto, a realização de cálculos de modelos tight-binding na linguagem de segunda quantização, o que claramente foge do escopo desse trabalho. O leitor mais interessado nessa parte pode consultar a referência Introduction to Topological Phases and Electronic Interactions in (2+1) Dimensions (<https://link.springer.com/article/10.1007/s13538-017-0485-0>).

Por fim, destaco a importância das pesquisas na área de sistemas com fases topológicas, tendo em vista que, futuramente, podem ser úteis no campo da tecnologia e ciência como, por exemplo, no desenvolvimento de computadores mais rápidos e materiais mais sofisticados que facilitariam ainda mais nosso cotidiano.

REFERÊNCIAS

ABDALLA, L, B. **Propriedades eletrônicas dos Isolantes Topológicos**. Tese de doutorado em física. Universidade de São Paulo. Instituto de Física, p. 1-2, 2015.

ALMADA, G, F. **Estudo da proteção à corrosão pelo uso de polímeros condutores**. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo. Instituto de Química, p. 1, 2007.

ANDO, Y. Topological Insulator Materials. **J. Phys. Soc. Jpn.**, 82: 1, 102001, 2013.

AUGUSTO, T. **Introdução a Polímeros Condutores: Síntese e Caracterização Eletroquímica da Polianilina**. 2009. Trabalho de conclusão: disciplina de preparação pedagógica. Universidade de São Paulo. Instituto de Química, 2009.

BREDAS, J. L.; STREET, G. B. Polarons, Bipolarons, and Solitons in Conducting Polymers. **Acc. Chem. Res.**, 18: p. 311, 1985.

BUENO, M. J. **Propriedades eletrônicas de grafeno com defeitos**. 43 f. 2011. Tese de Doutorado. João Pessoa. Universidade Federal da Paraíba, 2011

CENTRO DE GESTÃO E ESTUDOS ESTRATÉGICOS (CGEE). **Matérias avançadas no Brasil 2010-2022**. 2010. Disponível em: https://www.cgee.org.br/documents/10182/734063/Livro_Materiais_Avancados_2010_6367.pdf . Acesso em: 15, março, 2019.

CERRI, C.; MONTEIRO, M, S. **História dos números complexos**. Centro de Aperfeiçoamento de Ensino em Matemática - CAEM. Instituto de Matemática e Estatística da USP, p. 2-3, 2001.

CHAVES, A.; SHELLARD, R. C. **Física para o futuro: pensando para o futuro**. São Paulo: Sociedade brasileira de física, p. 71-74,.2005.

FORNAZIER, Y. F. **Síntese, dopagem e caracterização da polianilina com sais de Fe (II) e Fe (III)**. Dissertação de Mestrado. Vitória. Universidade Federal do Espírito Santo, p. 23, 2009.

HASAN, M.Z.; KANE, C. L. **Colloquium: Topological insulators**. Phys: 82: 1-2. Rev. 3045, 2010.

JÚNIOR, U, P. **A história dos números complexos: “das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand”**. 2009. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro. Universidade Federal do Rio de Janeiro, p. 11-12, 2009.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 6ª ed., v3. Cap.5, p. 161, 1998.

LOPES, M. D. **Teorema do índice em superfícies curvas de grafeno e fases de Berry**. Dissertação de Mestrado. João Pessoa. Universidade Federal da Paraíba, 2010.

MEDEIROS, E.S.; CONSOLIN-FILHO, J. E.; PATERNO, L. G.; MATTOSO, L. H. C. **Uso de Polímeros Condutores em Sensores. Parte 1: Introdução aos Polímeros Condutores**. Revista eletrônica de materiais e processos. v.7, p. 63, 2012.

MELO, T. M. **Estudos sobre a eletrodinâmica de isolantes topológicos e metamateriais**. 2016. Tese de Pós-Graduação em Física. Minas Gerais. Universidade Federal de Viçosa, 2016.

NOVOSELOV, K. S.; JIANG, Z.; ZHANG, Y.; MOROZOV, S. V.; STORMER, H. L.; ZEITLER, U.; MAAN, J. C.; BOEBINGER, G. S.; KIM, P.; GEIM, A. K. Room-Temperature Quantum Hall Effect in Graphene. **Science**. v, 315, p. 1379, 1137201, 2007.

OLSHANETSKY, E.B.; KVON, Z.D.; GUSEV, G.M.; LEVIN, A. D.; RAICHEV, O. E.; MIKHAILOV, N.N.; DVORETSKY, S. A. Persistence of a Twon-Dimensional Topological Insulator State in Wide HgTe Quantum wells. **Phys. Rev. Lett**, 114, 126802, 2015.

PAIVA, M. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1ª ed., Cap. 63, p. 393, 1999.

ROCHA, L. S. **Estrutura eletrônica de isolantes topológicos em duas e três dimensões**. 2004. Tese de Doutorado. São Paulo. Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Física, 2004.

SÁ, T. G. M. **Crescimento de “multicamadas” de grafeno epitaxial em substratos de SiC a pressão atmosférica**. 2011. Dissertação de Mestrado. Belo Horizonte. Universidade Federal de Minas Gerais, 2011.

SANTANA, A. T. **Polímeros condutores: Estudo e utilização de polímeros condutores**. 2012. Trabalho de Conclusão de Curso. Rio de Janeiro. Centro Universitário Estadual da Zona Oeste, 2012.

SILVA, F. R. **Isolantes triviais e topológicos**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso. Minas Gerais. Universidade Federal de Uberlândia, 2018.

SILVA, I. B. **Proposta de implementação de computação quântica em estruturas de grafeno**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso. Patos. Universidade Federal da Paraíba, 2017.

SILVA, L.G. D. **O Prêmio Nobel de Física de 2016 e a conexão com os isolantes topológicos**, 2016. Disponível em:
<http://portal.if.usp.br/imprensa/sites/portal.if.usp.br.ifusp/files/BIFUSP%2030-2016.pdf>.
Acesso em: 29, maio, 2019.

VIEIRA SEGUNDO, J, E, D.; VILAR, E, O. Grafeno: Uma revisão sobre propriedades, mecânicos de produção e potenciais aplicações em sistemas energéticos. **Revista Eletrônica de Materiais e Processos**. p. 54-55, 2017.

ZARBIN, A. J. G. **Novos nanocompósitos obtidos pelas interações de compostos organometálicos e polímeros condutores com vidros porosos**. 1997. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Química, 1997.

ZOPPI, R. A.; DE PAOLI, M. A. **Aplicações tecnológicas de polímeros intrinsecamente condutores: perspectivas atuais**, 1993. Disponível em:
http://quimicanova.sbq.org.br/detalhe_artigo.asp?id=5988. Acesso em: 28, março, 2021.