UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RAFAELI PEREIRA LOBO

SOFTWARE GEOGEBRA NA EXPLORAÇÃO DE GEOMETRIA FRACTAL POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

CASTANHAL - PA
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RAFAELI PERIRA LOBO

SOFTWARE GEOGEBRA NA EXPLORAÇÃO DE GEOMETRIA FRACTAL POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Trabalho de conclusão de curso, submetido à banca examinadora da Faculdade de Matemática do Campus Universitário de Castanhal, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura Em Matemática.
Orientadora: Profa. Dra. Roberta Modesto Braga.

CASTANHAL - PA
2019

RAFAELI PEREIRA LOBO

SOFTWARE GEOGEBRA NA EXPLORAÇÃO DE GEOMETRIA FRACTAL POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Trabalho de conclusão de curso, submetido à banca examinadora da Faculdade de Matemática do Campus Universitário de Castanhal, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura Plena Em Matemática.

Data de avaliação: 04 de dezembro de 2019

Conceito: EXCELENTE

BANCA EXAMINADORA:

____

Profa. Dra. Roberta Modesto Braga
Presidente, Orientadora, UFPA

____

Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida
Avaliador Interno, UFPA Castanhal

____

Profa. MSc. Maria Eliana Soares
Avaliadora Externa, SEDUC Castanhal

CASTANHAL - PA
2019

Ao criador dos céus e da Terra, merecedor de toda honra e toda Glória!

AGRADECIMENTOS

Minha eterna gratidão a Deus, por me permitir ingressar na faculdade, realizar meus sonhos, por todo o cuidado, e proteção e por ser meu melhor amigo em todos os momentos da minha vida.

Agradeço aos meus pais Renato José Morais Lobo e Maria de Nazaré Pereira Lobo, por todos os conselhos, incentivo e suporte necessário para concluir a graduação, obrigada por sempre sonharem comigo, por acreditarem que eu era capaz, mesmo muitas das vezes duvidando, pela confiança depositada e por todas as orações, vocês foram e sempre serão meu alicerce.

Aos meus irmãos: Roberto, Rodrigo, Roberta, Romulo, Renata e Vitor, por todas as palavras de apoio, vocês são presentes de Deus na minha vida, os amo muito.

Ao meu noivo e futuro marido Alexandre Gomes, por toda paciência e amor dedicado, por participar de todo o ciclo acadêmico, sempre acreditando no meu melhor, nunca me permitindo desistir, sempre compartilhando conhecimento, obrigada por ser meu amigo e confidente, você é meu $cos^2(x)$.

À Adneusa e Pedro por me ajudarem no período acadêmico, pelo tratamento e dedicação, vocês são fonte de inspiração. A minha amiga Delliene, por ser minha companheira de todas as horas, você é bênção de Deus na minha vida.

Ao meu querido avô Francisco de Assis, pois desde sempre me deu apoio, por me fornecer ajuda no período do vestibular, e por me fortalecer nos momentos difíceis.

Aos meus tios Irene e Claudeci, pois me deram suporte necessário na minha caminhada e depositaram total confiança.

A minha amiga Marianna, que compartilhou comigo os piores e melhores momentos da graduação, cada risada ou choro nos tornaram mais fortes, sua vida sempre estará nas minhas orações.

A Universidade Federal do Pará, pelo acolhimento e possibilidades.

A minha querida orientadora Roberta Modesto, por acredita na minha pesquisa, seu incentivo, cobranças e palavras de apoio foram fundamentais para a viabilidade deste trabalho.

A Geometria Fractal fará com que você veja as coisas diferentes. É perigoso ler mais. Você arrisca perde a visão infantil de nuvens, florestas, flores, galáxias, folhas, penas, rochas, montanhas, torrentes de água, tapetes, tijolos e muito mais. Nunca mais você interpretará estes objetos da mesma forma.

MICHEL JANOS

RESUMO

Este trabalho apresenta um relato de experiência referente a atividade de prática pedagógica desenvolvida com alunos do terceiro ano do ensino médio. Com o objetivo de analisar os subsídios que a Modelagem Matemática por meio do software Geogebra possibilita na otimização do ensino de conteúdos matemáticos envolvidos na Geometria Fractal. Para a realização do estudo foi desenvolvido uma pesquisa de cunho qualitativo, cujos dados foram produzidos a partir de atividades de modelagem desenvolvida em torno de construções de fractais no Geogebra, como por exemplo, curva de Koch, triângulo de Sierpinski entre outras. As ações realizadas por meio do uso da Modelagem Matemática com a utilização do software Geogebra proporcionaram conexões com os conteúdos matemáticos, criando meios para o aprimoramento dos conhecimentos, constituindo um processo interligado entre construções dos Fractais realizadas no Geogebra e os conteúdos Matemáticos mediados ou adquiridos por meios da Modelagem Matemática.

Palavras-chaves: Modelagem Matemática; Geometria Fractal; Software Geogebra

ABSTRACT

This work presentes na experience report regarding the pedagogical practice activity developed with third year high school students. In order to analyze the sbsidies that Mathematical Modeling through Geogebra software enables in the optmization of the teaching of mathematicl contentes involved in Fractal GEometry. For the study, a qualitative research was developed, whose data were produced from modeling activities developed around Geogebra fractal construtions, such as Koch curve, Sierpinski triangle and others. The actions performed thought the use of Mathematical Modeling with the use of Geogebra software provided connections with mathematical contentes, creating means for the improvement of knowledge, constituing na interconnected process between Fractal constructions performed in Geogebra and Mathematical contentes mediated or acquired by Geogebra means of Mathematical Modeling.

Keywords: Methematical Modeling; Fractal Geometry; Geogebra Software

LISTAS DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho surgiu da vivência de um do projeto de pesquisa fomentado pelo PIBIC/UFPA - interior, o qual tem por proposta o “Ensino de Matemática e softwares livres”. Tal projeto buscou identificar os impactos do uso de softwares livres na aprendizagem de conteúdos matemáticos na educação básica. E a partir desse plano de trabalho configurou-se a necessidade de investigar a Modelagem Matemática nesse cenário tecnológico para realização desse trabalho de curso, com foco nos conteúdos matemáticos quando da discussão da Geometria Fractal.

É evidente que a tecnologia, no ambiente escolar, vem ganhando cada vez mais espaço sendo utilizada como potencialidade pedagógica, construindo novas linhas de ensino e até mesmo considerada uma ferramenta auxiliadora. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN’s), as tecnologias em suas diferentes vertentes e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade e quando associada a outras estratégias pedagógicas pode potencializar o ensino, como é o caso da Modelagem Matemática, que:

> Enquanto alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem a modelagem mediada pelo uso dos computadores tem o compromisso de promover a aproximação e a interação dos fatos da realidade com o conteúdo acadêmico. (ALMEIDA; SILVA & VERTUAN, 2012, p.32).

Desse modo, a partir do projeto geral “Ensino de Matemática e softwares livres”, o plano de trabalho desenvolvido nesta pesquisa diz respeito a utilização do Software Geogebra na inserção de conteúdos matemáticos envolvidos na Geometria Fractal, buscando trazer novas abordagens no ensino matemático, a fim de produzir uma aprendizagem significativa, fazendo uma aproximação entre os conceitos matemáticos e a tecnologia.

E, para criar uma aproximação com o aluno, utilizamos a Modelagem Matemática, pois segundo Almeida, Silva & Vertuan (2012), que pode influenciar de forma positiva a disposição do aluno em aprender considerando que permite criar situações que atuam como uma “ponte” entre o conhecimento teórico e a realidade ou entre o conhecimento teórico e situações do cotidiano dos estudantes, possuindo característica ideal para a elaboração desta investigação, pois a mesma produz meios matemáticos de envolvimento relacionado com o cotidiano do aluno.

Neste cenário, a Geometria Fractal apresenta-se como uma estrutura matemática apropriada para a utilização da Modelagem Matemática com o uso do software Geogebra no ensino da educação básica, pois o mesmo permite visualizar de forma dinâmica os objetos geométricos.

Para Barbosa (2005), o emprego da Geometria Fractal se justifica pelos seguintes pontos: conexões com várias ciências; deficiências da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza; difusão e acesso aos computadores e a tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização; existência do belo nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais, entendendo-se arte como toda ação que envolve simultaneamente emoção, habilidade e criatividade; sensação de surpresa diante da ordem na desordem.

Nesse contexto nos interessa saber *que contribuições à associação da Modelagem Matemática com uso do software livre Geogebra na discussão da Geometria Fractal, podem favorecer aprendizagem de conteúdos matemáticos?*

A partir da pergunta norteadora da pesquisa, traremos dados teóricos e empíricos que forneceram argumentos necessários para responder esta indagação. Objetivamos com esta pesquisa, analisar os subsídios que a Modelagem Matemática com o uso do software Geogebra possibilita na otimização do ensino de conteúdos matemáticos envolvidos na Geometria Fractal.

Este trabalho está dividido em quatro seções, iniciando pela introdução na qual é apresentada a justificativa, o objeto e a questão norteadora da pesquisa, incluindo breves comentários a respeito da tecnologia, como também da Modelagem Matemática a partir da Geometria Fractal. Na primeira seção apresentamos uma abordagem breve sobre a história da Modelagem Matemática, sua perspectiva e características quando usada como estratégia de ensino.

Em seguida, foi desenvolvida na seção II, discussão—referente à Geometria Fractal, na qual abordamos desde sua história como também referências às aplicações, utilizando como base os exemplos desenvolvidos na pesquisa.

A seção III refere-se ao uso do software livre na educação, bem como o uso do Geogebra em ambiente de Modelagem Matemática para o ensino de conteúdos matemáticos outros que envolvem a Geometria Fractal. Na seção IV foi apresentada a metodologia da pesquisa, e na seção V a descrição, análise e discussão dos resultados. Desta maneira atingindo as considerações pertinentes a esta pesquisa.

I- MODELAGEM MATEMÁTICA

Esta seção trata do movimento que deu origem a Modelagem Matemática, como também o conceito e significado, surgimento no Brasil e a repercussão que obteve, a qual levou os docentes ao aprimoramento de suas aulas.

1.1 Breve histórico da Modelagem Matemática.

Segundo Aragão (2015), o percurso que deu início a Modelagem Matemática tinha por movimento chamado "utilitarista", mas especificamente no ano de 1960. A modelagem Matemática ganhou proporções na prática dos conhecimentos matemáticos para a ciência e a sociedade, que impulsionou a formação de novos grupos de pesquisadores. Posteriormente, ocorreram eventos que tinham como objetivo permitir ao estudante desenvolver habilidades para matematizar e modelar problemas reais. Em meio a esse movimento, os debates tinham como objetivo centralizado as aplicações na Educação Matemática.

O ensino de Matemática foi ganhando um novo formato, de tal forma que o "tradicional" teve que abrir espaço para metodologias de ensino que buscassem aprimorar os conhecimentos de cada indivíduo. Biembengut (2009) explica que a partir dessas discussões foram surgindo debates, para que abrangessem aplicações práticas dos conhecimentos matemáticos para a ciência, e é nesse cenário, que a Modelagem Matemática ganha destaque.

Os movimentos educacionais foram crescendo visando melhorias no ensino da matemática abrangendo situações que estimulassem os alunos a produzirem problemas matemáticos relacionados com o cenário atual. Segundo Aragão (2015).

> Na Holanda, em 1971, foi criado por Freudenthal o Instituut Ontwikkeling Wiskundeonderwijs – IOWO -, (Instituto para o Desenvolvimento da Educação Matemática) que atualmente é chamada de *Freudenthal Institute* (FI), tornando-se mundialmente uma referência para a Educação Matemática. (p.6)

As possibilidades para um ensino diferenciado eram crescentes, este instituto desenvolvido na Holanda, através dos seus projetos demonstrou o desenvolvimento da competência crítica levando alternativas para matematizar à problemática, desenvolvendo habilidades matemáticas e seus conceitos, tornando o ensino de Matemática uma dimensão mais significativa e compreensiva, conforme explica Aragão (2015).

A proporção do movimento em prol da educação era destaque em vários países, como por exemplo, na Suíça, consoante Biembengut (2009).

> Dentre os eventos encontra-se o *Lausanne Symposium*, em 1968 na Suíça, que tinha por tema *como ensinar matemática de modo que seja útil*, com situações do cotidiano do estudante e não aplicações 'padronizadas', mas que favorecessem a habilidade para matematizar e modelar problemas e situações da realidade. (p.8)

Considerando tal ponto de vista, através dos eventos educacionais, os professores buscavam consolidar a ciência natural, a fim de que a Matemática pudesse ser expandida transformando-a em uma disciplina menos abstrata. Desse modo, Biembengut (2009) tende a considerar que os movimentos educacionais pela modelagem matemática na educação influenciaram o Brasil praticamente ao mesmo tempo, contando com a participação dos professores como também representantes brasileiros na comunidade internacional de Educação Matemática.

O início da Modelagem Matemática, na educação brasileira, teve como referência singulares pessoas, as quais podemos destacar, segundo Silveira, Ferreira & Silva (2013), Aristides Camargo Barreto, professor da Pontifica Universidade Católica do Rio de Janeiro, Ubiratan D' Ambrósio um dos representantes brasileiros em Educação Matemática e Rodney Carlos Bassanezi da Universidade de Campinas.

Conforme Aragão (2015), a Modelagem Matemática ganhou ênfase, obtendo aumento nas pesquisas, promovendo eventos e conferências. E, assim foram surgindo novas publicações, de cursos de extensão e pós-graduação. Segundo Silveira, Ferreira & Silva (2013), em 1980 a Modelagem Matemática ganha seus primeiros cursos de pós-graduação, tendo como um dos coordenadores Rodney Carlos Bassanezi.

A partir deste processo de inserção da Modelagem Matemática no Brasil, a mesma, passou a ser compreendida como um processo de descrever, formular, modelar e resolver uma situação problema (Biembengut, 2009). Assim, a Modelagem Matemática começou a ganhar definições e espaços no mundo da educação, possibilitando aplicações que trazem consigo o resgate de conhecimentos que cada aluno constrói por meio do diagnóstico de sua realidade.

Segundo Braga (2009) a Modelagem Matemática ganhou repercussões no início do século XX, através de preocupações dos professores de Matemática com o seu ensino nas escolas, mas só a partir da década de 50 a Organizações das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO), começou a organizar congressos sobre a temática Educação Matemática.

Já Almeida, Silva & Vertuan (2012), consideram que a Modelagem Matemática teve seu início por volta das duas últimas décadas do século XX. Em que, a perspectiva, na área de Educação Matemática, era aplicar a Matemática em vários contextos. A Modelagem foi apresentada como metodologia de ensino que visava abranger novas áreas, que saíssem do tradicional e despertassem a curiosidade para aplicação matemática.

A origem da Modelagem Matemática, segundo Almeida, Silva & Vertuan (2012):

> [...]não se deu no âmbito da Educação Matemática. Ao contrário, o *habitat* natural da Modelagem Matemática é a área que se convencionou chamar da Matemática aplicada, e no interior da qual surgiram os primeiros conceitos e procedimentos em relação ao que se caracteriza uma atividade de Modelagem Matemática. (ALMEIDA, SILVA, & VERTUAN, 2012, p. 12).

A origem da Modelagem Matemática, muitas vezes, é associada com a Educação Matemática, porém seu âmbito de origem foi fomentado na área da Matemática Aplicada, nas quais suas aplicações foram se caracterizando como Modelagem Matemática.

No âmbito a Educação Matemática, a Modelagem Matemática tem por finalidade transformar o ensino de Matemática em um processo interativo, pois de acordo com Bassanezi (2002), a mesma consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. Além disso, ele define a Modelagem Matemática como um processo dinâmico utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos.

1.2 Modelagem Matemática enquanto Metodologia de Ensino

A Modelagem Matemática é considerada uma metodologia de ensino, que visa aprimorar os conhecimentos dos estudantes, trazendo consigo aplicações relacionadas ao dia-a-dia, em que é possível aproximar conceitos matemáticos com situações que exijam utilizar matemática, de tal modo que o aluno seja capaz de representar uma determinada situação via modelos matemáticos.

Por vez, a Matemática é denominada abstrata, tendo em vista que a aprendizagem encontra alguns obstáculos, por isso os docentes buscam por metodologias para amenizar esta situação, como propõem Merlo & Assis (2010):

> a ideia de que a matemática oferece mais obstáculos à aprendizagem do que as demais disciplinas, confirmada na prática das salas de aula por muitos e muitos anos, são certamente muito antigas, e, por isso mesmo, tem merecido, nos últimos anos especial atenção por parte dos educadores matemáticos e dos professores em geral. (MERLO & ASSIS, 2010, p.1)

Os obstáculos encontrados na disciplina de Matemática desmotivam os alunos na busca de conhecimentos, desta maneira os professores encontram na Modelagem Matemática uma forma de desenvolver métodos que motivem o processo de ensino aprendizagem.

De acordo com Bassanezi (2002) A Modelagem Matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la.

Desse modo, a matemática deve ser introduzida aos alunos de forma com que eles aprimorem seus conhecimentos e despertem o interesse pela pesquisa. Conforme nos é descrito nos documentos curriculares brasileiros:

> A BNCC leva em conta que os diferentes campos que compõe a Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimentos. (BRASIL, 1998, p.268)

O ensino deve proporcionar meios que tragam consigo aproximações com o ambiente dos alunos, a partir dos conceitos matemáticos desenvolvidos em sala de aula, fazendo aplicações matemáticas, que buscam entender o mundo através do mesmo, que é instigado por cada estudante a partir de problemas ou temas de seu interesse, provocando entusiasmo na busca da construção de conhecimento.

Segundo Braga (2009), a Educação Matemática por meio da Modelagem Matemática objetiva motivar o aluno a passar para um estado ativo e crítico quanto ao seu cotidiano.

O ponto inicial da Modelagem Matemática é determinado através de uma problemática, na qual sua resolução é realizada por meio de métodos e procedimentos, que torna o modelo uma representação matemática. Uma das definições de modelo matemático é: “portanto, uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Sua formulação, todavia, não tem um fim em si só, mas visa fomentar a solução de algum problema”. (ALMEIDA, SILVA, & VERTUAN, 2012, p. 13). Já segundo Bassanezi (2002), o modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o modelo estudado.

Desta maneira, para que o aluno compreenda a matemática através da construção de modelos, Carvalho (2005), afirma que é essencial estar dentro das possibilidades da turma e que possa perpassar pelos conteúdos desejados. Todo o processo pode incitar a investigação, por parte do aluno, em uma atividade de (re) descoberta levando a transcender os limites impostos pela própria disciplina e fazer enveredar por outras áreas de conhecimentos.

É pertinente salientar que, no ambiente escolar não necessariamente os alunos chegam a modelos matemáticos a partir de uma problemática, mas, no entanto, podem a partir desta discutir modelos existentes. Para garantir o processo, algumas etapas precisam ser consolidadas. Destacamos a perspectiva de Bassanezi (2011) que vê nas aplicações da Matemática um caminho possível para aproximar o aluno à Matemática. Desse modo, para o estudo de determinada situação a partir da Modelagem Matemática, o autor descreve cinco etapas: experimentação, abstração, resolução, validação e modificação.

II - GEOMETRIA FRACTAL

Nesta seção apresentamos uma breve abordagem histórica sobre os Fractais. Em seguida, são desenvolvidas correspondências entre a Geometria Fractal e o ensino de Matemática, bem como alguns fractais e seus respectivos criadores.

2.1 Breve Histórico da Geometria Fractal

O termo fractal foi usado pela primeira vez no ano de 1975 por Benoit Mandelbrot, que o usou para denominação da classe especial de curvas definidas recursivamente que produziam imagens reais e surreais

O ensino da Geometria Fractal e o seu criador é o matemático polonês naturalizado americano Benoit Mandelbrot o qual teve, em sua mais célebre frase do livro *Geometry of the nature* de 1975, o início da Geometria Fractal. Em que diz: “Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, os litorais não são círculos, a casca das árvores não é lisa e tampouco a luz viaja em linha reta”. (Carvalho, 2005, .15). Benoit Mandelbrot usou esse termo fractal para denominar um grupo especial de curvas definidas em um processo repetitivo.

Barbosa (2008) considera que a denominação feita por Mandelbrot atribuída aos fractais, baseia-se no latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo *frangere* corresponde ao significado de quebrar: criar fragmentos irregulares, fragmentar.

Carvalho (2005) afirma que, talvez, a maior contribuição da Geometria Fractal seja esta: representar melhor as formas da natureza – as mesmas que a Geometria Euclidiana considera como desvio de padrão. Apesar da geometria Euclidiana ser fornecida aos alunos desde o ingresso na escola ainda assim apresenta grandes dificuldades no seu entendimento, pois o ensino torna-se abstrato por não relacionar aplicações com o cotidiano, desta forma a inserção da Geometria Fractal no ensino propõe abordar novas descobertas e também correlacionar com o desenvolvimento de conteúdos matemáticas já sedimentados.

Mandelbrot (1989) diz que:

> [...] a Geometria Fractal constitui uma base geométrica de trabalho posicionada entre a ordem geométrica excessiva de Euclides e o caos geométrico da matemática geral. Baseia-se numa forma de simetria que tinha sido anteriormente pouco utilizada e valorizada, nomeadamente a auto-semelhança, ou alguma invariância mais geral à contracção ou ampliação. (p.63)

Segundo Assis et all (2008), a Geometria Fractal possui por características, presente em suas construções, a auto similaridade, estabelecida quando uma proporção figural ou uma curva possuem cópia do todo representado em escala menor. Também podemos citar o fato de que os fractais podem ser divididos, infinitamente, em um processo recursivo, ou seja, à medida que é efetuado, este é sub-procedimento do realizado anterior e assim sucessivamente. Outra importantíssima característica é que as figuras ou curvas geradas, em estruturas menores, são semelhantes às anteriores.

Segundo Janos (2008) a Geometria Fractal é uma linguagem matemática que descreve, analisa e modela as formas encontradas na natureza, pois nelas foram observadas que as figuras presentes nem sempre são regulares, apresentando semelhanças na parte com o todo, característica esta dos fractais. Além da sua marcante presença na natureza, Assis et all, (2008) diz que os fractais podem ser encontrados na análise dimensional das bacias fluviais dos rios, mineralogia, com o objetivo de medir a densidade dos minerais, a evolução dos terrenos e a descontinuidade das rochas; na Biologia para a análise da rugosidade dos fungos, e de corais; na indústria com a detecção automática de falhas em produtos têxteis; no solo; na chuva; na ecologia. Na próxima subseção, traremos algumas aplicações dos Fractais para o ensino.

2.2 Geometria Fractal no ensino de Matemática

O ensino de Geometria Fractal tem suas aplicações desenvolvidas com base no contexto educacional. A Geometria Fractal está muito presente no nosso cotidiano e mesmo assim, às vezes, passa despercebida. Todavia, este tema em sua completude possui uma interdisciplinaridade enorme com as disciplinas de Ciências Naturais, Artes, Geografia e Biologia por exemplo, conforme Daga, 2017. No contexto matemático, em análise, pode-se aferir que a matemática está presente no mundo que nos cerca e não somente nos livros didáticos. A Geometria Fractal não é objeto de estudo no Ensino Médio, porém estudos mostram Nascimento, 2012, que as atividades envolvendo a Geometria Fractal podem ser um facilitador no ensino dos conceitos geométricos. Conforme Barbosa (2005), as construções das figuras podem desenvolver abordagens, como por exemplo, contagem, perímetros, áreas e volumes, entre outros. Em virtude disso, gerando a compreensão, como também o encanto pela arte que os fractais apresentam em suas figuras.

Além disso, Barbosa (2005) afirma que as explorações, de maneira geral, têm aplicabilidade de aprendizagem aos estudantes de ensino médio. Dessa forma, podem ser utilizados para tratar os conteúdos correspondentes, além de que também pode ter utilidade a outros assuntos, pois segundo Crilly (2017), o potencial para se aplicar os fractais é amplo. Os fractais podem ser usados como modelos matemáticos para objetos naturais, como também para demonstrar o crescimento de plantas ou a formação de nuvens.

Os fractais, segundo Nascimento (2012), apresentam duas categorias: os geométricos (determinísticos) e os não lineares (Aleatórios e da Natureza). O autor diz que s Fractais da Natureza ou Aleatórios são elementos da natureza que também possuem auto-similaridade, isto é, cada parte, em escala menor, é semelhante ao todo. São considerados fractais da natureza: nuvens, algumas rochas, couve-flor, árvores e o brócolis.

Os Fractais determinísticos são aqueles que possuem uma regra bem definida na sua obtenção, gerados por processos iterativos e possuem auto-similaridade exata. Ele é congruente ao anterior, mas em menores escalas, podemos citar O Conjunto de Cantor, a Curva de Koch, o Triângulo de Sierpinski, entre outros. Posteriormente, trataremos de forma mais detalhada sobre cada um destes.

2.2.1 Poeira de Cantor

A poeira de cantor, segundo Janos (2008), é considerada uma das primeiras descobertas da Geometria Fractal. Apesar desta construção não possuir a admiração, como as demais, é peça fundamental no estudo dos fractais.

O criador da poeira de Cantor foi um matemático descendente de portugueses chamado George Cantor (1845-1918), uma das suas pesquisas de maiores fundamentações é hoje conhecida como teoria dos conjuntos, que com a colaboração de outros matemáticos, foi possível dar início a pesquisa das séries infinitas. Em 1883, publicou um trabalho que é chamado de "conjunto de Cantor". (BARBOSA, 2005)

A poeira de Cantor se classifica como fractal determinístico, pois, em um processo iterativo pré-determinado, se inicia com um segmento e no decorrer do processo retira-se sua parte central.

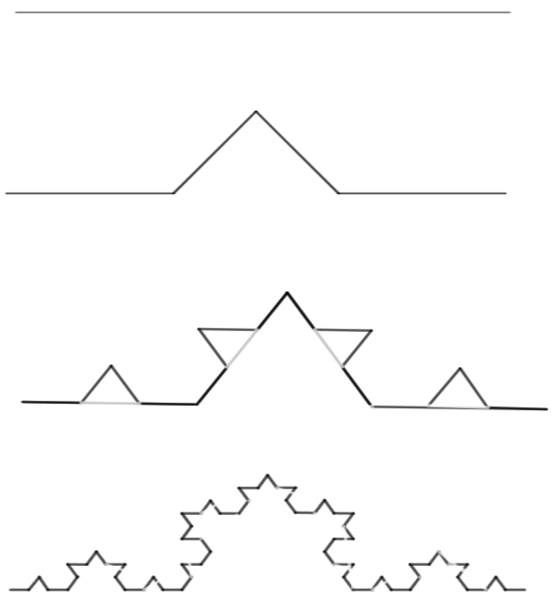
Figura 1: Poeira de Cantor.

Fonte: Da autora

2.2.2 Curva de Koch

A Curva de Koch possui importantes aplicações, dentre os possíveis assuntos exploráveis dos fractais, podemos destacar o estudo de progressões geométricas. Helge Von Koch, criador da Curva de Koch, era matemático polonês que a introduziu por volta de 1904 e 1906, e hoje em sua homenagem recebe seu nome. Também caracterizado como determinístico.

Figura 2: Curva de Koch

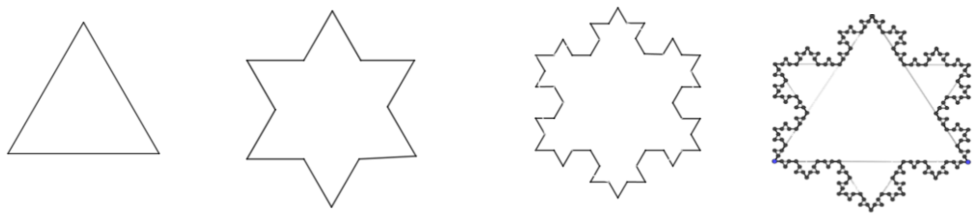


Fonte: Da autora

2.2.3 Floco de Neve

O criador do floco de neve é o mesmo da Curva de Koch, Helge Von Koch. Os procedimentos para realização desta construção são inicialmente dados por um triângulo equilátero, e no segmento que constitui os seus lados é construído um novo triângulo semelhante ao anterior, porém sem a base.

Figura 3: Floco de Neve



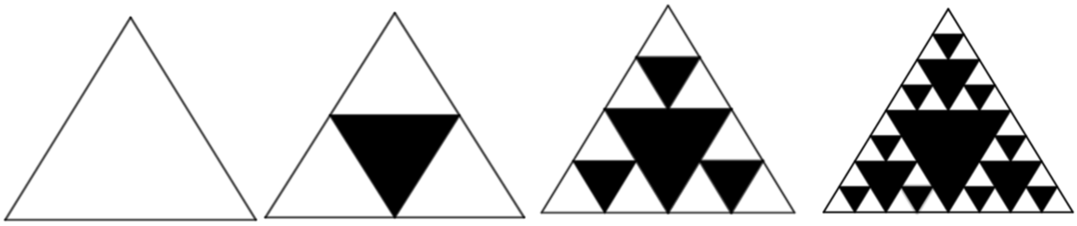
Fonte: Da autora

2.2.4 Triângulo de Sierpinski

O criador do Triângulo de Sierpinski, segundo Barbosa (2005), foi o matemático polonês chamado Waclaw Sierpinski (1882-1969), que atuou como professor em Lvov e Wariaw. Teve grande reputação, principalmente na década de 1920-1930, a ponto de uma das crateras lunares terem seu nome.

O triângulo de Sierpinski classifica-se como fractal do tipo remoção, assim o triângulo pode ser construído por etapas, que em cada nível é retirado um triângulo inscrito obtido a partir de seus pontos médios, referentes aos seus lados. Conforme figura 4.

Figura 4: Triângulo de Sierpinski



Fonte: Da autora

III- SOFTWARE LIVRE NA EDUCAÇÃO

Nesta seção, discutimos a respeito da tecnologia visando abranger sua especificidade na Educação, averiguando o impacto que sua inserção está obtendo nas escolas. Desta maneira abordaremos como a tecnologia pode ser utilizada como ferramenta pedagógica. Também será discutido a respeito do software Geogebra e sua utilização no ensino.

3.1 Geogebra: Ferramenta pedagógica

O uso das tecnologias nas salas de aula tornou-se de grande importância, pois ela é tratada como uma ferramenta de ensino, propiciando novos conhecimentos, como também uma aproximação com a realidade.

O uso dos computadores em sala de aula, além de proporcionar uma interação a relação professor- aluno pode também se adequar no ensino de matemática. Segundo Merlo & Assis (2010), pensar no uso da tecnologia na Educação Matemática não significa somente pensar no computador e nos *softwares,* mas em novos processos e estratégias educacionais que favoreçam o processo de ensino-aprendizagem.

Merlo & Assis (2010), afirmam que o trabalho com *softwares* educativos, produzidos especialmente ou não para as atividades de ensino pode ser uma alternativa para o uso da informática na educação.

As ferramentas de softwares na educação trazem consigo a possibilidade da construção de conhecimentos tecnológicos para a sala de aula. No contexto matemático, os softwares auxiliam na resolução de cálculo de forma rápida e precisas, na visualização de métodos gráficos, funções polinomiais e sólidos geométricos, entre outros, estas características estão presentes no Geogebra.

As tecnologias nas aulas de matemática possibilitam um ensino diferenciado capaz de atender algumas necessidades dos alunos, como por exemplo, visualizar sólidos geométricos, resolução de sistemas lineares através do método gráfico, entre outros. O uso do software Geogebra, vem auxiliar esta compreensão para os alunos.

O software Geogebra é um programa que busca abranger o ensino de Geometria, pois possui ferramentas capazes de desenvolver “construções geométricas”, além de álgebra e cálculo. Segundo Hohenwarter (2007):

> O GeoGebra é um sistema de geometria dinâmica. Permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas como com funções que podem se modificar posteriormente de forma dinâmica. Por outro lado, equações e coordenadas podem estar interligadas diretamente através do GeoGebra. Assim, o software tem a capacidade de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos; permite achar derivadas e integrais de funções e oferece comandos, como raízes e extremos. (Hohenwarter, 2007, p. 4)

Com o uso do Geogebra é possível fazer uma ligação entre os conceitos de geometria e álgebra através de sua interface tecnológica permitindo ao aluno possibilidades para estabelecer conhecimentos necessários através do uso do software.

3.2 Modelagem Matemática com uso do Geogebra a partir do ensino de Geometria Fractal.

O ensino de Geometria Fractal por meio do software Geogebra traz consigo uma conexão realizada por intermédio da Modelagem Matemática, na qual possui por caráter de aproximação, segundo Bassanezi (2002), no setor educacional, a aprendizagem realizada por meio da modelagem facilita a combinação dos aspectos lúdicos da matemática com seu potencial de aplicações.

Segundo Braga (2009) a Modelagem Matemática é considerada um fabuloso instrumento de pesquisa nas diversas ciências factuais como a Física, Química, Biologia, a própria Matemática, dentre outras cujo método é aplicado. Pode-se então considerar que a Modelagem Matemática atua como um método de interdisciplinaridade, que é uma grande tendência educacional onde se procura trazer formas com que as disciplinas possam conversar entre si, trazendo grandes avanços no modo como os conteúdos são ministrados, deixando de lado os segmentos de ensino de conteúdos fragmentados.

Desta maneira a Modelagem Matemática visa obter por meio de concepções pedagógicas práticas que potencialize o ensino e pode ser compreendida na observação, por exemplo, de cada iteração produzida, um novo fractal se desenvolve, na qual seu tamanho pode ser reduzido de forma progressiva, permitindo a compreensão de princípios constantes.

> A dinamicidade de inúmeros softwares livres, hoje disponíveis no mercado, pode auxiliar alunos e professores na construção de gráficos e na observação da influência dos parâmetros bem como na realização de cálculos. Nesse sentido, a possibilidade de experimentar visualizar e de coordenar de forma dinâmica as representações algébricas, gráficas e tabulares, são vantagens da interação de atividades de modelagem com as mídias informáticas. (ALMEIDA; SILVA & VERTUAN, 2012, p.31)

Conforme Bassanezi (2002), o advento dos computadores favoreceu o desenvolvimento e a aplicação da matemática em quase todos os campos do conhecimento. E caracteriza-se como um motivo para que os estudantes sejam encorajados a questionar, experimentar, estimar, explorar e sugerir explicações. MERLO & ASSIS (2010).

Essa dinâmica favorece potencialmente o desenvolvimento do processo de Modelagem Matemática com o uso de tecnologias, nesse caso o uso de softwares específicos, como o caso do Geogebra. Somado a isso, a abordagem da Geometria Fractal traz contribuições para a aprendizagem de conteúdos matemáticos.

IV – METODOLOGIA DA PESQUISA

Nesta seção, estão apresentados os aspectos referentes ao desenvolvimento da pesquisa, em que são destacados o local de pesquisa, sujeitos, os passos para a construção dos fractais selecionados, bem como o detalhamento de cada momento da pesquisa, os instrumentos de coleta de dados e de análise dos mesmos.

4.1 Aspectos Gerais da pesquisa

Esta pesquisa caracteriza-se por uma abordagem quanti-qualitativa descritiva, classificada como pesquisa-ação, pois tem por objetivo obter questionamentos, para a produção de ideias geradas a partir do que for apresentado, proporcionando o aprimoramento da prática, encadeando reflexões no contexto educativo. Moreira (2011) destaca que o contexto da pesquisa-ação se desenvolve como uma forma de pesquisa dirigida a compreender como traduzir os valores educativos às formas concretas de prática.

Para tanto, desenvolvemos uma pesquisa de campo com 16 alunos do 3º ano do ensino médio de uma escola estadual do município de Santa Izabel do Pará, que foi dividida em três momentos, a saber: no **primeiro momento**, aplicação do questionário de sondagem (Questionário Inicial), com o objetivo de identificar elementos referentes aos conhecimentos prévios dos alunos, bem como envolvimento com tecnologias para o ensino.

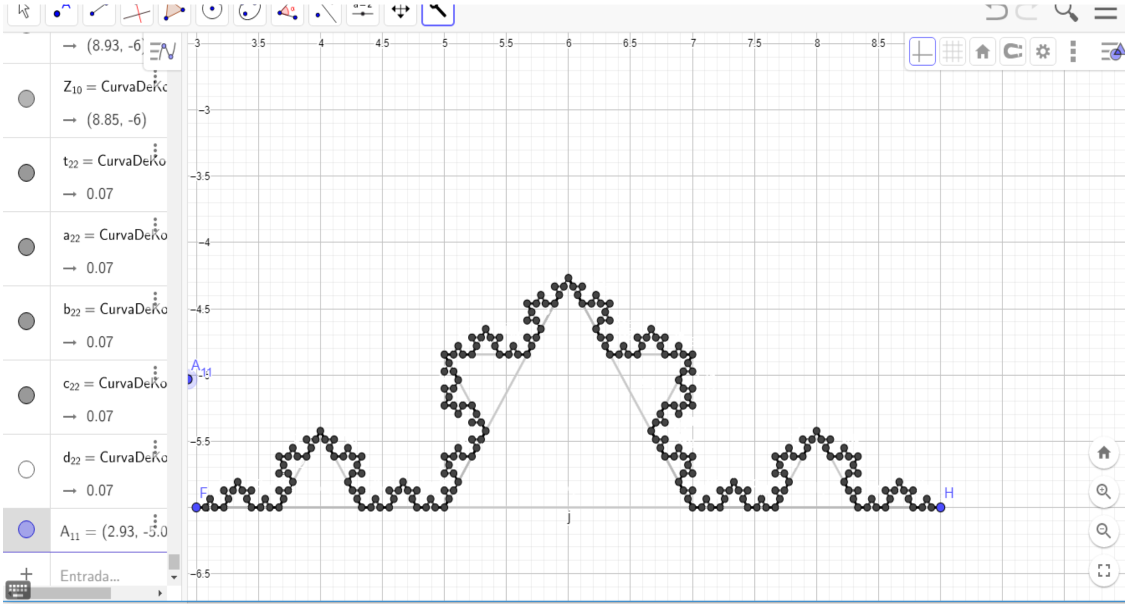
No **segundo momento**, abordamos as ideias de como surgiu a Geometria Fractal no contexto em que o conhecimento foi construído na época, como forma de inteirar os alunos sobre a temática. Esse momento caracterizou-se como o início da Atividade de Modelagem Matemática denominada “Geometria Fractal e modelos”, onde na sequencia os alunos fizeram uso do software Geogebra.

Para construção de figuras fractais, o uso do software era realizado sob comandos a partir de passos a serem seguidos, a discussão dos modelos e a percepção dos conteúdos matemáticos realizados através dela e posterior discussão dos modelos matemáticos identificados/construídos. A aplicação dos conteúdos de Geometria Fractal foi explorada para que os estudantes pudessem enxergar a Geometria tracejada da realidade.

4.2 Passos para construção do Fractal

4.2.1Construção da Curva de Koch: caracterizado como ramificação, na sequência: Criar um Segmento a com pontos A e B; Criar uma Circunferência com centro em A e raio a/3; Criar uma Circunferência com centro em B e raio a/3; Usar as intersecções das circunferências com o segmento e logo acharemos o ponto C e D; Ocultar as circunferências criadas; Criar uma Circunferência com centro em C e raio a/3; Criar uma Circunferência com centro em D e raio a/3; Usar as intersecções das circunferências com o segmento e logo acharemos o ponto E e F; Ocultar as circunferências criadas e o ponto F; Traçar segmentos AC, CE, ED, DB e CD; Ocultar o segmento CD e todos os rastros. Processo realizado até chegar ao desejado.

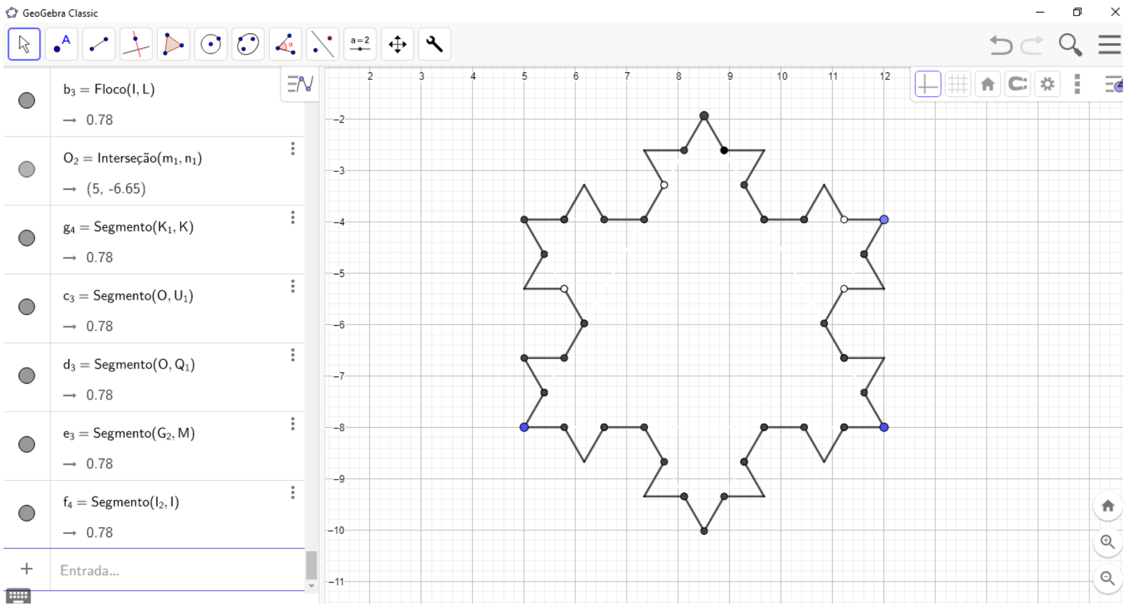
Figura 5: Construção da Curva de Koch iteração 7



Fonte: Da autora

4.2.2 Construção do Floco de Neve de Koch: realizada de maneira semelhante ao método da Curva de Koch, porém este iniciará com um triângulo equilátero, utilizando a ramificação nas escalas do processo, na sequência: Criar um Triângulo equilátero; Criar uma Circunferência com centro em A e raio a/3; Criar uma Circunferência com centro em B e raio a/3; Usar as intersecções das circunferências com o segmento e logo acharemos o ponto C e D; Ocultar as circunferências criadas; Criar uma Circunferência com centro em C e raio a/3; Criar uma Circunferência com centro em D e raio a/3; Usar as intersecções das circunferências com o segmento e logo acharemos o ponto E e F; Ocultar as circunferências criadas e o ponto F; Traçar segmentos AC, CE, ED, DB e CD; Ocultar o segmento CD e todos os rastros. Processo realizado até chegar ao desejado.

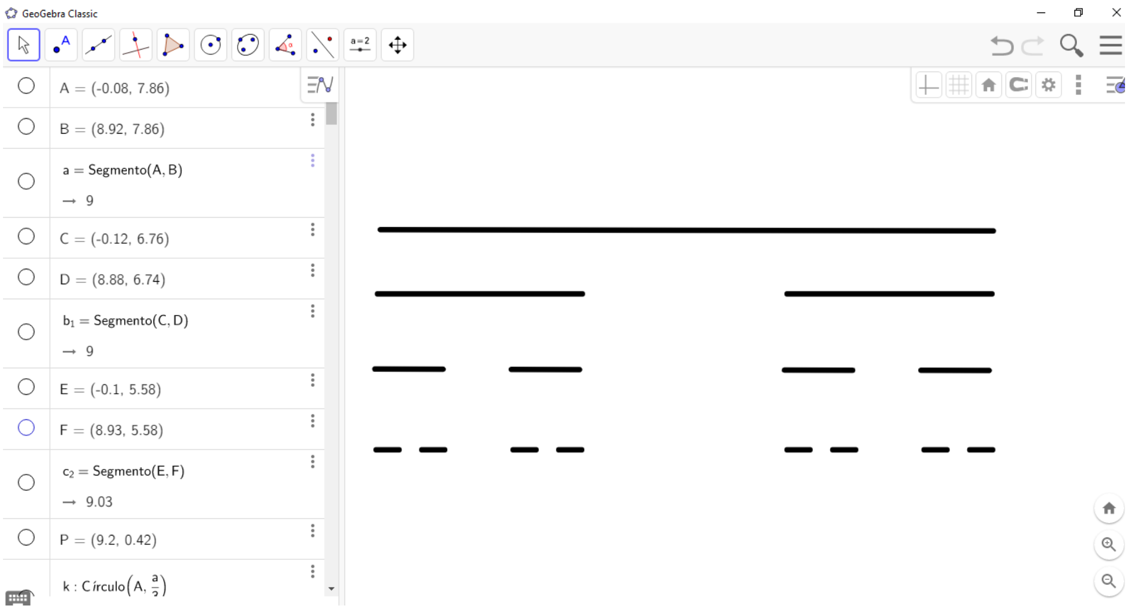
Figura 6: Construção do Floco de Neve iteração 4



Fonte: Da autora

4.2.3 Construção da poeira Cantor: Criar um Segmento a com pontos A e B; Criar uma Circunferência com centro em A e raio a/3; Criar uma Circunferência com centro em B e raio a/3; Criaremos três novos segmentos e retiramos o primeiro segmento criado e o segmento do meio. Processo realizado até chegar ao desejado.

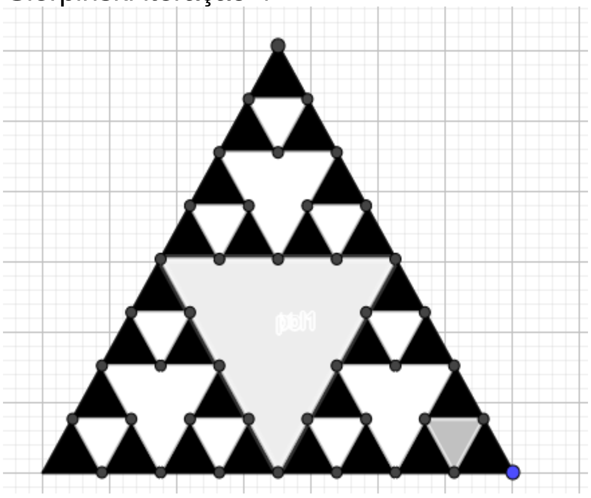
Figura 7: Construção da Poeira de Cantor



Fonte: Da autora

4.2.4 Construção do triângulo de Sierpinski: Criar um triângulo equilátero; Traçar seus pontos médios; Interligar seus pontos médios, desta forma dando origem a outro triângulo inscrito; Processo realizado até chegar ao desejado.

Figura 8: Construção do Triângulo de Sierpinski iteração 4



Fonte: Da autora

Ainda do segundo momento, uma vez construído os seguintes fractais: Poeira de cantor, Curva de Koch, Floco de Neve e o triângulo de Sierpinski. Da construção da poeira de Cantor, destacamos o ensino de frações, que no ensino médio apresenta fragilidades. Com relação à Curva de Koch, após sua construção os alunos deveriam concluir e discutir sobre uma progressão geométrica de razão q = 4 e a_1 = 1.

Da construção do Floco de Neve os alunos deveriam realizar a contagem dos perímetros e perceber a relação multiplicativa dos segmentos com os comprimentos de cada iteração. Já em relação ao Triângulo de Sierpinski é devido a análise do conteúdo de semelhança de triângulo, considerando os seguintes critérios: ângulos congruentes, três lados proporcionais e lados congruentes.

No **terceiro momento**, pós-atividade de Modelagem Matemática, realizamos aplicação do Questionário II (Questionário final), neste questionário somente 13 alunos responderam, na qual tinha por finalidade identificar contribuições dessa abordagem para aprendizagem de conteúdos matemáticos.

A partir desses momentos da pesquisa de campo, foi possível produzir os dados necessários para análise, seja pelas respostas dos alunos via aplicação de questionários, seja por anotações em diário de campo, ou pelos registros dos alunos quando do desenvolvimento da atividade, que foram descritos e analisados levando em consideração a questão de pesquisa e a lente teórica discutida neste trabalho.

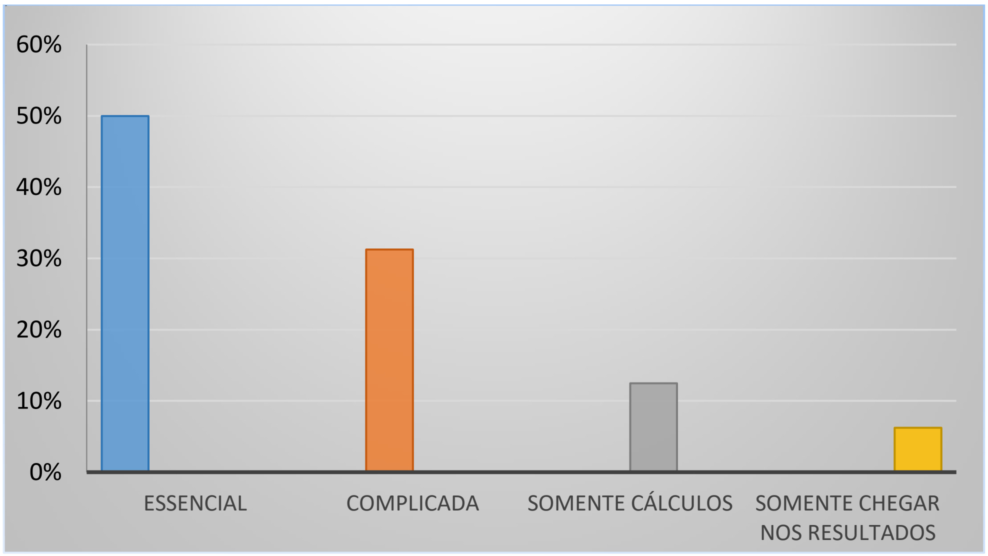
V – DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS DA PESQUISA

As análises descritas nessa seção são referentes as observações realizadas em cada etapa da atividade de Modelagem Matemática desenvolvida com os alunos, bem como as respostas dos mesmos no questionário de sondagem e questionário final.

5.1 Primeiro Momento: Questionário inicial (Sondagem)

Iniciamos com o questionário diagnóstico, no qual foi observado que 50% dos estudantes titulam a disciplina como essencial, 31,25% registraram que a disciplina é complicada, 12,5% estudantes registraram que a mesma apresenta somente cálculos e 6,25% dos estudantes denominaram que a matemática tem somente como finalidade chegar em 'resultados'. Conforme descrito o Gráfico 1.

Gráfico 1: Visão sobre a disciplina de Matemática



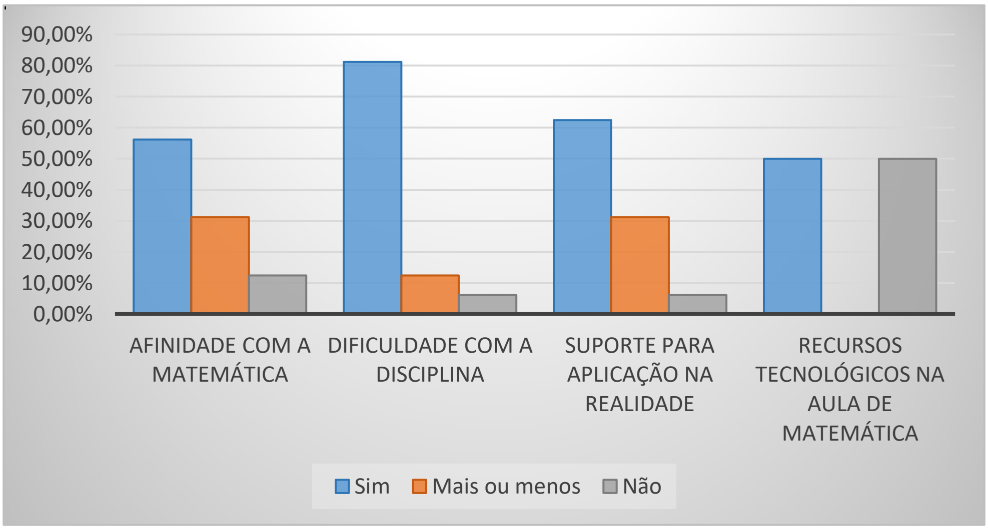
Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Em seguida, os alunos foram questionados sobre a afinidade com a matemática, dificuldades presentes na disciplina, o suporte que a mesma fornece para aplicações no cotidiano e os recursos tecnológicos utilizados em sala de aula. Entre os alunos pesquisados, 56,25% registraram que se identificam com a disciplina e a consideram como essencial, 31,25% informaram que a afinidade com a disciplina é "mais ou menos" (não souberam definir se tinham ou não afinidade com a disciplina), e 12,5% responderam que não possuem nenhuma afinidade com a disciplina. Mesmo sendo identificado afinidade com a disciplina, as dificuldades enfrentadas pelos estudantes foram evidentes na pesquisa, pois 81,25% dos alunos registraram que sentem dificuldades com a disciplina, 12,5% disseram que a dificuldade é razoável, e 6,25% dos alunos registraram que não sente dificuldades.

Posteriormente, foram questionados a respeito dos suportes que a disciplina fornece na realidade, 62,5% registraram que esta dá subsídios para aplicações na realidade, 31,25% registraram que o suporte é “mais ou menos” (não souberam definir se fornece ou não meios para aplicação) e 6,25% registraram que a disciplina não fornece subsídios para aplicações na realidade.

Em seguida, foram questionados a respeito dos recursos tecnológicos utilizados na aula de matemática. É importante destacarmos que em relação à definição e o delineamento dos recursos tecnológicos, os alunos tiveram livre arbítrio de definirem o que consideravam como recursos tecnológicos. Entre os alunos pesquisados, 50% disseram que é utilizado algum recurso tecnológico e 50% registraram que nas aulas não eram utilizados recursos tecnológicos, conversando com a turma os 50% que disseram que não é utilizado recursos tecnológicos são os que não consideram data-show como recurso.

Gráfico 2: Níveis de afinidades, dificuldades, suporte para aplicação e uso de recursos tecnológicos, em relação à Matemática.



Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Em seguida, realizamos questionamentos voltados para o conhecimento prévio que possuíam a respeito do software Geogebra e se conheciam a Geometria Fractal. A totalidade (100%) dos sujeitos da pesquisa responderam que nunca tiveram contato com o software Geogebra e que não conheciam sobre o que é Geometria Fractal como também nunca tiveram contato com o ensino da mesma.

Frente aos dados expostos nos Gráficos 1 e 2, percebemos que apesar de a maioria dos alunos, cerca de 56,25%, consideraram a matemática como essencial, o Gráfico 2 mostra que cerca de 80% dos alunos sentem alguma dificuldade com relação a disciplina. O que significa que, grande parte percebe que a matemática é necessária para a sua vida, todavia os alunos sentem dificuldades na compreensão da mesma.

Essa evidencia constitui oportunidade para implementar atividade capaz de proporcionar compreensão de conteúdos matemáticos a partir da construção de fractais com o auxílio de Geogebra em ambiente de Modelagem Matemática. Segundo a resolução nº 7, de 14 de dezembro de 2010, um dos objetivos para a educação escolar ser eficaz é a contextualização dos conteúdos, assegurando que a aprendizagem seja relevante e significativa, nesse sentido entendemos que a contextualização das construções Fractais proporciona esse conhecimento relevante e significativo.

5.2 Segundo momento: Atividade de Modelagem Matemática “Geometria Fractal e modelos”.

Inicialmente, para favorecer uma inteiração dos alunos com a temática de Geometria Fractal foi abordado o contexto histórico, de modo que os alunos percebessem como as ideias se constituíram enquanto conceito formalizado. Nesse sentido, percebemos o quanto eles estavam interagindo com o assunto, pois surgiram dúvidas e o encanto pelo assunto era notável, justificado em boa parte pelos “fatos interessantes sobre a vida dos matemáticos famosos, bem como descobertas e curiosidades nessa área do conhecimento”. (ROSA NETO, 1987, p.7)

Conhecer sobre aquilo que se está apresentando como proposta de ensino, foi decisivo para continuação do desenvolvimento da atividade. Tendo a compreensão da ideia de Fractal os alunos partiram para a construção dos mesmos com o software Geogebra. E como a escola não dispunha de Laboratório de Informática, foi necessário utilizarmos celulares.

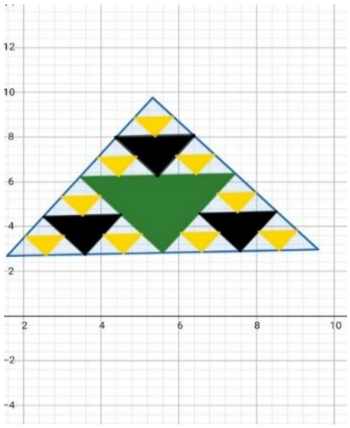
A construção dos fractais no Geogebra se deu por orientação de passos a seguir, não inviabilizando o processo de Modelagem Matemática, pois o objetivo da atividade era de encontrar e discutir os modelos matemáticos percebidos a partir da construção dos fractais. Pois, a Modelagem Matemática é uma forma diferenciada de constituição de conceitos matemáticos advindos de um processo construído a partir de situações, às vezes, vivenciadas. Essa prática de construção de conceitos matemáticos nem sempre surge por meio de modelos pré-definidos, mas podem ser estabelecidos por meios de processos empíricos. Na situação vivenciada com os alunos, os conceitos matemáticos foram sendo discutidos a partir de cada iteração dos Fractais executadas no Geogebra.

Desenvolvemos a aplicação “Geometria Fractal e modelos”, com o software Geogebra. Para a realização desta atividade, foi necessário utilizarmos o celular, pois a escola não possuía laboratório de informática.

Nas construções com o software Geogebra, os alunos demonstraram muito interesse. No início, sentiram um pouco de dificuldade, pois o software era desconhecido e por esse motivo foi necessária uma aula para explicar as ferramentas existentes, como também a maneira de utilizar cada uma. Sanada essa questão, partimos para a etapa de construções dos fractais.

No decorrer da atividade, as dúvidas eram inevitáveis perante as novidades da realização das construções Fractais no software Geogebra, já na segunda construção, a familiaridade foi proporcionando agilidade e habilidade como o software, desta maneira, facilitando também o processo da matematização dos dados.

Figura 9: Construção alunos



Fonte: Pesquisa de Campo, 2019.

A construção dos fractais no Geogebra facilitou a compreensão dos alunos, pois “os softwares matemáticos surgem como alternativa que amplia os conceitos teóricos dos conteúdos em sala de aula e de recurso dinâmico que pode atrair o interesse e a intuição dos alunos e incentivar o estudo dos conceitos de forma inovadora”.(PACHECO & BARROS, 2013, p. 4)

Uma vez construído os fractais a partir de algumas iterações, o processo de matematização se deu no sentido de encontrar modelos capazes de representá-los, bem como discussão dos conteúdos matemáticos envolvidos desde a construção até a representação dos mesmos.

A partir da poeira de Cantor foi possível discutir o conceito de frações e sua inserção nesse fractal para se chegar no modelo matemático do mesmo a partir de um segmento de medida 9 cm, como evidenciado na tabela 1.

Tabela 1: Número de segmento da poeira de Cantor por iteração

Nível	**Nº de Segmentos**
1	9
2	$3+3+3$
3	$1+1+1+1+1+1+1+1+1$
4	$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3}\right)}_{27\ vezes}$

...	...
n	$\frac{9}{3^{n-1}}$

Fonte: Pesquisa de Campo, 2019

Para a exploração da curva de Koch, iniciamos com um segmento de medida de 9 centímetros no software Geogebra, na segunda iteração do Fractal, realizamos a construção e realizamos a discussão da divisão dos segmentos em três partes. Na terceira iteração do Fractal, os alunos conseguiram realizar a divisão do segmento em 9 partes iguais, porém na quarta iteração os mesmos sentiram dificuldades de dividir o segmento de 9 centímetros em 27 partes, pois a dificuldade de trabalhar com números fracionados foi observada. Suprida essa questão, encontramos uma fórmula geral para encontrar a divisão de cada segmento independentemente do nível e de sua medida. Conforme na Tabela 2.

Tabela 2: Número de segmentos Curva De Koch por iteração

Nível	**N° de Segmentos**
1	4^0
2	4^1
3	4^2
4	4^3
...	...
n	4^{n-1}

Fonte: Pesquisa de Campo, 2019

Com relação à construção do Floco de Neve de Koch, foi perceptível o encantamento dos alunos pela figura, tanto que na primeira iteração do Fractal, realizaram de maneira rápida, pois já estavam familiarizados com o software como também a análise para saber a quantidade de segmentos. Na segunda iteração a percepção da quantidade de segmentos foi evidenciado de maneira rápida e na terceira iteração o raciocínio para calcular a quantidade de segmentos se obteve de maneira mais lenta e na quarta apresentaram dificuldades. Depois de discutirmos a respeito das construções, realizamos a percepção do modelo geral para iteração n, e a partir da análise foi dialogado a respeito do comportamento que seguia a quantidade dos segmentos em relações aos níveis e foi concluído que tinha por conexão o ensino de progressão geométrica, por a1=1 e q=4. Tabela 3

Tabela 3: Exploração do Fractal Floco de Neve Nível

Iteração	N° de Segmentos	Comprimento	Perímetro
	3.4^0	$c.\left(\frac{1}{3}\right)^0$	$3.c.\left(\frac{4}{3}\right)^0$
	3.4^1	$c.\left(\frac{1}{3}\right)^1$	$3.c.\left(\frac{4}{3}\right)^1$
	3.4^2	$c.\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$3.c.\left(\frac{4}{3}\right)^2$
	3.4^3	$c.\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$3.c.\left(\frac{4}{3}\right)^3$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	3.4^n	$c.\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$3.c.\left(\frac{4}{3}\right)^n$

Fonte: Pesquisa de Campo, 2019

Como os alunos já haviam encontrado o número de segmentos da curva de Koch, com a construção do floco de neve no Geogebra, facilitou a partir da compreensão de três curvas de Koch. Desta maneira, foi colocado na tabela o comportamento dos segmentos e os mesmos concluíram que o modelo equivalia a uma progressão geométrica.

Dando continuidade ao processo foi sugerido aos estudantes que encontrassem o comprimento da figura do floco de neve. No início surgiram dúvidas, pois a iteração número quatro era mais difícil de descobrir o comprimento, pois tinha mais elementos, mas na medida que explicava o comportamento da primeira iteração, eles percebiam que as iterações seguintes seriam realizadas com o mesmo processo anterior, porém em uma escala maior.

Para encontrar o perímetro da figura do floco de neve, na primeira iteração não encontraram dificuldades, porém na segunda o raciocínio divergia do anterior por possuir mais elementos, mas na medida que realizávamos a construção da tabela, examinávamos as construções para prosseguir tabulando, tomando como partida a apresentação da fórmula geral do comprimento de segmentos e contagem dos perímetros, os alunos demonstraram bastante entusiasmo pela conexão que a figura abordava através dos conteúdos matemáticos.

Esse entusiasmo dos alunos ao perceber o conteúdo matemático com a construção do fractal dialoga com a ideia de que ao desenvolver Modelagem Matemática proporciona ao aluno “saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas (BIEMBENGUT, 1999, p. 11).

Foi possível a aplicação deste fractal pela contagem dos perímetros a cada novo nível obtido, como também o comprimento de cada segmento e os seus respectivos números.

Na elaboração desta construção foi trabalhada os conteúdos de contagem dos perímetros, como também realizada uma análise sobre semelhança de triângulos. A tabela mostra mais algumas informações importantes extraídas da construção. A medida que os estudantes realizavam cada processo, as discussões sobre o processo de construção eram elaboradas e surgiam ideias da possível conexão com o conteúdo matemático existente em cada construção. Esse processo configurou-se como Modelagem Matemática por meio de análises do conhecimento pré-estabelecido realizado por comando inicialmente, porém as abordagens eram prosseguidas pelos estudantes e a partir disso estudávamos as construções dos fractais com conexões de conteúdos matemáticos.

Tabela 4: Perímetro do triângulo de Sierpinski de medida de lado(1/2) por iteração

Nível	N° de Triângulos	Perímetro
0	3^0	$3.\left(\frac{1}{2}\right)^0$
1	3^1	$3.\left(\frac{1}{2}\right)^0+3.\left(\frac{1}{2}\right)^1$=4.5

2	3^2	$3.\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 3^2.\left(\frac{1}{2}\right)^2$=6.75
3	3^3	$3.\left(\frac{1}{2}\right)^0 +.\,3^1\left(\frac{1}{2}\right) + 3^2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10{,}125$
⋮	⋮	⋮
n	3^n	$\sum_{i=0}^{n}\frac{3}{2}.\left[3^i.\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\right]$

Fonte: Pesquisa de Campo, 2019

Na construção do triângulo de Sierpinski, a construção foi facilitada, pois como tinha sido utilizado anteriormente a análise para saber a quantidade de segmentos, então para calcular a quantidade de triângulos inscritos a cada nível do Fractal, foi realizado facilmente, porém para calcular o perímetro da figura a cada nível se deu de maneira lenta.

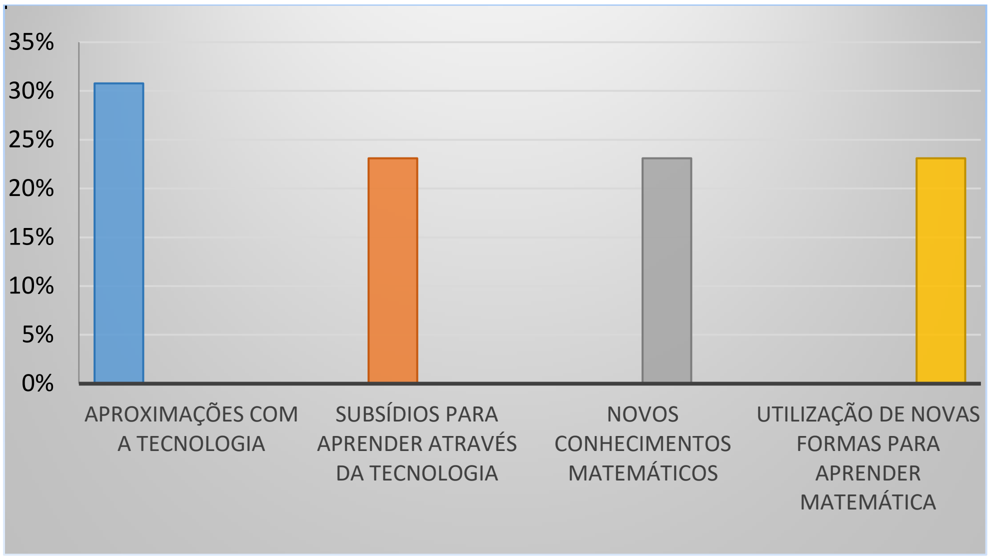
Na primeira iteração os alunos conseguiram descobrir o perímetro, na segunda iteração bem poucos conseguiram, na terceira precisaram de ajuda como também na quarta. Quando realizamos a fórmula geral para n triângulos, à medida que ia explicando os alunos demonstravam interesse.

Desta maneira, foi também discutido a respeito do assunto de semelhança de triângulos, tratando-se de um triângulo equilátero, pois possui os três lados iguais, sendo proporcionais e todos os ângulos tendo medidas iguais, atendendo a todos os requisitos de semelhanças de triângulo.

5.3 Terceiro momento: Do questionário final.

Na tentativa de capturar nas respostas dos alunos, motivos para acreditar que o projeto caracterizado pela associação da Modelagem Matemática com uso do software livre Geogebra na discussão da Geometria Fractal, pôde favorecer aprendizagem de conteúdos matemáticos é que aplicamos um questionário dissertativo pós atividade para os 13 alunos que participaram atividades de toda a atividade, pois 3 desistiram por motivos de morarem no interior da cidade e dependerem de ônibus, que por ventura sempre faltava na sexta feira, na qual era o dia realizado o projeto. Sobre as contribuições do projeto, ver Gráfico 3.

Gráfico 3: Contribuições do projeto



Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Entende-se como projeto toda a organização pensada, articulada e implementada com a turma por meio da Modelagem Matemática com auxílio do da tecnologia Software Geogebra quando das construções de fractais. Do gráfico 3, podemos aglutinar a utilização de novas formas para aprender matemática com novos conhecimentos matemáticos como pontos positivos para a forma como o projeto envolveu os alunos, ao mesmo tempo em que foi possível aprender com o uso da tecnologia conversa com a ideia de aproximações de tecnologia.

É evidente que “embora a presença do computador **e ou celular** na sala de aula possa promover um encantamento inicial e motivação nos alunos, esse clima logo acabará se o professor não desenvolver um plano de atividades que os tire da passividade” (PENTEADO E BORBA, 2000, p. 10, **grifo nosso**). É nesse ponto de passividade que a Modelagem Matemática se faz presente, pois entendemos que o uso da tecnologia deva ocorrer sim, mas no sentido de tornar o aluno atuante da sua aprendizagem.

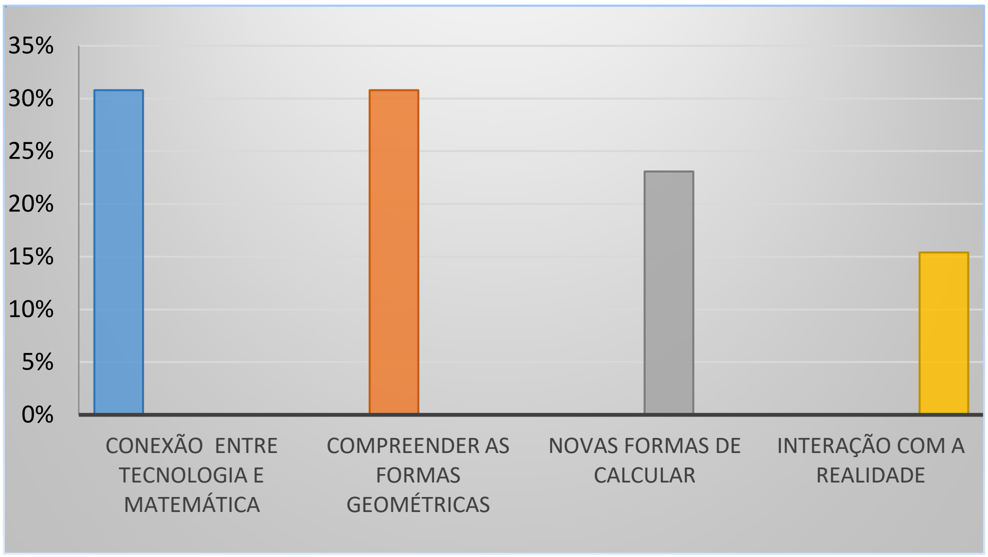
Somado a isso, as diferentes tecnologias, são potencializadoras e “constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas" (BRASIL, 1998, p. 43). Esse cotidiano, claramente envolve o ambiente escolar.

Em seguida, foram questionados a respeito dos conteúdos matemáticos, como também se a Geometria Fractal estava relacionada com aplicações na realidade e se a oferta de Geometria Fractal no ensino médio seria interessante. Dentre as respostas, 92,30% conseguiram identificar o desenvolvimento de conteúdos matemáticos através da Geometria Fractal, e somente 7,70% dos estudantes não conseguiram identificar conexão da Geometria Fractal com os conteúdos matemáticos.

Além disso, foi destacado que facilitaria o ensino fazendo abordagens com as construções dos fractais. E este por estar relacionado com conteúdos matemáticos pertencentes a organização curricular do ensino médio, como também ser um assunto que está inserido na realidade, a inserção da disciplina nos conteúdos programáticos facilitaria o ensino

Observamos que a inserção do software Geogebra trouxe pontos positivos, pois os estudantes conseguiram ter percepções de conexão com as tecnologias, como compreender as formas geométricas, trazendo novas formas de calcular e interagir com a realidade. Conforme o Gráfico 4:

Gráfico 4: Subsídios a partir do uso do software Geogebra



Fonte: Pesquisa de campo 2019.

Os dados referentes aos Gráficos 3 e 4 mostram que após a inclusão de novas formas de aquisição de conceitos matemáticos as aprendizagens deram se forma mais eficazes nós conteúdos correlacionados por meio das construções dos Fractais.

Da sondagem, relatamos o fato de que 56,25% dos alunos consideram como fundamental a disciplina ao passo que mais de 80% sentiam dificuldades na compreensão da mesma. Porém, os dados nos revelam que pós atividade a visão dos alunos em relação aos conteúdos foi modificada, pois os mesmos começaram a vislumbrar a conexão entre as construções e assuntos já estudados anteriormente.

Dito isto, podemos estabelecer uma relação entre as ações efetuadas pelos alunos e o entendimento pós atividade. Que através da Modelagem Matemática, a construção ativa de conhecimento matemático foi mais eficaz a partir da temática Geometria Fractal.

Por fim, podemos dizer que a associação da Modelagem Matemática com o uso do Geogebra, promoveu um ambiente significativo para compreensão da matemática. Pois pouco mais de 30% dos alunos responderam positivamente com relação a conexão entre tecnologia e matemática, ao mesmo tempo que 15% perceberam interação com a realidade, ao mesmo tempo que o uso da tecnologia permitiu que pouco mais de 30% dos alunos compreenderam formar geométrica além de novas formar de calcular. De modo que dessa articulação/associação Modelagem e tecnologia teve o objetivo alcançado, pois ao associá-las o intuito é tentar resolver problemas que envolvem a investigação e a experimentação-com-tecnologia, que são muito valorizados e discutidos na Educação Matemática. (MALHEIROS, 2004, p. 53)

Considerações

Este trabalho abordou a aplicação do software Geogebra na exploração de conteúdos de Geometria Fractal por meio da Modelagem Matemática. Permitindo-nos visualizar os efeitos no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos de forma eficaz, permitindo aos estudantes a percepção sobre a temática e compreensão da correlação tanto com a realidade inserida como a do conteúdo programático que pode ser colocada ao alcance deles. Desta maneira, entendemos que ocorreu uma mudança na forma como os conteúdos matemáticos se relacionam.

Nesse sentido, enfatizamos a importância de um ensino diferenciado voltado a atender as necessidades dos estudantes. A pesquisa inserida na escola possibilitou abranger os conteúdos matemáticos de uma forma inovadora, haja vista que a cada iteração (níveis do fractal), um despertar dos sentidos geométricos através do Geogebra, proporcionou aprendizagem aos alunos.

Desta maneira, a pesquisa permitiu abranger uma nova visão do ensino de matemática, pois trouxe experiências e excelentes contribuições para minha formação como docente. E como também propiciou um ambiente agradável, em que os alunos se interessaram pelo assunto, inclusive os alunos e a coordenação solicitaram para que o projeto prosseguisse.

Os pontos apresentados que dificultaram a realização do projeto foram à falta de tecnologia na escola, pois não tinha computadores e sala de informática. Todavia, observamos que o uso de tecnologias independe de Laboratório de Informática, pois a atividade de Modelagem Matemática associada ao uso do software Geogebra foi realizada com os alunos com o uso de celulares e o comutador pessoal da pesquisadora.

Assim notamos que, em sala de aula, o uso do celular pode ser uma ferramenta auxiliadora no processo do uso de tecnologia para o ensino da Matemática. Outra dificuldade foi com relação ao horário, pois nos foi disponibilizado apenas o último horário na sexta feira, poucos estudantes permaneciam em sala de aula devido alguns residir nos interiores da cidade e o transporte escolar não aguardar o término das aulas.

Retornando a pergunta norteadora que deu origem a pesquisa, na qual nos interessou saber *que contribuições à associação da Modelagem Matemática com uso do software livre Geogebra na discussão da Geometria Fractal, podem favorecer aprendizagem de conteúdos matemáticos?*

Constatou-se que por meio do ensino de Geometria Fractal através do software GeoGebra. Foi possível fazer a associação entre as construções de Fractais efetuadas no Geogebra com os conteúdos matemáticos vivenciados pelos alunos. Pois, à medida que as construções iam sendo realizadas ia-se produzindo inter-relação com outros conteúdos. Como contagem de perímetros -comuns em exercícios de geometria, progressões geométricas, frações entre outros, caracterizando assim o processo de Modelagem Matemática presente na pesquisa, pois os próprios alunos iam fazendo conexões com outros assuntos e essas descobertas se davam por meio de ações realizadas no Geogebra.

Ficando então claro que quando associado a Modelagem Matemática com o uso de tecnologias, em especial, Geogebra, trabalhada a partir da Geometria Fractal é fato o ganho em aprendizagem, a visão dos conteúdos matemáticos é diferenciada assim como a aproximação da matemática com a realidade é mais eficaz.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Lourdes Werle; SILVA; Karina Pessôa & VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem matemática na educação básica.** São Paulo: Contexto, 2012.

ARAGÃO, Maria de Fátima Andrade. A história da modelagem matemática: uma perspectiva de didática no ensino básico**.** In: Congresso Paraibano de Educação Matemática, 7., 2015, Paraíba. **Anais...**

ASSIS, Thiago Albuquerque; MIRANDA, José Garcia Vivas; MOTA, Fernando de Brito; ANDRADE, Roberto Fernandes Silva; CASTILHO, Caio Mário Castro. Geometria fractal: Propriedades e caraterísticas de fractais ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 30, n. 2, 2008.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a geometria fractal para a sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BASSANEZI, R. C.**. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.** Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem matemática & implicações no ensino e aprendizagem de matemática**. Blumenau. Editora da Furb, 1999.

BIEMBENGUT, Maria Salett. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,** v. 2, n. 2, Jul, 2009.

BRAGA, Roberta Modesto. **Modelagem matemática e tratamento do erro no processo de ensino-aprendizagem das equações Diferenciais ordinárias.** 2009, 182f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém-Pará, 2009.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Secretaria de Educação Média e Tecnológica**, Brasília: MEC/SEMT, 1998.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais**:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais / Ensino Fundamental. **Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARVALHO, Hamilton Cunha. **Geometria fractal perspectivas e possibilidades no ensino de matemática.** 2005. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém-Pará, 2005.

CRILLY, Tony. **50 ideias de matemática que você precisa conhecer**. Editora: Planeta. 2017.
FAINGUELERNT, Estela Kaufman; NUNES, Katia Regina Ashton. **Matemática práticas pedagógicas para o ensino médio.** Porto Alegre: Penso, 2012.

DAGA, Marcelo da Silva. **Uma análise de geometria fractal.** Universidade de Brasília Planaltina – DF, junho 2017.

HOHENWARTER, Markus. **Geogebra- informações**. 2007. Disponível em: http://www.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf. Acesso em:09 out 2019

JANOS, Michel. **Geometria fractal.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **A produção dos alunos em um ambiente de Modelagem,** 2004, 180f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, 2004.

MANDELBROT, B. P. **Objetos fractais.** Lisboa, Editora: Gradiva, 1989.

MENDES, Iran Abreu; CHAQUIAM, Miguel. **História nas aulas de matemática:** fundamentos e sugestões para professores. Belém-Pa. Editora: SBHMat, 2016.

MERLO, Clinton André e Assis, Raquel Trindade. O uso da informática no ensino da matemática**. Revista Unijales**, Ano 5, 4º ed. n. 4, 2010.

MOREIRA, MARCO ANTÔNIO. **Metodologias de pesquisa em ensino**. São Paulo. Editora: Livraria da Física. 2011.

NASCIMENTO, Maristel et al. Uma proposta didática para o ensino de geometria fractal em sala de aula da educação básica. **VIDYA**, v.32, n2, p113-132, Santa Maria, 2012.

Pacheco, José Adson D; Barros, Janaina V. O uso de softwares educacionais no ensino de matemática. **DIÁLOGOS -** Revista de Estudos Culturais e da Contemporaneidade, n. 8, 2013.

PENTEADO, Miriam G.; BORBA, Marcelo C. (org.). **A formação em ação:** formação de professores, pesquisa e extensão. São Paulo: Olho d'água. 2000.

ROSA NETO, Ernesto. **Didática da Matemática.** São Paulo: Ática. 1987.

SILVEIRA, Alexis; FERREIRA, Gessé Pereira & SILVA, Leonardo Andrade. A evolução da Modelagem matemática ao longo da História, o surgimento da Modelagem Matemática no Brasil e suas contribuições enquanto estratégia de ensino de matemática. In: Congresso Ibero Americano de Educação Matemática, 7., 2013, Montevideo, Uruguai, **Anais...**

BRASIL. Ministério da Educação. Fixa diretrizes curriculares nacionais para o ensino fundamental de 9 anos. **Resolução nº 7,** de 14 de dezembro de 2010**,** Brasília, Dez 2010.

APÊNDICE I: Questionário de Sondagem

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA.

Escola: X
Nome: ___________________________________
Série _______________________________________ Data___/____/______

1. Qual seu pensamento sobre Matemática?

2. Você gosta de Matemática?

3. Você sente dificuldades com Matemática? Quais?

4. Você acha que o conteúdo de Matemática ofertado no Ensino Médio, lhe dá suporte para aplicar dentro da sua realidade?

5. Para você o que é Geometria Fractal? já teve algum contato com Geometria Fractal?

6. Você já teve contato com recursos tecnológicos nas aulas de Matemática?

7. Você já escutou ou teve aula com o software geogebra?

APÊNDICE II: Questionário pós-atividade

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA.

Escola: X
Nome: ________________________________
Série ________________________________ Data__/___/_____

1. Quais contribuições o projeto trouxe para você?

2. O que é Geometria Fractal?

3. Você acha que a partir do tema Geometria Fractal, foi possível aprimorar seus conhecimentos sobre os conteúdos matemáticos?

4. A Geometria Fractal lhe trouxe subsídios para contextos da realidade?

5. Você acha que o conteúdo de Geometria Fractal seria interessante como oferta no Ensino Médio?

6. Que subsídios o software Geogebra lhe forneceu?

7. O que você achou da proposta de inclusão de softwares na aula de Matemática?

8. O que você faria para melhorar o ensino de Matemática