



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JORGE DUARTE MONTEIRO

**APLICAÇÃO DA REGRA DE SIMPSON ADAPTADA PARA ESTIMAR A
DETERMINAÇÃO DE VOLUMES UTILIZANDO UMA INTEGRAL DUPLA**

Abaetetuba – Pará

2019

JORGE DUARTE MONTEIRO

**APLICAÇÃO DA REGRA DE SIMPSON ADAPTADA PARA ESTIMAR A
DETERMINAÇÃO DE VOLUMES UTILIZANDO UMA INTEGRAL DUPLA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário do Baixo Tocantins, como requisito final para obtenção do grau de Licenciado Pleno em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa.

Abaetetuba - Pará

2019

JORGE DUARTE MONTEIRO

APLICAÇÃO DA REGRA DE SIMPSON ADAPTADA PARA ESTIMAR A DETERMINAÇÃO DE VOLUMES UTILIZANDO UMA INTEGRAL DUPLA

Este trabalho de conclusão de curso foi julgado e aprovado, para a obtenção do título de Licenciado em Matemática pelo corpo docente da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário do Baixo Tocantins.

Abaetetuba, 07 do 08 de 2019.

Prof º. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa

UFPA/Abaetetuba

Orientador

Prof º. Dr. Rômulo Corrêa Lima

UFPA/Abaetetuba

Examinador

Prof º. Dr. José Francisco da Silva Costa

UFPA/Abaetetuba

Examinador

RESUMO

Esse trabalho de conclusão de curso (*TCC*) tem o objetivo de aplicar a regra de Simpson composta (*RSC*) adaptada para uma solução numérica de uma integral dupla denominada integral dupla de Simpson (*IDS*), com um intuito de ratificar uma alternativa presente na literatura para obter a solução de uma integral dupla. Nesse sentido, foi apresentada uma breve revisão dos conceitos referente às funções de duas variáveis, abordando-se limite e continuidade, em seguida a teórica referente às integrais duplas, bem como o conceito de interpolação, em particular a interpolação de Lagrange, a qual serviu de suporte teórico para definir as regras de Simpson simples e composta, sendo a composta adaptada para estimar a solução de uma integral dupla considerando uma região de integração não-retangular. Uma aplicação foi desenvolvida, onde a mesma consistiu em resolver uma integral dupla que determinava o volume de um sólido compreendido entre dois paraboloides. A referida integral foi calculada analiticamente, como também numericamente tendo os resultados comparados através do erro relativo. Tal comparação ratificou que a estratégia numérica abordada se apresenta como uma atraente alternativa principalmente na impossibilidade de determinar o valor de uma integral dupla de forma analítica.

Palavras-chave: Integração Numérica. Regra de Simpson. Regra de Simpson Adaptada. Auxílio Computacional.

ABSTRACT

This course completion paper (*TCC*) aims to apply the composite Simpson's rule (*RSC*) adapted to a numerical solution of a double integral called Simpson's double integral (*IDS*), in order to ratify an alternative present in the literature. to obtain the solution of a double integral. In this sense, a brief review of the concepts regarding the functions of two variables was presented, addressing limit and continuity, followed by the theory concerning double integrals, as well as the concept of interpolation, in particular Lagrange interpolation, which served theoretical support to define simple and compound Simpson's rules, with the composite adapted to estimate the solution of a double integral considering a non-rectangular integration region. An application was developed, where it consisted of solving a double integral that determined the volume of a solid comprised between two paraboloids. This integral was calculated analytically as well as numerically having the results compared through the relative error. Such comparison ratified that the numerical strategy approached presents itself as an attractive alternative mainly in the impossibility of determining the value of a double integral analytically.

Keywords: Numerical Integration. Simpson's Rule. Simpson's Rule Adapted. Computational Help.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1-Representação esquemática da definição de uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$ 12
- Figura 2- Representação gráfica de uma função $z = f(x, y)$ definida em um campo de existência D 13
- Figura 3-Representação geométrica da definição de limite para funções de duas variáveis 14
- Figura 4-Representação de um sólido S limitado superiormente por $z = f(x, y)$ e inferiormente por uma região D restrita por uma região retangular R 16
- Figura 5-Interpretação geométrica de um prisma retangular de base D_{ij} (cor laranja) e um ponto amostra (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em sua base (cor vermelho) inscrito em um sólido S 17
- Figura 6-Representação geométrica das regiões tipo I, onde as regiões D (cor azul) são limitadas superiormente por $y = g_2(x)$ e inferiormente por $y = g_1(x)$, respectivamente..... 19
- Figura 7- Representação geométrica das regiões do tipo II, onde as regiões D (cor azul) são limitadas a direita e a esquerda pelas curvas $x = h_2(x)$ e por $x = h_1(x)$,respectivamente..... 19
- Figura 8-Representação geométrica de interpolação de uma função $y = f(x)$ (cor cinza) por um polinômio interpolador $P_n(x)$ (cor preta) 21
- Figura 9- Geometria utilizada para determinar a regra de Simpson simples (RSS), onde $y = f(x)$ (cor amarela) é aproximada por um polinômio quadrático $P_2(x)$ (cor azul)..... 24
- Figura 10-Representação geométrica da RSC, onde $y = f(x)$ (cor azul) é aproximada por polinômios quadráticos do tipo $P_2(x)$ (cor laranja) 28

Figura 11-Representação geométrica de uma região de integração limitada superiormente por uma $y = d(x)$ (cor vermelha), inferiormente por $y = c(x)$ (cor cinza) e lateralmente por retas a e b 29

Figura 12-Imagem geométrica de um sólido compreendido entre os paraboloides $z = 5x^2 + 5y^2$ e $z = 6 - 7x^2 - y^2$ 33

Figura 13- Imagem geométrica da projeção do sólido W compreendido entre os paraboloides $z = 5x^2 + 5y^2$ e $z = 6 - 7x^2 - y^2$ 34

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	10
2. FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS, LIMITE E CONTINUIDADE	12
2.1 DEFINIÇÃO DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS.....	12
2.2 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS.....	12
2.3 LIMITE E CONTINUIDADE	13
2.4 DEFINIÇÃO DE LIMITE PARA FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS	13
2.5 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE LIMITE PARA FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS	14
2.6 CONTINUIDADE PARA FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS	14
3. INTEGRAL DUPLA	16
3.1 INTEGRAL DUPLA EM REGIÕES GERAIS	16
3.2 LIMITES DE INTEGRAÇÃO NA INTEGRAL DUPLA EM REGIÕES GERAIS.....	18
3.2.1 Teorema	20
3.3 PROPRIEDADES DE INTEGRAIS DUPLAS	20
4. INTERPOLAÇÃO	21
4.1 CONCEITO DE INTERPOLAÇÃO	21
4.2 POLINÔMIO INTERPOLADOR DE LAGRANGE	22
4.2.1 Fórmula do polinômio interpolador de Lagrange	22
4.2.2 Erro de truncamento ($ET(x)$)	23
5. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	24
5.1 Regra de Simpson simples (RSS).....	24
5.1.1 Erro de truncamento (E_{RSS}).....	27
5.2 Regra de Simpson composta (RSC).....	27
5.2.1 Erro de truncamento (E_{RSC})	28
5.3 Regra de Simpson composta adaptada para estimar o resultado de uma integral dupla considerando uma região geral (IDS).....	29
5.3.1 Algoritmo para a integral dupla de Simpson (IDS)	31
6. INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA	33
6.1 CÁLCULO DO VOLUME DE UM SÓLIDO ATRAVÉS DE UMA INTEGRAL DUPLA EM SUA FORMA ITERADA UTILIZANDO A IDS	33
6.1.1 Descrição do problema	33
7. CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	39

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	40
ANEXO A	41

1. INTRODUÇÃO

O cálculo diferencial integral surgiu devido a necessidade de se calcular áreas de figuras geométricas, porém o cálculo se estende muito além do cálculo de área, abrange as diversas áreas da ciência, por exemplo, o comprimento de uma curva no plano, o trabalho realizado por uma força, a pressão exercida por um fluido em um objeto submerso nele, densidade, o cálculo do volume de um sólido, entre outros (ANTON, BIEVENS, DAVIS, 2007; STEWART, 2012). Ainda como informação, segundo Eves (2012, p.462) o cálculo, tendo como suporte a geometria analítica foi o maior instrumento matemático descoberto no século XVII, ele se mostrou notavelmente influente e eficiente para solução de problemas que historicamente antes não se conseguia resolver. Neste sentido, o desenvolvimento do cálculo diferencial integral teve a contribuição de vários cientistas, salientando que os conceitos básicos referente ao processo de integração já tinham sido registrados há 2500 pelos gregos, tais como Eudócio e Arquimedes (JAMES STEWART 2012, p.368).

Nas integrais existem situações em que não se tem a possibilidade ou aplicabilidade em utilizar uma integral simples. Havendo a necessidade de estender tal teoria para as chamadas integrais múltiplas (duplas ou triplas). Agora, suponha uma integral com alto grau de complexidade e que seja inviável utilizar as operações como diferenciação e integração, ou suponha que tenha um conjunto de pontos os quais estão tabelados tendo-se quer trabalhar com esta função e não dispondo de sua forma analítica, nesses casos se faz necessária a utilização de métodos numéricos para a solução de tais situações que são ser obtidas através do cálculo numérico (BARROSO, 1987; GILAT and SUBRAMANIAM, 2008; CHAPRA and CANALE, 2010), neste sentido, no presente Trabalho de Conclusão de Curso (*TCC*) será apresentada e aplicada uma regra de integração numérica, qual seja: regra de Simpson (simples e composta), onde a mesma será adaptada para estimar-se o cálculo de uma integral dupla com auxílio o computacional.

Além deste capítulo introdutório, o trabalho em questão está estruturado da seguinte forma: no segundo capítulo aborda-se os fundamentos teóricos relacionados às funções de duas variáveis, bem como os conceitos de limite e continuidade das mesmas. No terceiro apresenta-se um suporte teórico relacionado às integrais duplas. No quarto serão expostos os conceitos de interpolação, polinômio interpolador de Lagrange e erro de truncamento. No quinto apresentam-se os conceitos levando em consideração uma integração numérica, em particular a regra de Simpson (simples e composta), a qual será adaptada para estimar o resultado de uma integral dupla. No sexto capítulo mostra-se uma comparação entre os resultados obtidos analiticamente e numericamente de uma integral dupla através de uma análise de erro utilizando a definição de erro relativo.

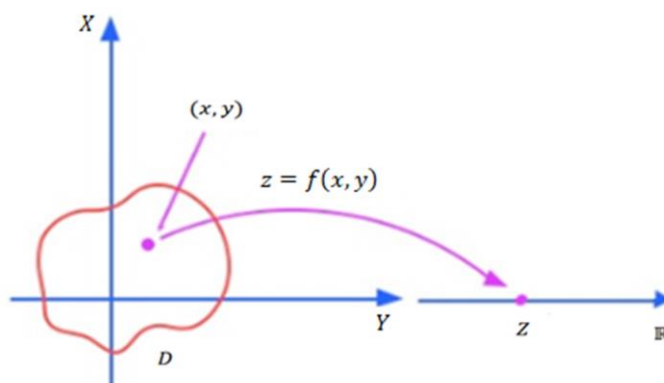
2. FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS, LIMITE E CONTINUIDADE

Neste capítulo será abordada uma fundamentação teórica de funções de duas variáveis, limite e continuidade, tais teorias serão de fundamental importância para a compreensão de integrais duplas e dos capítulos seguintes.

2.1 DEFINIÇÃO DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

De acordo com Anton, Bivens e Davis (2007, p.907) uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$ é definida através de uma regra que associa dois valores independentes reais x, y pertencentes a um campo de existência D no plano xy a um único valor real z (ver, Figura 1).

Figura 1-Representação esquemática da definição de uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$



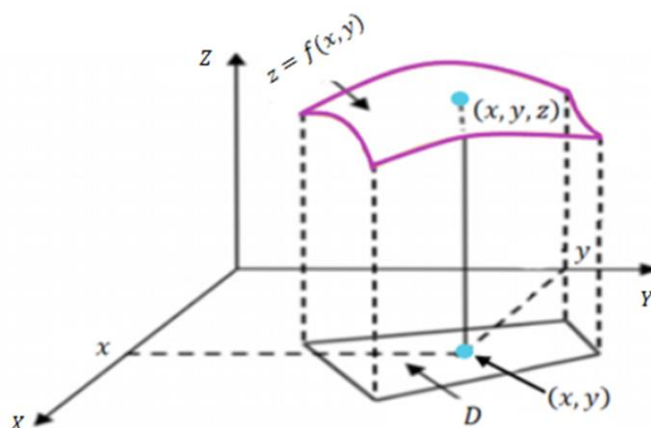
Fonte: Adaptado de GUIDORIZZI, 2011

2.2 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

A imagem geométrica de uma função $z = f(x, y)$ é definida, como segue (ver, Figura 2) (GUIDORIZZI, 2011, p.152):

$$Gr(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in D(f) \text{ e } z = f(x, y)\} \quad (1)$$

Figura 2- Representação gráfica de uma função $z = f(x, y)$ definida em um campo de existência D



Fonte: Adaptado de MUNEN; FOULIS, 1982

2.3 LIMITE E CONTINUIDADE

Nessa seção será abordada a fundamentação teórica necessária para a compreensão do conceito de limite e continuidade para funções de duas variáveis.

2.4 DEFINIÇÃO DE LIMITE PARA FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Considere uma função $z = f(x, y)$ e suponha que a mesma esteja definida em todos os pontos de algum disco aberto de raio ε arbitrário positivo suficientemente pequeno de centro (x_0, y_0) , exceto, possivelmente em (x_0, y_0) , nestas condições quando (x, y) tendem a (x_0, y_0) , $f(x, y)$ tende a um determinado valor L (limite), ou seja (Anton, Bivens e Davis (2007, p.920):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L \quad (2)$$

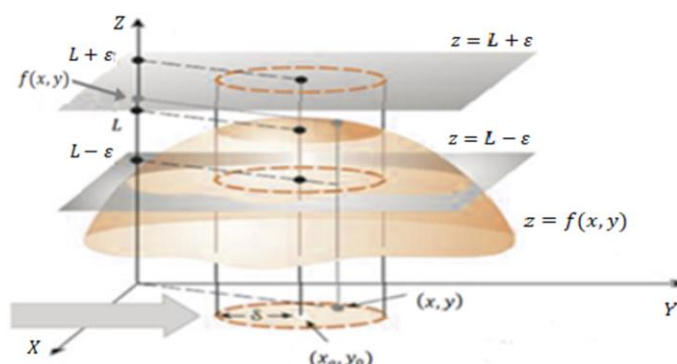
Salienta-se que em uma abordagem formal o limite L , verifica a seguinte sentença (GUIDORIZZI, 2011, p.71):

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon \quad (3)$$

2.5 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE LIMITE PARA FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Geometricamente, limites de funções de duas variáveis indicam que valores de $f(x, y)$ são condicionados a estarem localizados a menos de ε unidades de L no eixo Z pela exigência de que (x, y) esteja a menos de δ unidades de (x_0, y_0) no plano XY (ver, Figura 3). Ainda como informação, destaca-se que a condição do ε não precisa ser verificada nesse ponto (x_0, y_0) (Anton, Bivens e Davis (2007, p.920).

Figura 3-Representação geométrica da definição de limite para funções de duas variáveis



Fonte: Adaptado de JAMES STEWART, 2006

2.6 CONTINUIDADE PARA FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$ é dita contínua em um determinado ponto (x_0, y_0) , se três condições são satisfeitas simultaneamente, quais sejam:

$$\text{I.} \quad \exists f(x_0, y_0) \quad (4)$$

$$\text{II.} \quad \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) \quad (5)$$

$$\text{III.} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b) \quad (6)$$

Observação: Para uma função $z = f(x,y)$ ser contínua em todo seu campo de existência D , a mesma pode ser avaliada em todos os pontos (x_0, y_0) pertencente D (JAMES STEWART 2006, p.903).

3. INTEGRAL DUPLA

Neste capítulo será abordado à fundamentação teórica das integrais duplas.

3.1 INTEGRAL DUPLA EM REGIÕES GERAIS

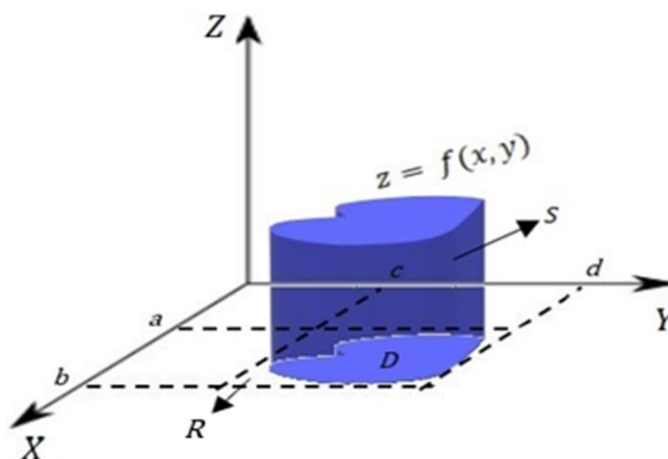
Suponha uma região D limitada, o que significa que a mesma pode ser restrita por uma região retangular R (ver, Figura 4). Agora considere uma função $z = f(x, y)$ de duas sentenças e domínio D , isto é (James Stewart 2006, p.993):

$$z = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \text{ está em } D \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ está em } R, \\ & \text{mas não em } D \end{cases} \quad (7)$$

Neste contexto, considere um sólido S limitado superiormente por $f(x, y) \geq 0$ e inferiormente por D , como segue (ver, Figura 4):

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}\} \quad (8)$$

Figura 4-Representação de um sólido S limitado superiormente por $z = f(x, y)$ e inferiormente por uma região D restrita por uma região retangular R



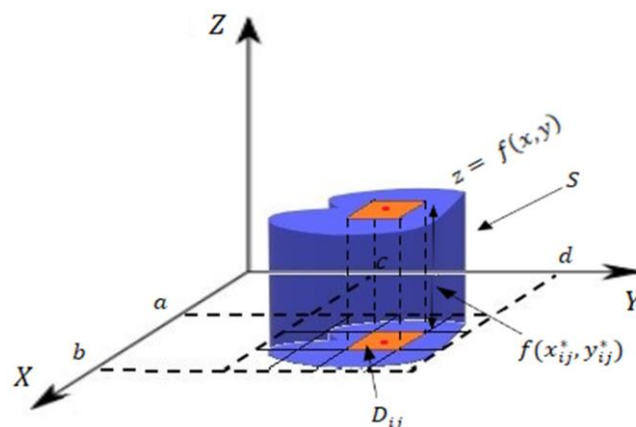
Fonte: Autoria própria

O objetivo nessa seção é calcular o volume V do sólido S supracitado. A estratégia utilizada consiste inicialmente restringir inteiramente a região D em um retângulo cujos seus lados são paralelos aos eixos coordenados X e Y , em seguida traça-se feixes de retas paralelas aos eixos dos X e Y , varrendo a região D por sub-retângulos, de tal maneira que as dimensões dos sub-retângulos sejam cada vez menores, tal procedimento é empregado com o intuito de que a diagonal máxima de cada sub-retângulos tendam a zero, ou seja, o intervalo $[a, b]$ é dividido em m subintervalos $[x_{j-1}, x_i]$ igualmente espaçados, fazendo $\Delta x = \frac{(b-a)}{m}$ e analogamente dividindo o intervalo $[c, d]$ em n subintervalos $[y_{j-1}, y_i]$ também igualmente espaçados, isto é, $\Delta y = \frac{(d-c)}{n}$. A área dos sub-retângulos é definida por $\Delta A = \Delta x \Delta y$ (ver, Figura 5).

Agora, considerando um ponto qualquer denominado de ponto amostra (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em cada retângulo D_{ij} , aproxima-se a parte de S que está acima de cada D_{ij} por um prisma retangular fino com base D_{ij} e altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ (ver, Figura 5). O volume desse prisma é dado pelo produto da área base retangular pela altura, como segue (James Stewart 2006, p.980):

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \quad (9)$$

Figura 5-Interpretação geométrica de um prisma retangular de base D_{ij} (cor laranja) e um ponto amostra (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em sua base (cor vermelho) inscrito em um sólido S



Fonte: Autoria própria

Assim, aplicando sucessivamente o processo em questão e efetuando a soma dos volumes, obtém-se uma aproximação do volume em sua forma discretizada, como segue:

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \quad (10)$$

O duplo somatório em (10) significa que, para cada sub-retângulo calcula-se o valor da $z = f(x, y)$ dada em um ponto amostra escolhido, em seguida multiplica-se esse valor obtido pela área do sub-retângulo, e então somam-se os resultados, Por indução a aproximação dada por (10) refina-se quando se aplica o limite de $(m, n) \rightarrow \infty$, ou seja:

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \quad (11)$$

Assim, define-se integral dupla de uma função $z = f(x, y)$ sob uma região D em sua forma contínua como segue:

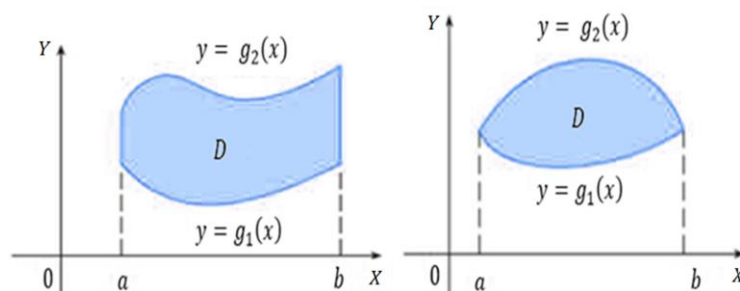
$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \quad (12)$$

3.2 LIMITES DE INTEGRAÇÃO NA INTEGRAL DUPLA EM REGIÕES GERAIS

Segundo Anton, Bivens (2007, p.1027), existem duas maneiras de definir o campo de integração em regiões gerais, como segue:

(1) Região do tipo I é limitada a direita e a esquerda por retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo limitada superiormente e inferiormente através de curvas contínuas $y = g_2(x)$ e $y = g_1(x)$, respectivamente, no intervalo $[a, b]$, onde $g_1(x) < g_2(x)$, com $a \leq x \leq b$, (ver, Figura 6).

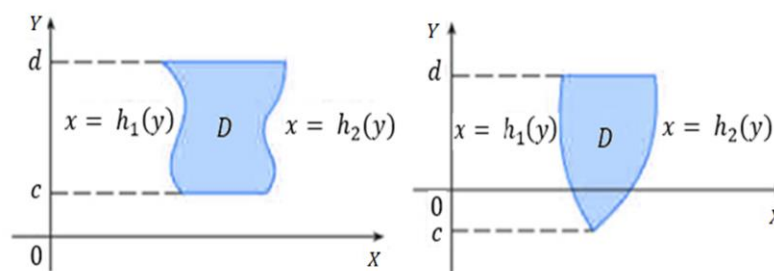
Figura 6-Representação geométrica das regiões tipo I, onde as regiões D (cor azul) são limitadas superiormente por $y = g_2(x)$ e inferiormente por $y = g_1(x)$, respectivamente



Fonte: Modificado de JAMES STEWART, 2006

(2) Região do tipo II é limitado superiormente e inferiormente por retas horizontais $y = c$ e $y = d$, com limitação a direita e a esquerda por curvas contínuas $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$, respectivamente, no intervalo $[c, d]$, onde $h_1(y) < h_2(y)$, com $c \leq y \leq d$, (ver, Figura 7).

Figura 7- Representação geométrica das regiões do tipo II, onde as regiões D (cor azul) são limitadas a direita e a esquerda pelas curvas $x = h_2(y)$ e por $x = h_1(y)$, respectivamente



Fonte: Modificado de JAMES STEWART, 2006

Observação: salienta-se que a teoria supracitada de integrais duplas para regiões gerais é válida para casos particulares em que a região é retangular.

3.2.1 Teorema

Segundo James Stewart (2012, p.995) o teorema a seguir permite calcular integrais tanto de tipo I quanto do tipo II, como segue:

(a) Se D for uma região do tipo I, na qual $z = f(x, y)$ é contínua, então a integral dupla (ver, 12) é calculada analiticamente da seguinte forma iterada:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx. \quad (13)$$

(b) Se D for uma região do tipo II, na qual $z = f(x, y)$ for contínua, então a integral dupla pode ser calculada através da expressão analítica iterada:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy. \quad (14)$$

3.3 PROPRIEDADES DE INTEGRAIS DUPLAS

Conforme Diva Flemming (2007, p.231), para garantir a validade das propriedades, suponha que a região de integração D é formada por um número finito de arcos de curvas suaves e que as funções $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$ são contínuas sobre a região D , de modo que esteja verificada a existência das integrais duplas envolvidas. Assim, obtém-se:

$$(1) \iint k f(x, y) dx dy = k \iint f(x, y) dx dy; \quad \forall k \in \mathbb{R};$$

$$(2) \iint [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint f(x, y) dx dy + \iint g(x, y) dx dy;$$

$$(3) \text{ se } f(x, y) > g(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}, \text{ então } \iint f(x, y) dx dy > \iint g(x, y) dx dy;$$

$$(4) \text{ se } f(x, y) > 0, \text{ para todo } (x, y), \text{ pertencente a região } D, \text{ então } \iint f(x, y) dA \geq 0;$$

(5) se a região D é composta por duas sub-regiões D_1 e D_2 que não tem pontos em comum, exceto possivelmente os pontos de fronteira, então:

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{D_1} f(x, y) dx dy + \int \int_{D_2} f(x, y) dx dy. \quad (15)$$

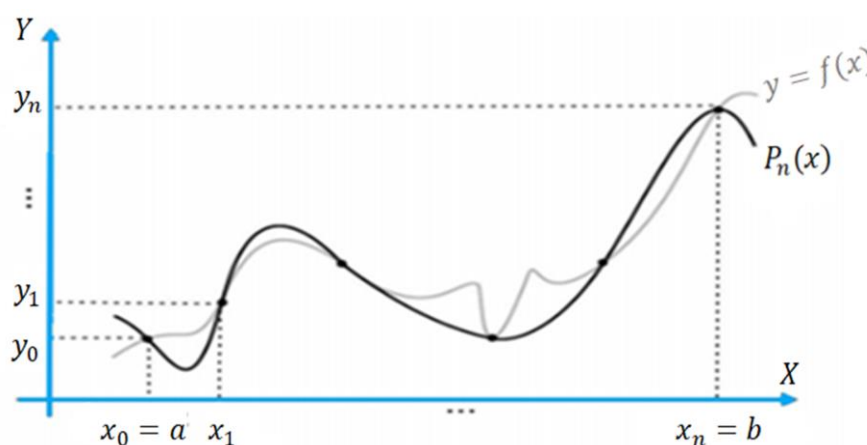
4. INTERPOLAÇÃO

Segundo Ruggiero (1996, p.212) rotineiramente, em situações onde se conhece a forma analítica de uma determinada função, no entanto a mesma é complexa inviabilizando, por exemplo, operações como a diferenciação e integração, faz-se necessário utilizar uma interpolação, ou seja, substitui-se a mesma por uma função mais simples, quais sejam: trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e polinomiais. Outra situação que merece destaque é quando uma função está representada somente através de pontos tabelados, característica está indicando também um processo de interpolação.

4.1 CONCEITO DE INTERPOLAÇÃO

Suponha que existam $n + 1$ pontos x_0, x_1, \dots, x_n pertencente ao intervalo $[a, b]$ denominados nós da interpolação, e os valores de $y = f(x)$ nesses pontos determinados por y_0, y_1, \dots, y_n . A interpolação busca determinar um polinômio interpolador $P_n(x)$, tal que a imagem de $P_n(x)$ seja igual a de $y = f(x)$ (ver, Figura 8).

Figura 8-Representação geométrica de interpolação de uma função $y = f(x)$ (cor cinza) por um polinômio interpolador $P_n(x)$ (cor preta)



Fonte: modificado de ARENALES, 2010

4.2 POLINÔMIO INTERPOLADOR DE LAGRANGE

Os casos de interpolação (linear e quadrática) são particularidades do polinômio interpolador de Lagrange, visto que o mesmo produz polinômios de grau $\leq n$, o interessante desse método é a não necessidade da resolução de um sistema linear para se obter o polinômio em questão.

4.2.1 Fórmula do polinômio interpolador de Lagrange

A forma generalizada do polinômio interpolador de Lagrange para um polinômio de grau $(n - 1)$, que passe por n pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ é definido por (RUGGIERO E LOPES 1996, p.216):

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} y_0 & (16) \\
 & + \frac{(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)} y_1 \\
 & \cdots + \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} y_i + \cdots + \\
 & \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})} y_n
 \end{aligned}$$

ou em sua forma compacta, como segue:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (17)$$

As funções de Lagrange $(L_i(x))$ é definida por:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (18)$$

4.2.2 Erro de truncamento ($E_T(x)$)

Segundo Barroso (1987, p.171), a fórmula para quantificar teoricamente o erro de truncamento do polinômio interpolador de Lagrange $P_n(x)$ é definida por:

$$E_T(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n + 1)!}; \xi \in (a, b) \quad (19)$$

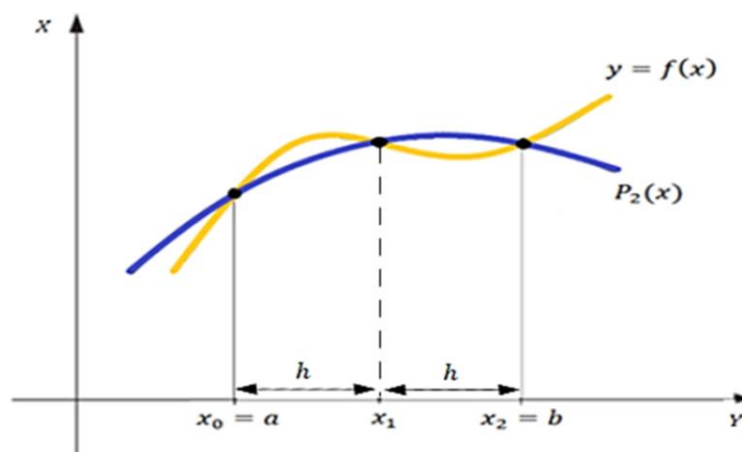
5. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A integração numérica é uma ferramenta que auxilia na resolução de integrais simples ou múltiplas (duplas ou triplas). Na literatura, existem diversas aplicações para as integrais tais como: cálculo do volume, cálculo de área, comprimento de uma curva, dentre outras (STEWART, 2012, p.381). Assim, considerando uma integral com alto grau de complexidade em que inviabiliza as operações que satisfazem o 1º teorema fundamental do cálculo (GUIDORIZZI, 2001, p.305) ou ainda situações onde a função integrando é de forma tabular, necessita-se utilizar-se de técnicas numéricas para estimar seu resultado. Neste contexto, serão abordadas regras de integração numérica denominadas Simpson simples (*RSS*) e Simpson composta (*RSC*), onde esta última será adaptada para solução de um integral dupla chamada integral dupla de Simpson (*IDS*).

5.1 Regra de Simpson simples (*RSS*)

Considere três pontos distintos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e um polinômio interpolador de Lagrange de grau 2 representado por $P_2(x)$, o qual estabelece uma aproximação para $y = f(x)$ (ver, Figura 9).

Figura 9- Geometria utilizada para determinar a regra de Simpson simples (*RSS*), onde $y = f(x)$ (cor amarela) é aproximada por um polinômio quadrático $P_2(x)$ (cor azul)



Fonte: Modificado de BARROSO, 1987

Agora, observando a Figura (9), considera-se:

$$x_0 = a \quad (20)$$

$$x_1 = x_0 + h \quad (21)$$

$$x_2 = x_0 + 2h = b \quad (22)$$

Em seguida, manipulando-se algebricamente (20), (21) e (22), obtém-se:

$$h = x_1 - x_0 \quad (23)$$

$$h = x_2 - x_1 \quad (24)$$

$$-h = x_0 - x_1 \quad (25)$$

$$-h = x_1 - x_2 \quad (26)$$

$$2h = x_2 - x_0 \quad (27)$$

$$-2h = x_0 - x_2 \quad (28)$$

Neste contexto, para determinar a *RSS*, utiliza-se a seguinte identidade:

$$I_{RSS} = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_2(x)dx \quad (29)$$

onde $P_2(x)$ é determinado por (17), isto é:

$$\begin{aligned} P_2(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}y_1 \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}y_2 \end{aligned} \quad (30)$$

Assim, substituindo (30) em (29), obtém-se.

$$\begin{aligned} I_{RSS} = & \int_a^b \left[\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}y_1 \right. \\ & \left. + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}y_2 \right] dx \end{aligned} \quad (31)$$

Para efeito de formulação matemática insere-se (23), (24), (25), (26), (27), (28) em (31), resultando em:

$$I_{RSS} = \int_a^b \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(-h)(-2h)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(h)(-h)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(2h)(h)} y_2 \right] dx \quad (32)$$

$$I_{RSS} = \frac{y_0}{2h^2} \int_a^b (x-x_1)(x-x_2) dx - \frac{y_1}{h^2} \int_a^b (x-x_0)(x-x_2) dx + \frac{y_2}{2h^2} \int_a^b (x-x_0)(x-x_1) dx \quad (33)$$

Destaca-se que para resolver as integrais em (33) é necessário utilizar uma técnica de integração denominada mudança de variável (GUIDORIZZI, 2001, p.361), ou seja:

$$x - x_0 = zh \Rightarrow x = x_0 + zh \Rightarrow dx = h dz \quad (34)$$

$$x - x_1 = x_0 + zh - (x_0 + h) = (z - 1)h \quad (35)$$

$$x - x_2 = x_0 + zh - (x_0 + 2h) = (z - 2)h \quad (36)$$

Assim, fazendo $x = x_0$, $x = x_1$ e $x = x_2$ em (34), (35) e (36), obtém-se, respectivamente:

$$x = x_0 \rightarrow z = 0 \quad (37)$$

$$x = x_1 \rightarrow z = 1 \quad (38)$$

$$x = x_2 \rightarrow z = 2 \quad (39)$$

Desta forma, (33) reescreve-se em: (40)

$$I_{RSS} = \frac{y_0}{2h^2} \int_0^2 (z-1)(z-2)h^3 dz - \frac{y_1}{h^2} \int_0^2 z(z-2)h^3 dz + \frac{y_2}{2h^2} \int_0^2 h(z-1)h^3 dz \quad (41)$$

$$I_{RSS} = \frac{hy_0}{2} \int_0^2 (z^2 - 3z + 2)h^3 dz - hy_1 \int_0^2 (z^2 - 2z) dz + \frac{hy_2}{2} \int_0^2 (z^2 - z) dz$$

Portanto, aplicando uma técnica de primitivação em (41), têm-se:

$$I_{RSS} = \frac{hy_0}{2} \left[\frac{z^3}{3} - \frac{3z^2}{2} + 2z \right]_0^2 - hy_1 \left[\frac{z^3}{3} - \frac{3z^2}{2} \right]_0^2 + \frac{hy_2}{2} \left[\frac{z^3}{3} - \frac{3z^2}{2} \right]_0^2 \quad (42)$$

$$I_{RSS} = \frac{hy_0}{2} \left[\frac{8}{3} - 6 + 4 \right] - hy_1 \left[\frac{8}{3} - 4 \right] + \frac{hy_2}{2} \left[\frac{8}{3} - 2 \right] \quad (43)$$

$$I_{RSS} = \frac{hy_0}{3} + \frac{4hy_1}{3} + \frac{hy_2}{3} \quad (44)$$

$$I_{RSS} = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2] \quad (45)$$

sendo esta última a chamada *RSS*

5.1.1 Erro de truncamento (E_{RSS})

O erro de truncamento teórico produzido pela utilização da *RSS* é definido por (BARROSO 1987, p.216):

$$E_{RSS} = \frac{-h^5}{90} f''''(\xi), \text{ com } h = \frac{(b-a)}{2} \quad (46)$$

$$a \leq \xi \leq b$$

Ainda como informação $f''''(\xi)$ representa a 4º derivada da função.

5.2 Regra de Simpson composta (*RSC*)

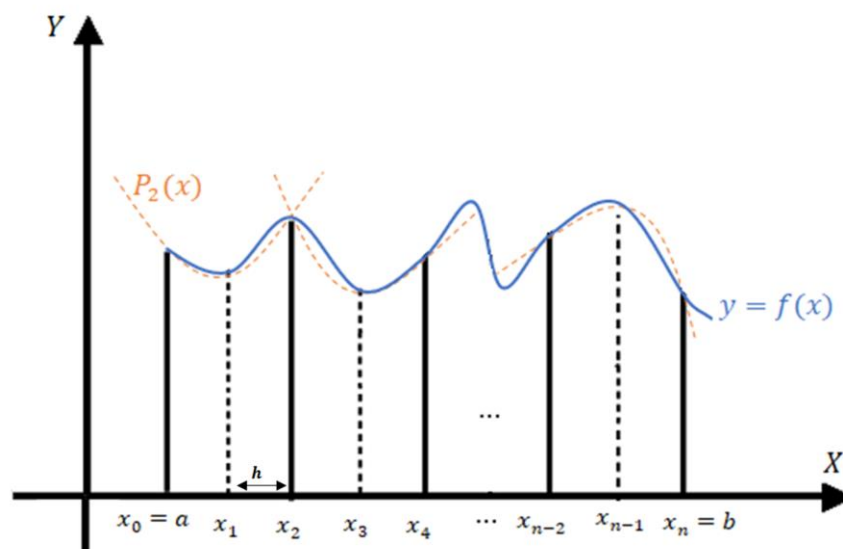
A *RSC* define-se aplicando $n - \text{vezes}$ a *RSS* em um determinado $[a, b]$ (ver, Figura 10), com n sendo par representando o número de subintervalos igualmente espaçados com medida h , onde $h = \frac{b-a}{n}$, nessas condições tem-se (BARROSO 1987, p.228):

$$I_{RSC} = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2] + \frac{h}{3} [y_2 + 4y_3 + y_4] + \dots + \frac{h}{3} [y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n] \quad (47)$$

ou ainda,

$$I_{RSC} = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n] \quad (48)$$

Figura 10-Representação geométrica da RSC, onde $y = f(x)$ (cor azul) é aproximada por polinômios quadráticos do tipo $P_2(x)$ (cor laranja)



Fonte: Modificado de BURDEN; FAIRES 2008

5.2.1 Erro de truncamento (E_{RSC})

Segundo Barroso (1987, p.218) o erro de truncamento gerado pela RSC é um somatório dos erros de truncamento produzidos pela RSS estimados por (46), assim obtém-se:

$$E_{RSC} = [E_1 + E_2 + E_3 + E_{\frac{n}{2}}] = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} E_i \quad (49)$$

onde, E_i representa o erro estimado pela utilização da RSC, considerando n par, como segue:

$$E_{RSC} = \frac{-(b-a)^5}{180n^4} f''''(\xi) \quad a \leq \xi \leq b \quad (50)$$

5.3 Regra de Simpson composta adaptada para estimar o resultado de uma integral dupla considerando uma região geral (IDS)

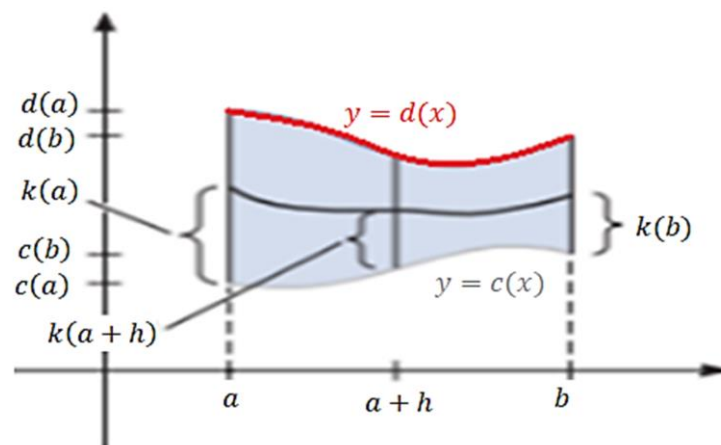
Nesta seção será abordada a fundamentação teórica para calcular numericamente o valor de uma integral dupla em regiões de integração gerais. Neste contexto, considere a integral dupla da forma geral (13), ou seja:

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx \quad (51)$$

Em seguida, utiliza-se *RSS* para integrar em ambas variáveis, a amplitude da variação da variável x é dado por $h = \frac{(b-a)}{2}$, por outro lado, o incremento da variável y varia de acordo com a variação de x (BURDEN, FAIRES 2008, p.222) (ver, Figura 11), sendo descrito por:

$$k(x) = \frac{d(x) - c(x)}{2} \quad (52)$$

Figura 11-Representação geométrica de uma região de integração limitada superiormente por uma $y = d(x)$ (cor vermelha), inferiormente por $y = c(x)$ (cor cinza) e lateralmente por retas a e b



Fonte: Modificado de BURDEN, FAIRES, 2008

Assim sendo,

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx & \quad (53) \\
 & \approx \int_a^b \frac{k(x)}{3} [f(x, c(x)) + 4 f(x, c(x) + k(x)) \\
 & \quad + f(x, d(x))] dx \\
 & \approx \frac{h}{3} \left\{ \frac{k(a)}{3} [f(a, c(a)) + 4 f(a, c(a) + k(a)) + f(a, d(a))] \right. \\
 & \quad + \frac{4k(a+h)}{3} [f(a+h, c(a+h)) \\
 & \quad + 4 f(a+h, c(a+h) + k(a+h)) + f(a \\
 & \quad + h, d(a+h))] \\
 & \quad + \frac{k(b)}{3} [f(b, c(b)) + 4 f(b, c(b) + k(b)) \\
 & \quad \left. + f(b, d(b))] \right\}
 \end{aligned}$$

Observação: salienta-se que a *IDS* para regiões gerais é válida para casos particulares em que a região é retangular.





6. INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA

Para ratificar a eficiência e robustez da *IDS* apresentada no trabalho em questão resolverá-se uma integral dupla (ver, 51), a qual estima o volume de um sólido compreendido entre dois parabolóides, utilizando o algoritmo 5.3.1 implementado em uma interface do programa Matlab (ver, Anexo A). Para analisar o resultado obtido numericamente, o mesmo será comparado com o determinado de maneira analítica.

6.1 CÁLCULO DO VOLUME DE UM SÓLIDO ATRAVÉS DE UMA INTEGRAL DUPLA EM SUA FORMA ITERADA UTILIZANDO A *IDS*

6.1.1 Descrição do problema

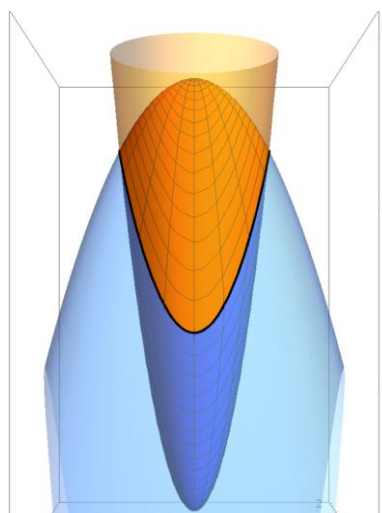
Determinar o volume V de um sólido W compreendido entre dois paraboloides (ver, Figura 12), quais sejam:

$$z = 5x^2 + 5y^2 \text{ e } z = 6 - 7x^2 - y^2 \quad (56)$$

Neste sentido, seja:

$$V = \iint_D 6 - 12x^2 - 6y^2 dydx \quad (57)$$

Figura 12-Imagem geométrica de um sólido compreendido entre os paraboloides $z = 5x^2 + 5y^2$ e $z = 6 - 7x^2 - y^2$

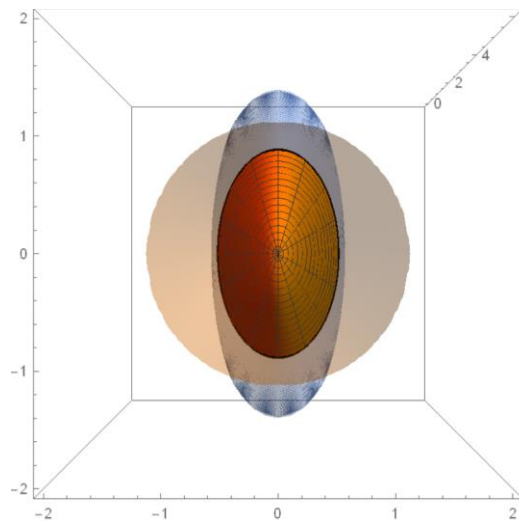


Para determinar o resultado de (57) analiticamente, considera-se a mesma em sua forma iterada do tipo I (ver, 51), ou seja:

$$V = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} (6 - 12x^2 - 6y^2) dy \right] dx \quad (58)$$

Os limites de integração em (58) são determinados pela projeção de W no plano xy , caracterizando uma elipse com eixo menor medindo $\sqrt{2}$ (ver, Figura 13).

Figura 13- Imagem geométrica da projeção do sólido W compreendido entre os paraboloides $z = 5x^2 + 5y^2$ e $z = 6 - 7x^2 - y^2$



Fonte: Modificado de ANTON, BIVENS, DAVIS, 2007

Assim, integrando (58) em relação y , obtém-se:

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} [6(1 - 2x^2)y - 2y^3] \Big|_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} dx \quad (59)$$

Em seguida, faz-se a substituição dos limites de integração superior e inferior em y , obtendo:

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{6(1-2x^2)\sqrt{1-2x^2} - 2(1-2x^2)\sqrt{1-2x^2} + 6(1-2x^2)\sqrt{1-2x^2}}{2(1-2x^2)\sqrt{1-2x^2}} dx = \\
& = \int_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[(8 - 16x^2)\sqrt{1-2x^2} \right] dx \\
& = \int_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[8(1-2x^2)\sqrt{1-2x^2} \right] dx \\
& = 8 \int_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[(1-2x^2)\sqrt{1-2x^2} \right] dx \\
& = 8 \int_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{(1-2x^2)^3} dx
\end{aligned}$$

Neste sentido, faz-se a mudança de variável na integral anterior, ou seja:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \theta$$

Agora, diferencia-se a referida igualdade em relação à x (primeiro membro) e em relação à θ (segundo membro), obtendo-se:

$$dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta d\theta$$

Como aplicou-se uma mudança de variável, deve-se trocar os limites de integração que antes estavam relacionados à x , ou seja:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

A partir desta análise, mudam-se os limites de integração da referida integral, sendo os mesmos relacionados à θ e substituindo-se dx por $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta d\theta$, obtêm-se a seguinte integral:

$$\begin{aligned}
 &= 8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\left[1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \theta \right)^2 \right] \right)^3} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta d\theta \\
 &= 8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\left[1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \theta \right) \right] \right)^3} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta d\theta \\
 &= 8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)^3} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{8}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)^3} \cos \theta d\theta
 \end{aligned}$$

Ainda como substituição, substitui-se $\operatorname{sen}^2 \theta$ pela relação fundamental da trigonometria, ou seja, $\cos^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta$, resultando:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{8}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\cos^2 \theta)^3} \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{8}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\cos^2 \theta)^2 \cdot \cos^2 \theta} \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{8}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sqrt{\cos^2 \theta} \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{8}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \cdot \sqrt{\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= \frac{8}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \cdot \cos \theta d\theta
 \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta)^2 \, d\theta$$

Posteriormente, substitui-se $\cos^2 \theta$ na integral acima pela relação trigonométrica $\cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta$, assim segue:

$$\frac{8}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta)^2 \, d\theta = \frac{8}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right)^2 \, d\theta$$

Agora, faz-se o cálculo do quadrado da soma, como segue:

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\theta \right) \right] \, d\theta$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4\theta \right] \, d\theta$$

Por fim, calcula-se a integral acima utilizando o 1º teorema fundamental (GUIDORIZZI, 2001, p.305), onde θ varia de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, tendo-se:

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} \left[\frac{\theta}{4} + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{\theta}{8} + \frac{1}{32} \sin 4\theta \right] \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

Assim, substituindo-se os limites de integração superior e inferior em θ , determina-se o seguinte resultado:

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} \right) - \left(-\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} \right) \right]$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right)$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} \left(\frac{2\pi + \pi}{8} \right)$$

$$V = \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \approx 6,66432440723755 \text{ u. v} \quad (60)$$

Para efeito de verificação numérica em relação ao resultado obtido em (60), utilizou-se o algoritmo *IDS*, levando em consideração uma discretização nos intervalos de integração $m = n = 4$, $m = n = 8$, $m = n = 16$ e $m = n = 32$, onde os resultados obtidos foram, respectivamente:

$$V_4 = 6,784597568730482 \text{ u. v} \quad (61)$$

$$V_8 = 6,682136635190006 \text{ u. v} \quad (62)$$

$$V_{16} = 6,667149642265964 \text{ u. v} \quad (63)$$

$$V_{32} = 6,664794355967721 \text{ u. v} \quad (64)$$

Os erros relativos quantificados a partir dos valores (61), (62), (63) e (64), quando comparados com o valor de volume V obtido analiticamente, foram os seguintes:

$$E_4 = 0,0180473149479811$$

$$E_8 = 0,0026727732421179$$

$$E_{16} = 0,00042393419884357$$

$$E_{32} = 0,000007051708492$$

7. CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

O presente trabalho apresentou uma abordagem sobre uma técnica numérica, em particular integração numérica utilizando as regras *RSS* e *RSC*, onde esta última foi reescrita para possibilitar que a mesma estime o resultado de uma integral dupla. Tal procedimento consistiu em estimar o volume de um sólido que apresenta uma região de integração não retangular. O volume foi calculado por técnicas analíticas, bem como utilizando a estratégia numérica aqui apresentada (*IDS*), onde se verificou que na impossibilidade de resolver uma integral dupla de forma fechada (analítica) o procedimento numérico *IDS* mostra-se como uma atraente alternativa na solução de problemas que dependem do cálculo de uma integral dupla.

Como perspectiva indica-se para um estudo mais aprofundado a expansão da fundamentação teórica deste trabalho para situações que levam em consideração não mais uma integração dupla e sim uma tripla, além de aplicar tais conhecimentos em uma situação problema que considere dados reais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, Howard; Irl. Bivens; Stephen Davis. **Cálculo**. tradução Clauss Ivo Doering. 8º ed. – Porto Alegre: Bookman 2007.

BARROSO, Leônidas et al. **Cálculo Numérico, com aplicação**. 2ª Ed. São Paulo – SP; Harbra, 1987.

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Análise Numérica**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

CHAPRA, S. C., CANALE, R. P., 2010, **Numerical methods for engineers**, 6th Ed., Mc Graw Hill Companies, Inc. New York.

DEMIDOVITCH, B. **Problemas e exercícios de análise matemática**. São Paulo: Escolar, Zamboni, 2015.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas-SP: Editora da Unicamp, 2004.

FLEMMING, Diva. M. **Calculo B**, São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo, volume I**. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

MUNEM, Mustafa A.; FOULIS, David J. **Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 1982. 2 v.

RUGGIERO, Marcia e LOPES, Vera. **Cálculo Numérico, Aspectos teóricos e computacionais**. 2ª Ed. São Paulo – SP; Pearson, 1996. 49.

STEWART, J., 2012, **Calculus**, 7th Ed., Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, CA. Learning, 2007.

ANEXO A

MATLAB é um programa de excelente performance voltado para o cálculo numérico, o mesmo integra análise numérica, elaboração de gráficos, solução de matrizes entre outras aplicações matemáticas, em relação a outros programas disponíveis para computadores o MATLAB é bastante eficiente e sua plataforma permite o cômputo de vários problemas numéricos em um período de tempo reduzido, por esse motivo optou-se por utilizar esse aplicado no referido trabalho. Este programa tem sua licença paga, no entanto é liberado para teste gratuito durante 30 dias, ele pode ser obtido acessando o link (<https://la.mathworks.com/products/matlab.html>).

Figura A1-interface do programa MATLAB

