



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL  
FACULDADE DE MATEMÁTICA**

**EVANDRO JOSÉ DA SILVA MARIANO**

**INTEGRAL DE RIEMANN E ALGUMAS  
APLICAÇÕES EM MATEMÁTICA,  
FÍSICA, ECONOMIA E BIOLOGIA.**

**CASTANHAL  
2020**

**EVANDRO JOSÉ DA SILVA MARIANO**

**INTEGRAL DE RIEMANN E ALGUMAS  
APLICAÇÕES EM MATEMÁTICA,  
FÍSICA, ECONOMIA E BIOLOGIA.**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado à Faculdade de Matemática do  
Campus Universitário de Castanhal, da  
Universidade Federal do Pará, como requisito  
para a obtenção do Grau de Licenciatura em  
Matemática, sob a orientação do Professor  
Valdelírio da Silva e Silva.

Castanhal

2020

**INTEGRAL DE RIEMANN E ALGUMAS  
APLICAÇÕES EM MATEMÁTICA,  
FÍSICA, ECONOMIA E BIOLOGIA.**

Este trabalho foi julgado em 12-02-2020 adequado para a obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática, e aprovado na sua forma final pela banca examinadora que atribuiu o conceito EXELENTE.

---

Prof. Valdelírio da Silva e Silva  
Orientador – FACMAT/UFPA

---

Prof. Renato Germano Reis Nunes  
Membro – FACMAT/UFPA

---

Prof. Romário Silva Duarte  
Membro – EXTERNO

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço minha mãe, pois devido a seus esforços para me instruir e me fornecer tudo que foi possível ao seu alcance para minha educação fui capaz de chegar a cursar o ensino superior. Agradeço a todos os meus professores desde o início de meus estudos, em especial àqueles que me incentivaram e acreditaram no meu potencial. Ao meu Orientador, quem me auxiliou na conclusão deste texto e a todos os meus amigos que estão sempre me apoiando em diversas situações.

*“O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano.”*

*(Isaac Newton)*

## RESUMO

Este trabalho objetivou trazer em uma linguagem clara e simples os conceitos sobre INTEGRAL DE RIEMANN estudado nas matérias iniciais de cálculo do curso de Licenciatura Plena em Matemática. Trouxe de maneira sucinta uma contextualização histórica na tentativa de valorizar e talvez facilitar a compreensão do conteúdo subjacente na escrita do texto. Buscou-se neste trabalho apresentar de maneira mais visual os processos que envolvem integral de Riemann e foram abordados os principais teoremas e definições, tais como teorema fundamental do cálculo, integrais indefinidas e definidas, integral por partes, regra da substituição, integrais impróprias dentre outras. Foram apresentadas algumas das aplicações destes conceitos em outras áreas como na física no trabalho realizado por uma força, na economia no superávit de consumidores e produtores e na biologia na capacidade cardíaca. Tais aplicações ilustram a razão da importância do aprendizado do conceito de integral para várias ciências.

**Palavras-chave:** Integral de Riemann, Área, Aplicações.

## **ABSTRACT**

This work aimed to bring in a clear and simple language the concepts about RIEMANN'S INTEGRAL studied in the initial calculus subjects of the Full Degree course in Mathematics. It brought in a succinct way a historical contextualization in an attempt to value and perhaps facilitate the understanding of the underlying content in the writing of the text. This work sought to present in a more visual way the processes involving Riemann integral and the main theorems and definitions were approached, such as fundamental theorem of calculus, indefinite and defined integrals, integral by parts, substitution rule, inappropriate integrals, among others . Some of the applications of these concepts were presented in other areas, such as in physics in the work carried out by a force, in the economy in the surplus of consumers and producers, and in biology in cardiac capacity. Such applications illustrate the reason for the importance of learning the concept of integral for various sciences

**Keywords:** Riemann's integral, area, Applications.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 - Cálculo da área de polígonos .....                           | 14 |
| Figura 2 - Polígonos circunscritos e inscritos em um círculo.....       | 15 |
| Figura 3 - Gráfico da função $\text{sen}(x)$ .....                      | 18 |
| Figura 4 - Retângulos inseridos abaixo da curva .....                   | 19 |
| Figura 5 - Soma de Riemann inferior .....                               | 19 |
| Figura 6 - Soma de Riemann superior .....                               | 20 |
| Figura 7 - Gráfico da função $f(x)$ .....                               | 21 |
| Figura 8 - Inserindo $n$ retângulos no intervalo $[a, b]$ .....         | 22 |
| Figura 9 - Área delimitada $A(x + \Delta x) - A(x)$ .....               | 27 |
| Figura 10 - Aproximação $f(x) \cdot \Delta x$ .....                     | 28 |
| Figura 11 - Gráfico da função $y = 1/x^2$ .....                         | 42 |
| Figura 12 - Intervalos definidos na função .....                        | 42 |
| Figura 13 - Função delimitada por uma assíntota vertical .....          | 44 |
| Figura 14 – Aproximação pelo lado esquerdo e lado direito .....         | 45 |
| Figura 15 – Aproximação por ambos os lados .....                        | 45 |
| Figura 16 – Gráfico da função $x e^x$ .....                             | 45 |
| Figura 17 – Gráfico da função $1/(x^2 + 1)$ .....                       | 46 |
| Figura 18 - Área delimitada entre duas curvas .....                     | 47 |
| Figura 19 - Retângulos aproximantes inseridos entre duas as curvas..... | 47 |
| Figura 20 - Medidas arbitrárias de cada retângulo .....                 | 48 |
| Figura 21 - Área entre as funções .....                                 | 49 |
| Figura 22 - Área entre as funções .....                                 | 49 |
| Figura 23 – Gráfico do lucro de uma empresa .....                       | 50 |
| Figura 24 – Aproximação do comprimento de uma circunferência .....      | 52 |
| Figura 25 – Aproximação para a curva $C$ .....                          | 53 |
| Figura 26 – Comprimento de arco .....                                   | 55 |
| Figura 27 - Sólido qualquer .....                                       | 56 |
| Figura 28 - Fatia do sólido .....                                       | 57 |
| Figura 29 - Fatiando o sólido .....                                     | 57 |
| Figura 30 - Representação de uma esfera.....                            | 59 |
| Figura 31 - Função sendo rotacionada .....                              | 60 |

|                                                                                      |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Figura 32 – Função densidade de probabilidade .....</b>                           | <b>61</b> |
| <b>Figura 33 - Força agindo sobre um objeto .....</b>                                | <b>63</b> |
| <b>Figura 34 - Gráfico de uma força constante .....</b>                              | <b>65</b> |
| <b>Figura 35 - Gráfico de uma força variável .....</b>                               | <b>65</b> |
| <b>Figura 36 - Representação da força gravitacional agindo sobre um objeto .....</b> | <b>68</b> |
| <b>Figura 37 - Bloco em um plano inclinado .....</b>                                 | <b>69</b> |
| <b>Figura 38 - Representação de uma força elástica .....</b>                         | <b>70</b> |
| <b>Figura 39 - Gráfico da relação produto-demanda .....</b>                          | <b>73</b> |
| <b>Figura 40 - Aproximação pela soma de Riemann .....</b>                            | <b>73</b> |
| <b>Figura 41 - Função de oferta.....</b>                                             | <b>75</b> |

# SUMÁRIO

|                                                         |           |
|---------------------------------------------------------|-----------|
| <b>INTRODUÇÃO .....</b>                                 | <b>12</b> |
| <b>Capítulo 1 .....</b>                                 | <b>14</b> |
| <b>1. CONTEXTO HISTÓRICO .....</b>                      | <b>14</b> |
| 1.1. MÉTODO DA EXAUSTÃO.....                            | 14        |
| 1.2. NEWTON E LEIBNIZ .....                             | 15        |
| 1.3. RIEMANN E CAUCHY .....                             | 16        |
| <b>Capítulo 2.....</b>                                  | <b>18</b> |
| <b>1. INTEGRAL DE RIEMANN .....</b>                     | <b>18</b> |
| 1.1. CÁLCULO DE ÁREAS.....                              | 18        |
| 1.2. DEFINIÇÃO DE INTEGRAL DEFINIDA.....                | 23        |
| 1.3. PROPRIEDADES DE INTEGRAL DEFINIDA.....             | 25        |
| <b>2. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO .....</b>          | <b>27</b> |
| 2.1. NOÇÃO GEOMÉTRICA.....                              | 27        |
| 2.2. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO .....               | 29        |
| 2.3. INTEGRAIS INDEFINIDAS .....                        | 30        |
| <b>3. TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO.....</b>                   | <b>32</b> |
| 3.1. REGRA DA SUBSTITUIÇÃO .....                        | 32        |
| 3.2. MUDANÇA DOS LIMITES DE INTEGRAÇÃO .....            | 34        |
| 3.3. INTEGRAÇÃO POR PARTES.....                         | 35        |
| 3.4. INTEGRAIS ENVOLVENDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS ..... | 39        |
| 3.5. INTEGRAIS IMPRÓPRIAS .....                         | 42        |
| <b>Capítulo 3.....</b>                                  | <b>47</b> |
| <b>1. APLICAÇÕES DE INTEGRAL .....</b>                  | <b>47</b> |
| 1.1. ÁREA ENTRE CURVAS .....                            | 47        |
| 1.2. VALOR MÉDIO DE UMA FUNÇÃO .....                    | 50        |
| 1.3. COMPRIMENTO DE ARCO .....                          | 52        |

|           |                                                                |           |
|-----------|----------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.4.      | VOLUMES.....                                                   | 56        |
| 1.5.      | SÓLIDO DE REVOLUÇÃO.....                                       | 60        |
| 1.6.      | PROBABILIDADE .....                                            | 61        |
| <b>2.</b> | <b>APLICAÇÕES DE INTEGRAL NA FÍSICA.....</b>                   | <b>63</b> |
| 2.1.      | TRABALHO .....                                                 | 63        |
| 2.2.      | FORÇA E ENERGIA CINÉTICA.....                                  | 63        |
| 2.3.      | TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA VARIÁVEL.....                 | 65        |
| 2.4.      | TEOREMA DO TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA .....                   | 66        |
| 2.5.      | TEOREMA DO TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA COM FORÇA VARIÁVEL..... | 66        |
| 2.6.      | TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA GRAVITACIONAL.....            | 68        |
| 2.7.      | TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA ELÁSTICA.....                 | 70        |
| <b>3.</b> | <b>APLICAÇÃO DE INTEGRAL EM ECONOMIA .....</b>                 | <b>73</b> |
| 3.1.      | SUPERÁVIT DOS CONSUMIDORES.....                                | 73        |
| 3.2.      | SUPERÁVIT DOS PRODUTORES.....                                  | 75        |
| <b>4.</b> | <b>APLICAÇÃO DE INTEGRAL EM BIOLOGIA.....</b>                  | <b>76</b> |
| 4.1.      | CAPACIDADE CARDÍACA.....                                       | 76        |
|           | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>                              | <b>78</b> |
|           | <b>REFERÊNCIAS.....</b>                                        | <b>79</b> |

# INTRODUÇÃO

O cálculo é uma disciplina que compõe a grade curricular de muitos cursos da área de exatas. No curso de licenciatura em matemática é uma das primeiras disciplinas que um futuro docente tem contato. Tendo isso em mente, por vezes o aprendizado não é tão efetivo, principalmente no que tange aos conceitos sobre integrais, que pode parecer um assunto muito complexo para estudantes que acabaram de iniciar a graduação. Entender o propósito de se calcular uma integral, a ideia por trás do processo de integração e em que áreas é utilizada tal ferramenta matemática possibilita ter uma melhor compreensão e visão desse campo da matemática. Portanto, neste trabalho buscou-se trazer essa visão do cálculo integral.

Propõe-se neste trabalho de conclusão de curso, conhecer um pouco da história por trás do surgimento da ideia de integral, mostrar geometricamente a necessidade da definição de integral para o cálculo de áreas e trazer os conceitos referentes a integral de maneira mais simples e visual para estudantes iniciantes de uma graduação. Busca-se definir os principais conceitos, técnicas e teoremas fundamentais no aprendizado da disciplina. E, além disso, como já dito, trazer algumas aplicações do cálculo integral em outras áreas além da própria matemática para dar significado aos conteúdos aprendidos.

O texto divide-se em três capítulos os quais caracterizam os aspectos abordados pelo trabalho. No primeiro capítulo é mostrado um pouco do contexto histórico do surgimento do cálculo integral, fala-se sobre o método da exaustão, um dos primeiros métodos para o cálculo de áreas de figuras desconhecidas desenvolvido por Eudoxo (408-355 A.C.). Traz-se um pouco da história sobre alguns dos principais matemáticos que contribuíram para surgimento do cálculo, e por consequência o cálculo integral, como Newton (1642-1727) que é considerado o criador do cálculo diferencial e Riemann (1826-1866) que definiu com mais rigor o processo de integração que se usa nos dias atuais para o cálculo de áreas.

No segundo capítulo busca-se definir o conceito de integrais partindo de uma visualização gráfica, para trazer de maneira mais ilustrativa a ideia de cálculo de áreas sob curvas para assim chegar a definição da integral de Riemann. São mostradas as principais propriedades de uma integral definida e é apresentado o Teorema Fundamental do Cálculo o qual faz a ligação entre integrais definidas e indefinidas. Durante o decorrer do texto constantemente recorreu-se ao uso de exemplos para aplicar as propriedades, definições e teoremas que foram abordados. Além disso, são demonstradas algumas das principais técnicas

de integração, como substituição, integrais envolvendo funções trigonométricas, integrais impróprias dentre outras. Tais técnicas são essenciais e são muito usadas para o cálculo de integrais com um grau de complexidade elevado.

No terceiro e último capítulo deste trabalho é trazida algumas aplicações do cálculo integral. Como na própria matemática, que são inúmeras as aplicações, como foram algumas explicitadas neste texto. Por exemplo, para o cálculo da área entre duas curvas, no valor médio de uma função, no comprimento de arco de uma função, no cálculo de volume de sólidos desconhecidos dentre outras. Foi trazido também neste capítulo o uso de integral para o cálculo do trabalho realizado por uma força, no superávit de produtores e consumidores e para encontrar a capacidade cardíaca. É válido mencionar que são inúmeras as aplicações, e este trabalho não teve por propósito apresentar todas, pois seria inviável, ou mesmo de aprofundar-se rigorosamente em uma outra determinada área no intuito de ser capaz mostrar essa aplicabilidade.

No final deste texto foram apresentadas as considerações finais elencando os pontos mais importantes desta escrita. E foram trazidas sugestões para futuros trabalhos na mesma linha de pesquisa.

# Capítulo 1

## 1. CONTEXTO HISTÓRICO

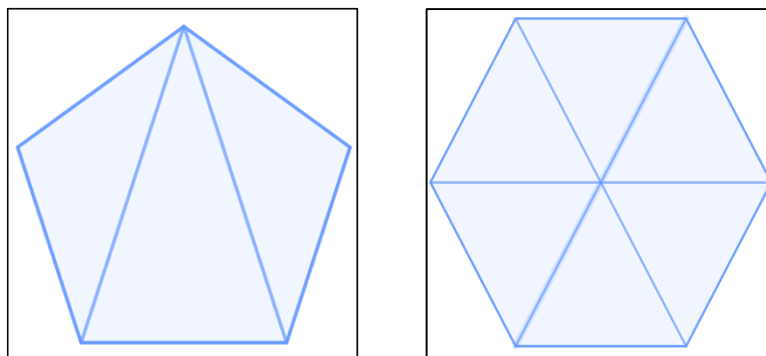
### 1.1. MÉTODO DA EXAUSTÃO

Pode-se dizer que as primeiras noções de cálculo integral surgiram na Grécia antiga, graças à genialidade de Eudoxo (408-355 A.C.), que, de acordo com Arquimedes (287-212 AC), foi quem forneceu o lema que serve de base para o método de exaustão.

Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não menos que a metade e esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie. (Boyer, 1974, p.67)

Atualmente este lema fornecido por Eudoxo é conhecido pelos matemáticos como axioma de Arquimedes. Este, considerado um dos maiores matemáticos da antiguidade, aprimorou o método da exaustão e passou a usá-lo para o cálculo da área e do volume de figuras geométricas que antes eram grandes desafios matemáticos. Um dos métodos para o cálculo de áreas antigamente consistia em inserir formas geométricas conhecidas na figura que deseja-se encontrar a área. Por exemplo, inserir triângulos, cuja área é conhecida, em polígonos para achar a área procurada como mostra a figura 1.

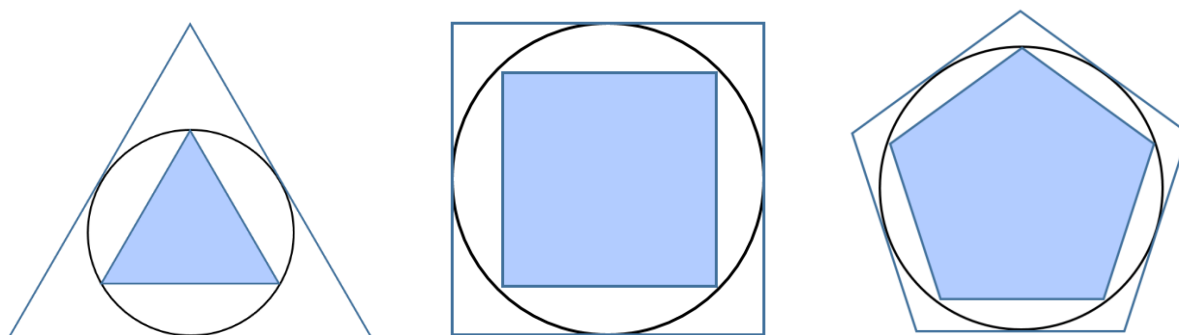
**Figura 1 - Cálculo da área de polígonos**



Fonte: Autoria própria

Todavia, para encontrar a área de uma figura curvilínea não é possível usar este método. Para calcular a área de uma circunferência, por exemplo, pode-se usar o que é chamado de método da exaustão, o qual consiste em inscrever e circunscrever formas geométricas conhecidas em figuras geométricas desconhecidas e aumentar gradativamente o número de lados dessa figura. Como mostrado na figura 2.

**Figura 2 - Polígonos circunscritos e inscritos em um círculo**



Fonte: Autoria própria

Nota-se que a área da circunferência estará entre o polígono circunscrito e o polígono inscrito e que, à medida que se aumenta o número de lados desse polígono, mais próximos se está da área real da circunferência. Tal método assemelha-se muito à ideia de integral (o qual será visto no capítulo 2), isto é, quando o número de lados do polígono aumenta tende-se à área real da circunferência. Por essa razão é possível dizer que tais técnicas possibilitaram o surgimento das primeiras ideias de cálculo integral.

## 1.2. NEWTON E LEIBNIZ

Mesmo que as primeiras ideias de integração tenham surgido no tempo de Arquimedes foi somente no século XVII que surgiram as primeiras ideias de cálculo diferencial, por Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), que são tidos como os criadores do cálculo diferencial. Entre eles ocorreram diversos embates referentes à criação destes conceitos, o que ficou conhecido na história como guerra do cálculo, como é bem escrita em “A Guerra do Cálculo” (BARDI, 2008).

Newton fez diversas contribuições para a matemática, uma de suas primeiras descobertas, em 1665, foi como exprimir funções em termos de séries infinitas, o teorema binomial e várias outras obras. Foi quem começou a pensar em taxa de variação, conceito fundamental na construção das derivadas. Um de seus trabalhos, *de analysi*, sobre séries infinitas, teve grande relevância na sua vida pois foi a primeira exposição que definiu conceitos iniciais do cálculo, sua maior descoberta (BOYER, 1974).

Newton foi o primeiro a achar a área abaixo de uma curva por um processo inverso da diferenciação, e por essa razão é considerado o inventor do cálculo. A primeira obra que

Newton publicou que abordou o cálculo foi em 1687 em *philosophiae naturalis principia mathematica* que é considerado o maior tratado científico de todos os tempos.

As contribuições de Leibniz também foram essenciais para o cálculo, embora sua descoberta tenha ocorrido dez anos após Newton, chegou a elas por seus próprios estudos. Seu método era mais eficiente por apresentar uma maior generalidade. Os termos  $dx$ ,  $dy$ , e o símbolo de integração  $\int$ , que deriva da letra ‘S’ de soma, foram pensados por Leibniz e são usados nos dias atuais. A primeira obra sobre cálculo diferencial a ser publicada foi feita por Leibniz em 1684 intitulada *nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur* (um novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais).

Leibniz publicou uma explicação do cálculo integral em que se mostra que as quadraturas são casos especiais do método inverso das tangentes. Aqui Leibniz deu ênfase à relação inversa entre diferenciação e integração no teorema fundamental do cálculo (Boyer, Carl B., 1974, p.296).

É importante notar que tanto Newton quanto Leibniz chegaram ao cálculo por suas pesquisas em séries infinitas, o que lhes deu uma noção sobre o conceito de limite; o estudo de reta tangente que possibilitou as ideias que surgiram sobre derivadas e o estudo da quadratura que deu a percepção que a integração e a derivação são processos inversos, o que deu origem ao teorema fundamental do cálculo.

### 1.3. RIEMANN E CAUCHY

As contribuições de Newton e Leibniz foram fundamentais para a criação do cálculo, todavia foi somente com Riemann (1826-1866) e Cauchy (1789-1857) que a definição de integral foi formalizada com mais rigor.

Augustin-Louis Cauchy, teve uma infância com uma família bem estruturada, estudou na escola *École Polytechnique* e depois de se formar trabalhou como um engenheiro até 1813. Durante esse período já mostrava bastante interesse pela matemática e já tinha interesse em alguns problemas, por exemplo o estudo dos determinantes, o qual fez diversas contribuições para essa área, tendo até publicado um artigo sobre o assunto em 1812 (BOYER, 1974).

Suas contribuições ao cálculo integral foram de grande relevância para a área. Durante todo o século XVIII a integração foi tratada como o processo inverso da derivação que, no entanto, esbarrava em alguns problemas. A definição que Cauchy estabeleceu para a derivada torna evidente que, até aquele momento, não existia derivada de uma função que não é contínua, contudo seus trabalhos mostram que o mesmo não ocorre com o processo de integração. Ainda

que as curvas sejam descontínuas é perfeitamente possível encontrar uma área bem definida através do processo de limites de somas tal como Cauchy definiu: “Se  $S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1})$ , então o limite  $S$  desta soma  $S_n$  quando os tamanhos dos intervalos  $x_i - x_{i-1}$  decrescem indefinidamente, é a integral definida da função  $f(x)$  no intervalo de  $x = x_0$  até  $x = X$ .”(BOYER; Carl B, 2012, p. 337).

Cauchy deduziu a integral como independentemente do processo de derivação e usou o teorema do valor médio para fazer a ligação do processo de integração com a derivação. Este rigor nas definições dos conceitos do cálculo por parte de Cauchy possibilitaram diversas outras generalizações modernas do conceito de integral.

Riemann teve origem muito simples, sendo seu acesso à educação muito modesto. Mesmo assim conseguiu seu doutorado em Gottingen com uma tese sobre teoria das funções de variável complexa. Tinha um excelente domínio da geometria. Boyer (1906, p. 398) diz que Riemann propunha uma visão global da geometria como um estudo de variedades de qualquer número de dimensões em qualquer tipo de espaço.

Foram inúmeras contribuições feitas por Riemann para diversas áreas da matemática além da geometria, como na teoria dos números, onde criou a famosa conjectura de Riemann e na análise, tendo nesta um papel muito importante pela ênfase que deu às equações Cauchy-Riemann e pelas superfícies de Riemann e no refinamento da definição de integral. Sendo este último de grande importância pois é a definição mais usada atualmente.

## Capítulo 2

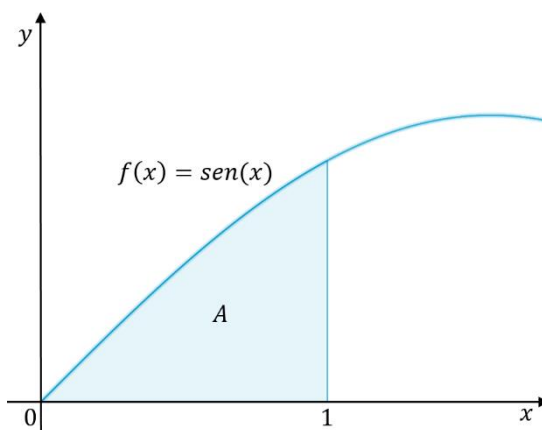
### 1. INTEGRAL DE RIEMANN

#### 1.1. CÁLCULO DE ÁREAS

Ao pensar sobre o cálculo de áreas de figuras conhecidas como triângulo, retângulo, círculo dentre outras, é fácil lembrar de fórmulas que foram desenvolvidas para encontrar essas áreas. Entretanto, quando a área que se deseja calcular é de uma figura desconhecida, uma curva por exemplo, não é possível determinar a área da maneira convencional, isto é, não existe uma fórmula pronta para esse tipo de situação. Logo, outros métodos são necessários para resolver tal problema.

Um dos métodos utilizados pelos matemáticos antigos era o método da quadratura, que consistia em inserir diversos quadrados sobre uma determinada figura, e assim, com base no número quadrados calcular a área aproximada desta figura. Atualmente usa-se um processo mais sofisticado intitulado de integral, que, no entanto, tem ideia semelhante ao método da quadratura. Como exemplo considere a curva na figura 3, dada pela função  $y = \text{sen}x$ .

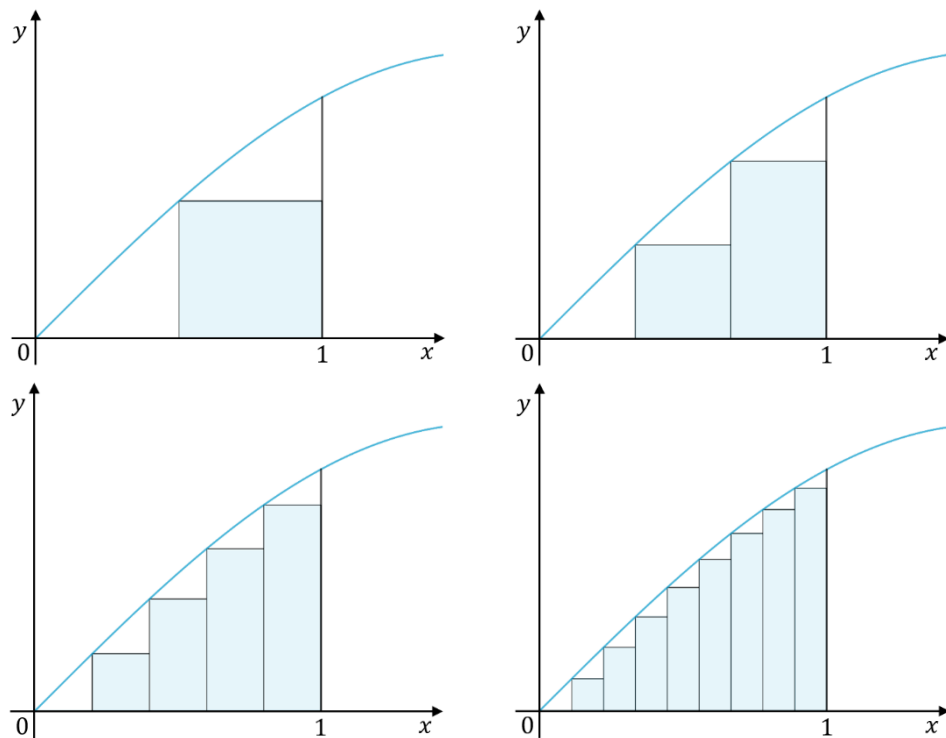
**Figura 3 - Gráfico da função  $\text{sen}(x)$**



Fonte: Autoria própria

Deseja-se encontrar a área  $A$  e para isso é possível inserir vários retângulos na figura, calcular a área desses retângulos e somar todos, assim encontrando uma área aproximada. Neste processo observa-se que conforme o número de retângulos aumenta, mais próximo se está da área real procurada. Como mostram as figuras abaixo.

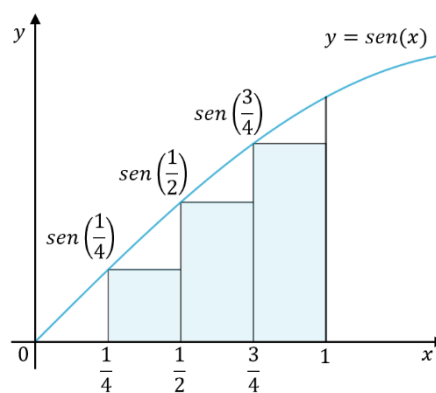
**Figura 4 - Retângulos inseridos abaixo da curva**



Fonte: Autoria própria

Na figura 5 objetiva-se encontrar a área aproximada. Note que a área que é procurada está entre 0 e 1. O comprimento da base de cada retângulo depende do número de vezes que a figura é seccionada. Além disso, a altura de cada retângulo é função de cada ponto do eixo  $x$ , neste caso é função de  $\text{sen}(x)$ .

**Figura 5 - Soma de Riemann inferior**



Fonte: Autoria própria

Tem-se os seguintes subintervalos  $\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ , em radianos, e cada retângulo tem  $\frac{1}{4}$  de largura e altura de  $\text{sen}\left(\frac{1}{4}\right), \text{sen}\left(\frac{1}{2}\right)$  e  $\text{sen}\left(\frac{3}{4}\right)$ . Se  $\underline{S}$  for a soma das áreas dos retângulos definidos a partir dos extremos esquerdos dos intervalos, então a área será aproximadamente:

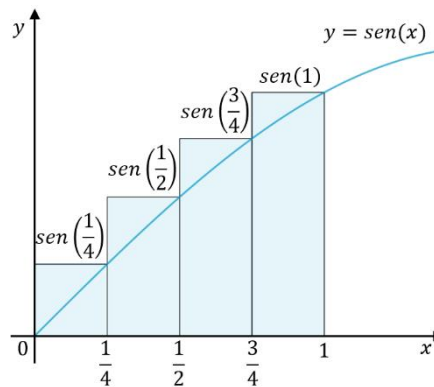
$$\underline{S} = \frac{1}{4} \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \cdot \text{sen}\left(\frac{3}{4}\right) = 0,3521$$

Da figura 3 nota-se que a área  $A$  é maior do que a área  $\underline{S}$ .

$$A > 0,3521$$

Fazendo o mesmo procedimento levando em consideração os retângulos definidos pelas extremidades direitas dos intervalos, tem-se o seguinte:

**Figura 6 - Soma de Riemann superior**



Fonte: Autoria própria

A área  $\bar{S}$  será de:

$$\bar{S} = \frac{1}{4} \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \cdot \text{sen}\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot \text{sen}(1) = 0,5624$$

$$A < 0,5624$$

Portanto, a área procurada estará entre os valores:

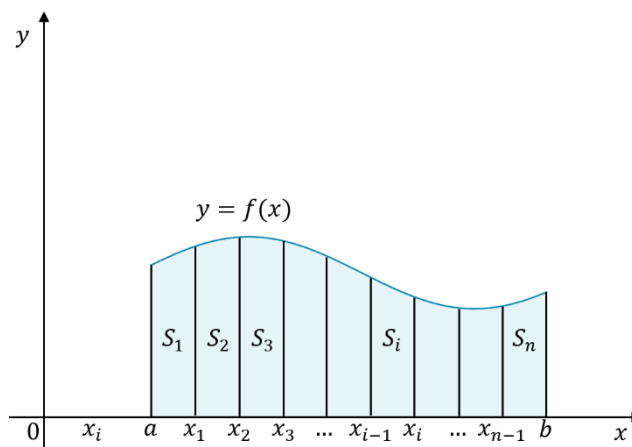
$$0,5624 > A > 0,3521$$

É válido notar que conforme o número de retângulos aumenta, a soma dos retângulos mais se aproxima da área real. Se o processo for feito com 1000 retângulos o valor do intervalo em que se encontrará a área será de:

$$0,4601 > A > 0,4592$$

Quando o número de retângulos tender ao infinito a área encontrada será exatamente a área real procurada. Assim pode-se fazer uma generalização.

**Figura 7 - Gráfico da função  $f(x)$**



Fonte: Autoria própria

A largura do intervalo  $[a, b]$  é  $b - a$ ; logo a base de cada retângulo será:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Dessa forma o intervalo  $[a, b]$  será subdividido em  $n$  subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

Onde  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ . As extremidades direitas dos subintervalos são as seguintes.

$$x_1 = a + \Delta x$$

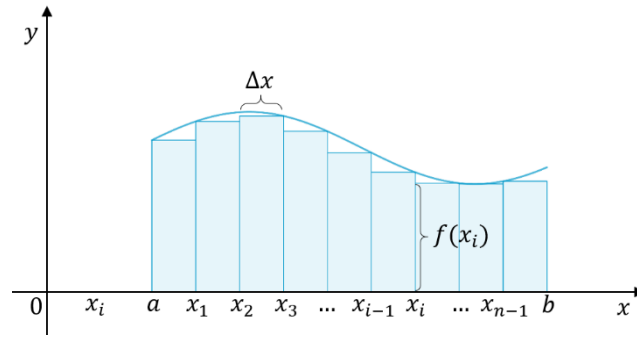
$$x_2 = a + 2\Delta x$$

$$x_3 = a + 3\Delta x$$

⋮

Aproximando a  $i$ -ésima parte  $S_i$  por um retângulo que tenha largura de  $\Delta x$  e a altura de  $f(x_i)$ , este é o valor da função  $f$  no lado direito de cada retângulo. Assim, a área do  $i$ -ésimo retângulo será dada por  $f(x_i)\Delta x$ . Desta forma a área  $S$  será aproximadamente a soma das áreas destes retângulos, que é a seguinte:

**Figura 8 - Inserindo  $n$  retângulos no intervalo  $[a, b]$**



Fonte: Autoria própria

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

Quando o número de retângulos for muito grande, isto é, quando  $n \rightarrow \infty$  tem-se a área real desejada, pode-se então definir a área da região  $S$ :

**Definição 1** A área  $A$  da região  $S$  que está sob o gráfico de uma função contínua é o limite da soma das áreas dos retângulos:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

Assumindo que  $f$  seja contínua obtêm-se o mesmo valor ao usar as extremidades esquerda:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x$$

Tomando a altura do  $i$ -ésimo retângulo como o valor de  $f$  em qualquer número  $x_i^*$  no  $i$ -ésimo subintervalo encontra-se uma expressão mais geral. Assim:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x] \rightarrow A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$$

## 1.2. DEFINIÇÃO DE INTEGRAL DEFINIDA

**Definição 2** (STEWART, 2013): Se  $f$  for uma função contínua definida  $a \leq x \leq b$ , se divide o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos iguais a  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . Sejam  $x_0 (= a), x_1, x_2, \dots, x_n (= b)$  as extremidades desses subintervalos, e sejam  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  pontos amostrais arbitrários nesses subintervalos, de forma que  $x_i^*$  esteja no  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  então a integral definida de  $f$  de  $a$  a  $b$  é:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$$

Se o limite existir, diz-se que  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , e uma forte assertiva sobre isso é o teorema a seguir:

**Teorema 1** (STEWART, 2013): Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , ou  $f$  tiver apenas um número finito de descontinuidades de saltos, então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ ; ou seja, a integral definida  $\int_a^b f(x)dx$  existe.

Se a função  $f$  for integrável em  $[a, b]$ , então o limite existe e independentemente de quais pontos amostrais forem escolhidos o resultado será o mesmo. Portanto no intuito de simplificar a definição escolhe-se as extremidades direitas o que resulta em:

**Teorema 2** (STEWART, 2013): Se  $f$  for integrável em  $[a, b]$ , então;

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

Onde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad x_i = a + i\Delta x$$

**Exemplo 1:** Calcule o valor da integral  $\int_0^2 x^2 dx$  usando a soma de Riemann e tomando como pontos amostrais as extremidades direitas.

*Solução:* Primeiro define-se o tamanho do intervalo  $\Delta x$ ;

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

Agora que foi definida a base de cada retângulo, define-se a altura que cada retângulo terá. Como está sendo calculada a integral pela extremidade direita o primeiro ponto amostral  $x_1$  será dado por;

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x \rightarrow x_1 = \frac{2}{n}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x \rightarrow x_2 = \frac{2}{n} + \frac{2}{n} \rightarrow x_2 = \frac{4}{n} \rightarrow x_2 = 2 \cdot \frac{2}{n}$$

$$x_3 = x_2 + \Delta x \rightarrow x_3 = \frac{4}{n} + \frac{2}{n} \rightarrow x_3 = \frac{6}{n} \rightarrow x_3 = 2 \cdot \frac{3}{n}$$

$$x_4 = x_3 + \Delta x \rightarrow x_4 = \frac{6}{n} + \frac{2}{n} \rightarrow x_4 = \frac{8}{n} \rightarrow x_4 = 2 \cdot \frac{4}{n}$$

⋮

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x \rightarrow x_i = 2 \cdot \frac{i}{n}$$

Assim:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x \rightarrow \int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n}$$

$$\int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n} \rightarrow \int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{4}{n^2} i^2 \rightarrow \int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

Sabe-se que de teoria dos números

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Fato que pode ser verificado em Referências (FILHO, 1985).

Portanto, substituindo:

$$\int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \rightarrow \int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{6n^3} (n^2 + n)(2n+1)$$

$$\int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{6n^3} (2n^3 + 3n^2 + n) \rightarrow \int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n^3}{6n^3} + \frac{24n^2}{6n^3} + \frac{8n}{6n^3}$$

$$\int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{6} + \frac{24}{6n} + \frac{8}{6n^2} \rightarrow \int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{2}{3n^2}$$

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$$

### 1.3. PROPRIEDADES DE INTEGRAL DEFINIDA

Em algumas situações é importante conhecer as propriedades da integral definida, e aqui estão algumas importantes:

**Propriedade 1.3.1** (STEWART, 2013): Pela definição 2, foi visto que uma integral é definida no intervalo  $[a, b]$ , desde que  $a \leq x \leq b$ . No entanto também pode ocorrer de  $a > b$ , quando isso ocorre então tem-se:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Se  $a = b$ , tem-se;

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

**Propriedade 1.3.2** (STEWART, 2013): Se  $f(x) = k$ , isto é, se for uma função constante, então:

$$\int_a^b k dx = k(b - a)$$

**Propriedade 1.3.3** (STEWART, 2013): A integral da soma é a soma das integrais:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

*Demonstração*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i) + g(x_i)] \Delta x \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x + \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x \right]$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x \rightarrow \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

**Propriedade 1.3.4** (STEWART, 2013): A integral de uma constante vezes uma função é a constante vezes a integral da função

$$\int_a^a kf(x)dx = k \int_a^a f(x)dx$$

*Demonstração*

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n kf(x_i)\Delta x \rightarrow \int_a^b kf(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} k \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x \right] \rightarrow \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^a f(x)dx$$

**Propriedade 1.3.5** (STEWART, 2013):

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

**Propriedade 1.3.6** (STEWART, 2013):

Se  $f(x) \geq 0$  para  $a \leq x \leq b$ , então

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

**Propriedade 1.3.7** (STEWART, 2013):

Se  $f(x) \geq g(x)$  para  $a \leq x \leq b$ , então

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

**Propriedade 1.3.8** (STEWART, 2013):

Se  $m \leq f(x) \leq M$  para  $a \leq x \leq b$ , então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

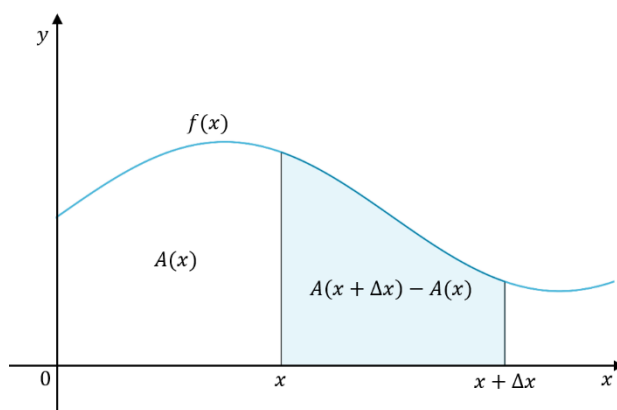
## 2. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

O teorema fundamental do cálculo surge como uma ponte que faz uma ligação entre o cálculo diferencial e o cálculo integral. Entre essas duas áreas não parecia existir ligação, no entanto, Isaac Barrow (1630-1677) mentor de Newton em Cambridge descobriu na verdade que há uma forte ligação entre esses dois problemas. Barrow chegou à conclusão de que a derivação e a integração são processos inversos. Mas foram Newton e Leibniz que começaram a usar essa relação para desenvolver o cálculo de maneira mais simplificada. Tal relação os possibilitava calcular integrais sem ter que usar o cálculo como limite de somas (BOYER, 1974). Pode-se chegar a uma noção dessa relação através de uma demonstração geométrica.

### 2.1. NOÇÃO GEOMÉTRICA

Primeiro suponha uma função  $f(x)$  qualquer. Seja um ponto  $x$  e um ponto  $x + \Delta x$ ,  $A(x)$  a área até o ponto  $x$  e  $A(x + \Delta x)$  a área até o ponto  $x + \Delta x$ . Assim a área delimitada pelo intervalo  $x$  e  $x + \Delta x$  será a área  $A(x + \Delta x) - A(x)$ , como mostra a figura 9.

**Figura 9 - Área delimitada  $A(x + \Delta x) - A(x)$**

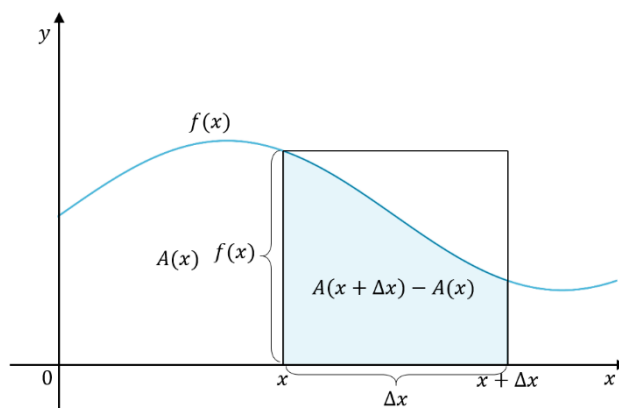


Fonte: Autoria própria

Fazendo uma aproximação para a área delimitada na figura tem-se  $f(x) \cdot \Delta x$  como na figura 10. Assim:

$$f(x) \cdot \Delta x \approx A(x + \Delta x) - A(x) \quad (2.1-1)$$

**Figura 10 - Aproximação  $f(x) \cdot \Delta x$**



Fonte: Autoria própria

Dividindo (2.1-1) em ambos os lados da equação por  $\Delta x$ :

$$f(x) \approx \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x}$$

Se  $\Delta x$  for muito pequeno, isto é, quando  $\Delta x \rightarrow 0$  as duas razões serão exatamente iguais:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x}$$

Sabe-se que  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x}$  é a definição de derivada, para  $A(x)$ , assim, resolvendo:

$$f(x) = \frac{dA(x)}{dx}$$

Como  $A(x)$  é a função que descreve a área sob a curva  $f(x)$  até o ponto  $x$ , que, como foi definido no início do capítulo 2 é a integral tem-se:

$$A(x) = \int f(x) dx$$

Assim, substituindo:

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int f(x) dx$$

O que mostra que quando se deriva a integral da função  $f(x)$  obtêm-se  $f(x)$ . Assim conclui-se que a integral é a função inversa da derivada. Mas é válido ressaltar que  $d/dx$  é na verdade um limite e que para permutar o limite com a integral é necessário alguns cuidados especiais que envolvem teorias desenvolvidas posteriormente, tais como o Teorema da Convergência, Dominada de Lebesgue, Teorema da Convergência Monótona, Lema de Fatou entre outros.

## 2.2. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

**Parte 1** Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , então a função  $g$  definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$  com  $g'(x) = f(x)$

**Parte 2** Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

onde  $F$  é qualquer primitiva de  $f$ , isto é, uma função tal que  $F' = f$

Pela segunda parte do teorema fundamental do cálculo, conhecendo a primitiva  $F$  de  $f$ , é possível calcular  $\int_a^b f(x)dx$  subtraindo os valores de  $F$  em cada extremidade do intervalo  $[a, b]$  (STEWART, 2013).

**Exemplo 2** Calcule a integral  $\int_1^2 \cos(x)dx$ .

*Solução:* Tem-se que a primitiva de  $f(x) = \cos(x)$  é a função  $F(x) = \text{sen}(x)$ , portanto pela segunda parte teorema fundamental do cálculo:

$$\int_1^2 \cos(x)dx = F(2) - F(1) = \text{sen}(2) - \text{sen}(1)$$

$$\int_1^2 \cos(x)dx \approx 0,0678$$

As duas partes do teorema fundamental do cálculo juntas mostram que o processo de integração é a operação inversa da derivação. Com ele pode-se calcular mais facilmente as integrais sem ter que recorrer ao método de limites como mostrado no exemplo 1.

### 2.3. INTEGRAIS INDEFINIDAS

Diferentemente da integral definida, cujo resultado é um número, o resultado de uma integral indefinida é uma função ou um conjunto de várias funções, além disso é importante ressaltar que os limites de integração não estão definidos. A segunda parte do teorema fundamental do cálculo faz a ligação entre integral indefinida e definida: se  $f$  for uma função contínua então tem-se;

$$\int_a^b f(x)dx = \left[ \int f(x)dx \right]_a^b.$$

Se  $f(x)$  não estiver definida em um intervalo  $[a, b]$  tem-se que o resultado da integral será:

$$\int f(x) dx = f'(x) + C.$$

Sendo  $f'(x)$  a derivada de  $f(x)$  e  $C$  a constante de integração.

A constante de integração é importante para que seja possível retornar a função original. Isso ocorre pelo fato de que ao se derivar, por exemplo, a função  $f(x) = x^2$  tem-se  $\frac{d}{dx} = 2x$ , e como já foi visto que a derivada é o processo inverso da integração, integrando a função, retorna-se para  $f(x) = x^2$ . Mas se o mesmo processo for feito para  $g(x) = x^2 + 5$  nota-se que a derivada também é  $\frac{d}{dx} = 2x$ , isso acontece pois, pelo fato da derivada de uma constante ser igual a 0, a constante “perde-se” no processo de derivação. Isso é válido para qualquer valor da constante, por isso que no processo de integral indefinida surge a necessidade de se expressar esta constante.

A primitiva de uma função  $f(x)$  é uma função  $F(x)$  que derivando-se obtêm-se  $f(x)$  isto é (GUIDORIZZI, 2001):

$$F'(x) = f(x)$$

**Exemplo 2:** A função  $F(x) = 3x^2$  é a primitiva da função  $f(x) = x^3$ , pois quando se deriva  $f(x) = x^3$  obtêm-se  $f'(x) = g(x) = 3x^2$ .

Para a resolução de integrais pelo teorema fundamental do cálculo é necessário o conhecimento das primitivas das funções. Na tabela abaixo estão algumas primitivas importantes.

**Tabela 1 - integrais indefinidas**

| INTEGRAIS INDEFINIDAS                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$ $\int [f(x) + g(x)] = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a } + C$ $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$ $\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$ $\int \sec(x)\tan(x)dx = \sec(x) + C$ $\int \sinh(x)dx = \cosh(x) + C$ | $\int k(x)dx = kx + C$ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$ $\int e^x dx = e^x + C$ $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$ $\int \tan(x) dx = -\ln( \cos(x) ) + C$ $\int \operatorname{cosec}(x) \cotg(x) dx = -\operatorname{cosec}(x) + C$ $\int \operatorname{cosec}(x) \cotg(x) dx = -\operatorname{cosec}(x) + C$ $\int \cosh(x)dx = \sinh(x) + C$ |

**Exemplo 3:** Encontre a integral indefinida.  $\int (8x^3 + 3 \cos(x)) dx$

*Solução:*

$$\int (8x^3 + 3 \cos(x)) dx = 8 \int x^3 dx + 3 \int \cos(x) dx$$

$$\int 8x^3 + 3 \cos(x) dx = 8 \left( \frac{x^4}{4} \right) + 3(\sin(x)) + C \rightarrow \frac{x^4}{2} + 3(\sin(x)) + C$$

**Exemplo 4:** Calcule a integral definida  $\int_1^9 \frac{3x^3 + x^2 - 1}{x^2} dx$

*Solução:*

$$\int_1^9 \frac{3x^3 + x^2 - 1}{x^2} dx \rightarrow \int_1^9 \left( \frac{3x^3}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx \rightarrow \int_1^9 (3x + x - x^{-2}) dx$$

$$= \left[ \frac{3x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^9 = \left[ \frac{3x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^9 = \left[ 2x^2 + \frac{1}{x} \right]_1^9 = \left( 2(9)^2 + \frac{1}{9} \right) - \left( 2(1)^2 + \frac{1}{1} \right)$$

$$= \left( 162 + \frac{1}{9} \right) - (2 + 1) = \frac{1432}{9} \approx 159,11$$

### 3. TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

#### 3.1. REGRA DA SUBSTITUIÇÃO

Para o cálculo de integrais é necessário que se tenha conhecimento das primitivas das funções que deseja-se integrar. Contudo, existem integrais que não possuem uma primitiva imediata e para resolvê-la é necessário uma nova estratégia, e para isso existe o processo de substituição. Esse método é possível desde que uma integral possa ser escrita da forma  $\int f(g(x))g'(x)dx$ , desde que  $g(x)$  seja integrável e  $I_{g(x)} \subset D_{f(x)}$ . Se  $F' = f$ , então:

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

*Demonstração:*

Pela regra da cadeia pode-se mostrar que isso é válido, pois:

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

Fazendo a substituição  $u = g(x)$ :

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)du$$

E, como  $F' = f$ , logo:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

**Definição 3.1.1** (STEWART, 2013): Se  $u = g(x)$  for uma função derivável cuja a imagem é um intervalo  $I$  e  $f$  for contínua em  $I$  então; (STEWART, 2013)

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

**Exemplo 5:** Encontre a integral  $\int x^4 \text{sen}(4x^5 + 3)dx$

*Solução:* Fazendo  $u = 4x^5 + 3$ , observa-se que  $du = 20x^4dx$ , e portanto,  $x^4dx = \frac{du}{20}$ .

Assim fazendo substituição:

$$\int x^4 \text{sen}(4x^5 + 3)dx = \int \text{sen}(4x^5 + 3)x^4dx = \int \text{sen}(u)\frac{du}{20} = \frac{1}{20} \int \text{sen}(u)du$$

$$\frac{1}{20}(-\cos(u)) + C = -\frac{1}{20}\cos(4x^5 + 3) + C$$

**Exemplo 6:** Encontre a integral  $\int \frac{\sin(ax)}{(1 + \cos(ax))^2} dx$

*Solução:* Fazendo  $u = 1 + \cos(ax)$ , observa-se que  $du = -a \sin(ax) dx$ , e portanto,  $\sin(ax) dx = -\frac{du}{a}$ . Assim substituindo:

$$\int \frac{\sin(ax)}{(1 + \cos(ax))^2} dx = \int \frac{1}{u^2} \left(-\frac{1}{a}\right) du = -\frac{1}{a} \int u^{-2} du = -\frac{1}{a} \left(-\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{a u}$$

Voltando para a variável original:

$$\int \frac{\sin(ax)}{(1 + \cos(ax))^2} dx = \frac{1}{a (1 + \cos(ax))} + C$$

**Exemplo 7:** Encontre a integral  $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} dx$

*Solução:* Fazendo  $u = 1 + \sqrt{x} \rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \rightarrow 2du = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  assim:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} 2du = 2 \int \frac{1}{\sqrt{u}} du =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} dx = 2 \int u^{-\frac{1}{2}} du = 4\sqrt{u} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} dx = 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C$$

**Exemplo 8:** Encontre a integral  $\int \frac{\cos(x)}{a^2 + \sin^2(x)} dx$

$$\int \frac{\cos(x)}{a^2 + \sin^2(x)} dx = \int \frac{\cos(x)}{a^2 \left(1 + \left(\frac{\sin(x)}{a}\right)^2\right)} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{\cos(x)}{\left(1 + \left(\frac{\sin(x)}{a}\right)^2\right)} dx =$$

*Solução:* Fazendo  $u = \frac{\sin(x)}{a} \rightarrow du = \frac{\cos(x)}{a} \rightarrow a du = \cos(x) dx$  assim:

$$\frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + u^2} a du = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{1}{a} \arctan(u) + C$$

$$\int \frac{\cos(x)}{a^2 + \sin^2(x)} dx = \frac{\arctan\left(\frac{\sin(x)}{a}\right)}{a} + C$$

### 3.2. MUDANÇA DOS LIMITES DE INTEGRAÇÃO

Há várias maneiras de se calcular uma integral definida pelo método da substituição. Um desses foi mostrado anteriormente que consiste em calcular a integral indefinida e depois utilizar o teorema fundamental do cálculo para encontrar o valor da derivada. E o segundo método consiste em alterar os limites de integração através da mudança de variável. (STEWART, 2013)

**Definição 3.2.1** (STEWART, 2013): Se  $g'$  for contínua em  $[a, b]$  e  $f$  for contínua na imagem de  $u = g(x)$ , então é válida

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

*Demonstração:*

Seja  $F$  a primitiva de  $f$ . Então  $F(g(x))$  é uma primitiva de  $f(g(x))g'(x)$ , portanto pela segunda parte do teorema fundamental do cálculo:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Aplicando novamente a segunda parte do teorema fundamental do cálculo, tem-se:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = [F(g(x))]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

**Exemplo 9:** Usando a definição 2.5.1 calcule  $\int_2^5 \frac{2}{(3-2x)^2} dx$

*Solução:* Fazendo  $u = 3 - 2x$ , tem-se que  $du = -2dx$ , logo  $dx = -\frac{du}{2}$ , quando

$x = 2 \rightarrow u = -1$ , e quando  $x = 5 \rightarrow u = -7$ . Portanto, substituindo:

$$\int_2^5 \frac{2}{(3-2x)^2} dx = \int_{-1}^{-7} \frac{2}{(u)^2} \left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{2}{2} \int_{-1}^{-7} \frac{1}{u^2} du = -1 \cdot \left[-\frac{1}{u}\right]_{-1}^{-7}$$

$$\int_2^5 \frac{2}{(3-2x)^2} dx = -\left(-\frac{1}{-7} - \left(-\frac{1}{-1}\right)\right) = -\left(\frac{1}{7} - 1\right) = -\left(-\frac{6}{7}\right)$$

$$\int_2^5 \frac{2}{(3-2x)^2} dx = \frac{6}{7}$$

Em várias situações, apenas os métodos de substituição vistos anteriormente não são suficientes para calcular determinadas integrais, sendo necessárias outras técnicas para ser possível a resolução de alguns problemas.

### 3.3. INTEGRAÇÃO POR PARTES

Supondo que as funções  $f$  e  $g$  são definidas e deriváveis num mesmo intervalo  $I$ . Então;

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Ou

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)f(x)$$

Se  $f'(x)g(x)$  admite primitiva no intervalo  $I$ , e tendo em vista que  $f(x)g(x)$  é uma primitiva de  $[f(x)g(x)]'$ , então  $f(x)g'(x)$  também terá primitiva no intervalo  $I$ , assim;

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Pode-se escrever a fórmula acima de maneira mais simples fazendo  $u = f(x)$  e  $v = g(x)$ , dessa maneira tem-se que  $du = f'(x)$  e  $dv = g'(x)$  logo, substituindo:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

*Demonstração*

Pode-se demonstrar essa fórmula de integral por partes através da regra da cadeia.

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Integrando em ambos os lados:

$$\int [f(x) \cdot g(x)]' dx = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx$$

$$[f(x) \cdot g(x)] = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

**Exemplo 10:** Calcule a integral de  $\int x \operatorname{sen}(x) dx$

*Solução:* Fazendo  $u = x$  e  $dv = \operatorname{sen}(x)$  tem-se que  $du = 1dx$  e  $v = -\cos(x)dx$  assim, substituindo:

$$\begin{aligned}\int u dv &= uv - \int v du = \int x \operatorname{sen}(x) dx = x \cdot -\cos(x) - \int -\cos(x) dx \\ &= -x \cos(x) - (-\operatorname{sen}(x)) = -x \cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C\end{aligned}$$

**Exemplo 11:** Calcule a integral de  $\int (\operatorname{arc sen}(x))^2 dx$

*Solução:* Fazendo  $u = (\operatorname{arc sen}(x))^2$  e  $dv = dx$ , tem-se que  $du = 2 \operatorname{arc sen}(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$  e  $v = x$  assim, substituindo:

$$\begin{aligned}\int (\operatorname{arc sen}(x))^2 dx &= (\operatorname{arc sen}(x))^2 \cdot x - \int x \cdot 2 \operatorname{arc sen}(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x(\operatorname{arc sen}(x))^2 - 2 \int \operatorname{arc sen}(x) \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx\end{aligned}$$

Novamente uma integral que não possui primitiva imediata, então aplica-se outra vez o processo para a integral  $\int \operatorname{arc sen}(x) \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Fazendo  $u = \operatorname{arc sen}(x)$  e  $dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ , tem-se que  $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$  e  $v = -\sqrt{1-x^2}$  substituindo, terem-se:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arc sen}(x) \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \operatorname{arc sen}(x) (-\sqrt{1-x^2}) - \int -\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -\operatorname{arc sen}(x) \sqrt{1-x^2} - \int -1 dx = -\operatorname{arc sen}(x) \sqrt{1-x^2} + x\end{aligned}$$

Assim, voltando para a primeira parte;

$$\begin{aligned}\int (\operatorname{arcsen}(x))^2 dx &= x(\operatorname{arcsen}(x))^2 - 2(-\operatorname{arcsen}(x) \sqrt{1-x^2} + x) \\ &= x(\operatorname{arcsen}(x))^2 + 2 \operatorname{arcsen}(x) \sqrt{1-x^2} - 2x + C\end{aligned}$$

**Exemplo 12:** Encontre a integral  $\int x \arcsen(x) dx$

*Solução:* Fazendo  $u = \arcsen(x) \rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$  e  $dv = x dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$I = \int x \arcsen(x) dx = \arcsen(x) \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$I = \int x \arcsen(x) dx = \arcsen(x) \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$I_1 = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

É necessário aplicar novamente integração por partes para  $I_1$ :

Fazendo  $u_1 = x \rightarrow du_1 = dx$  e  $dv_1 = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \rightarrow v_1 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Novamente recai em uma integral que não é óbvia  $v_1 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Para calcular a integral aplica-se a regra da substituição para  $v_1$ :

$$w = 1 - x^2 \rightarrow dw = -2x dx \rightarrow x dx = -\frac{dw}{2}$$

$$v_1 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int -\frac{dw}{2\sqrt{w}} = -\frac{1}{2} \int w^{-\frac{1}{2}} dw = -\frac{1}{2} \left( 2w^{\frac{1}{2}} \right) + C = -\sqrt{w} + C$$

$$v_1 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2}$$

Voltando para  $I_1$ , e aplicando integral por partes:

$$I_1 = \int x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = u_1 v_1 - \int v_1 du_1 = x \left( -\sqrt{1-x^2} \right) - \int -\sqrt{1-x^2} dx$$

$$I_1 = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} dx$$

Fazendo:  $I_2 = \int \sqrt{1-x^2} dx$

$$I_2 = \int \sqrt{1-x^2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Substituindo  $I_2$  em  $I_1$

$$I_1 = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -x\sqrt{1-x^2} + \left( \arcsin(x) - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)$$

$$I_1 = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)$$

$$I_1 = 2 \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)$$

$$I_1 = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x)$$

Substituindo  $I_1$  em  $I$

$$I = \int x \arcsin(x) dx = \arcsin(x) \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \left( -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x) \right)$$

$$\int x \arcsin(x) dx = \arcsin(x) \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\arcsin(x)$$

$$\int x \arcsin(x) dx = \arcsin(x) \left( \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$$

$$\int x \arcsin(x) dx = \frac{1}{4}\arcsin(x)(2x^2 - 1) + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C$$

### 3.4. INTEGRAIS ENVOLVENDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Por vezes no cálculo de integrais existem situações onde não é recomendável fazer uma simples substituição, é o caso por exemplo, de algumas integrais contendo funções trigonométricas. Nestas situações é possível utilizar algumas identidades trigonométricas para que apareça uma função equivalente a qual seja viável utilizar o método de substituição (STEWART, 2013).

**Exemplo 11** Encontre a integral indefinida de  $\int \text{sen}^3(x)dx$

Observe que não é fácil simplesmente aplicar o método de substituição;

$$u = \text{sen}(x) \rightarrow du = \cos(x)dx$$

Já que se tem a integral;

$$\int \frac{u^3 du}{\cos(\text{arc sen } u)}$$

Que não é de simples solução.

Contudo, separando a função em dois fatores;

$$\int \text{sen}^3(x)dx = \int \text{sen}^2(x) \cdot \text{sen}(x)dx$$

e aplicando a seguinte identidade trigonométrica;

$$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \rightarrow \text{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

passa-se a ter:

$$\int \text{sen}^2(x) \cdot \text{sen}(x)dx = \int (1 - \cos^2(x)) \cdot \text{sen}(x)dx.$$

Agora aplica-se o método da substituição;

$$u = \cos(x) \rightarrow du = -\text{sen}(x)dx$$

Substituindo;

$$\begin{aligned} \int (1 - \cos^2(x)) \cdot \text{sen}(x)dx &= \int (1 - u^2) \cdot -du = - \int (1 - u^2)du = - \left( u - \frac{u^3}{3} \right) + C \\ &= -u + \frac{u^3}{3} = -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + C \end{aligned}$$

**Exemplo 13:** Encontre a integral indefinida de  $\int \operatorname{tg}^5(x) \sec^3(x) dx$

$$\int \operatorname{tg}^5(x) \sec^2(x) dx = \int \operatorname{tg}^4(x) \sec^2(x) \operatorname{tg}(x) \sec(x) dx$$

$$u = \sec(x) \rightarrow du = \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx$$

Devido a seguinte identidade trigonométrica

$$\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$$

pode-se reescrever;

$$\int (\operatorname{tg}^2(x))^2 \sec^2(x) \operatorname{tg}(x) \sec(x) dx = \int (\sec^2(x) - 1)^2 \sec^2(x) \operatorname{tg}(x) \sec(x) dx$$

Substituindo;

$$\int (u^2 - 1)^2 u^2 du = \int u^6 - 2u^4 + u^2 du = \frac{u^7}{7} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^3}{3}$$

$$\int \operatorname{tg}^5(x) \sec^2(x) dx = \frac{\sec(x)^7}{7} - \frac{2 \sec(x)^5}{5} + \frac{\sec(x)^3}{3} + C$$

**Exemplo 14:** Encontre a integral indefinida de  $\int \frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)} dx$ ,

sendo  $\cos(x) \neq -\operatorname{sen}(x)$  para todo  $x$  real. Usando a seguinte identidade trigonométrica;

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

tem-se:

$$\int \frac{\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)} dx = \int \frac{(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)) \cdot (\cos(x) + \operatorname{sen}(x))}{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)} dx$$

$$\int (\cos(x) - \operatorname{sen}(x)) dx = \operatorname{sen}(x) + \cos(x) + C$$

**Exemplo 15:** Encontre a integral indefinida de  $\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sec^3(x)} dx$

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sec^3(x)} dx = \int \cos^3(x) \operatorname{sen}(x) dx \rightarrow u = \cos(x) \rightarrow du = -\operatorname{sen}(x) dx \rightarrow dx = \frac{du}{-\operatorname{sen}(x)}$$

$$\int \cos^3(x) \operatorname{sen}(x) dx = \int u^3 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \frac{du}{-\operatorname{sen}(x)} = -\int u^3 du = \frac{u^4}{4} = \frac{\cos^4(x)}{4} + C$$

**Exemplo 16:** Encontre a integral indefinida de  $\int tg^4(x) dx$

Fazendo  $tg^4(x) = tg^2(x)tg^2(x)$  e usando a seguinte propriedade trigonométrica:  
 $tg^2(x) = \sec^2(x) - 1$  tem-se:

$$\begin{aligned}\int tg^4(x) dx &= \int (\sec^2(x) - 1) tg^2(x) dx = \int \sec^2(x) tg^2(x) - tg^2(x) dx \\&= \int \sec^2(x) tg^2(x) - (\sec^2(x) - 1) dx = \int \sec^2(x) tg^2(x) - \sec^2(x) + 1 dx \\&= \int \sec^2(x) tg^2(x) dx - \int \sec^2(x) dx + \int dx\end{aligned}$$

Agora aplicando o método da substituição:

$$\begin{aligned}u &= tg(x) \rightarrow du = \sec^2(x) dx \\ \int u^2 du - \int \sec^2(x) dx + \int dx &= \frac{u^3}{3} - tg(x) + x \\ \int tg^4(x) dx &= \frac{tg^3(x)}{3} - tg(x) + x + C\end{aligned}$$

**Exemplo 17:** Encontre a integral indefinida de  $\int \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{tg(x)-1}} dx$

Fazendo  $1/\cos^2(x) = \sec^2(x)$  tem-se:

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{tg(x)-1}} dx = \int \sec^2(x) \frac{1}{\sqrt{tg(x)-1}} dx$$

Agora aplicando o método da substituição:

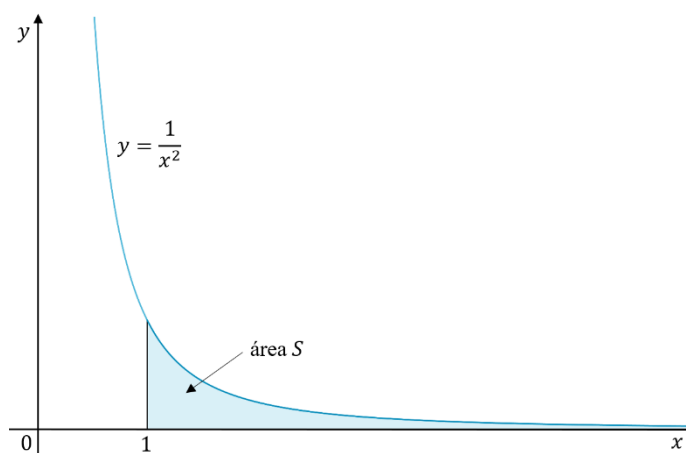
$$\begin{aligned}u &= tg(x) - 1 \rightarrow du = \sec^2(x) dx \\ \int \frac{1}{\sqrt{u}} du &= \int u^{-\frac{1}{2}} du = 2\sqrt{u} \\ \int \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{tg(x)-1}} dx &= 2\sqrt{tg(x)-1} + C\end{aligned}$$

### 3.5. INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Ao ser definido o conceito de integral definida foi visto que a função deveria ser contínua ou apresentar um número finito de descontinuidades. Ocorre que também é possível definir o conceito de integral para os casos onde o intervalo dado é infinito e também para o caso onde a função apresenta uma descontinuidade infinita no dado intervalo (STEWART, 2013).

Considere a área abaixo da curva dada pela seguinte função  $y = 1/x^2$  no intervalo  $(1, +\infty)$  como mostra a figura a seguir:

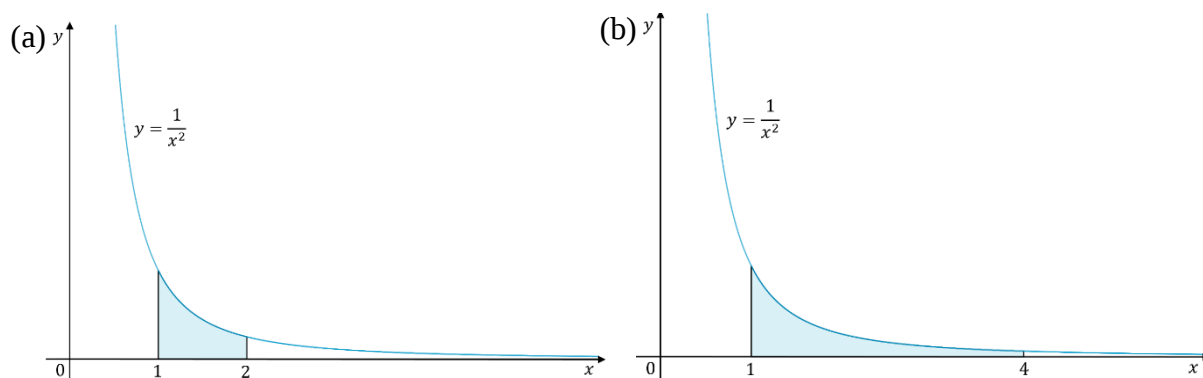
**Figura 11 - Gráfico da função  $y = 1/x^2$**



Fonte: Autoria própria

É intuitivo pensar que, devido ao comportamento da função, a área  $S$  delimitada irá crescer indefinidamente e a área desta região será infinita. Todavia, observe o que acontece com a área da função quando é definido o intervalo  $[1, t]$ .

**Figura 12 - Intervalos definidos na função**



Fonte: Autoria própria

Usando a integral definida para encontrar a área da figura 12a tem-se:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} = 0,5$$

Na figura 12b:

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^4 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} = 0,75$$

Se for feito pra  $t = 100$ :

$$\int_1^{100} \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^{100} = -\frac{1}{100} + 1 = \frac{99}{100} = 0,99$$

Então conforme aumenta-se  $t$  do intervalo observa-se que independentemente do quão grande seja  $t$ , a área  $A(t)$  será sempre menor que 1, e cada vez mais próximo dele, isto é, quando  $t \rightarrow \infty$  a área aproxima-se de 1, assim:

$$\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^t = -\frac{1}{t} + 1 = 1 - \frac{1}{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{t} \right) = 1$$

Se o limite existir diz-se então que  $\int_a^\infty f(x) dx$  e  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  são convergentes, caso contrário, isto é, se o limite não existir, são chamadas de divergentes.

**Definição 3** (STEWART, 2013): Integral imprópria do tipo 1

(a) Se  $\int_a^t f(x) dx$  existe para cada número  $t \geq a$ , logo:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

(b) Se  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  existe para cada número  $t \leq b$ , logo:

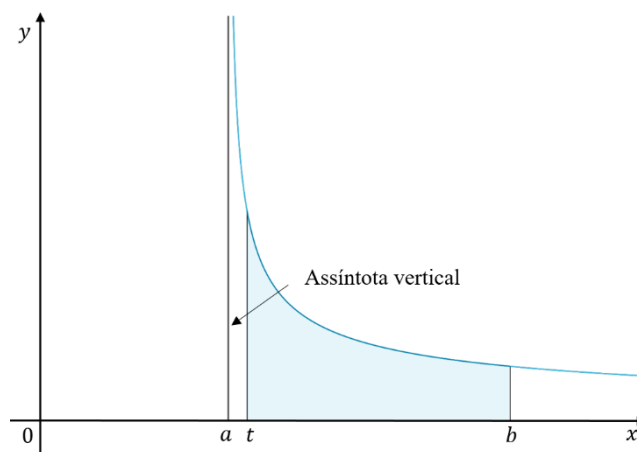
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

(c) Se  $\int_b^{+\infty} f(x) dx$  e  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  são convergentes então define-se:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx + \int_b^\infty f(x) dx$$

É válido notar que para as integrais impróprias do tipo 1, a área delimitada se estende indefinidamente no sentido horizontal. Ocorre que nas integrais impróprias do tipo 2 a região estende-se em uma direção vertical desde que possua uma assíntota vertical em  $a$  ou em  $b$ , como mostra a figura 13, onde a função possui uma assíntota vertical em  $a$ .

**Figura 13 - Função delimitada por uma assíntota vertical**



Fonte: Autoria própria

$t$  aproxima-se de  $a$  pelo lado direito, isto é,  $t \rightarrow a^+$  assim diz-se:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

**Definição 4** (STEWART, 2013): Integral imprópria do tipo 2

(a) Se  $f$  é contínua em  $[a, b)$  e descontínua em  $b$  logo: (figura14a)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

(b) Se  $f$  é contínua em  $(a, b]$  e descontínua em  $a$  logo: (figura14b)

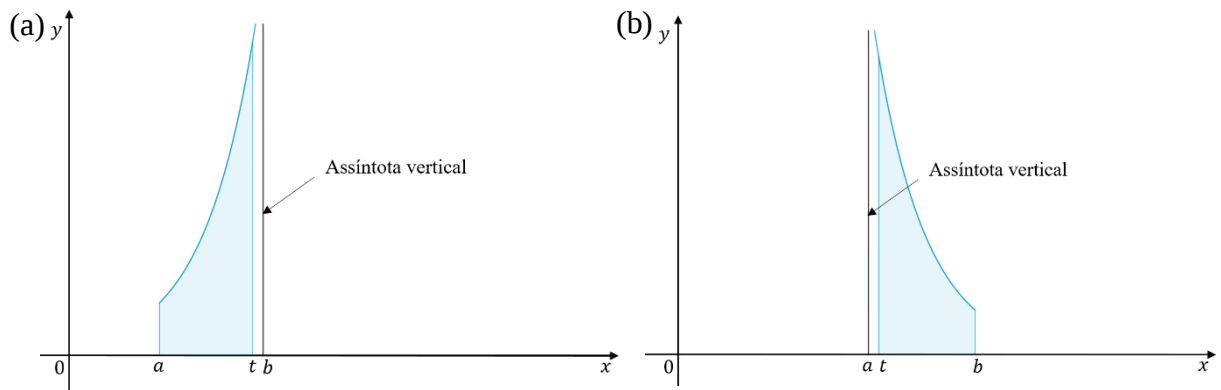
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

(c) Se  $f$  tiver uma descontinuidade em  $c$  onde  $a < c < b$  e as integrais impróprias

$\int_a^c f(x) dx$  e  $\int_c^b f(x) dx$  convergem então define-se: (figura15)

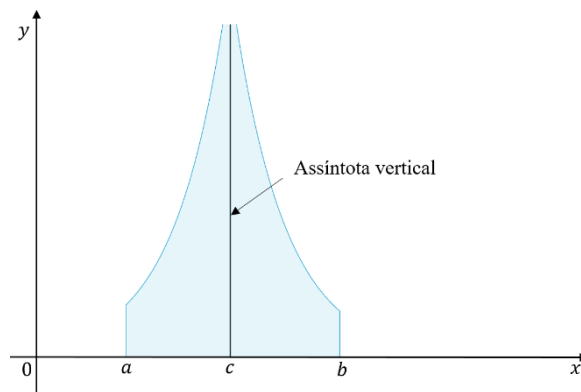
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**Figura 14 – Aproximação pelo lado esquerdo e lado direito**



Fonte: Autoria própria

**Figura 15 – Aproximação por ambos os lados**

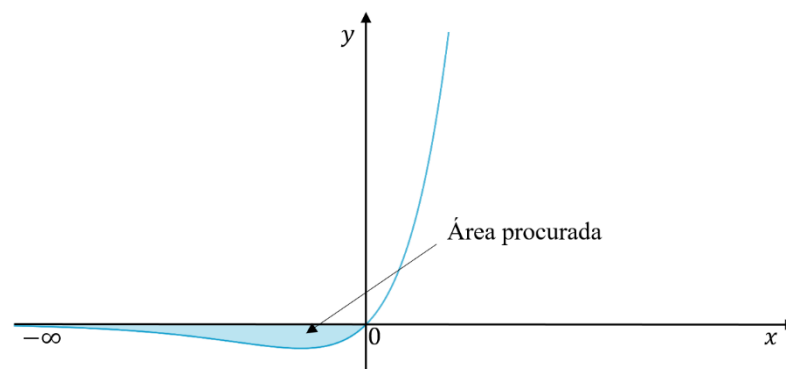


Fonte: Autoria própria

**Exemplo 18:** Encontre a integral definida  $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$

Ao fazer o gráfico da função nota-se que se trata de uma integral imprópria.

**Figura 16 – Gráfico da função  $x e^x$**



Fonte: Autoria própria

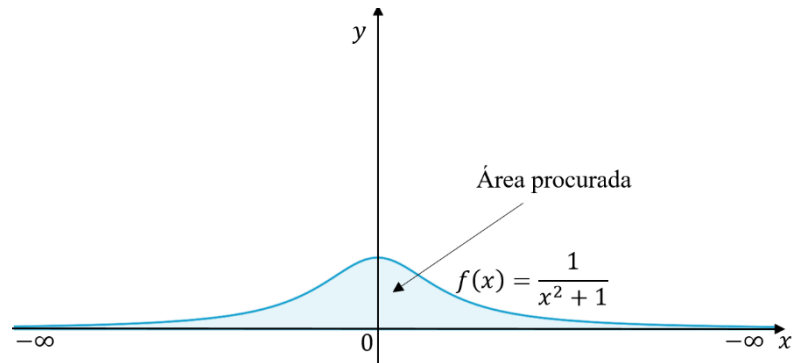
Usando a definição (b) de integral imprópria do tipo 1 tem-se:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 x e^x dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 x e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} ([x e^x - e^x]_t^0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} ((0 \cdot e^0 - e^0) - (t e^t - e^t)) \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (-1 - t e^t + e^t) = -1 - 0 + 0 = -1\end{aligned}$$

Isso significa que a área, em módulo, da região converge para 1.

**Exemplo 19:** Encontre a área delimitada pela função  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$  no intervalo  $[-\infty, \infty]$

**Figura 17 – Gráfico da função  $\frac{1}{x^2+1}$**



Fonte: Autoria própria

Usando a definição 3 - (c) deve-se verificar se a função converge por ambos os lados:

Usando então  $b = 0$  para o lado esquerdo tem-se:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} ([\arctan(x)]_t^0) \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (\arctan(0) - \arctan(t)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} -\arctan(t) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Para o lado direito, faz-se  $a = 0$ :

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{x^2 + 1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} ([\arctan(x)]_0^t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\arctan(t) - \arctan(0)) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\arctan(t) - 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Como ambas as integrais são convergentes logo:

$$\int_a^b \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

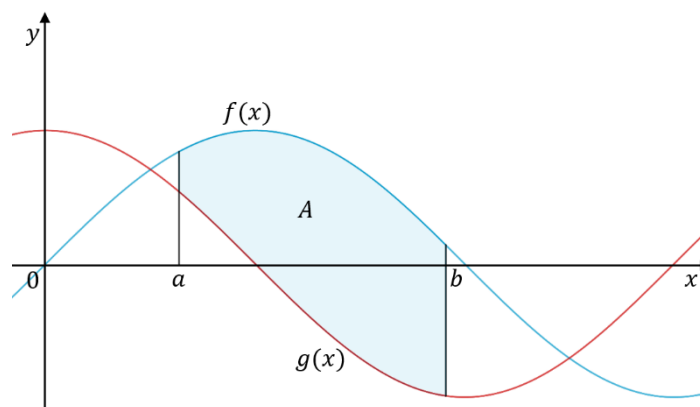
## Capítulo 3

### 1. APLICAÇÕES DE INTEGRAL

#### 1.1. ÁREA ENTRE CURVAS

Com o cálculo integral, além de ser possível calcular a área de baixo de uma função, também pode-se determinar a região entre duas funções. Suponha que se deseja encontrar a área  $A$  delimitada no intervalo  $[a, b]$  como mostra a figura 18 com as funções  $f(x)$  e  $g(x)$  sendo contínuas.

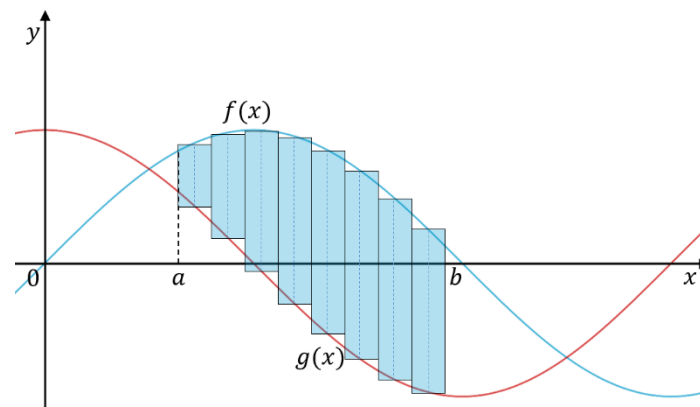
**Figura 18 - Área delimitada entre duas curvas**



Fonte: Autoria própria

Para encontrar essa área pode-se pensar na mesma ideia usada para definir a soma de Riemann, inserindo  $n$  retângulos no intervalo dado e assim obtendo uma aproximação da área procurada.

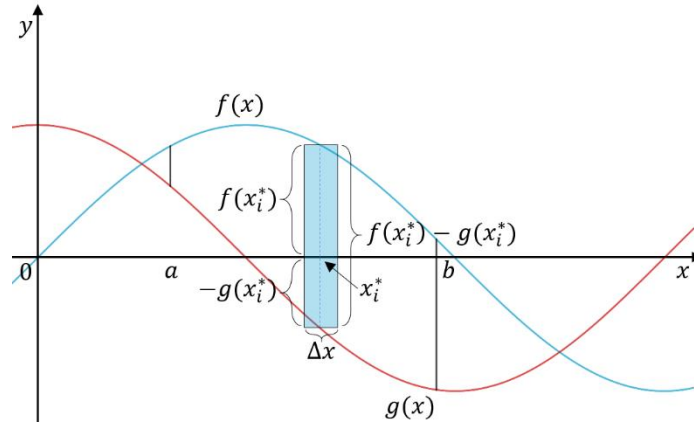
**Figura 19 - Retângulos aproximantes inseridos entre duas as curvas**



Fonte: Autoria própria

Portanto, dividindo  $A$  em  $n$  retângulos com larguras iguais pode-se aproximar o  $i$ -ésimo retângulo com base igual a  $\Delta x$ , onde  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , e altura  $f(x_i^*) - g(x_i^*)$ . Como mostra a figura 20.

**Figura 20 - Medidas arbitrárias de cada retângulo**



Fonte: Autoria própria

Assim a área  $A$  procurada será uma aproximadamente o somatório de todas as áreas de cada retângulo inserido entre as curvas.

$$A \approx \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x$$

Esta aproximação torna-se cada vez melhor conforme aumentam-se o número de retângulos inseridos. Assim quando o número de retângulos tender ao infinito, isto é, quando  $n \rightarrow \infty$  se terá a área real procurada.

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x$$

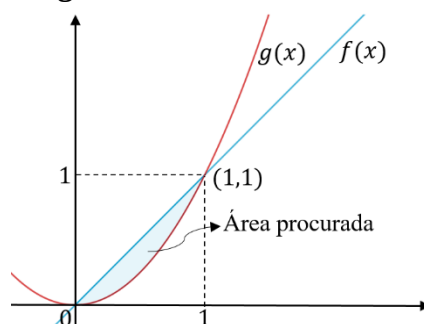
Desta maneira pode-se definir a área entre curvas.

**Definição 5** (STEWART, 2013): A área  $A$  de uma região limitada pelas curvas  $f(x)$  e  $g(x)$  e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ , onde  $f(x) \geq g(x)$  e  $f$  e  $g$  são contínuas para todo  $x$  no intervalo  $[a, b]$  é

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

**Exemplo 20:** Determine a área limitada pelas funções  $f(x) = x$  e  $g(x) = x^2$  e limitada nos lados  $[0, 1]$  com  $f(x) \geq g(x)$  no intervalo  $[0, 1]$

**Figura 21 - Área entre as funções**



Fonte: Autoria própria

*Solução:*

$$A = \int_0^1 [x - x^2] dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left( \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left( \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right) = \frac{1}{6}$$

**Exemplo 21:** Determine a área limitada pelas funções  $f(x) = -x^2 + 2$  e  $g(x) = x^2$ .

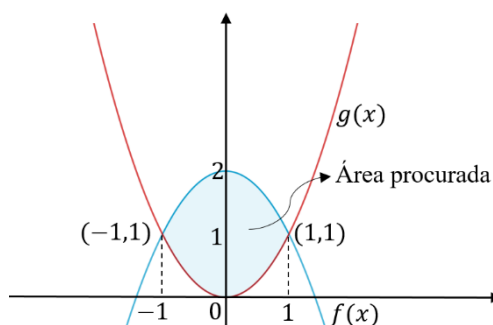
*Solução:*

Primeiro encontra-se os pontos de interseção entre as duas curvas. Igualado as duas funções:

$$-x^2 + 2 = x^2 \rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \rightarrow -x^2 + 1 = 0$$

Resolvendo a equação tem-se que  $x = \pm 1$ , assim a área é delimitada pelos lados no intervalo  $[-1, 1]$

**Figura 22 - Área entre as funções**



Fonte: Autoria própria

$$A = \int_{-1}^1 [(-x^2 + 2) - x^2] dx = \int_{-1}^1 (-2x^2 + 2) dx = \left[ -\frac{2x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}$$

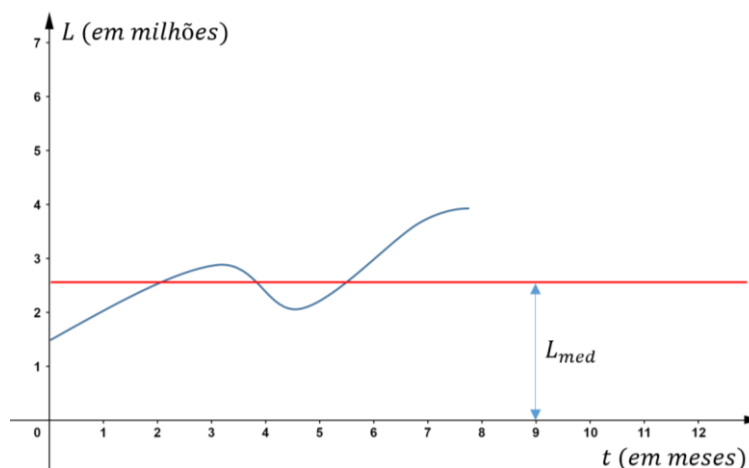
## 1.2. VALOR MÉDIO DE UMA FUNÇÃO

Quando se tem uma quantidade finita de números é fácil de se encontrar o valor médio entre esses números da seguinte maneira:

$$y_{med} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n}{n}$$

Contudo, quando tem que se encontrar o valor médio entre infinitos números o processo torna-se mais complexo. O gráfico a seguir representa as medidas de lucro de uma empresa, onde  $L$  representa o lucro ao longo do tempo  $t$  em meses e  $L_{med}$  é o lucro médio da empresa. Como calcular o lucro médio dessa empresa?

**Figura 23 – Gráfico do lucro de uma empresa**



Fonte: Autoria própria

Para encontrar o valor médio de uma determinada função  $y = f(x)$  em um intervalo  $[a, b]$  primeiro divide-se esse intervalo em  $n$  subintervalos iguais com comprimento  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . Em seguida escolhem-se pontos amostrais sucessivos  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  e calcula-se a média dos números  $f(x_1^*), f(x_2^*), \dots, f(x_n^*)$ :

$$\frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)}{n}$$

Tem-se que:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \rightarrow n = \frac{b-a}{\Delta x}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)}{n} &= \frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)}{\frac{b-a}{\Delta x}} \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \Delta x [f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)] = \frac{1}{b-a} [f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \dots + f(x_n^*)\Delta x] \\ &= \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x \end{aligned}$$

Quando  $n$  aumenta é possível se calcular o lucro médio por exemplo a cada dia ou até mesmo a cada hora. Assim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$$

E como já foi definido a integral definida tem-se:

$$f_{med} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Ou seja, tendo a função que descreve o lucro da empresa seria possível encontrar seu lucro médio.

**Teorema 3** (STEWART, 2013): Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$  então existe um número  $c$  em  $[a, b]$  tal que

$$f(c) = f_{med} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Isto é,

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

Que é o teorema do valor médio para integrais.

**Exemplo 22:** Encontre o valor médio da função  $f(x) = 4x - x^2$  no intervalo  $[0, 4]$

*Solução:*

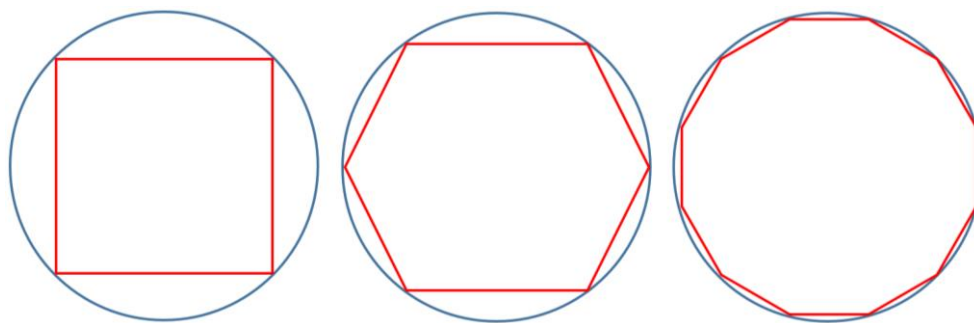
$$f_{med} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{4-0} \int_0^4 (4x - x^2) dx = \frac{1}{4} \left[ \frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{1}{4} \left( \frac{64}{2} - \frac{64}{3} \right) = \frac{8}{3}$$

### 1.3. COMPRIMENTO DE ARCO

Como se calcular o comprimento de uma curva? Pode-se da seguinte maneira: usa-se um fio para assumir o formato dessa curva e depois verifica-se o comprimento deste fio como uma reta. Todavia este não é um processo tão preciso e por isso se faz necessário uma definição mais rigorosa (STEWART, 2013).

Quando uma curva tem um caráter poligonal o cálculo pode ser feito apenas aproximando as curvas de retas e usando a fórmula da distância entre dois pontos para encontrar a distância entre cada extremidade. Pode-se pensar que este processo torna-se cada vez mais preciso conforme o número de segmentos aumenta. Como por exemplo, na tentativa de calcular o comprimento de uma circunferência como mostra a figura a seguir:

**Figura 24 – Aproximação do comprimento de uma circunferência**

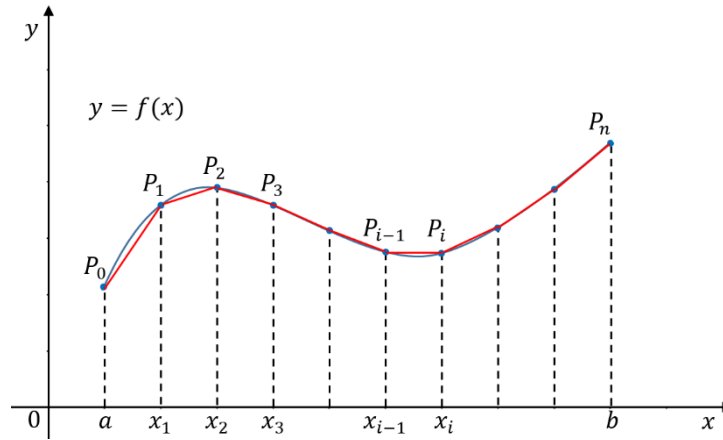


Fonte: Autoria própria

É intuitivo pensar que quando o número de segmentos tende ao infinito se terá o comprimento exato da circunferência.

Supondo uma curva  $C$  qualquer que está definida pela equação  $y = f(x)$  e é uma função contínua no intervalo  $[a, b]$ . Para se obter o comprimento desta curva basta encontrar o caminho poligonal fazendo uma aproximação para a curva  $C$  dividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos com extremidades  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  onde cada segmento terá largura igual a  $\Delta x$ . Seja  $y_i = f(x_i)$  então o ponto  $p_i(x_i, y_i)$  também está inserido na curva  $C$  como mostra a figura 25:

**Figura 25 – Aproximação para a curva  $C$**



Fonte: Autoria própria

Tem-se que o comprimento aproximado da curva será dado pelo somatório das distâncias de cada segmento e ainda essa aproximação fica cada vez melhor conforme  $n$  aumenta. Então define-se comprimento  $L$  da curva  $C$  dada pela equação  $y = f(x), a \leq x \leq b$ , como o limite dos comprimentos desses segmentos.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| \quad (1.3-1)$$

Sabe-se que a distância entre cada ponto é dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Assim;

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

Fazendo  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$  e  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \quad (1.3-2)$$

Acontece no entanto que a expressão final para obtenção do comprimento requer o seguinte teorema.

**Teorema 4** (STEWART, 2013): Valor médio de uma função: Seja  $f$  uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

$f$  é contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  e derivável no intervalo aberto  $(a, b)$ .

Então, existe um número  $c$  em  $(a, b)$  tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ ou } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Assim, pelo teorema do valor médio existe um número  $x_i^*$  que é o ponto médio do intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  tal que:

$$\begin{aligned} f(x_i) - f(x_{i-1}) &= f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \\ \Delta y_i &= f'(x_i^*)\Delta x \end{aligned} \tag{1.3-3}$$

Assim, substituindo (1.3-3) em (1.3-2)

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x_i^*)\Delta x)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + [f'(x_i^*)]^2 \Delta x^2} = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x$$

Mas por (1.3-1) tem-se que:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x$$

Logo:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Assim define-se uma fórmula para o comprimento de arco.

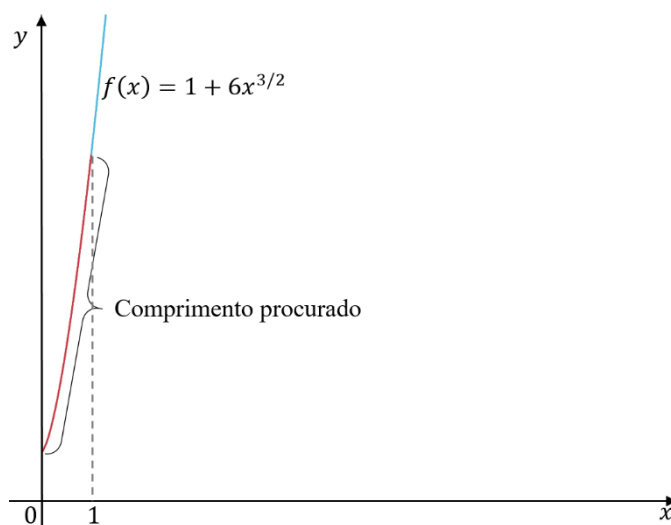
**Definição 6** Se  $f'$  for contínua em  $[a, b]$  então o comprimento de uma curva  $y = f(x)$ ,

$a \leq x \leq b$ , é dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

**Exemplo 23:** Encontre o comprimento dado pela curva  $f(x) = 1 + 6x^{3/2}$  no intervalo  $[0, 1]$

**Figura 26 – Comprimento de arco**



Fonte: Autoria própria

*Solução:*

Se  $f(x) = 1 + 6x^{3/2}$  então  $f'(x) = 9x^{1/2}$

Dessa forma aplicando à fórmula tem-se:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + [9x^{1/2}]^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 81x} dx$$

Usando o método da substituição:

$$u = 1 + 81x \rightarrow du = 81dx$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{u} \frac{du}{81} = \frac{1}{81} \int_0^1 \sqrt{u} du = \frac{1}{81} \left[ \frac{2}{3} \sqrt{u^3} \right] = \left[ \frac{2}{243} \sqrt{(1 + 81x)^3} \right]_0^1$$

$$= \left[ \frac{2}{243} \sqrt{(1 + 81(1))^3} - \frac{2}{243} \sqrt{(1 + 81(0))^3} \right] = \frac{2\sqrt{82^3}}{243} - \frac{2}{243}$$

$$L = \frac{2(82)\sqrt{82}}{243} - \frac{2}{243} = \frac{2}{243} (82\sqrt{82} - 1) \approx 6.1$$

#### 1.4. VOLUMES

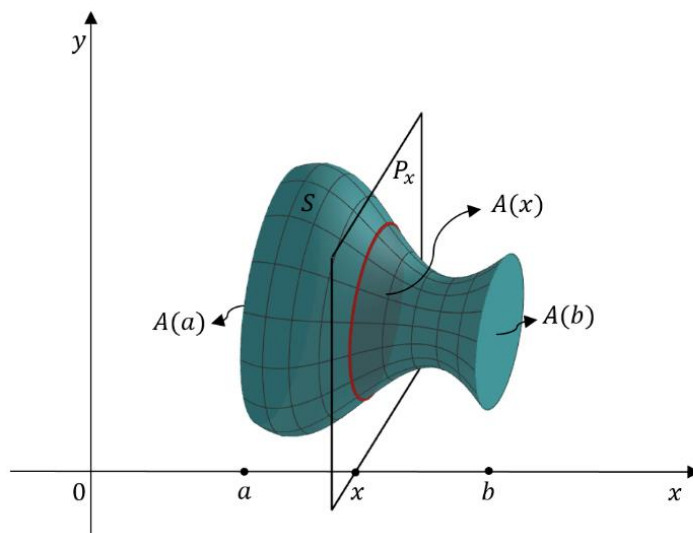
Assim como a área de figuras conhecidas, é possível encontrar o volume de sólidos conhecidos, como por exemplo, um prisma ou um cilindro. Como um cilindro circular reto, que o seu volume calculando o produto da área de sua base pela sua altura. Seja  $Ab$  a área da base desse cilindro e  $h$  sua altura temos:

$$V = Ab \cdot h$$

Porém, nem sempre o sólido será conhecido, como na figura 27, e para encontrar o volume desses sólidos pode-se usar outra aplicação da integral de Riemann para o cálculo de volume de sólidos.

Para um sólido  $S$  que não é um cilindro “corta-se” em vários pedaços e aproxima-se esses pedaços de um cilindro. Primeiramente interceptando o sólido  $S$  com um plano  $P_x$  e assim obtendo uma região plana a qual chama-se de secção transversal.  $A(x)$  é a área desta secção transversal no plano  $P_x$  que é perpendicular ao eixo  $x$  e que passa pelo ponto  $x$ , onde  $a \leq x \leq b$ . Conforme  $x$  aumenta de  $a$  para  $b$  nota-se que a área da secção transversal irá variar (STEWART, 2013).

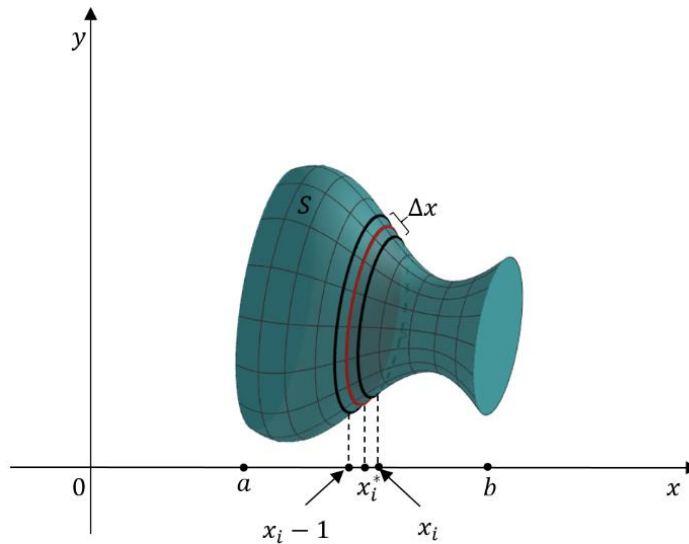
**Figura 27 - Sólido qualquer**



Fonte: Autoria própria

Agora dividindo o sólido  $S$  em  $n$  “fatias” iguais cuja a largura será igual a  $\Delta x$  onde usa-se cada plano  $P_{x_1}, P_{x_2}, P_{x_3}, \dots, P_{x_n}$  para fatiar o sólido. Usando pontos amostrais  $x_i^*$  no intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  para aproximar a  $i$ -ésima fatia  $S_i$  e assim obtêm-se um cilindro em que a área da base é  $A(x_i^*)$  e a sua altura é  $\Delta x$  como mostra a figura 28.

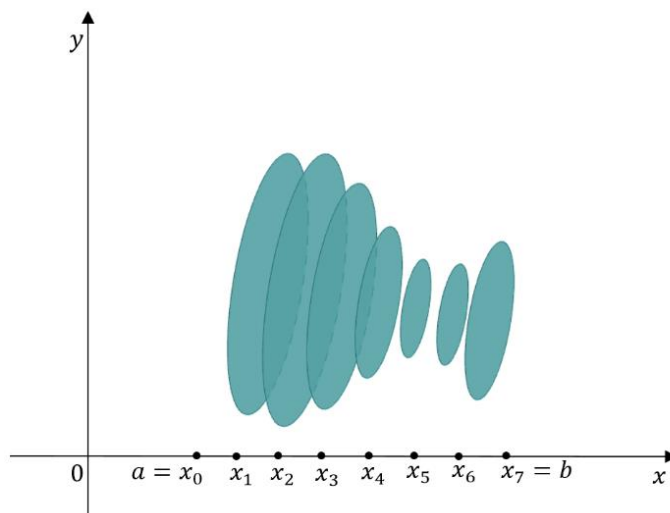
**Figura 28 - Fatia do sólido**



Fonte: Autoria própria

Agora fatiando o sólido:

**Figura 29 - Fatiando o sólido**



Fonte: Autoria própria

Sabe-se que o volume de um sólido é dado pelo produto da área da base pela altura. Tem-se que cada fatia terá área da base igual a  $A(x_i^*)$  e a altura igual a  $\Delta x$ , onde  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . Portanto o volume  $i$ -ésima fatia  $S_i$  será dado por:

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\Delta x$$

Assim o volume aproximado do sólido será o somatório de todas as fatias:

$$V \approx \sum_{i=1}^n A(x_i^*)\Delta x$$

Note que conforme aumentam o número de fatias  $n$ , melhor será esta aproximação. Então quando  $n \rightarrow \infty$  tem-se o volume exato do sólido.

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*)\Delta x$$

Mas esse limite da soma de Riemann é a integral definida, assim tem-se que o volume de um sólido qualquer será dado por:

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

**Definição 7** (STEWART, 2013): Seja um sólido qualquer  $S$  que está entre  $x = a$  e  $x = b$ . Se a área de secção transversal  $S$  no plano  $P_x$ , passando por  $x$  e perpendicular ao eixo  $x$ , é  $A(x)$ , onde  $A$  é uma função contínua, então o volume de  $S$  é

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x) dx$$

$A(x)$  é a área de uma secção transversal que corta o sólido  $S$ .

É valido notar que, ao usar essa fórmula,  $A(x)$  é a área de uma secção transversal móvel. Isso quer dizer que para um sólido qualquer  $A(x)$  irá variar conforme há o deslocamento no intervalo  $[a, b]$ . Se essa área for constante, isto é,  $A(x) = A$ , como em um cilindro. Ocorre que:

$$V = \int_a^b A dx = [Ax]_a^b = Ab - Aa = A(b - a)$$

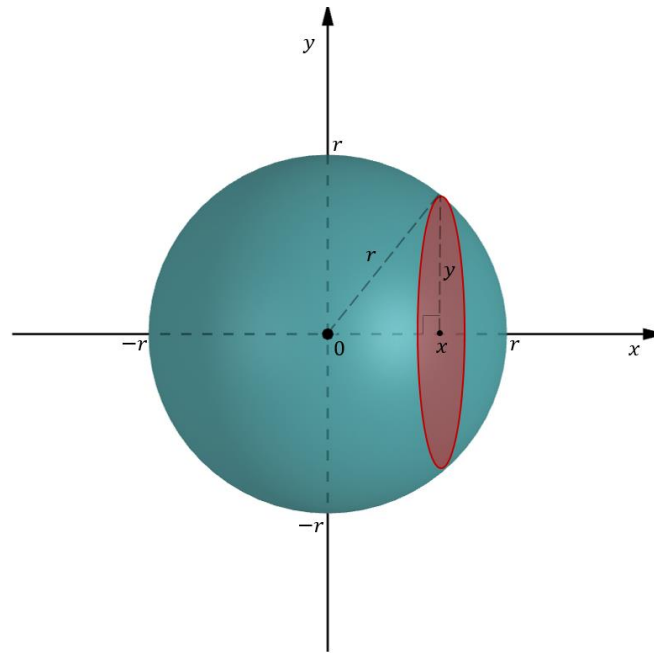
O que coincide com a fórmula do cilindro:  $V = Ah$ .

Com esta definição também é possível se demonstrar que o volume de uma esfera de raio  $r$  é.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Primeiramente supondo uma esfera de raio  $r$  centrada na origem com mostra a figura. Ao interceptar o plano  $P_x$  a área da secção transversal será um círculo, onde o raio  $y$  desse círculo, pelo teorema de Pitágoras, será  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ .

**Figura 30 - Representação de uma esfera**



Fonte: Construção Própria

Assim a área da secção transversal será de:

$$A(x) = \pi y^2 = \pi \left( \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2$$

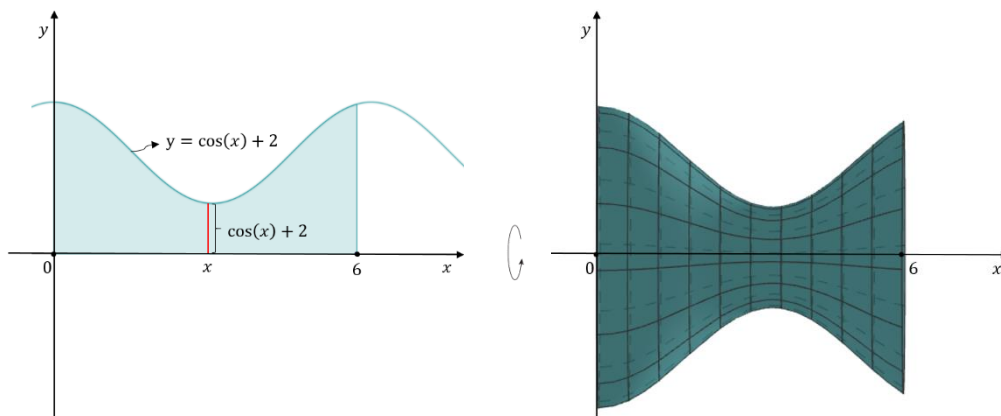
A função é limitada no intervalo  $[-r, r]$ . Portanto, usando a definição:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r A(x) dx = \int_{-r}^r \pi \left( \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \left[ \left( r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left( -r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right] = \pi \left( 2r^3 - \frac{2r^3}{3} \right) = \pi \left( \frac{6r^3 - 2r^3}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

## 1.5. SÓLIDO DE REVOLUÇÃO

A figura 31 é uma tentativa de encontrar o volume do sólido formado pela rotação no eixo  $x$  sob a curva  $y = \cos(x) + 2$  de 0 a 1

**Figura 31 - Função sendo rotacionada**



Fonte: Autoria própria

Ao fazer a rotação da função no eixo  $x$ , obtém-se que a base desse sólido será um disco com raio igual a  $\cos(x) + 2$ . Assim a área da base desse sólido será dada por:

$$A(x) = \pi r^2 \rightarrow A(x) = \pi (\cos(x) + 2)^2$$

$$A(x) = \pi (\cos^2(x) + 4 \cos(x) + 4)$$

O volume do sólido é  $A(x) \Delta x = \pi x \Delta x$ , onde  $\Delta x$  é a espessura do disco. Logo:

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_0^6 \pi (\cos^2(x) + 4 \cos(x) + 4) dx$$

$$V = \pi \int_0^6 \cos^2(x) dx + 4\pi \int_0^6 \cos(x) dx + 4\pi \int_0^6 dx$$

$$V = \pi \left[ \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2} + 4\pi \sin(x) + 4x \right]_0^6$$

$$V = \pi \left( \sin(12) + \frac{6}{2} + 4 \sin(6) + 24 \right)$$

$$V = \pi (\sin(12) + 4\sin(6) + 27)$$

$$V \approx 80,89$$

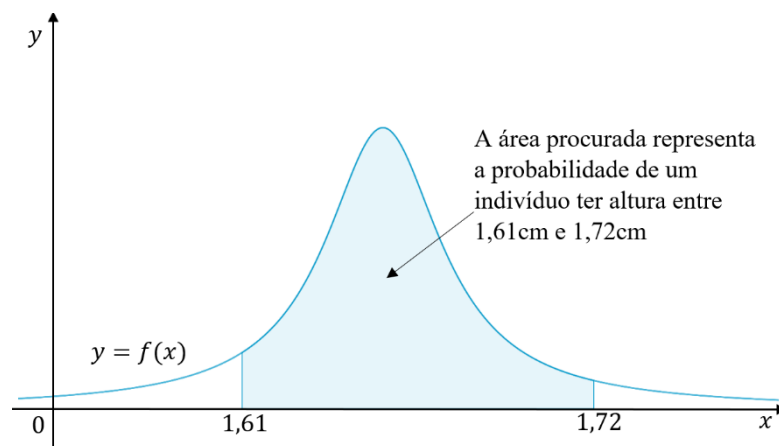
## 1.6. PROBABILIDADE

O cálculo probabilístico tem por função estimar as possibilidades de determinados eventos ocorrerem, como por exemplo no cálculo das chances de se ganhar na loteria ou até mesmo na possibilidade de desenvolvimento de alguma doença por fatores genéticos. Tomando como exemplo a altura dos indivíduos de uma determinada população que está entre 1,61 cm e 1,72 cm, isso implica dizer que se  $X$  representar a altura média tem-se:

$$P(1,61 < X < 1,72)$$

Este número representa a proporção de todas as pessoas dessa população que possuem altura entre 1,61 cm e 1,72 cm. Cada uma variável aleatória  $X$  tem uma função densidade de probabilidade  $f$ . Isso implica que a probabilidade de  $X$  estar no intervalo  $[a, b]$  é obtida integrando a função  $f$  de  $a$  até  $b$  (STEWART, 2013).

**Figura 32 – Função densidade de probabilidade**



Fonte: Autoria própria

Pelo fato de probabilidades serem medidas com escala entre 0 e 1 tem que ser satisfeita a seguinte condição:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

**Exemplo 24:** Seja  $X$  uma variável com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2), & \text{se } x \in (0, 2) \\ 0, & \text{se } x \notin (0, 2) \end{cases}$$

Qual o valor de  $c$ ?

*Solução:*

Pelo fato de ser uma função densidade de probabilidade tem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Como  $f(x)$  está definida no intervalo  $(0, 2)$  logo:

$$\int_0^2 c(4x - 2x^2) dx = c \left[ 2x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8c}{3}$$

Para que seja atendida a condição:

$$\frac{8c}{3} = 1 \rightarrow c = \frac{3}{8}$$

**Exemplo 25:** Sendo a função  $f(x) = 0,006x(10 - x)$  para  $0 \leq x \leq 10$  e  $f(x) = 0$  para os outros valores de  $x$ . Verifique se  $f$  é uma função densidade de probabilidade e calcule a probabilidade que  $x$  esteja entre 4 e 8

*Solução:*

Para que seja uma função densidade de probabilidade é necessária que atenda a condição:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Assim:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_0^{10} 0,006x(10 - x) dx = 0,006 \int_0^{10} 10x - x^2 dx = 0,006 \left[ 5x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^{10} \\ &= 0,006 \left[ 5(10)^2 - \frac{(10)^3}{3} \right] = 0,006 \left( 500 - \frac{1000}{3} \right) = 0,006 \cdot \frac{500}{3} = 1 \end{aligned}$$

Verifica-se que é uma função densidade de probabilidade.

$$\begin{aligned} P(4 \leq X \leq 8) &= \int_4^8 f(x) dx = 0,006 \int_4^8 (10x - x^2) dx = 0,006 \left[ 5x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_4^8 \\ &= 0,006 \left[ \left( 5(8)^2 - \frac{8^3}{3} \right) - \left( 5(4)^2 - \frac{(4)^3}{3} \right) \right] = 0,544 \end{aligned}$$

## 2. APLICAÇÕES DE INTEGRAL NA FÍSICA

### 2.1. TRABALHO

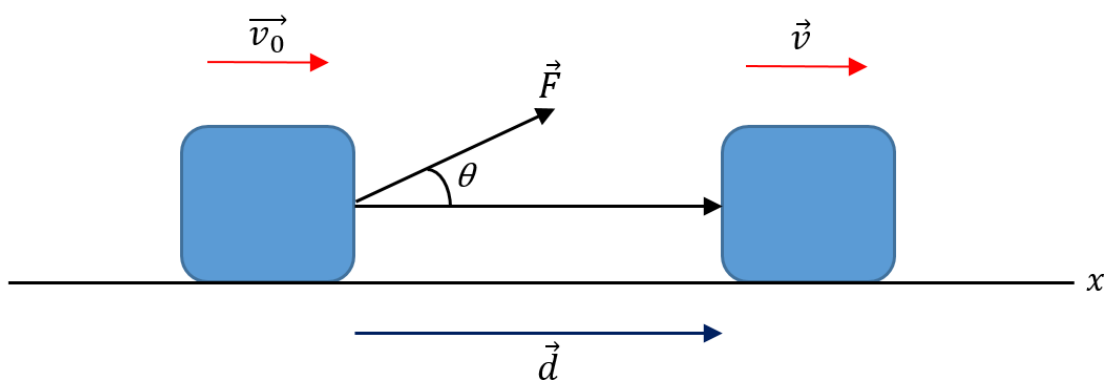
Ao pensar em trabalho logo vem à mente o trabalho cotidiano desempenhado por uma pessoa. Ou ainda, quando usa-se o termo para referir-se a algo que trará dificuldades. Contudo, na física esta palavra tem outro significado, está associado ao trabalho realizado por uma força.

Quando aplicada uma força sobre um objeto para aumentar sua velocidade, a energia cinética desse objeto aumenta. Se diminuída a velocidade desse objeto sua energia cinética diminui. Diz-se que nestas variações da energia cinética a força aplicada transferiu energia para o objeto ou energia foi transferida do objeto. Quando ocorrem essas transferências de energia através de uma força diz-se que um trabalho é realizado por uma força em um objeto. Se a energia é transferida para um objeto diz-se que o trabalho é positivo, caso contrário, se a energia for transferida do objeto o trabalho será negativo. Usa-se a letra  $W$  para expressar o trabalho (HALLIDAY, 2016).

### 2.2. FORÇA E ENERGIA CINÉTICA

Considere um corpo que move-se ao longo de uma superfície horizontal sem atrito denominado eixo  $x$  horizontal. Uma força  $\vec{F}$  constante é aplicada a esse objeto com uma inclinação  $\theta$  como mostra a figura.

**Figura 33 - Força agindo sobre um objeto**



Fonte: Autoria própria

Usando a segunda lei de Newton para o caso;

$$F_x = ma_x$$

Onde  $m$  é a massa do objeto. Quando aplicado um deslocamento  $\vec{d}$  ocorre o aumento da velocidade de  $\vec{v}_0$  para  $\vec{v}$ . Como a força que está sendo aplicada é constante, isso significa que a aceleração também será constante. Daí pode-se escrever;

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d$$

Isolando  $a_x$

$$a_x = \frac{v^2 - v_0^2}{2d}$$

Substituindo na segunda lei de Newton;

$$F_x = ma_x \rightarrow F_x = m \left( \frac{v^2 - v_0^2}{2d} \right) \rightarrow dF_x = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$F_x \cdot d = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Onde o primeiro termo do lado direito  $\frac{1}{2}mv^2$  é a energia cinética do objeto no fim do deslocamento e denominada  $K_f$ . O segundo termo do lado direito  $\frac{1}{2}mv_0^2$  é a energia cinética no início do deslocamento e por isso denomina-se  $K_i$ . Essa transferência de energia é chamada de trabalho  $W$ .

$$W = F_x \cdot d$$

De acordo com a figura 33  $F_x$  também pode ser escrito da forma  $F \cos(\theta)$  onde  $F$  é o modulo de  $\vec{F}$  e  $\theta$  é o ângulo entre a força  $\vec{F}$  e o deslocamento  $\vec{d}$  assim:

$$W = F \cos(\theta) \cdot d$$

Ou ainda;

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

Para representar a unidade de trabalho no SI usa-se o joule. E, além disso essa dedução é válida apenas para o caso onde a força é unidimensional.

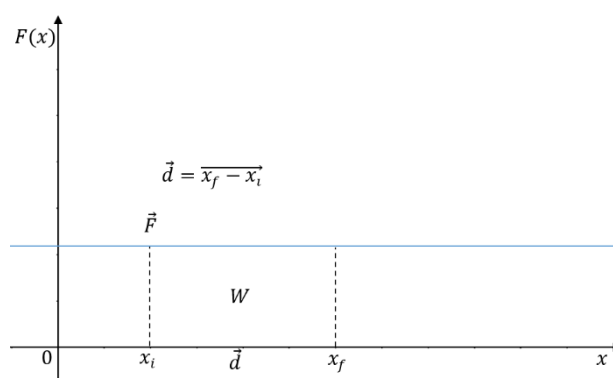
Quando mais de uma força atua sobre um mesmo objeto o trabalho total realizado será a soma dos trabalhos realizados por cada uma das forças individualmente (HALLIDAY, 2016).

### 2.3. TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA VARIÁVEL

Foi visto anteriormente como se calcular o trabalho em uma objeto que se comporta como partícula, isto é, um objeto rígido onde todas as suas partes devem se mover da mesma forma. Contudo foi visto apenas como calcular o trabalho se a força aplicada a esse objeto for constante, isto é, o módulo e a orientação da força não podem variar enquanto o objeto está sendo deslocado. Existem situações onde a força aplicada a esse objeto pode variar, neste caso utiliza-se os métodos do cálculo integral (HALLIDAY, 2016).

Na figura abaixo tem-se o gráfico de uma força constante onde observa-se que o trabalho será a área compreendida no intervalo  $[x_i, x_f]$  vezes a força  $F$  constante. Onde podemos usar  $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ ;

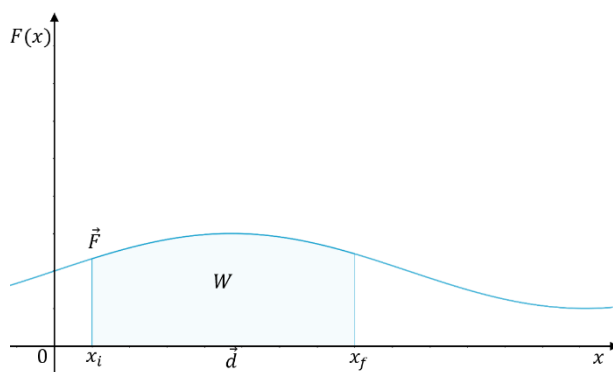
**Figura 34 - Gráfico de uma força constante**



Fonte: Autoria própria

Assim, é possível pensar na mesma ideia caso a força seja variável.

**Figura 35 - Gráfico de uma força variável**



Fonte: Autoria própria

Já sabe-se como calcular a área abaixo de uma curva usando integral como foi definido no início do capítulo 2. Portanto, para calcular o trabalho realizado por uma força variável basta integrar a função  $F(x)$  no intervalo  $[x_i, x_f]$ .

Assim;

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

Na dedução anterior foi levado em consideração que o objeto estava sob ação de apenas uma força, ou seja, uma força unidimensional. Quando o objeto está sob uma força tridimensional tem-se:

$$W = \int_{r_i}^{r_f} dW dx = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz$$

#### 2.4. TEOREMA DO TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA

A partir da primeira equação que relaciona energia cinética ao trabalho deduz-se este teorema que é descrito pela seguinte relação:

$$K_f = K_i + W$$

Onde  $K_f$  é a energia cinética depois da execução do trabalho  $K_i$  é a energia cinética antes da execução do trabalho e  $W$  é o trabalho que está sendo executado na partícula. Se o trabalho for positivo a energia cinética irá aumentar. Se o trabalho for negativo a energia cinética irá diminuir (HALLIDAY, 2016).

#### 2.5. TEOREMA DO TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA COM FORÇA VARIÁVEL

Agora, considere uma força variável e uma partícula com massa  $m$  movendo-se no eixo  $x$ . Quando ocorre o deslocamento dessa partícula de  $x_i$  para  $x_f$  tem-se:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx \quad (2.5-1)$$

Como, pela segunda lei de Newton:

$$F(x) = m \cdot a \quad (2.5-2)$$

Substituindo a equação (2.4-2) em (2.4-1):

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = W = \int_{x_i}^{x_f} m \cdot a dx \quad (2.5-3)$$

Pela fórmula da aceleração  $a = \frac{dv}{dt}$  e pela fórmula da velocidade  $v = \frac{dx}{dt}$  tem-se:

$$m \cdot a dx = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad (2.5-4)$$

Pela regra da cadeia:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v \quad (2.5-5)$$

Assim, substituindo a equação (2.4-5) em (2.4-4):

$$m \cdot a dx = m \cdot \frac{dv}{dx} \cdot v \cdot dx = m \cdot v \cdot dv \quad (2.5-6)$$

Substituindo (2.4-6) em (2.4-1) obtemos:

$$W = \int_{v_i}^{v_f} m \cdot v \cdot dv = m \int_{v_i}^{v_f} v dv = m \cdot \left[ \frac{v^2}{2} \right]_{v_i}^{v_f}$$

$$W = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

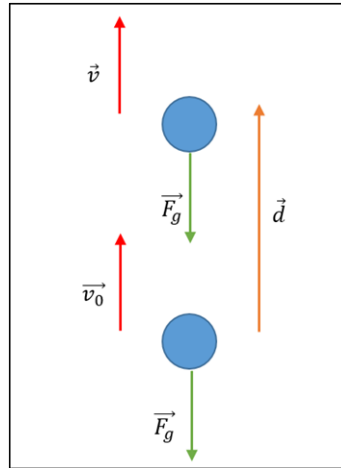
Como os termos dessa equação  $\frac{1}{2} m v_f^2$  e  $\frac{1}{2} m v_i^2$  representam energias cinéticas pode-se escrever:

$$W = K_f - K_i = \Delta K$$

## 2.6. TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA GRAVITACIONAL

Suponha que um objeto com massa  $m$  é arremessado verticalmente para cima com velocidade inicial  $v_0$  e que este objeto comporta-se como uma partícula. A energia cinética inicial deste objeto é dada por  $K_i = \frac{1}{2}mv_0^2$ . Quando está subindo, este objeto é desacelerado pela força gravitacional  $\vec{F}_g$  e devido a isso a energia cinética diminui. Então, usando a equação  $W = F\cos(\theta) \cdot d$  no lugar da força  $F$  usa-se o módulo da força gravitacional  $\vec{F}_g = m \cdot g$  assim o trabalho  $W_g$  realizado pela força gravitacional  $\vec{F}_g$  é dado por  $W_g = mgd\cos(\theta)$  (HALLIDAY, 2016).

**Figura 36 - Representação da força gravitacional agindo sobre um objeto**



Fonte: Autoria própria

A figura 36 mostra um objeto sendo arremessado verticalmente para cima. Enquanto o objeto está subindo a força gravitacional  $\vec{F}_g$  é contrária ao deslocamento  $\vec{d}$  por essa razão o ângulo entre as forças é  $\theta = 180^\circ$ . Assim tem-se:

$$W_g = mgd \cos(\theta) = mgd \cos(180^\circ) = mgd(-1) = -mgd$$

O sinal negativo mostra que durante a subida a energia gravitacional remove uma energia  $mgd$  o que é válido, já que o objeto perde energia durante a subida. Quando o objeto chega na altura máxima o ângulo entre o deslocamento  $\vec{d}$  e a força gravitacional  $\vec{F}_g$  é  $\theta = 0^\circ$ . Assim:

$$W_g = mgd \cos(\theta) = mgd \cos(0^\circ) = mgd(1) = mgd$$

O que significa que agora a força gravitacional atua sobre o objeto fazendo-o ganhar velocidade (HALLIDAY, 2016).

**Exemplo 26:** Um objeto com massa de 10 kg é lançado verticalmente. Qual o trabalho realizado pela força gravitacional quando o objeto é deslocado da altura  $y = 1m$  e  $y = 7m$ . (considerando apenas a força gravitacional).

*Solução:*

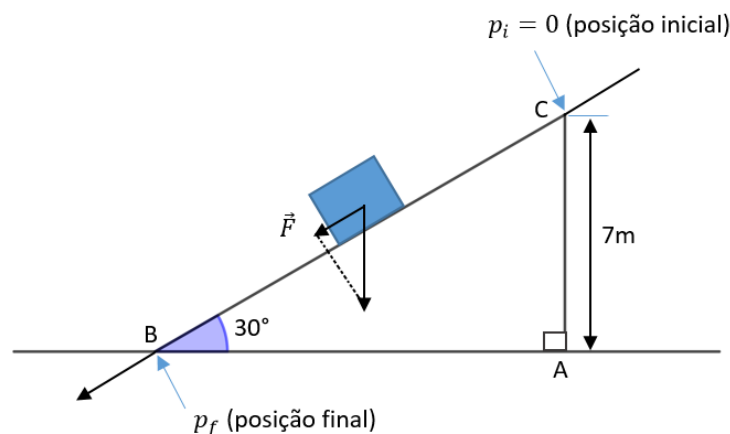
Considerando  $g = 10m/s^2$  e como o objeto está sendo deslocado contra a força gravitacional o trabalho realizado será negativo. Assim:

$$W_g = -mgd \rightarrow W_g = -10 \cdot 10 \cdot (7 - 1) \rightarrow W_g = -600 \text{ J}$$

**Exemplo 27:** Um bloco com massa de 5 kg desliza sobre um plano inclinado com altura de 7 m do solo. Tendo uma inclinação de  $30^\circ$  com o solo o plano inclinado. Qual o trabalho realizado pela força gravitacional? (considere  $g = 10m/s^2$ ) (considerando apenas a força gravitacional).

*Solução:*

**Figura 37 - Bloco em um plano inclinado**



Fonte: Autoria própria

Como o objeto está deslizando de c até b tem-se que o deslocamento  $d$  será a hipotenusa do triângulo retângulo:

$$\text{sen}(30^\circ) = \frac{7}{d} \rightarrow \frac{1}{2}d = 7 \rightarrow d = 14 \text{ m}$$

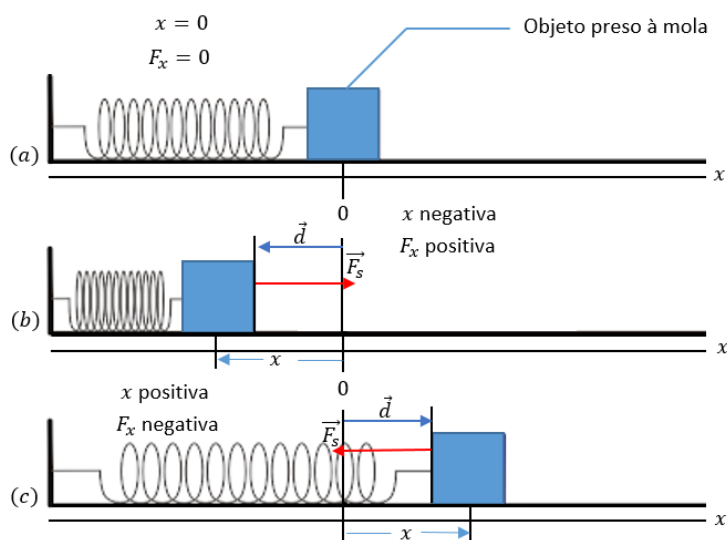
A força  $\vec{F}$  que faz com que o objeto deslize na superfície tem uma inclinação de  $60^\circ$  com a força gravitacional já que a inclinação da superfície com o solo é de  $30^\circ$ . Assim:

$$W_g = mgd \cos(\theta) \rightarrow W_g = 5 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \cos(60^\circ) \rightarrow W_g = 5 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow W_g = 350 \text{ J}$$

## 2.7. TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA ELÁSTICA

A figura 38a abaixo mostra uma mola em seu estado relaxado, isto é, a mola não está sofrendo ações de forças que a deformem, ela não está nem comprimida e nem esticada. Ao empurrar a mola para a esquerda comprimindo ela, como mostra a figura 38b a mola irá empurrar o objeto para a direita. Já na figura 38c exercendo uma força para a direita a mola é deformada e a força elástica faz com que a mola puxe o objeto para a esquerda e volte para o seu estado inicial.

**Figura 38 - Representação de uma força elástica**



Fonte: Autoria própria

A força de uma mola dada por  $F_s$  é proporcional ao deslocamento  $\vec{d}$  e a força elástica de uma mola é dada pela seguinte relação chamada de lei de Hooke (HALLIDAY, 2016).

$$F_s = -k\vec{d}$$

Esta equação mostra que o sentido da força elástica é oposto ao sentido do deslocamento da extremidade que está livre da mola. A constante  $k$ , chamada de constante elástica, mede o quão rígida é determinada mola. Quanto maior for a constante  $k$ , mais força a mola irá exercer dependendo do deslocamento. No SI a unidade de  $k$  é o newton por metro. Esta equação também pode ser escrita na forma:

$$F_x = -kx$$

Se  $x$  for positivo, isto é, se a mola estiver alongada para a direita,  $F_x$  será negativa. Se  $x$  for negativo, ou seja, se a mola estiver comprimida para a esquerda,  $F_x$  será positiva.

Tendo em vista que a força elástica é uma força variável, para calcular o trabalho realizado por esta força recorrer-se aos métodos do cálculo integral. Para isso assume-se algumas condições. Primeiramente, a massa da mola é desprezível em relação à massa do objeto, ou seja, considera-se uma mola sem massa. Trata-se de uma mola ideal que obedece exatamente a lei de Hooke, também é desconsiderado o atrito do objeto com o solo e que este objeto se comporta como uma partícula. Quando aplicada uma força no objeto para a direita com o objetivo de colocá-lo em movimento, ocorre que a força  $F_x$  realiza um trabalho sobre ele, o que diminui a energia cinética e desacelera o objeto (HALLIDAY, 2016).

Seja  $x_i$  a posição inicial do objeto e  $x_f$  a posição do objeto após ser deslocado. Dividindo esse intervalo  $[x_i, x_f]$  em pequenos segmentos com tamanho  $\Delta x$ . Esses segmentos são tão pequenos que quando o objeto move-se nestes segmentos a força elástica praticamente não varia. Rotula-se o primeiro segmento como  $F_{x1}$  o segundo como  $F_{x2}$  e assim por diante. Como a força elástica é constante em cada um dos segmentos tem-se a equação  $W = F \cos(\theta) \cdot d$ . Como  $\theta = 180^\circ$ ,  $\cos(180^\circ) = -1$  e  $d = \Delta x$ . O trabalho realizado será  $-F_{x1}\Delta x$  no primeiro segmento,  $-F_{x2}\Delta x$  no segundo segmento e assim por diante. O que faz com que o trabalho total  $W_s$  realizado pela mola no intervalo  $[x_i, x_f]$  seja a soma de todos esses trabalhos (HALLIDAY, 2016).

$$W_s = \sum_{j=1}^n -F_{xj}\Delta x$$

Onde  $j = 1, 2, 3, \dots$

Quando  $\Delta x$  tende a 0, isto é, quando os segmentos são cada vez menores tem-se:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} -F_x dx$$

Como  $F_x = -kx$ :

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} -kx dx = -k \int_{x_i}^{x_f} x dx = \left(-\frac{1}{2}k\right) [x^2]_{x_i}^{x_f} = \left(-\frac{1}{2}k\right) [x_f^2 - x_i^2]$$

Portanto:  $W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$

**Exemplo 28:** Dada uma mola com uma extremidade fixada. A extremidade livre dessa mola coincide com  $x = 0$  quando está em seu estado normal. Sendo  $k = 5$  calcule o trabalho realizado pela mola quando o objeto preso à mola se desloca da posição  $x = 0,5m$  a  $x = 0m$ .

*Solução:*

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} -kx \, dx = \int_{0,5}^0 -5x \, dx = -5 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{0,5}^0 = -5 \left[ \frac{0^2}{2} - \frac{0,5^2}{2} \right] = -5 \cdot \left( -\frac{0,25}{2} \right)$$

$$W_s = 0,625 \, \text{J}$$

**Exemplo 29:** Uma mola está esticada de seu comprimento natural de 11 cm para 15 cm. Uma força de 20 N é necessária para manter esta mola esticada. Qual o trabalho realizado para esticar a mola de 15 cm para 20 cm?

*Solução:*

Como a mola está sendo esticada de 11cm para 15cm, tem-se que  $F_x$  é negativa e o deslocamento é de 4 cm. Assim usando a lei de Hooke:

$$F_x = -kx \rightarrow -20 = -k \cdot 0,04 \rightarrow k = 500$$

Agora tendo a constante  $k$  pode-se calcular o trabalho realizado de 15cm a 20cm.

$$W_s = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2 \rightarrow W_s = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 0,04^2 - \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 0,09^2 = 0,4 - 2,025$$

$$W_s = -1,625 \, \text{J}$$

**Exemplo 30:** Um bloco está preso à extremidade livre de uma mola sobre um piso sem atrito como na figura 37a. seria necessária uma força de 12 N para manter o bloco a 20 mm em  $x_1 = 12$ . Qual é o trabalho necessário para puxar o bloco de 0 a 25mm?

*Solução:*

Novamente, como a mola está sendo esticada, tem-se que  $F_x$  é negativa. Para encontrar a constante elástica  $k$  usa-se a lei de Hooke.

$$F_x = -kx \rightarrow -12 = -k \cdot 0,02 \rightarrow k = 600$$

$$W_s = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2 \rightarrow W_s = \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 0^2 - \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 0,025^2 = 0 - 0,1875$$

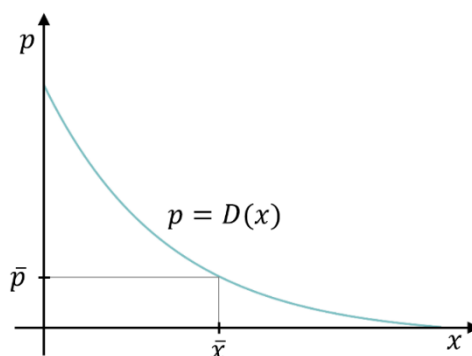
$$W_s = -0,1875$$

### 3. APLICAÇÃO DE INTEGRAL EM ECONOMIA

#### 3.1. SUPERÁVIT DOS CONSUMIDORES

Seja uma função  $p = D(x)$  a qual relaciona o preço unitário de um produto  $p$  a uma quantidade  $x$  demandada. Supõe-se ainda que um preço unitário fixo de mercado  $\bar{p}$  foi estabelecido para este produto e a quantidade demandada é de  $\bar{x}$  para este preço unitário como mostra a figura 39.

**Figura 39 - Gráfico da relação produto-demanda**

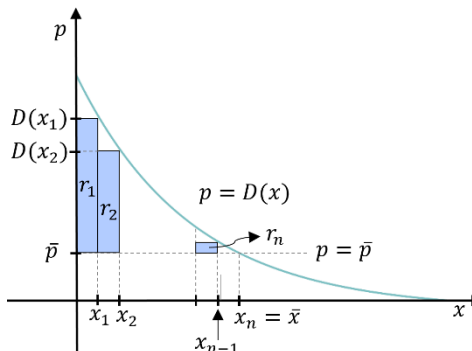


Fonte: Autoria própria

Portanto, observando o gráfico, nota-se que o consumidor que estiver disposto a pagar o maior preço unitário  $\bar{p}$  pelo produto estará economizando, pois estará comprando o produto por um preço abaixo do que estava disposto a pagar. A essa diferença entre o que os consumidores estão dispostos a pagar por cada unidade  $\bar{x}$  do produto e o que na verdade costumam pagar denomina-se superávit dos consumidores (TAN, 2007).

Para deduzir uma expressão para calcular o superávit dos consumidores divide-se o intervalo  $[0, \bar{x}]$  em  $n$  subintervalos, onde cada um tem o comprimento de  $\Delta x = \bar{x}/n$  e denota-se os lados direitos desse intervalo por  $x_1, x_2, \dots, x_n = \bar{x}$  como mostra a figura 40.

**Figura 40 - Aproximação pela soma de Riemann**



Fonte: Autoria própria

Na figura 40 observe que existem consumidores dispostos a pagar pelo preço de  $D(x_1)$  pelas primeiras  $\Delta x$  unidades do produto. A quantia que esses consumidores irão economizar pode ser obtida através da seguinte fórmula.

$$D(x_1)\Delta x - \bar{p}\Delta x = [D(x_1) - \bar{p}]\Delta x$$

Que é a área do retângulo  $r_1$ . Usando a mesma lógica, os consumidores que pagarem pelo preço  $D(x_2)$  nas próximas  $\Delta x$  unidades de  $x_1$  a  $x_2$  do produto economizarão:

$$D(x_2)\Delta x - \bar{p}\Delta x = [D(x_2) - \bar{p}]\Delta x$$

Assim, generalizando esse raciocínio para os  $n$  termos, a aproximação da quantia total economizada quando o consumidor comprar  $\bar{x}$  unidades do produto será dada pela soma, essa soma será o superávit de consumidor:

$$\begin{aligned} & [D(x_1) - \bar{p}]\Delta x + [D(x_2) - \bar{p}]\Delta x + \dots + [D(x_n) - \bar{p}]\Delta x \\ & [D(x_1) + D(x_2) + \dots + D(x_n)]\Delta x - [\bar{p}\Delta x + \bar{p}\Delta x + \dots + \bar{p}\Delta x] \\ & [D(x_1) + D(x_2) + \dots + D(x_n)]\Delta x - n\bar{p}\Delta x \end{aligned}$$

Como  $\Delta x = \bar{x}/n$ ;

$$\begin{aligned} & [D(x_1) + D(x_2) + \dots + D(x_n)]\Delta x - \frac{n\bar{p}\bar{x}}{n} \\ & [D(x_1) + D(x_2) + \dots + D(x_n)]\Delta x - \bar{p}\bar{x} \end{aligned}$$

Note que o primeiro termo da expressão é a ideia de soma de Riemann da função  $p = D(x)$  no intervalo  $[0, \bar{x}]$ . Quando  $n$  tende para o infinito, obtemos uma expressão para o superávit dos consumidores  $SC$ .

$$SC = \int_0^{\bar{x}} D(x) dx - \bar{p}\bar{x} \quad (3.1-1)$$

Onde  $D$  é a função demanda,  $\bar{p}$  o preço unitário de mercado e  $\bar{x}$  é a quantidade vendida.

O superávit dos consumidor é dado pela área limitada superiormente pela função que descreve a demanda  $p = D(x)$  e inferiormente pela reta  $p = \bar{p}$  no intervalo  $[0, \bar{x}]$ . Pode-se escrever a fórmula (3.1-1) na forma:

$$SC = \int_0^{\bar{x}} [D(x) - \bar{p}] dx$$

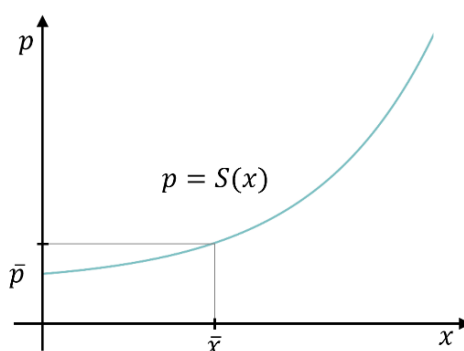
É válido lembrar que tal relação também já foi deduzida no início do capítulo 3 em área entre curvas.

### 3.2. SUPERÁVIT DOS PRODUTORES

Para deduzir uma fórmula para o cálculo do superávit dos produtores, o raciocínio é análogo ao anterior. Seja uma função de oferta  $p = S(x)$  que relaciona o preço unitário  $p$  de um produto à quantidade  $x$  desse produto disponível no mercado a esse preço.

Supondo que um preço  $\bar{p}$  foi estabelecido para este determinado produto e para esse preço unitário foi colocada uma quantidade  $\bar{x}$  no mercado como mostra a figura 29. Nesse caso, os fornecedores que estiverem dispostos a colocar o produto no mercado por um preço abaixo do esperado poderão obter um lucro maior. A diferença entre o que os fornecedores recebem e o que eles estão dispostos a receber é chamada de superávit dos produtores (TAN, 2007).

**Figura 41 - Função de oferta**



Fonte: Autoria própria

Usando-se o mesmo raciocínio do tópico anterior pode-se deduzir uma fórmula para o superávit dos produtores  $SP$ .

$$SP = \bar{p} \bar{x} - \int_0^{\bar{x}} S(x) dx$$

Ou ainda

$$SP = \int_0^{\bar{x}} [\bar{p} - S(x)] dx$$

Onde  $S(x)$  é a função oferta,  $\bar{p}$  é o preço unitário de mercado e  $\bar{x}$  é a quantidade de produto ofertada.

## 4. APLICAÇÃO DE INTEGRAL EM BIOLOGIA

### 4.1. CAPACIDADE CARDÍACA

A capacidade cardíaca é o volume de sangue que o coração é capaz de bombear por unidade de tempo, sendo medida na aorta como uma taxa de variação. Usa-se para medir a capacidade cardíaca o método da diluição do contraste, que consiste em injetar um corante no átrio direito e medir a variação desse líquido no escoamento pela aorta. Insere-se uma sonda na aorta que mede a concentração desse corante que sai do coração durante intervalos regulares de tempo  $[0, T]$  até que o corante tenha acabado. Se  $c(t)$  é a concentração do corante no intervalo de tempo  $t$ , ao dividir o intervalo  $[0, T]$  em vários subintervalos com comprimento de  $\Delta t$  tem-se que a quantidade de corante que circula pelo ponto onde está inserido a sonda durante o intervalo  $t = t_{i-1}$  a  $t = t_i$  que será dada por aproximadamente (JAMES STEWEART, TROY DAY, 2015):

$$(\text{concentração})(\text{volume}) = c(t_i)(F \Delta t)$$

Nessas condições,  $F$  é a taxa de fluxo que se deseja determinar, logo a quantidade total de corante aproximada é dada por:

$$\sum_{i=1}^n c(t_i) F \Delta t = F \sum_{i=1}^n c(t_i) \Delta t$$

Quando  $n \rightarrow \infty$  a quantidade de corante será de:

$$A = F \int_0^T c(t) dt$$

Assim a capacidade cardíaca, isto é, o fluxo que o coração é capaz de realizar  $F$  é dado por:

$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t) dt}.$$

**Exemplo 31:** Usa-se o método de diluição de contraste para medir a capacidade cardíaca com 6mg de corante. As concentrações de corante em mg/L, são dadas por  $20te^{-0,6t}$ ,  $0 \leq t \leq 10$  onde  $t$  é medido em segundos. Calcule a capacidade cardíaca.

$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t) dt} = \frac{6}{\int_0^{10} 20te^{-0,6t} dt}$$

Resolvendo a integral

$$\int_0^{10} 20te^{-0,6t} dt = 20 \int_0^{10} te^{-0,6t} dt$$

Usando integral por partes que foi vista no capítulo 2

$$-0,6 = -\frac{3}{5}$$

Fazendo  $u = t \quad du = dt \quad \text{e} \quad dv = e^{-\frac{3}{5}t} \rightarrow \int dv = \int e^{-\frac{3}{5}t} \rightarrow v = -\frac{5}{3}e^{-\frac{3}{5}t}$

$$\begin{aligned} \int_0^{10} t \cdot e^{-\frac{3}{5}t} dt &= t \cdot \left(-\frac{5}{3}e^{-\frac{3}{5}t}\right) - \int -\frac{5}{3}e^{-\frac{3}{5}t} dt = -\frac{5t}{3}e^{-\frac{3}{5}t} + \frac{5}{3} \int e^{-\frac{3}{5}t} dt \\ &= \left[-\frac{5t}{3}e^{-\frac{3}{5}t} + \frac{5}{3}\left(-\frac{5}{3}e^{-\frac{3}{5}t}\right)\right]_0^{10} = \left[t\left(-\frac{5}{3}e^{-\frac{3}{5}t}\right) + \frac{5}{3}\left(-\frac{5}{3}e^{-\frac{3}{5}t}\right)\right]_0^{10} \\ &= \left[\left(-\frac{5}{3}e^{-\frac{3}{5}t}\right)\left(\frac{5}{3} + t\right)\right]_0^{10} = \left[\left(-\frac{5}{3}e^{-\frac{3}{5}(10)}\right)\left(\frac{5}{3} + 10\right)\right] - \left[\left(-\frac{5}{3}e^{-\frac{3}{5}(0)}\right)\left(\frac{5}{3} + 0\right)\right] \\ &= \left[-\frac{5}{3}e^{-6}\left(\frac{35}{3}\right)\right] - \left[-\frac{5}{3}e^0\left(\frac{5}{3} + 0\right)\right] = \left[-\frac{175}{9}e^{-6}\right] - \left[-\frac{25}{9}\right] = \frac{-175e^{-6} + 25}{9} \\ 20 \int_0^{10} te^{-0,6t} dt &= 20 \left(\frac{-175e^{-6} + 25}{9}\right) = \frac{-3500e^{-6} + 500}{9} \end{aligned}$$

Substituindo na equação:

$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t) dt} = \frac{6}{\left(\frac{-3500e^{-6} + 500}{9}\right)} = \frac{54}{-3500e^{-6} + 500} \approx 0,11 \text{ L/s} = 6,60 \text{ L/min}$$

Portanto a capacidade cardíaca é de 6,60 L/min.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho inicialmente recorreu-se a uma contextualização histórica sobre a origem do cálculo integral para compreender a motivação do surgimento das primeiras ideias que precederam a integral de Riemann. Em seguida objetivou-se definir os conceitos fundamentais no processo de integração usando de recursos visuais a fim de facilitar o aprendizado dos conceitos.

Todavia, o propósito central do trabalho foi de mostrar a razão pela qual este conteúdo tem grande importância nos cursos de exatas. Foi exposto a aplicabilidade do cálculo integral, além da matemática, em outras áreas como na física, na biologia, na economia. É válido atentar para o fato que não foi propósito deste trabalho aprofundar-se com mais rigor nas áreas que foram apresentadas, mas simplesmente mostrar de maneira direta as aplicações e em que contexto surge a necessidade do cálculo integral. Nem é possível trazer todas as aplicações onde se encontra integral de Riemann, pois são inúmeras. Como por exemplo no cálculo da área de uma superfície de um sólido revolução, em pressão, campo elétrico, força hidrostática, momento, centro de massa, na circulação sanguínea, em valores médios, distribuições normais, no valor atual de um fluxo de renda, no valor futuro de um fluxo de renda, em distribuição uniforme, distribuição exponencial dentre várias outras diversas aplicações.

Além disso, as integrais de Riemann caracterizam uma classe de funções integráveis pequena, ou seja, existem funções que possuem primitivas mas que não são possíveis de se encontrar através da integral de Riemann, diz-se que essas funções não são Riemann integráveis, e para atender a essa “falha” outros matemáticos empenham-se em aumentar a classe de funções integráveis como o matemático Henri Leon Lebesgue (1875-1941) que desenvolveu um método para encontrar uma nova classe de funções integráveis, a esse processo chama-se integral de Lebesgue e existe uma área muito vasta que estuda essas integrais que é chamada de Teoria da Medida (BARTLE, 1995), além de outras definições, como as Integrais de Kurzweil-Henstock (JOSÉ C. et al. 2019). Isso mostra que a teoria de integração encontra-se ainda em pleno desenvolvimento.

Assim sendo, este trabalho concentra-se apenas nos conceitos referentes ao método de integração de Riemann, e sugere-se tais ramos da matemática, como integral de Lebesgue, as integrais de Kurzweil-Henstock, integração numérica, que ampliam as classes de integrais, como sugestão para futuros trabalhos nesta linha de pesquisa.

## REFERÊNCIAS

BARDI, J. S. **A guerra do cálculo**. Tradução de Aluzio Pestana da Costa. Rio de Janeiro: RECORD LTDA, 2008.

BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue measure**. New York: JOHN WILEY & SONS, INC, 1995. Disponível em: <<https://www.passeidireto.com/arquivo/11132189/the-elements-of-integration-and-lebesgue-measure-robert-g-bartle>>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2020.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard blücher: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

DAVID HALLIDAY, ROBERT RESNICK, JEARL WALKER. **Fundamentos de física, volume 1: mecânica**. Tradução de Ronaldo Sérgio de Biasi. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, v. 1, 2016.

DAVID HALLIDAY, ROBERT RESNICK, KENNETH S. KRANE. **Física 3**. Tradução de Leydervan de Souza Xavier, Paulo Pedro Kenedi Pedro Manuel Calas Lopes Pacheco. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

FILHO, E. D. A. **Teoria elementar dos números**. 2. ed. São Paulo: NOBEL, 1985.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5ª. ed. São Paulo: LTC, v. 1, 2001.

JAMES STEWEART, TROY DAY. **Biocalculus: Calculus for the Life Sciences**. Boston: Cengage Learning, 2015. Disponível em: <<https://uotechnology.edu.iq/dep/bme/Pages/Lectures/mathmatix/2stage/BIOCALCULUS%20CALCULUS%20FOR%20LIFE%20SCIENCES%201ST%20EDITION%20C2015.pdf>>. Acesso em: 30 de Dezembro de 2019.

JOSÉ C. MAGOSSÍ, ANTÔNIO C. C. BARROS. O conceito de integrais nos cursos de Cálculo. **SBM**, Dezembro 2019. Disponível em: <[http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/2019/12/art20\\_vol7\\_2019\\_SBM\\_PMO.pdf](http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/2019/12/art20_vol7_2019_SBM_PMO.pdf)>. Acesso em: 14 de Janeiro de 2020.

NETO, A. A. C. Cálculo integral para o Ensino Médio. **SBM**, Junho 2019. Disponível em: <[http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/dlm\\_uploads/2019/06/art10\\_vol7\\_2019\\_SBM\\_PMO.pdf](http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/dlm_uploads/2019/06/art10_vol7_2019_SBM_PMO.pdf)>. Acesso em: 14 de Janeiro de 2020.

STEWART, J. **Cálculo - volume I - Tradução da 7ª edição norte americana**. Tradução de EZ2Translate. 7ª. ed. São Paulo: Cengage Learning, v. 1, 2013. Disponível em: <[http://sinop.unemat.br/site\\_antigo/prof/foto\\_p\\_downloads/fot\\_12991calculovolume1\\_jamesstewart\\_cor.pdf](http://sinop.unemat.br/site_antigo/prof/foto_p_downloads/fot_12991calculovolume1_jamesstewart_cor.pdf)>. Acesso em: 02 de Agosto de 2019.

TAN, S. T. **Matemática aplicada a administração e economia**. Tradução de Fábio Armando Tal. 2ª. ed. São Paulo: Pioneira, 2007. Disponível em: <<https://docero.com.br/doc/xs0cx1>>. Acesso em: 02 de Janeiro de 2020.

VILCHES, M. A. **Cálculo para Economia e Administração**. [S.l.]: [s.n.]. Disponível em: <<https://www.ime.uerj.br/~calculo/reposit/ecomat.pdf>>. Acesso em: 29 de Dezembro de 2019.