UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

CAPITALIZAÇÃO A JUROS COMPOSTOS ATRAVÉS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA E DA E.D.O DE 1° ORDEM.

GLEYKSON CORRÊA BARBOSA

BRAGANÇA – PA
2022

CAPITALIZAÇÃO A JUROS COMPOSTOS ATRAVÉS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA E DA E.D.O DE 1° ORDEM.

GLEYKSON CORRÊA BARBOSA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Licenciado Pleno em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Marly dos Anjos Nunes

BRAGANÇA – PA

2022

CAPITALIZAÇÃO A JUROS COMPOSTOS ATRAVÉS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA E DA E.D.O DE 1° ORDEM.

GLEYKSON CORRÊA BARBOSA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Licenciado Pleno em Matemática.

Bragança, 11 de Julho de 2022

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Marly dos Anjos Nunes
Orientadora – UFPA

Profº. Msc. Oséas Guimarães Ferreira Neto
Coorientador – Membro Externo – SEDUC PA

Profª. Drª Edilene Farias Rozal
Examinador Interno – UFPA

AGRADECIMENTOS

- Começo o meu agradecimento a Deus, pois sem ele nada disso seria possível, agradeço por me proporcionar a vida, por me dar saúde, e por sempre me amparar em todos os momentos sejam elas difíceis ou não. Obrigado meu Deus pelo seu amor e pela sua misericórdia, peço sempre que me der sabedoria e me fortaleça em todos os momentos da minha vida e obrigado por sempre acreditar e não desistir de mim.

- Ao meu porto seguro, minha mãe Raimunda Corrêa Barbosa por ter me proporcionado uma excelente educação, pelo seu esforço e dedicação em criar seus três filhos. Sim minha mãe é uma verdadeira guerreira, batalhadora, uma mulher digna ao qual eu a amo com todas as minhas forças, onde serei eternamente grato em minha vida. E foi durante esses 4 anos que passamos por várias tribulações, a chegar num ponto em pensar em desistir do curso, mas Deus sempre esteve presente para enfrentarmos essas batalhas, nos amparando em vários momentos para que o sonho dela e o meu pudesse ser concretizado, que seria justamente a conclusão do ensino superior. Agradeço a todos os meus irmãos e familiares que acreditaram e me apoiaram para que eu pudesse chegar até aqui.

- Não poderia deixar de registrar entre essas linhas a grande importância que foi a minha orientadora Profª Dra. Marly dos Anjos Nunes, na minha vida para a realização deste trabalho. Com a sua total dedicação, paciência, humildade, uma professora magnífica e exemplar que se entrega e ama a sua profissão com todas as suas forças, ganhando assim a admiração dos seus alunos. A minha orientadora é super exigente e comprometida em sempre buscar o melhor para os seus alunos. Deixo aqui registrado a minha eterna gratidão por tudo que eu aprendi e vivi durante esses 4 anos, onde levarei a minha total gratidão, admiração, respeito e inspiração tanto para a minha vida pessoal quanto a profissional.

- Aos meus colegas, onde fiz amizades e as levarei para o resto da minha vida, e querendo sempre o melhor deles, onde cada um tem uma participação significativa para a minha formação acadêmica e docente. Aos demais professores da FAMAT que contribuíram com os seus conhecimentos e seu tempo, para que eu pudesse chegar até o final do curso e realizar o meu sonho. E por fim a Universidade Federal do Pará (UFPA) - Campus de Bragança e a todos aqueles(as) que fizeram parte direta ou indiretamente da minha vida nessa minha caminhada a tão sonhada graduação, deixo aqui o meu abraço e a gratidão.

"Estude muito o que mais lhe interessa da maneira mais indisciplinada, irreverente e original possível".(Richard Feynman)

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar duas modelagens, uma voltada para o cálculo da matemática financeira e a outra usando as equações diferenciais ordinárias de 1º ordem, relacionando-as com a aplicação referente a capitalização a juros compostos, e com o auxílio do Software Excel fazer comparações com os resultados obtidos. Este trabalho surgiu da curiosidade de se obter resultados usando modelagens diferentes voltadas para um mesmo objeto de estudo. A intuição nos permitia pensar que os valores seriam iguais, porém não necessariamente, depende das variáveis envolvidas no modelo. Para o embasamento teórico, consultamos diversas referências bibliográficas, sendo assim utilizamos de uma metodologia qualitativa que nos permitiu analisar a modelagem de capitalização a juros compostos para então checar os resultados no Excel. A evidência da aprendizagem se encontra na relevância desta pesquisa, onde usamos a aplicação em conteúdos da educação básica e do ensino superior, relacionando-os e além disso através de tabelas e gráficos construídos no Software Excel, comparamos os resultados que nos possibilitaram concluir que as duas modelagens têm consequências distintas, levando em consideração a relação tempo e taxa.

Palavras-chaves: modelagem matemática; matemática financeira; capitalização; equações diferenciais ordinárias.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 Introdução

Nada parece mais próximo da matemática, que as situações cotidianas que envolve dinheiro, comprar uma casa, fazer um empréstimo ou realizar investimentos. A matemática financeira não é de uso exclusivo de administradores, contadores, economistas ou dos que trabalham com essa área, é um ramo cujas as aplicações estão se tornando mais comuns no cotidiano de todos em todas as áreas de atuação.

Nessa perspectiva este trabalho propõe apresentar a capitalização a juros compostos sujeito a duas regras amenas à modelagem matemática, uma voltada para os cálculos básicos da matemática financeira e a outra envolvendo equações diferencias ordinárias de primeira ordem.

> Modelo é a representação de um objeto ou fato concretas sendo suas características predominantes a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. [..]. Ele deve conter as mesmas características que o sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais) (BASSANEZI. 2002, p.19 e 20).

Conforme está abordagem, podemos perceber que o modelo matemático é a interpretação de alguma situação da realidade, ou seja, que a modelagem matemática em um situação de problema real nos faz compreender os fenômenos.

Diante do modelo matemático, podemos explorar a sua eficiência através da aplicabilidade do modelo, podendo então fazer as previsões, tomar decisões, explicar e entender determinados comportamentos. Sendo assim, além de apresentar capitalização a juros compostos: depósito único, depósitos constantes e caderneta de poupança nos permitimos comparar os resultados referentes a essas duas modelagens para essas aplicações.

Como fazer a comparação dos resultados desses modelos? O recurso empregado foi o software Excel, um dos mais utilizados para cálculo de tabelas e planilhas que nos permitiram trabalhar os dados, plotar o gráfico, interpretar e tomar decisões elaboradas.

Quanto a pesquisa discorremos sobre os conteúdos de Juros Compostos e métodos de soluções de Equações Diferencias Ordinárias de primeira ordem lineares, separáveis por análises bibliográficas. Além disso, consulta a autores que tratam da capitalização e de modelagem matemática.

Nesse sentido, objetivamos analisar os resultados advindos da teoria que relaciona a matemática financeira, a E.D.O. e o uso do software Excel de modo a compreender esta vertente da matemática e contribuir com o seu processo de ensino e aprendizagem.

A organização do trabalho está estruturado da seguinte maneira:

No capítulo 2, apresentamos os conceitos básicos da matemática financeira, dentre eles o conceito de juros compostos, regimes de capitalização e série de pagamentos que serão utilizados no capítulo seguinte.

Temos no capítulo 3, a aplicações envolvendo a capitalização a Juros Compostos abrangendo as situações com depósito único, depósitos constantes e caderneta de poupança, cuja modelagem utilizada a teoria abordada no capítulo anterior.

Para o capítulo 4, discorremos da abordagem teórica referente as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (linear, separável e exata), bem como os métodos para se encontrar as soluções dessas equações.

No capítulo 5, estudaremos a modelagem da capitalização a juros compostos através das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem buscando encontrar soluções para as mesmas aplicações discutidas no capítulo 3.

Por fim, no capítulo 6, nos dedicaremos a analisar os resultados obtidos nos capítulos 3 e 5, além disso, ampliar a outros valores de modo a interpretar as tabelas e gráficos gerados pelo software Excel.

2 Matemática Financeira

A matemática financeira é uma das áreas da matemática que passeia pelos cálculos mais simples até os mais complexos. É um ramo essencial para que se entenda o valor do dinheiro e como este varia ao longo do tempo.

Neste capítulo apresentaremos os fundamentos teóricos básicos das aplicações financeiras mais simples, explorando os conceitos da matemática financeira. Evidenciaremos em certas definições (capital, taxa de juro, tempo ou prazo ou período, juro, juros simples, juros compostos, taxas equivalentes, regime de capitalização, séries de pagamento) baseadas nas referências (BRANCO, 2005), (NETO, 2016), (PUCCINI, 1999), (SAMANEZ, 2002), (ZOT, 1999).

2.1 Capital (S_0)

É a quantia de dinheiro na “data zero”, ou seja, a data de início da operação financeira. Pode ser o dinheiro investido em uma atividade econômica, o valor financiado de um bem ou de um empréstimo tomado. É também chamado de valor presente, valor inicial, valor principal, valor atual, investimento inicial ou valor aplicado.
Notação: S_0

2.2 Taxa de Juro (r)

Segundo Neto (2006) a taxa de juro é o coeficiente que determina o valor dos juros, ou seja, a remuneração do fator capital utilizado durante certo período de tempo.

As taxas se referem sempre a uma unidade de tempo (mês, semestre, ano, entre outros.) e podem ser representadas equivalentemente de duas maneiras: taxa percentual e taxa unitária.

A taxa percentual refere-se ao “centos”do capital, ou seja, o valor dos juros para cada centésima parte do capital.

A taxa unitária refere-se ao rendimento de cada unidade de capital em um determinado período de tempo.

Por exemplo, em um capital de $R\$\,1.000,00$ aplicado a uma taxa de 25% ao ano, tem-se que o capital de $R\$\,1.000,00$ tem dez centos. A taxa unitária centra-se na unidade de capital. Reflete o rendimento de cada unidade de capital em certo período de tempo.

No exemplo acima, a taxa percentual de 25% ao ano indica um rendimento de $0,25\ \left(\frac{25\%}{100}\right)$ por uma unidade de capital aplicada.

2.3 Tempo ou Prazo ou Período (t)

É o tempo necessário que um certo capital, aplicado a uma taxa, necessita para produzir um montante (BRANCO, 2005).

Pode também ser chamado de período de capitalização. Os prazos mais usados são: dia, mês, bimestre, trimestre, semestre e ano.

2.4 Juro (j)

De acordo com Puccini (1999), definem-se juros como sendo a remuneração do capital a qualquer título. São procedentes as seguintes expressões como conceito de juros: remuneração do capital empregado em atividades produtivas; remuneração paga pelas instituições financeiras sobre o capital nelas aplicado; custo do capital de terceiros.

É a remuneração do capital emprestado. Da parte de quem paga, é uma despesa ou custo financeiro; da parte de quem recebe, é um rendimento ou renda financeira.

2.5 Juros Simples (J)

O regime de juros é simples quando o percentual de juro incidir apenas sobre o capital inicial, ou seja, sobre os juros gerados, a cada período, não incidirão novos juros. Os juros simples são diretamente proporcionais ao capital e ao prazo de empréstimo (ZOT, 1999).

Conforme Neto (2016) Os juros simples restringe-se principalmente às operações praticadas no âmbito do curto prazo. No entanto, as operações que adotam juros simples, além de apresentarem geralmente prazos reduzidos, não costumam apurar o seu percentual de custo (rentabilidade) por este regime. Os juros simples são utilizados para o cálculo dos valores monetários da operação (encargos a pagar, para empréstimos,e rendimentos financeiros, para aplicações). As taxas que são praticadas no mercado financeiro tanto nacional como internacional estão referenciadas em juros simples, porém a formação dos montantes das operações processa-se exponencialmente (juros compostos). Os juros simples são conhecidos também como lineares.

2.5.1 Fórmula de Juros Simples

Conforme Neto (2016) valor dos juros é calculado a partir da seguinte expressão

$$J \ = \ S_0 \,.\, r \,.\, t \,,$$

onde

J = juros cobrado no final do empréstimo;
S_0 = capital ou valor inicial;
r = taxa de juros;

$t =$ tempo para o pagamento do capital mais juros.

Sabendo que o total a ser pago representa a soma do capital adicionando o juros, temos

$$\begin{aligned} M &= S_0 + J \\ M &= S_0 + S_0\, r\, t, \end{aligned}$$

onde M é o montante. Aplicando a propriedade distributiva, no sentido contrário, obtemos

$$M = S_0(1 + rt) \tag{1}$$

Exemplo 2.1. *Calcular o valor dos juros pagos pelo empréstimo de um capital de* $R\$\ 2.200,00$ *à taxa de juros simples de* 2% *ao mês, após* 4 *meses.*

Dados:

$J =?$

$S_0 = 2.200,00$

$r = 2\% \ = 0,02$

$t = 4$

Solução:

$$\begin{aligned} J &= S_0\,.r\,.t \\ J &= 2.200\ .\,0,02\ .\,4 \\ J &= R\$\,176,00 \end{aligned}$$

Exemplo 2.2. *Um capital no valor de* $R\$\ 5.300,00$*, foi emprestado à taxa de juros simples de* 43% *ao ano. Calcular o montante após* 458 *dias.*

Dados:

$S_0 = 5.300,00$

$r = 43\% \ = 0,43\,a.a$

$t = 485\,d = \frac{458}{360}\,a$

$M =?$

Solução: Segue de (1) que

$$\begin{aligned} M &= S_0(1 + rt) \\ M &= 5.300\left(1 + 0,43\,.\frac{458}{360}\right) \\ M &= R\$\,8.199,39 \end{aligned}$$

2.6 Juros Compostos

Vimos na subseção 2.5 que o juros simples representa um valor calculado em cima do valor da dívida, e que o mesmo valor se repetiria mês a mês ou ano a ano conforme fosse contratada a operação. Sabe-se que o juros simples quase não aparecem nas operações financeiras, na sua grande maioria prevalece o regime de juros compostos que veremos com mais detalhes agora.

Quando trabalhamos com juros compostos, o dinheiro cresce muito mais rapidamente. Neste caso, temos um crescimento exponencial em progressão geométrica ao longo do período. Este modelo nos leva àquela expressão que escutamos no nosso cotidiano: "juro sobre juro". O modelo descrito acima é conhecido também como regime de capitalização composta.

Nesse regime consideramos que os juros formados em cada período são adicionados ao capital formando o montante (capital + juros) do período, esse montante passa a ser o novo capital e irá incidir juros sobre esse novo capital e assim sucessivamente. Dizemos ainda que os juros são capitalizados, e como não apenas o capital inicial rende juros, denominamos juros compostos. Entendemos, então, que a composição do capital mais os juros transformam-se em um novo capital.

2.6.1 Fórmula de Juros Compostos

Segundo Neto (2016), podemos deduzir a fórmula dos juros compostos da seguinte forma.

No primeiro período, tem-se

$$S(1) = S_0 + rS_0 = S_0(1 + r), \tag{2}$$

onde

S_0 = capital ou valor inicial;

r = taxa de juros.

No segundo período $S(2)$, vamos aplicar novamente o novo montante nas mesmas condições anteriores que resultará

$$S(2) = S(1)(1 + r) = S_0(1 + r)^2.$$

De modo análogo, no terceiro período $S(3)$ podemos obter a expressão usando o $S(2)$,

$$S(3) = S(2)(1 + r) = S_0(1 + r)^3,$$

e assim por diante.

De modo geral, o montante $S(t)$ da aplicação de um capital S_0 a uma taxa r por um período t será

$$S(t) \;=\; S_0(1+r)^t. \tag{3}$$

Exemplo 2.3. *Um videogame Xbox é vendido à vista por* $R\$\,1.200,00$ *ou a prazo com entrada de* $R\$\,200,00$ *mais três parcelas mensais. Qual o valor de cada parcela se a taxa de juros cobrada pela financeira é de* $3\%\,a.m$*?*

Dados:

$S(t) = ?$

$S_0 = 1.000,00$

$r = 3\% \; = 0,03$

$t = 3$

Solução: Da igualdade (3), temos

$$\begin{aligned} S(t) &= S_0(1+r)^t \\ S(t) &= 1.000\,(1+0,03)^3 \\ S(t) &= 1.000\,.\,1,09 \\ S(t) &= R\$\,1.090,73 \end{aligned}$$

Para determinarmos o valor de cada parcela, basta dividirmos $S(t)$ por 3,

$$\frac{S(t)}{3} \;=\; \frac{1.090,73}{3} \;=\; 364,24.$$

Assim o valor de cada parcela será de $R\$\,364,24$.

Exemplo 2.4. *Após quanto tempo um capital inicial de* $R\$\,5.000,00$ *que dobra de valor a cada ano, passará a ser maior do que* $R\$\,40.000,00$*?*

Dados:

$S(t) = 40.000,00$

$S_0 = 5.000,00$

$r = 100\%\,a.a$ (o capital dobra por ano)

$r = \frac{100}{100} = 1$

$t = ?$

Solução: Segue do montante (3) que

$$\begin{aligned} S(t) &= S_0(1+r)^t \\ (1+r)^t &= \frac{S(t)}{S_0} \\ (1+1)^t &= \frac{40.000}{5.000} \\ 2^t &= 8 \\ 2^t &= 2^3 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

Logo, para que o montante supere o valor de $R\$\,40.000,00$, o tempo necessário deve ser maior que 3 anos.

2.7 Taxas Equivalentes

Duas taxas de juros são denominadas equivalentes entre si quando, aplicadas sobre um mesmo capital, durante um mesmo período de tempo, reproduzem a mesma quantia de juros ou o mesmo montante (ASSAF NETO, 2009, p. 8; SAMANEZ, 2002, p. 49).

Em relação as equivalências das taxas, temos que levar em consideração as diferenças entre os regimes de juros simples e compostos, visto que, nas mesmas condições, eles reproduzem juros diferentes.

Desse modo, duas taxas podem ser equivalentes em um regime (simples ou composto), mas não serão do outro.

2.7.1 Taxas Equivalentes à Juros Simples

No que diz respeito a condição de equivalência ($\leftrightarrow$) entre as taxas mensal (r_m) e anual (r_a) no regime de juros simples. Para que elas sejam equivalentes, devem reproduzir os mesmos juros, logo, o mesmo montante. Se considerarmos uma aplicação S_0 após o período de 1 ano, teremos que $r_a \leftrightarrow r_m$ se, e somente se, for garantida a igualdade da equação a seguir

$$S(t) = S_0(1 + r_a\,1) \qquad \text{e} \qquad S(t) = S_0(1 + r_m\,12)$$

ou

$$r_a\,1 = r_m\,12.$$

Logo, para que $r_a \leftrightarrow r_m$, devemos ter $r_a = r_m\,12$

Podemos notar que o número 12, é a relação de equivalência entre $r_a = r_m$, que é exatamente a relação de proporcionalidade entre as unidades dos prazos (1 ano tem 12 meses), ou seja, para que elas sejam equivalentes, também devem ser proporcionais entre si.

Exemplo 2.5. *Calcular a taxa trimestral equivalente a* $14,50\%\, a.a$*, em juros simples.*

Dados:

$r_a = 14,50\% = 0,145\, a.a$
$r_t =?$

Solução: Desde que a taxa é trimestral, temos que em 1 ano equivale a 4 trimestres, assim

$$\begin{aligned} r_t\, 4 &= r_a\, 1 \\ r_t &= \frac{r_a}{4} \\ r_t &= \frac{0,145}{4} = 0,03625 = 3,62500\% \\ r_t &= 3,63\%\, a.t. \end{aligned}$$

2.7.2 Taxa Equivalente à Juros Compostos

De acordo com Puccini (1999), taxas equivalentes são taxas de juros fornecidas em unidade de tempo diferentes que ao serem aplicadas a um mesmo principal durante um mesmo prazo produzem um mesmo montante acumulado no final daquele prazo, no regime de juros compostos. O conceito de taxas equivalentes está, portanto, diretamente ligado ao regime de juros compostos.

Em relação ao regime de juros compostos, para que haja equivalência entre a taxa mensal e anual, $r_m \leftrightarrow r_a$ é necessário que $S_1 = S_2$, ou seja

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0(1 + r_a)^1 \\ S_2 &= S_0(1 + r_m)^{12} \end{aligned}$$

necessitamos que esses montantes sejam iguais, para assim termos as taxas equivalentes

$$(1 + r_a)^1 = (1 + r_m)^{12},$$

onde podemos concluir que

$$r_a = (1 + r_m)^{12} - 1$$

e

$$r_m = (1 + r_a)^{\frac{1}{12}} - 1$$

As outras expressões, relacionadas a taxa anual equivalente semestral, trimestral e diária, podem ser obtidas analogamente. Sabemos que o ano comercial equivale a 360 dias, em vista disso, o cálculo das taxas equivalentes estão nas relações

$$(1+r_a) \;=\; (1+r_s)^2 \;=\; (1+r_t)^4 \;=\; (1+r_m)^{12} \;=\; (1+r_d)^{360},$$

onde

$r_a =$ taxa de juros anual;
$r_s =$ taxa de juros semestral;
$r_t =$ taxa de juros trimestral;
$r_m =$ taxa de juros mensal;
$r_d =$ taxa de juros diária.

Exemplo 2.6. *Calcular a taxa anual equivalente a* 8% *ao trimestre em juros compostos.*

Dados:

$r_a =?$
$r_t = 8\% = 0,08$

Solução: Usando a relação, obtemos

$$\begin{aligned} (1+r_a) &= (1+r_t)^4 \\ r_a &= (1+r_t)^4 - 1 \\ r_a &= (1+0,08)^4 - 1 \\ r_a &= 0,360489 \\ r_a &= 36,05\% \end{aligned}$$

2.8 Regime de Capitalização

Segundo Neto (2016) regimes de capitalização mostram como os juros são formados e sucessivamente integrado ao capital no decorrer do tempo. Diante disso, dois regimes de capitalização dos juros podem ser identificados: simples (ou linear) e composto (ou exponencial).

No que diz respeito a capitalização simples os juros crescem de forma linear ao longo do tempo, onde esses juros incidem somente no capital inicial da operação, onde não se registra juros sobre saldo dos juros acumulados.

Em relação ao regime de capitalização composta engloba ao capital não somente os juros referentes a cada período, como também os juros sobre juros acumulados até o momento anterior, no qual os juros incidem sempre sobre o saldo calculado no início do período correspondente.

Ainda sobre o regime de capitalização, encontramos também duas abordagens de capitalização: contínua e descontínua.

2.8.1 Capitalização Contínua

De acordo com Neto (2016), a capitalização contínua atua em intervalos de tempo bastante reduzidos, especificamente em intervalos de tempo infinitesimal, acarretando grande frequência de capitalização, ao qual se formam continuamente, e não somente ao final de um único período (mês, ano).

A capitalização contínua, na prática, pode ser entendida em todo fluxo monetário distribuído ao longo do tempo e não somente num único instante.

2.8.2 Capitalização Descontínua

Em concordância com Neto (2016) entende-se que na capitalização descontínua os juros são formados unicamente ao final de cada período de capitalização. Por exemplo, a caderneta de poupança que paga juros unicamente ao final do período a que se refere sua taxa de juros (mês). Os rendimentos, neste caso, passam a transcorrer de forma descontínua, somente em um único momento do prazo da taxa (final do mês) e não distribui pelo mês.

2.9 Séries de Pagamento

Em harmonia com Neto (2016), um fluxo de caixa representa uma série de pagamentos ou de recebimentos que se estima ocorrer em determinado intervalo de tempo. No momento em que os pagamentos ou recebimentos são continuados e ocorrem em intervalos de tempos iguais e que estão sujeitas a mesma taxa de juros, tem-se as séries de pagamentos uniformes, que se classificam em:

Séries Imediatas: quando o primeiro pagamento ocorre no primeiro período da série. Podem ser:

1. Antecipada: Determina em que a série de depósitos ou retiradas é feito no início de cada período (mês, ano, semana, quinzena, entre outros).

2. Postecipada: São séries em que as operações são realizadas no final do período (mês, ano, semana, quinzena, entre outros).

Série Diferida: Mostra que os termos da série começam a ocorrer após no final do primeiro período, indicando dessa maneira uma carência, tendo um período n de carência.

Segundo Puccini (1999) desenvolver as fórmulas usadas nas soluções de problemas uma série uniforme de valores monetários, no regime de juros compostos, e mostrar que suas aplicações habitualmente conhecidas como Modelo Price [1], no qual todas as operações têm um mesmo valor, representados por PMT. O fato das prestações terem o mesmo valor, permite a obtenção de fórmulas simplificadas para a capitalização dessas parcelas, mediante a utilização da expressão para a soma do termos de uma progressão geométrica (PG).

2.9.1 Dedução da Expressão

Em concordância com Puccini (1999) o problema do tipo "dado PMT, achar FV" consiste em determinar o montante acumulado FV, no final de t períodos, a partir da capitalização das t prestações de uma série uniforme, todas com o mesmo valor e igual a PMT, com uma taxa de juros r por período, no que diz respeito ao regime de juros compostos. A série uniforme PMT obedece à convenção de final de período, sendo portanto uma série postecipada.

O montante FV corresponde à soma dos montantes individualmente calculados para cada prestação até esse mesmo t período.

A primeira prestação capitaliza juros durante $(t-1)$ períodos, e seu valor futuro no final do período t é igual a

$$PMT(1+r)^{t-1}.$$

A segunda prestação capitaliza juros durante $(t-2)$ períodos, e seu valor futuro no final do período t é igual a

$$PMT(1+r)^{t-2}.$$

A penúltima prestação capitaliza juros durante 1 período, e seu valor futuro no final do período t é igual a

$$PMT(1+r).$$

A última prestação não capitaliza juros, e o seu valor no final no período t é igual a

$$PMT.$$

[1] Richard Price [1723-1791], foi um matemático ingles que em 1771, idealizou o método para o pagamento de pensões e aposentadorias. No entanto, foi a partir da 2ª revolução industrial que sua metodologia de cálculo foi aproveitada para cálculos de amortização de empréstimo. Seu método é internacionalmente conhecido como "sistema de amortização francês", já que se desenvolveu efetivamente na frança no século XIX.

Assim, o montante é obtido pela soma dessas parcelas, isto é

$$FV = PMT\left[(1+r)^{t-1} + (1+r)^{t-2} + \,...\, + (1+r) + 1\right] \qquad (4)$$

Os termos entre colchetes correspondem à soma de uma progressão geométrica (P.G). A fórmula de uma P.G pode ser obtida multiplicando-se em ambos os membros da operação (4) por $(1+r)$ reparemos

$$FV\,(1+r) = PMT\left[(1+r)^{t} + (1+r)^{t-1} + \,...\, + (1+r)^{2} + (1+R)\right] \qquad (5)$$

Subtraindo-se da operação (5) em (4), tem-se

$$FV\,r = PMT\left[(1+r)^{t} - 1\right],$$

portanto

$$FV = \frac{PMT\left[(1+r)^{t} - 1\right]}{r} \qquad (6)$$

O problema do tipo "dado FV, achar PMT"envolve a obtenção do valor do PMT de cada operação, a partir do valor futuro FV, onde encontra-se na (6). A construção de outras fórmulas, que envolve série uniforme de valores monetários poderão ser vistas em (PUCCINI 1999).

Vale salientar que o PMT será definido como k.

3 Aplicações de Capitalização a Juros Compostos

Neste capítulo, encontraremos aplicações envolvendo a capitalização a Juros Compostos abrangendo as situações com depósito único, depósitos constantes e caderneta de poupança, cuja modelagem se utilizará da teoria abordada no capítulo 2 com as suas respectivas soluções.

3.1 Capitalização com Depósito Único

Considerando o investimento com depósito único, queremos determinar o tempo t de modo que o montante seja o triplo do valor, em função da taxa de juros r. Por outro lado, também queremos encontrar a taxa, dado o tempo do investimento.

Usando a teoria da matemática financeira (montante de juros compostos), segue de (3) que

$$S(t) = S_0(1+r)^t.$$

Como queremos o triplo do capital inicial, tem-se $S(t) = 3\,S_0$, assim

$$\begin{aligned} 3S_0 &= S_0(1+r)^t \\ 3 &= (1+r)^t. \end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo na base 10 em ambos os membros, obtemos

$$\log 3 = \log(1+r)^t.$$

Devido a propriedade de logaritmo, tem-se

$$\begin{aligned} \log 3 &= t\log(1+r) \\ t &= \frac{\log 3}{\log(1+r)}. \end{aligned}$$

Para determinar o tempo t, a uma taxa de juros $r = 8\%$ ao ano, encontramos

$$\begin{aligned} t &= \frac{\log 3}{\log(1+0,08)} \\ t &= \frac{\log 3}{\log(1,08)} \\ t &= \frac{0,477}{0,033} \\ t &\approx 14,2 \ \ anos. \end{aligned}$$

Agora dado o tempo de investimento de 12 anos, a taxa anual de juros será

$$\begin{aligned}
12 &= \frac{\log 3}{\log(1+r)} \\
12\log(1+r) &= \log 3 \\
\log(1+r)^{12} &= \log 3 \\
(1+r)^{12.\frac{1}{12}} &= \log 3 \\
(1+r) &= \sqrt[12]{3} \\
r &= \sqrt[12]{3} - 1 \\
r &= 0,09 \\
r &= 9\% \; a.a
\end{aligned}$$

3.2 Capitalização com Depósitos Constantes

Nesta subseção consideraremos o investimento com depósitos constantes, a situação está em determinar o valor dos depósitos $PMT = k$, dado o montante acumulado FV, no final do período t com uma taxa de juros r por período a partir da capitalização de t prestações de uma série uniforme, sendo assim k tem o mesmo valor.

Segue de (6) que

$$FV = \frac{PMT\,[(1+r)^t - 1]}{r},$$

reescrevendo,

$$S(t) = k\left[\frac{(1+r)^t - 1}{r}\right] \tag{7}$$

Queremos encontrar o valor dos depósitos, dada a taxa de juros contínua $r = 8,5\%$ ao ano, queremos acumular o montante de $R\$\,400.000,00$ e esse tempo de investimento contínuo sendo de 30 anos, assim

$S(t) = 400.000,00$

$r = 8,5\% = 0,085$

$t = 30\; anos$

Substituindo em (7), tem-se

$$\begin{aligned}
400.000 &= \frac{k\,[(1+0,085)^{30} - 1]}{0,085} \\
400.000\,.\,0,085 &= k\,(1,085)^{30} - 1 \\
34.000 + 1 &= k\,(1,085)^{30} \\
k &= \frac{34.001}{(1,085)^{30}} \\
k &\approx R\$\,2.941,70
\end{aligned}$$

Portanto, para acumular um montante de $R\$ \, 40.000,00$ em 30 anos com uma taxa de $8,5\%$ ao ano, os depósitos terão de ser $R\$ \, 2.941,70$

3.3 Capitalização com Caderneta de Poupança

Nesta Seção faremos uma aplicação com capitalização com caderneta de poupança.

Vamos supor que uma aplicação de $R\$ \, 22.000,00$ em caderneta de poupança por 2 anos, com a capitalização de juros uma vez por mês, no qual a taxa de rendimento é de $0,8\%$ ao mês. Sabendo que a modelagem é a equação (3), temos

$$S(t) \quad = \quad S_0(1+r)^t$$

Observe que $r = 0,8\% = 0,008$ e $t = 2$ anos. Sabendo, que a expressão (3) fornece o montante acumulado ate o mês t.

No final do primeiro período

$$S(12) \quad = \quad 22.000(1+0,008)^{12}$$

Logo,

$$S(12) \quad = \quad R\$ \, 24.207,45.$$

No final do segundo período

$$S(24) \quad = \quad 22.000(1+0,008)^{24}$$

e

$$S(24) \quad = \quad R\$ \, 26.636,40.$$

Admitindo que permaneça $S_0 = 22.000$ na caderneta de poupança por 10 anos. Então $t = 10.12 = 120$ meses.

$$\begin{aligned} S(120) &= 22.000(1+0,008)^{120} \\ S(120) &= R\$ \, 57.238,27. \end{aligned}$$

4 Equações Diferenciais Ordinárias

Neste capítulo estudaremos as equações diferenciais ordinárias, em particular, as equações de 1º ordem enfatizando os métodos para se obter as soluções das equações lineares, separáveis e exatas. mas antes, apresentaremos alguns conceitos quanto ao tipo, ordem e linearidade de equações, bem como as definições de solução geral e particular (Problema de Valor Inicial).

Definicão 4.1 (**Equação Diferencial**). Uma equação que estabelece uma relação entre a variável independente t , a função incógnita $y = f(t)$ e suas derivadas $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ se chama de equação diferencial. Pode ser escrita na forma

$$F(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) \quad = \quad 0 \tag{8}$$

Exemplo 4.1.

$$\begin{aligned} y' &= \cos(t) \\ y'' + 4t &= 0 \\ t^2 y''' + 2e^t y'' &= (t^2 + 2)y^2 \end{aligned}$$

As equações diferenciais podem ser classificadas levando-se em conta as seguintes características:

(i) **O número de variáveis independentes da função incógnita.**

Quanto ao número de variáveis independentes, as equações diferenciais podem ser ordinárias ou parciais. Uma equação diferencial é ordinária (EDO) se a função incógnita depender de apenas uma variável. Neste caso, as derivadas que aparecem na equação diferencial são apenas derivadas ordinárias simples. Caso contrário, se a função depender de mais de uma variável, a equação diferencial é dita parcial (EDP).

Exemplo 4.2.

$$\mathit{Ordinária} \begin{cases} y' - 3y = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} - 6\dfrac{dy}{dt} + 8y = 0 \end{cases}$$

$$\mathit{Parcial} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u_t + u u_y = 0, \quad u = u(y, t) \end{cases}$$

(ii) **A ordem da equação.**

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada que aparece na equação. Observe o exemplo 4.1,

$y' = \cos(t)$	Equação Diferencial Ordinária de 1° Ordem
$y'' + 4t = 0$	Equação Diferencial Ordinária de 2° Ordem
$t^2y''' + 2e^ty'' = (t^2+2)y^2$	Equação Diferencial Ordinária de 3° Ordem

(iii) **A estrutura da Equação (Linear e Não - Linear.)**

Quanto à estrutura de uma equação diferencial, ela pode ser classificada em linear e não - linear. Ela é linear quando a incógnita e suas derivadas aparecem de forma linear na equação, isto é, quando os coeficientes dependem somente de t e não da variável dependente y. Uma equação diferencial linear de ordem n pode ser escrita na forma

$$a_0(t)y + a_1(t)y' + a_2(t)y'' \cdots a_n(t)y^{(n)} = f(t).$$

Caso ela não satisfaça as condições descritas acima, ela é dita não - linear.

Exemplo 4.3.

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 2 \qquad \textit{Equação Linear}$$

$$y''' + 2e^ty'' + \boldsymbol{y}y' = t^4 \qquad \textit{Não - Linear}$$

Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias.

Considere a EDO de ordem n

$$F(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{9}$$

Seja $\phi(t)$ uma função real definida no intervalo I, derivável até ordem n para todo $t \in I$. Diz-se que $\phi(t)$ é uma solução explícita ou simplesmente uma solução da equação diferencial (9) no intervalo I, se

$$F(t, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), \cdots, \phi^{(n)})$$

é definida para todo $t \in I$ e

$$F(t, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), \cdots, \phi^{(n)}) = 0$$

para todo $t \in I$.

Exemplo 4.4. *Verifique se a função* $y(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,e^{-t^2}$ *é solução de* $y'(t) + 2ty = t$

Solução: Dado a função $y(t) = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}\,e^{-t^2}$, vamos encontrar a derivada de primeira ordem.

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{3}{2}(-2t)\,e^{-t^2} \\ y'(t) &= -3\,te^{-t^2} \end{aligned}$$

Agora, substituindo y e y' na equação diferencial $y'(t) + 2ty = t$, temos

$$\begin{aligned} -3\,te^{-t^2} + 2t\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,e^{-t^2}\right) &= t \\ -3\,te^{-t^2} + t + 3\,te^{-t^2} &= t \\ t &= t. \end{aligned}$$

Desde que obtemos uma identidade, a função $y(t) = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}\,e^{-t^2}$ é solução da equação diferencial $y'(t) + 2ty = t$.

A relação $f(t, y) = 0$ é chamada uma solução implícita da EDO (9) se esta relação dá origem a pelo menos uma função de valores reais $\phi(t)$ definida no intervalo I , tal que $\phi(t)$ é uma solução explícita de (9) em I.

Exemplo 4.5. *Seja a equação diferencial ordinária*

$$2t + \cos y\,\frac{dy}{dt} = 0$$

Solução: A função $f(t, y) = t^2 + \sin y - 2 = 0$ é solução implícita da equação diferencial dada. Para verificarmos, devemos derivar implicitamente $f(t, y)$ em relação a variável t

$$\frac{d}{dt}\,(f(t, y))$$

$$\frac{d}{dt}\,(t^2 + \sin y - 2)$$

$$2t + \cos y\,\frac{dy}{dt} = 0$$

que é a equação diferencial inicial dada.

Solução Geral

Chama-se solução geral a toda a solução que envolva uma ou mais constantes arbitrárias independentes entre si. Portanto é o conjunto de todas as soluções, geometricamente, representa uma família de curvas, chamadas curvas integrais.

Exemplo 4.6. *Ache a solução geral da equação diferencial* $y' - 2t = 0$

Solução: Reescrevendo a equação diferencial dada, tem-se

$$\frac{dy}{dt} - 2t = 0.$$

Separando as variáveis, temos

$$\frac{dy}{dt} = 2t.$$

Integrando em ambos os membros

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{dt}\, dt &= \int 2t\, dt \\ y &= t^2 + c. \end{aligned} \tag{10}$$

Portanto, $y = t^2 + c$ é a solução geral dessa equação dada, isto é, para cada c, temos uma família de soluções.

Solução Particular

É uma solução obtida da solução geral que satisfaz uma condição inicial, ou condição de contorno dada, através de valores impostos as constantes arbitrárias.

Exemplo 4.7. *Na equação anterior obtivemos como solução geral a equação* (10)*. Dada esta solução, agora encontraremos a solução particular na seguinte condição inicial* $y(1) = 4$*, ou seja, para* $t = 1$ *relacionamos* $y = 4$*.*

Solução: Para $t = 1$ e $y = 4$ substituindo em (10), temos

$$\begin{aligned} y &= t^2 + c \\ 4 &= 1^2 + c \\ c &= 3. \end{aligned} \tag{11}$$

Substituindo (11) em (10), temos

$$\begin{aligned} y &= t^2 + c \\ y &= t^2 + 3. \end{aligned}$$

Portanto, $y = t^2 + 3$ é uma solução particular e também faz parte da família de soluções.

Problema de Valor Inicial - (PVI).

O problema

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t, y) \\ y\left(t_0\right) &= y_0 \end{aligned} \right. \tag{12}$$

é chamado de problema de valor inicial (PVI) ou problema de Cauchy.

Solução do Problema de Cauchy ou P.V.I

Uma solução do P.V.I em qualquer intervalo I contendo t_0 é uma função $y(t)$ que está definida neste intervalo tal que sua derivada $y'(t)$ está definida em I e satisfaz (10) neste intervalo.

Observação 4.1. *Se toda solução particular puder ser obtida da família de soluções que encontramos por uma escolha apropriada da constante dizemos que a família de soluções é a solução geral da equação.*

Exemplo 4.8. *Encontre a solução do Problema de Valor Inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} &= e^{3t} \\ y\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{e}{3} \end{cases}$$

Solução: Integrando em ambos os membros a equação diferencial dada

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{dt} &= \int e^{3t} \\ y(t) &= \frac{e^{3t}}{3} + c \end{aligned}$$

Substituindo os dados iniciais $y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e}{3}$, na solução geral encontrada, temos

$$\begin{aligned} \frac{e}{3} &= \frac{e^{3\frac{1}{3}}}{3} + c \\ c &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, a solução particular do P.V.I será

$$y(t) = \frac{e^{3t}}{3}$$

4.1 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem.

Uma equação diferencial de primeira ordem contém somente a primeira derivada $y' = \frac{dy}{dt}$, possivelmente y e alguma função de t , isto é, é uma equação do tipo

$$F(t, y, y') = 0 \quad ou \quad y' = f(t, y)$$

Exemplo 4.9.

$$y' = cost$$

$$ty' + 4ty = 0$$

Problema de Valor Inicial da EDO de 1° Ordem.

Um problema de Valor Inicial (PVI) de uma equação diferencial de primeira ordem é dado por

$$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

onde t_0, y_0 são valores dados. A solução $y = \phi(t)$ deste problema é uma solução da equação diferencial $y' = f(t,y)$ que também satisfaz a condição inicial $\phi(t_0) = y_0$. A condição inicial é normalmente usada para determinar o valor da constante c da solução geral.

4.1.1 Equações Lineares

Vimos que uma E.D.O é linear de ordem n , se é escrita na forma

$$a_n(t)y^n(t) + a_{n-1}(t)y^{n-1}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y = g(t).$$

As equações lineares de 1° ordem são escritas da seguinte forma

$$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y = g(t). \tag{13}$$

Queremos que o coeficiente da derivada de primeira ordem seja 1, para isto dividiremos a equação (13) pelo coeficiente $a_1(t)$, para obtermos uma forma mais útil de uma equação linear.

$$\frac{a_1(t)}{a_1(t)}\,y'(t) + \frac{a_0(t)}{a_1(t)}\,y = \frac{g(t)}{a_1(t)}$$

$$y'(t) + p(t)y(t) = f(t), \tag{14}$$

onde $p(t) = \dfrac{a_0(t)}{a_1(t)}$ $\quad e \quad$ $f(t) = \dfrac{g(t)}{a_1(t)}$.

Faremos análise da equação linear. Considerando as possibilidades para $p(t)$ e $f(t)$, e em seguida resolveremos um exemplo para cada caso.

Caso 1: Consideremos $p(t) \equiv 0$ e uma $f(t)$ qualquer.

$$\begin{aligned} y' + 0y &= f(t) \\ y' &= f(t) \\ \frac{dy}{dt} &= f(t) \end{aligned}$$

integrando em ambos os membros. Assim, a solução geral será

$$y(t) = \int f(t)dt + c$$

Exemplo 4.10. *A solução geral da equação diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = sen(2t)$$

é o conjunto de todas as primitivas de $f(t) = sen(2t)$, isto é,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int sen(2t)dt \\ y(t) &= -\frac{1}{2}cos(2t) + c. \end{aligned}$$

Observação 4.2. *Para resolver a integral, utiliza-se de diversas técnicas (substituição, substituição trigonométricas, frações parciais, por partes, dentre outras).*

Caso 2: Iremos considerar $f(t) \equiv 0$ e uma $p(t) = a$

$$y'(t) + ay(t) = 0.$$

Inspirados no modelo de Malthus (pág. 59), tem-se que a solução depende de exponencial, isto é,

$$y(t) = Ce^{-at}.$$

Agora, verificaremos se de fato, a $y(t)$ mencionada acima satisfaz ser solução do caso 2, derivando $y(t)$, temos

$$y'(t) = -aCe^{-at},$$

substituindo na equação

$$y'(t) + ay(t) = 0,$$

temos

$$-aCe^{-at} + aCe^{-at} = 0$$

portanto $y(t)$ é solução do caso 2.

Caso 3: Considerando $p(t) = a$ e $f(t) \neq 0$

$$y'(t) + ay(t) \;=\; f(t), \tag{15}$$

onde a é uma constante dada e $f(t)$ é uma função dada observe que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{at}\,y(t)) &= ae^{at}y(t) + e^{at}y'(t) \\
\frac{d}{dt}(e^{at}\,y(t)) &= e^{at}\,(\,y'(t) + ay(t)\,)
\end{aligned}$$

sendo assim, multiplicaremos a equação (15) por e^{at},

$$\begin{aligned}
e^{at}y'(t) + e^{at}ay(t) &= e^{at}f(t) \\
e^{at}\,(\,y'(t) + ay(t)\,) &= e^{at}f(t) \\
\frac{d}{dt}(e^{at}\,y(t)) &= e^{at}f(t)
\end{aligned}$$

integrando em ambos os lados,

$$\begin{aligned}
\int \frac{d}{dt}(e^{at}\,y(t))\,dt &= \int e^{at}f(t)\,dt \\
e^{at}\,y(t) &= \int e^{at}f(t)\,dt + c \\
y(t) &= \frac{1}{e^{at}}\left(\int e^{at}f(t)\,dt + c\right) \\
y(t) &= e^{-at}\int e^{at}f(t)\,dt + ce^{-at}
\end{aligned}$$

solução da equação diferencial.

Observe que encontramos um fator chamado de **fator integrante**, que torna a equação integrável.

Caso 4: Considere $y'(t) + p(t)y = f(t)$,
onde $p(t)$ e $f(t)$ são funções quaisquer dadas.

Seguindo o mesmo raciocínio do caso anterior, multiplicaremos a equação acima por uma função indeterminada $\mu(t)$,

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y \;=\; \mu(t)f(t). \tag{16}$$

Observe que o primeiro membro da igualdade é a derivada do produto $\mu(t)y$, desde que

$$\frac{d}{dt}\mu(t) \;=\; p(t)\mu(t) \tag{17}$$

que também é uma equação linear, mas com $f(t) = 0$.

Suponha que $\mu(t) \neq 0$ e multipliquemos (17) por $\dfrac{1}{\mu(t)}$, obtendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu}{dt} &= p(t) \\ p(t) &= \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}, \end{aligned}$$

integrando em ambos os membros

$$\begin{aligned} \int p(t)dt &= \int \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}dt \\ \int p(t)dt &= \ln\mu(t) + c \\ e^{\int p(t)dt} &= e^{\ln\mu(t)+c} \\ e^{\int p(t)dt} &= \mu(t)\, e^{c} \\ \mu(t) &= e^{\int p(t)dt}, \end{aligned}$$

tomamos $c = 0$, pois queremos somente um fator integrante (17).

Este método é devido a Leibniz, método este que envolve multiplicar a equação diferencial pelo fator integrante $\mu(t)$, utilizada na forma encontrada acima de modo que a equação resultante seja facilmente integrável.

Da equação (16), temos

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)y) = \mu(t)f(t)$$

logo,

$$\mu(t)y = \int \mu(t)f(t)dt + c,$$

onde c é uma constante arbitrária.

Exemplo 4.11. *Resolva a equação*

$$ty'(t) - 2y = t^4$$

Solução: Primeiro colocaremos na forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = f(t),$$

assim, vamos dividir a equação diferencial dada por t, supondo $t \neq 0$,

$$y' - \frac{2}{t}y = t^3 \tag{18}$$

Agora, encontraremos o fator integrante usando (17) e sabendo que $p(t) = \frac{-2}{t}$. Assim,

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int \frac{-2}{t} dt} \\ \mu(t) &= e^{-2 \ln t} + c, \end{aligned}$$

tomando $c = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\ln t^{-2}} \\ \mu(t) &= t^{-2}. \end{aligned}$$

Neste momento, multiplicaremos (18) por $\mu(t) = t^{-2}$

$$t^{-2} y' - \frac{2}{t} t^{-2} y = t^3 t^{-2}.$$

Observe que o lado esquerdo da igualdade acima é a derivada do produto entre o fator integrante e a função desconhecida $y(t)$.

Assim,

$$\frac{d}{dt}(t^{-2} y) = t$$

integrando, obtemos

$$\begin{aligned} t^{-2} y &= \int t \, dy \\ t^{-2} y &= \frac{t^2}{2} + c \end{aligned}$$

dividindo em ambos os membros por t^{-2} tem-se

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} \frac{t^2}{t^{-2}} + \frac{c}{t^{-2}} \\ y(t) &= \frac{t^4}{2} + c\, t^2, \end{aligned} \tag{19}$$

solução geral da equação dada.

Se no exemplo acima fosse acrescentado o dado $y(1) = 2$, teríamos um problema de valor inicial (P.V.I) e para encontrar a solução particular temos que descobrir o valor de c.

Substituindo $y(1) = 2$ em (19), isto é, $t = 1$ e $y = 2$, temos

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{t^4}{2} + c\,t^2 \\ 2 &= \frac{1}{2} + c \\ 2 - \frac{1}{2} &= c \\ c &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução do P.V.I será

$$y(t) = \frac{t^4}{2} + \frac{3}{2}\,t^2.$$

4.1.2 Equações Separáveis

As equações separáveis são equações que podem ser escritas na forma

$$g(y)\,\frac{dy}{dt} = f(t). \tag{20}$$

Considerando

$$h(y) = \int g(y)dy$$

então,

$$\frac{dh}{dy} = g(y),$$

substituindo $g(y)$ por $\dfrac{dh}{dy}$ na equação (20) obtemos

$$\frac{dh}{dy}\frac{dy}{dt} = f(t),$$

pela regra da cadeia tem-se

$$\frac{d}{dt}\left[h(y(t))\right] = \frac{dh}{dy}\frac{dy}{dt}$$

o que implica

$$\frac{d}{dt}\left[h(y(t))\right] = f(t). \tag{21}$$

Integrando a igualdade (21) em relação a t, obtemos a solução geral de (20) dada implicitamente por

$$h(y(t)) = \int f(t)dt + c.$$

Exemplo 4.12. *Resolva a equação*

$$y' = 1 + y^2$$

Solução: Primeiramente, separaremos as variáveis

$$\frac{dy}{1+y^2} = dt,$$

integrando em ambos os membros da equação acima em relação a t, tem-se

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dt$$

assim,

$$\arctan y = t + c,$$

logo

$$y = \tan(t+c).$$

Portanto, $y = \tan(t+c)$ é solução geral da equação diferencial.

4.1.3 Equações Exatas

As equações exatas são equações que podem ser escritas na forma

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0, \tag{22}$$

em que as funções $M(t,y)$ e $N(t,y)$ satisfazem

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t},$$

em um retângulo da forma $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2, \alpha < t < \beta,\ \delta < y < \theta\}$, onde $M(t,y), N(t,y)$, $\frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial N}{\partial t}$ são contínuas.

O teorema a seguir fornece um método sistemático para determinar se uma equação diferencial dada é exata.

Teorema 4.1. *Suponha que as funções M,N, My e Nt, onde os índices denotam derivadas parciais são contínuas na região retangular $R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2, \alpha < t < \beta,\, \delta < y < \theta\}$.*

Então, a equação

$$M(t, y) + N(t, y)y' \;=\; 0$$

é uma equação diferencial exata em $\mathbb{R}$ se, e somente se,

$$M_y(t, y) \;=\; N_t(t, y) \tag{23}$$

em cada ponto de R. Isto é, existe uma função ψ satisfazendo

$$\psi_t(t, y) = M(t, y) \quad \text{e} \quad \psi_y(t, y) \;=\; N(t, y) \tag{24}$$

se, e somente se, M e N satisfazem a equação (22).

Prova: Primeiramente vamos mostrar que, se existe uma função ψ tal que as equações em (23) se verificam, então a equação (22) é satisfeita.

A demonstração envolve a construção de uma função ψ satisfazendo as equações (23).

$$\psi_t(t, y) \;=\; M(t, y) \tag{25}$$

$$\psi_y(t, y) \;=\; N(t, y) \tag{26}$$

Calculando M_y e N_t em (23), obtemos

$$\text{Derivadas parciais mistas} \begin{cases} M_y(t, y) = \psi_{ty}(t, y) \\ N_t(t, y) = \psi_{yt}(t, y) \end{cases}$$

Por hipótese M_y e N_t são contínuas, então ψ_{ty} e ψ_{yt} também são contínuas, logo

$$M_y(t, y) = N_t(t, y).$$

Agora, mostraremos que se M e N satisfazem (22), então a equação diferencial

$$M(t, y) + N(t, y)y' \;=\; 0$$

é exata.

Integrando (25) em relação a t, mantendo y constante, obtemos

$$\begin{aligned} \int \psi_t(t,y)dt &= \int M(t,y)dt \\ \psi(t,y) &= Q(t,y) + g(y), \end{aligned} \tag{27}$$

onde $Q(t,y)$ é qualquer função diferencial tal que

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(t,y) = M(t,y)$$

e $g(y)$ é uma função diferenciável arbitrária de y (constante de integração).

Agora precisamos mostrar que sempre é possível escolher $g(y)$ de modo que (26) seja satisfeita, para isto vamos derivar a equação (24) em relação a y e igualar a $N(t,y)$

$$\psi_y(t,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(t,y) + g'(y) = N(t,y).$$

assim,

$$g'(y) = N(t,y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(t,y) \tag{28}$$

A questão está em encontrar $g(y)$ e até agora não usamos a hipótese $M_y = N_t$.

Para provar se a expressão à direita da igualdade (28) é uma função somente de y. Iremos derivar o segundo membro de (28) em relação a t,

$$\frac{\partial N}{\partial t}(t,y) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial Q}{\partial y}(t,y)$$

trocando a ordem das derivadas na segunda parcela, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}N(t,y) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial t}(t,y),$$

como

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(t,y) = M(t,y),$$

temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial Q}{\partial y}(t,y) = \frac{\partial M}{\partial y}(t,y).$$

Por hipótese temos que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$, então

$$\frac{\partial N}{\partial t}(t,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(t,y) = 0.$$

Logo, o lado direito de (28)só depende de y, pois a derivada em relação a t é igual a zero.

Integrando (28), obtemos $g(y)$ e assim, substituindo na equação (27) obtemos a função $\psi(t,y)$, solução implícita dada por

$$\psi(t,y) \;=\; C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

Observação 4.3. *Podemos também integrar (26) em relação a y, mantendo t constante e posteriormente derivar em relação a t e igualar a $M(t,y)$, aparecendo $g'(t)$.*

Exemplo 4.13. *Resolva a equação diferencial*

$$(y\,cost + 2te^{y}) + (sent + t^{2}e^{y} - 1)\,y' = 0$$

Solução: Comparando a equação diferencial dada com a equação (21), temos que

$$\begin{aligned} M(t,y) &= ycost + 2te^{y} \\ N(t,y) &= sent + t^{2}e^{y} - 1. \end{aligned}$$

verificaremos se $M_y = N_t$. De fato,

$$\begin{aligned} M_y &= cost + 2te^{y} \\ N_t &= cost + 2te^{y}. \end{aligned}$$

Considerando satisfeito $M_y = N_t$ podemos dizer que a equação diferencial é exata. Pelo teorema, existe $\psi(t,y)$ tal que

$$\psi_t = M = ycost + 2te^{y}$$

e

$$\psi_y = N = sent + t^{2}e^{y} = 1,$$

integrando ψ em relação a t, obtemos

$$\psi(t,y) \;=\; \int (ycost + 2te^{y})\,dt$$

$$\psi(t,y) \;=\; ysent + t^{2}e^{y} + g(y), \tag{29}$$

onde $g(y)$ é uma função arbitrária.

Agora, vamos derivar (29) em relação a y e fazer $\psi_y = N$

$$\begin{aligned}
\psi_y(t,y) &= sent + t^2 e^y + g'(y)\\
\psi_y(t,y) &= N \;=\; sent + t^2 e^y - 1
\end{aligned}$$

comparando, tem-se que

$$g'(y) = -1,$$

o que implica que

$$g(y) = -y,$$

substituindo em (29), obtemos as soluções implícitas da equação diferencial dada

$$\psi(t,y) = y\,sent + t^2 e^y - y \;=\; C.$$

5 A Modelagem da Capitalização através da E.D.O de 1º Ordem

Neste capítulo estudaremos a matemática financeira, em especial, a capitalização a juros compostos modelada por equações diferenciais ordinárias de 1° ordem, utilizando como aplicação as mesmas situações abordadas no capítulo 3, com a finalidade de comparar os resultados obtidos pelas modelagens.

5.1 Capitalização com Depósito Único

Nesta seção abordaremos a capitalização a juros compostos sobre um investimento com depósito único, considerando a capitalização contínua e modelada por uma equação diferencial ordinária de primeira ordem que descreve o investimento, em particular, como se tem depósitos, teremos o aumento neste investimento. Para isto, vamos supor um valor inicial S_o de dinheiro seja depositado num banco que paga uma taxa anual de juros r. Queremos encontrar a taxa (r) em função do tempo t , no momento em que o montante triplicará de valor. A taxa de variação do valor do investimento S é representada por

$$\frac{dS}{dt},$$

onde o t é o tempo e esta variação de investimento é diretamente proporcional à taxa de juros vezes o valor atual de investimento $S(t)$. Assim,

$$\frac{dS}{dt} = rS \tag{30}$$

no qual r é constante e representa a taxa de juros r e $S(t)$ é o montante.

Para encontrar a solução desta equação diferencial ordinária de 1º ordem, isto é, utilizaremos o método das equações separáveis

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= rS \\ \frac{1}{S}\frac{dS}{dt} &= r, \end{aligned}$$

integrando em relação a t, em ambos os membros, obtemos

$$\int \frac{1}{S} dS = \int r dt$$

Observe que $S(t)$ é o montante, logo $S(t) > 0$. Assim,

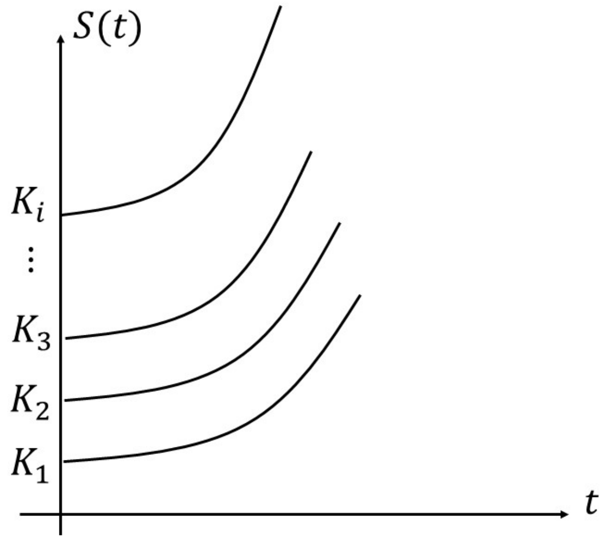
$$\ln S = rt + c$$

Aplicando a exponencial na igualdade anterior, temos

$$\begin{aligned} e^{\ln S} &= e^{rt+c} \\ S(t) &= e^{rt}.\, e^{c} \\ S(t) &= k_i.e^{rt}, \end{aligned} \tag{31}$$

onde $e^c = k$ é uma constante positiva.

Figura 1: Gráfico da Solução Geral



Fonte: Própria do Autor.

Suponha que no instante inicial $t = 0$, se conheça o valor do investimento, sendo este o dado $S(0) = S_0$. Assim,

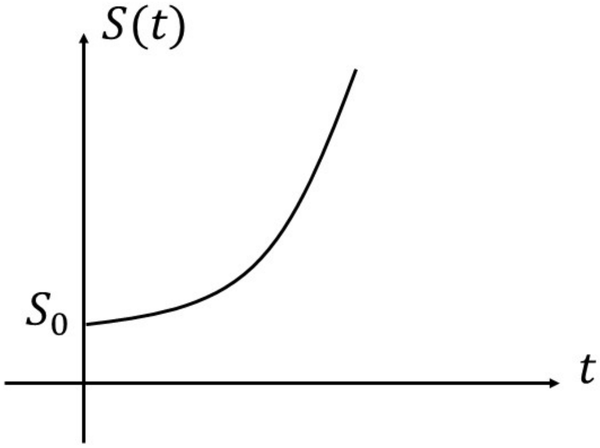
$$\begin{aligned} S(t) &= k.e^{rt} \\ S(0) &= k.e^{r0} \\ S_0 &= k \end{aligned} \tag{32}$$

Substituindo (32) em (31), concluímos que

$$\begin{aligned} S(t) &= k.e^{rt} \\ S(t) &= S_0.e^{rt} \end{aligned} \tag{33}$$

A equação (33) representa o montante $S(t)$ após a aplicação de um capital S_o a uma taxa constante r por um período de tempo t.

Figura 2: Gráfico da Solução Particular



Fonte: Própria do Autor.

5.1.1 Aplicação envolvendo Capitalização com Depósito Único

Nosso propósito é calcular o tempo que um capital aplicado a uma taxa r leva para triplicar de valor, isto é, $S(t) = 3\,S_0$. Segue de (33) que

$$\begin{aligned} S(t) &= S_0.e^{rt} \\ 3 &= e^{rt} \end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os membros, teremos

$$\begin{aligned} \ln 3 &= \ln\left(e^{rt}\right) \\ \ln 3 &= rt \\ t &= \frac{\ln 3}{r}. \end{aligned} \tag{34}$$

Observe que de (34) podemos obter o tempo t, dado o valor da taxa (r) ou dado (t), podemos determinar a taxa (r).

Consideremos $r = 8\%$ ao ano (a.a), isto é, $r = 8\% = 0,08$ e sabendo que (34) nos dá a relação de t em função r, podemos determinar em quanto tempo o montante triplica de valor. Assim,

$$\begin{aligned} t &= \frac{\ln 3}{r} \\ t &= \frac{1,098}{0,08} \\ t &= 13,7. \end{aligned}$$

Portanto, o montante aplicada a uma taxa anual de 8% de juros, triplica de valor em 13,7 anos.

Por outro lado, em 12 anos, por exemplo, podemos determinar a taxa de juros r necessária para o investimento inicial S_0 triplicar seu valor. Usando novamente (34), temos

$$\begin{aligned} t &= \frac{\ln 3}{r} \\ r &= \frac{\ln 3}{t} \\ r &= \frac{1,098}{12} \\ r &= 0,091 \\ r &= 9,1\% \ a.a \end{aligned}$$

Para o valor inicial triplicar em 12 anos, deve ser aplicado uma taxa de $9,1\%$ de juros anual.

Neste trabalho utilizamos uma aplicação voltada para a matemática financeira (capitalização com depósito único) usando a equação diferencial ordinária de $1^{\underline{o}}$ ordem (30), cuja solução geral e particular são dadas por (31) e (33). Essa mesma equação com suas respectivas soluções também modelam outras situações desta mesma área.

5.2 Capitalização com Depósitos Constantes

Encontraremos, neste tópico, a modelagem de capitalização à juros compostos de um capital com depósitos constantes. Esse investimento é modelado por uma equação diferencial de 1° ordem, desde que consideremos que o investimento seja feito continuamente e que o juros sejam capitalizados também continuamente, sabendo que a taxa de crescimento do montante $S(t)$ é dada anteriormente (30)

$$\frac{dS}{dt} = rS.$$

Mas, como a capitalização é continua, e além do rendimento dos juros existam depósitos que ocorre a uma taxa constante, logo a equação (30) é substituída por

$$\frac{dS}{dt} = rS + k, \tag{35}$$

desde que k representa os depósitos constantes, k é positiva. Poderíamos também levar em consideração k negativo, caso k representasse retiradas, mas não abordaremos este caso.

Usaremos o método das equações lineares, para encontrar a solução $S(t)$, assim reescrevemos a equação (35),

$$\frac{dS}{dt} - rS = k. \tag{36}$$

Para calcular o fator integrante $\mu(t)$ consideremos $p(t) = -r$, logo

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{-rt}. \tag{37}$$

Multiplicando (37) em (36) em ambos o membros, tem-se

$$e^{-rt}\,\frac{dS}{dt} - rS.e^{-rt} \;\; = \;\; k.e^{-rt}.$$

Podemos reescrever o primeiro membro da igualdade acima, da forma

$$\frac{d}{dt}\left[S.e^{-rt}\right] \;\; = \;\; k.e^{-rt}.$$

Integrando em relação a "t" em ambos os membros, tem-se

$$\begin{aligned} S.e^{-rt} &= \int k.e^{-rt}dt \\ S.e^{-rt} &= \frac{k.e^{-rt}}{-r} + c \\ S(t) &= \frac{-k}{r} + c.e^{rt}. \end{aligned} \tag{38}$$

Considerando o problema de valor inicial em que para $t = 0$, temos $S(0) = S_0$, temos

$$\begin{aligned} S(0) &= \frac{-k}{r} + c.e^{r.0} \\ S_0 &= \frac{-k}{r} + c \\ c &= S_0 + \frac{k}{r}. \end{aligned} \tag{39}$$

Substituindo (39) em (38), conclui-se

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{-k}{r} + \left(S_0 + \frac{k}{r}\right) e^{rt} \\ S(t) &= \frac{k}{r}\left(e^{rt} - 1\right) + S_0\, e^{rt}. \end{aligned} \tag{40}$$

A solução (40) pode ser aplicada em diversas situações financeiras. Vamos supor que uma pessoa, sem capital inicial, investe k reais a taxa de juros r. Neste caso $S_0 = 0$, pois não há capital inicial aplicado, então (40) é reescrita como

$$S(t) \;\; = \;\; \frac{k}{r}\left(e^{rt} - 1\right). \tag{41}$$

5.2.1 Aplicação envolvendo Capitalização com Depósitos Constantes

Queremos na aplicação a seguir, determinar o valor dos depósitos dado a taxa de juros contínua r, o montante $S(t)$ e o tempo do investimento contínuo. Considere $r = 8,5\%$ ao ano, o montante acumulado de $R\$\,400.000,00$ para 30 anos. Vamos determinar o valor do depósito k. Assim,

$r = 8,5\% = 0,085$, $S(t) = 400.000$ e $t = 30$

Segue de (41) que

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{k}{r}\,(e^{rt} - 1) \\ 400.000 &= \frac{k}{0,085}\,(e^{0,085(30)} - 1) \\ k &\approx R\$\,2.879,62. \end{aligned}$$

Portanto, para acumular um montante de $R\$\,400.000,00$ em 30 anos com uma taxa de $8,5\%$ ao ano, os depósitos devem ser de $R\$\,2.879,64$.

5.3 Capitalização com Caderneta de Poupança

Neste tópico, explanaremos, sobre a capitalização com caderneta de poupança, normalmente chamada de poupança. A modelagem também será por uma equação diferencial de 1º ordem. Para este caso, vamos partir do pressuposto que haja um capital S_0 de dinheiro que será depositada em um determinado banco que paga uma taxa de juros r. Sabendo que o valor do investimento $S(t)$, em qualquer instante t, dependerá da periodicidade na qual o juros é capitalizado e também da taxa de juros.

O valor do investimento em qualquer instante t depende tanto da frequência de capitalização dos juros, quanto da taxa de juros.

Sabemos que se supormos que a capitalização é feita continuamente, podemos modelar por uma problema de valor inicial simples que descreve o investimento.

Assim, o problema de valor inicial.

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} &= rS \\ S(0) &= S_0 \end{cases}$$

descreve esse processo, supondo conhecido o valor do investimento.

A equação é linear e separável e sua solução é

$$S(t) = S_0\,e^{rt}.$$

Comparando este resultado de um modelo contínuo com a capitalização que ocorre em intervalos finitos de tempo. Se os juros são capitalizados uma vez por ano, depois de t anos, temos

$$S(t) \;=\; S_0(1+r)^{rt}.$$

Se o juros são capitalizados duas vezes por ano, no fim de seis meses o valor desse investimento é de

$$S(t) \;=\; S_0\left[1+\left(\frac{r}{2}\right)\right]$$

e ao fim do primeiro ano

$$\begin{aligned} S(t) &= S_0\left[1+\left(\frac{r}{2}\right)\right]\left[1+\left(\frac{r}{2}\right)\right] \\ S(t) &= S_0\left[1+\left(\frac{r}{2}\right)\right]^2 \end{aligned}$$

logo, ao fim de t anos, temos

$$S(t) \;=\; S_0\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t}$$

Agora, se os juros são capitalizados m vezes por ano, então

$$S(t) \;=\; S_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Considerando a capitalização contínua

$$S(t) = \lim_{m\to\infty} S_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = S_0 \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{rt} = S_0\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{rt}$$

Tomando $\frac{r}{m} = \frac{1}{h}$, $m \to \infty$, $rh \to \infty$ e $h \to \infty$ tem-se

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}} = \lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h = e.$$

Assim,

$$S(t) \;=\; S_0\, e^{rt}.$$

5.3.1 Aplicação envolvendo Capitalização com Caderneta de Poupança

Retomando a aplicação do capítulo 3 seção 3.3, vamos supor uma aplicação de $R\$\,22.000,00$ em caderneta de poupança por 2 anos, com a capitalização de juros uma vez por ano, no qual a taxa de rendimento é de $0,8\%$ ao mês. Observe que $r = 0,8\% = 0,008$ e $t = 2$ anos.

Discriminando o saldo disponível na conta ao final de cada período, tem-se

No final do primeiro período,

$$\begin{aligned} S(12) &= 22.000\ e^{0,008.12} \\ S(12) &= R\$\,24.216,70. \end{aligned}$$

No final do segundo período,

$$\begin{aligned} S(24) &= 22.000\ e^{0,008.24} \\ S(24) &= R\$\,26.656,75. \end{aligned}$$

Admitindo que permaneça $S_0 = 22.000$ na caderneta de poupança por 10 anos. Então $t = 10.12 = 120$ meses, logo

$$\begin{aligned} S(120) &= 22.000\ e^{0,008.120} \\ S(120) &= R\$\,57.457,32. \end{aligned}$$

Podemos concluir, que o saldo da conta em 10 anos será de $R\$\,57.457,32$

6 Análise dos Resultados Envolvendo as duas Modelagens

Neste capítulo apresentaremos comparações dos resultados envolvendo a matemática financeira e a E.D.O de 1° ordem aplicada a capitalização a juros compostos. Para tal comparações utilizamos como recurso o Software Excel, que nos possibilitou estruturar os dados e gerar gráficos, facilitando a interpretação.

6.1 Resultados sobre a Capitalização com Depósito Único.

Quando realizamos a comparação entre essas modelagens (Matemática Financeira e Equações Diferenciais Ordinárias) para uma capitalização de depósito único, encontramos resultados ligeiramente diferentes. Para exemplificarmos e analisarmos os resultados obtidos, variamos a taxa de 1% até 18% ao ano, com o objetivo de determinarmos o tempo necessário para que o capital S_0 seja triplicado.

Figura 3: Tabela da Capitalização de Depósito Único

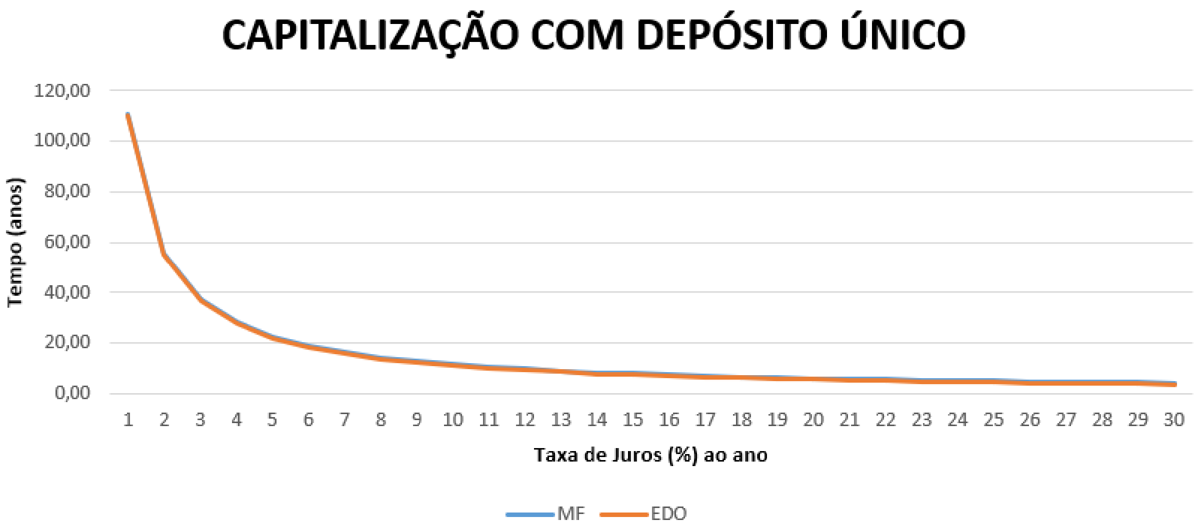
TAXA		ln (1 + r)	TEMPO (anos)		DIFERENÇA	
(r %)	(r)		M.F	E.D.O	(absoluto)	(%)
1%	0,01	0,010	110,41	109,86	0,55	0,50
2%	0,02	0,020	55,48	54,93	0,55	1,00
3%	0,03	0,030	37,17	36,62	0,55	1,49
4%	0,04	0,039	28,01	27,47	0,55	1,99
5%	0,05	0,049	22,52	21,97	0,54	2,48
6%	0,06	0,058	18,85	18,31	0,54	2,97
7%	0,07	0,068	16,24	15,69	0,54	3,46
8%	0,08	0,077	14,27	13,73	0,54	3,95
9%	0,09	0,086	12,75	12,21	0,54	4,44
10%	0,1	0,095	11,53	10,99	0,54	4,92
11%	0,11	0,104	10,53	9,99	0,54	5,40
12%	0,12	0,113	9,69	9,16	0,54	5,89
13%	0,13	0,122	8,99	8,45	0,54	6,37
14%	0,14	0,131	8,38	7,85	0,54	6,85
15%	0,15	0,140	7,86	7,32	0,54	7,33
16%	0,16	0,148	7,40	6,87	0,54	7,80
17%	0,17	0,157	7,00	6,46	0,53	8,28
18%	0,18	0,166	6,64	6,10	0,53	8,75
MÉDIAS			21,87	21,33	0,54	4,66

Fonte: Própria do Autor.

Os dados copilados na tabela 1, foram aplicados na equação (3) para Matemática Financeira e na equação (30) para as E.D.O. A análise dos resultados obtidos nos permite concluir que a modelagem em EDO possibilita um tempo menor para que se obtenha um montante equivalente ao triplo do capital depositado inicialmente, porém essa diferença é muito pequena para taxas baixas e a medida em que ampliamos o valor da taxa essa diferença vai se acentuando e chega a 8,75% entre as modelagens para uma taxa de 18% ao ano.

Quando geramos o gráfico 1 (figura 4) dos dados percebemos que as curvas praticamente se sobrepõem para taxa inferiores a 6% ao ano, já para taxas maiores notamos uma pequena diferença, que em valores absolutos fica em 0,53 para taxas acima de 17% ao ano. Em nossas simulações essa diferença se mantém constante para uma taxa de até 30% ao ano. Essa diferença se amplia se considerarmos os valores das modelagens em termos percentuais, porém, nos modelos usados encontramos um tempo de retorno da capitalização muito próximos, ver gráfico 4.

Figura 4: Gráfico da Capitalização de Depósito Único



Fonte: Própria do Autor.

6.2 Resultados sobre a Capitalização com Depósitos Constantes.

Usando as duas modelagens (Matemática Financeira e Equações Diferenciais Ordinárias) para a capitalização com Depósitos Constantes, para comparar os resultados obtidos entre ambas, encontramos os resultados diferentes. Ao variarmos a taxa de 1% até 18% ao ano, com o montante e o tempo constante, com o objetivo de determinarmos o valor do depósito.

Os dados recolhidos na tabela 2 (figura 5), foram aplicadas na equação (6) para a matemática financeira e na equação (41) para as E.D.O. Através das análises e dos resultados obtidos nos possibilitou concluir que o valor do depósito é menor na modelagem em E.D.O em comparação com a financeira quando variamos a taxa.

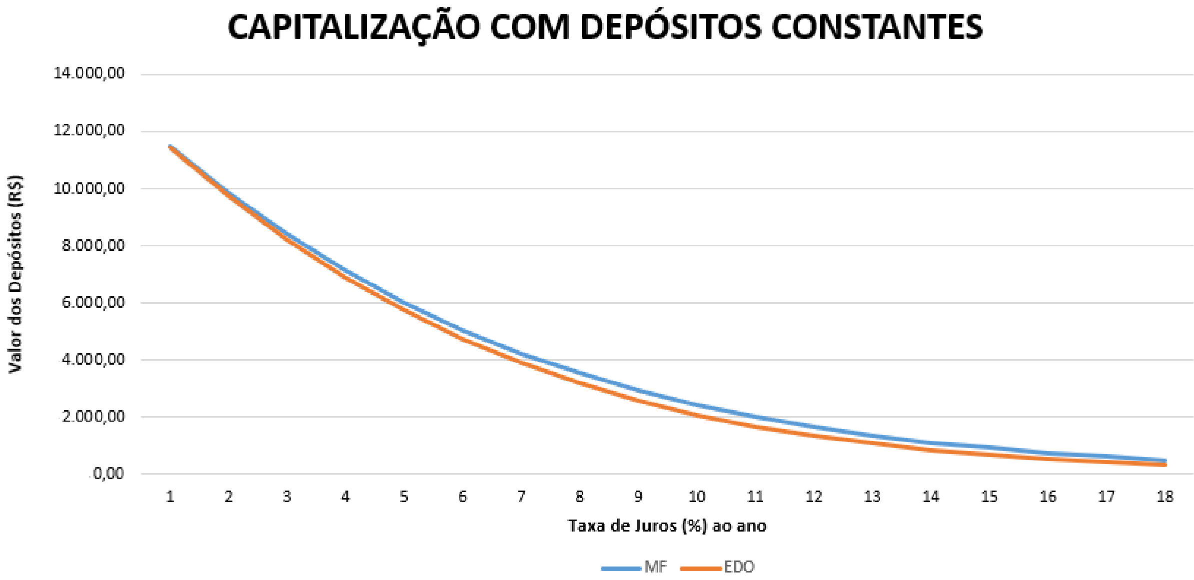
Ao criarmos o gráfico 2 (figura 6) dos dados, notamos que essa variação do capital estar de fato associada com a taxa, onde essa diferença fica mais perceptível no gráfico a partir da taxa de 3% e a partir da taxa de 18% essa diferença volta a ficar mais próxima.

Figura 5: Tabela 2 da Capitalização com Depósitos Constantes

TAXA (r)	TEMPO	MONTANTE S(t)	VALOR DO DEPÓSITO (K)		DIFERENÇA	DIFERENÇA (%)
			M.F	E.D.O		
0,01	30	R$ 400.000,00	R$ 11.499,25	R$ 11.433,18	R$ 66,06	0,58
0,02	30	R$ 400.000,00	R$ 9.859,97	R$ 9.730,95	R$ 129,02	1,33
0,03	30	R$ 400.000,00	R$ 8.407,70	R$ 8.221,41	R$ 186,29	2,27
0,04	30	R$ 400.000,00	R$ 7.132,04	R$ 6.896,20	R$ 235,84	3,42
0,05	30	R$ 400.000,00	R$ 6.020,57	R$ 5.744,34	R$ 276,24	4,81
0,06	30	R$ 400.000,00	R$ 5.059,56	R$ 4.752,81	R$ 306,76	6,45
0,07	30	R$ 400.000,00	R$ 4.234,56	R$ 3.907,25	R$ 327,31	8,38
0,08	30	R$ 400.000,00	R$ 3.530,97	R$ 3.192,60	R$ 338,37	10,60
0,09	30	R$ 400.000,00	R$ 2.934,54	R$ 2.593,71	R$ 340,83	13,14
0,1	30	R$ 400.000,00	R$ 2.431,70	R$ 2.095,83	R$ 335,87	16,03
0,11	30	R$ 400.000,00	R$ 2.009,84	R$ 1.685,01	R$ 324,83	19,28
0,12	30	R$ 400.000,00	R$ 1.657,46	R$ 1.348,38	R$ 309,08	22,92
0,13	30	R$ 400.000,00	R$ 1.364,26	R$ 1.074,33	R$ 289,93	26,99
0,14	30	R$ 400.000,00	R$ 1.121,12	R$ 852,54	R$ 268,58	31,50
0,15	30	R$ 400.000,00	R$ 920,08	R$ 674,03	R$ 246,05	36,50
0,16	30	R$ 400.000,00	R$ 754,27	R$ 531,07	R$ 223,20	42,03
0,17	30	R$ 400.000,00	R$ 617,82	R$ 417,12	R$ 200,70	48,11
0,18	30	R$ 400.000,00	R$ 505,72	R$ 326,67	R$ 179,05	54,81
					R$ 254,67	**19,40**

Fonte: Própria do Autor.

Figura 6: Gráfico da Capitalização com Depósitos Constantes



Fonte: Própria do Autor.

6.3 Resultados referentes a Capitalização com Caderneta de Poupança.

Essa é a capitalização mais popular e antiga utilizada no Brasil, pois ela pode ser feita com qualquer quantia, a partir de $R\$ 1,00$, isso possibilita que populações de baixa renda sejam capazes de realizar tal capitalização, destacando assim o seu importante papel social.

Quando efetuamos as devidas comparações relacionadas as duas modelagens (matemática financeira e E.D.O) referente a capitalização com caderneta de poupança, ficou evidente a diferença dos resultados encontrados no valor do depósito. Para ilustrar e analisar esses resultados alcançados, permanecemos com a taxa e o valor da aplicação constantes e variamos o tempo, com o objetivo de determinarmos o valor do montante.

Os dados gerados na tabela 3 (figura 7) foram manipulados através da equação (3) para a matemática financeira e na equação (33) para as E.D.O. O que nos permitiu concluir que utilizando a modelagem por E.D.O o valor do montante se torna maior em comparação com a financeira quando variamos o tempo.

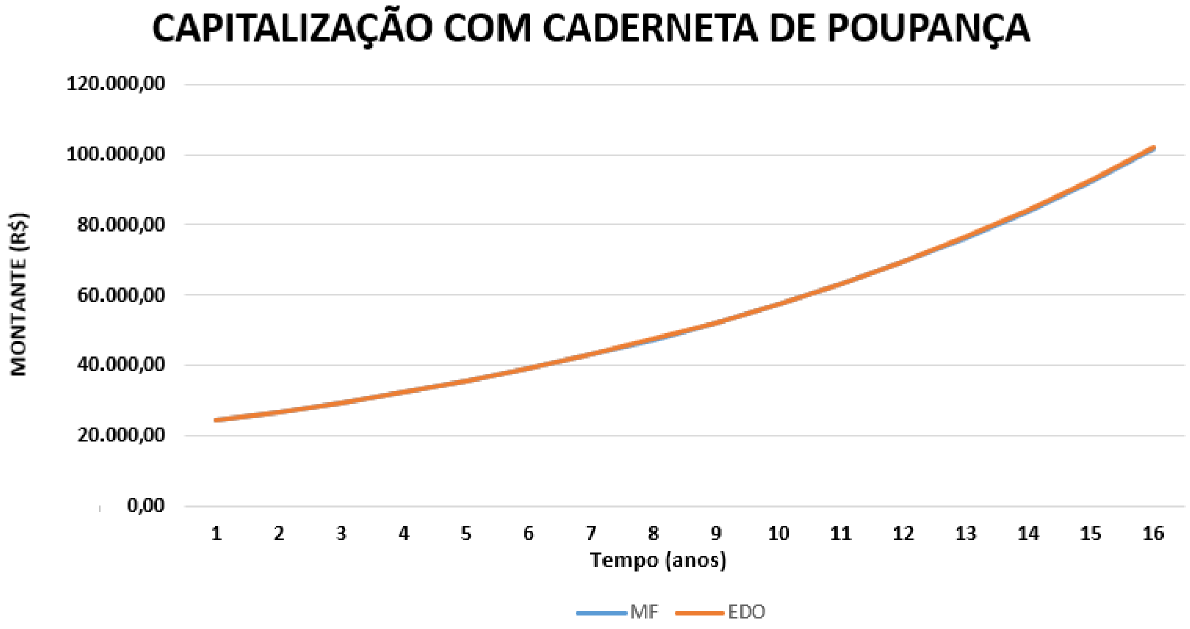
Quando esboçamos o gráfico 3 (figura 8) dessas duas modelagens, percebemos através dos dados que as curvas sobrepõe a partir do primeiro período aumentando exponencialmente o valor do montante. Embora as curvas das duas modelagens sejam próximas no gráfico, essa diferença fica perceptível quando verificamos a diferença absoluta e percentual nos valores dos montantes.

Figura 7: Tabela 3 da Capitalização com Caderneta de Poupança

TEMPO (mês)	TAXA (mês)	APLICAÇÃO (S0)	VALOR DO DEPÓSITO S(t)		DIFERENÇA	
			M.F	E.D.O	(Absoluto)	(%)
12	0,008	R$ 22.000,00	R$ 24.207,45	R$ 24.216,70	R$ 9,25	0,04
24	0,008	R$ 22.000,00	R$ 26.636,40	R$ 26.656,75	R$ 20,36	0,08
36	0,008	R$ 22.000,00	R$ 29.309,06	R$ 29.342,66	R$ 33,60	0,11
48	0,008	R$ 22.000,00	R$ 32.249,89	R$ 32.299,20	R$ 49,31	0,15
60	0,008	R$ 22.000,00	R$ 35.485,80	R$ 35.553,64	R$ 67,84	0,19
72	0,008	R$ 22.000,00	R$ 39.046,40	R$ 39.135,99	R$ 89,59	0,23
84	0,008	R$ 22.000,00	R$ 42.964,26	R$ 43.079,29	R$ 115,03	0,27
96	0,008	R$ 22.000,00	R$ 47.275,24	R$ 47.419,92	R$ 144,68	0,31
108	0,008	R$ 22.000,00	R$ 52.018,78	R$ 52.197,91	R$ 179,13	0,34
120	0,008	R$ 22.000,00	R$ 57.238,27	R$ 57.457,32	R$ 219,05	0,38
132	0,008	R$ 22.000,00	R$ 62.981,49	R$ 63.246,67	R$ 265,18	0,42
144	0,008	R$ 22.000,00	R$ 69.300,97	R$ 69.619,34	R$ 318,37	0,46
156	0,008	R$ 22.000,00	R$ 76.254,54	R$ 76.634,12	R$ 379,59	0,50
168	0,008	R$ 22.000,00	R$ 83.905,82	R$ 84.355,71	R$ 449,89	0,54
180	0,008	R$ 22.000,00	R$ 92.324,82	R$ 92.855,31	R$ 530,49	0,57
192	0,008	R$ 22.000,00	R$ 101.588,57	R$ 102.211,32	R$ 622,75	0,61
					R$ 218,38	0,33

Fonte: Própria do Autor.

Figura 8: Gráfico da Capitalização com Caderneta de Poupança



Fonte: Própria do Autor.

Podemos concluir que nas duas modelagens (matemática financeira e E.D.O) as três aplicações referentes (Depósito Único, Depósitos Constantes e Caderneta de Poupança) a E.D.O seria mais vantajoso para o cidadão, porém para as instituições financeiras não seria viável a utilização da mesma.

7 Considerações Finais

Este trabalho lançou uma proposta destinada ao ensino e aprendizagem, em especial, aos conteúdos da matemática financeira (juros compostos) e as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (lineares e separáveis). Nosso direcionamento é utilizar esses conteúdos que modelam a capitalização a juros compostos e fazer comparações em relação aos resultados obtidos.

Nessa perspectiva, a proposta utilizou da modelagem matemática com foco em duas vertentes: a capitalização a juros compostos relacionando a matemática financeira e por outro lado, está capitalização envolvendo E.D.O. de 1ª ordem. Além disso, destacamos nesses desenvolvimentos, a obtenção dos resultados através do software Excel, que nos permitiu analisar os resultados envolvendo as duas modelagens e através de comparações, particularizando uma determinada situação para cada capitalização, percebemos que a modelagem da E.D.O dos resultados obtidos é menor em relação a matemática financeira quando envolve (Depósito Único e Depósitos Constantes) e maior quando envolve (Caderneta de Poupança).

As situações as quais esbarramos está diante do fato desses conteúdos serem de grande extensão, e assim muitas situações de investigação deixam de ser abordados. Sendo assim, colocamos a disposição para trabalhos futuros a exploração dessas modelagens em investimentos mais complexos, tais como os Certificados de Depósitos Bancários (CDB), mais especificadamente pré e pós, Letras de Crédito Imobiliário (LCI), Fundos de Investimentos, estudando algumas estratégias e a famosa previdência.

Ao final desta pesquisa, enquanto um dos autores, mudei o meu olhar em relação ao conteúdo de matemática financeira. O que antes, se resumia a teoria da educação básica, agora pude perceber essa extensa teoria relacionada com conteúdos do ensino superior. Alem disso, ressalto minha percepção em outra vertente, como futuro professor, poderei utilizar essa praticabilidade ao ensinar, proporcionando ao ensino, e até ao cidadão, um melhor entendimento sobre finanças.

Por fim, acreditamos no êxito deste trabalho, pois a busca e os esforços constantes para compreender o processo de elaboração, nos gera mudanças, tanto em relação ao conteúdo quanto em relação a escrita de um texto acadêmico científico. O amadurecimento em desenvolver um trabalho de tão grande relevância é sempre tão relevante. E, mais ainda, trazer abordagens que o ser humano está inserido, como as questões relacionadas ao sistema financeiro, são de grande relevância por trazer esclarecimentos sobre o mundo das finanças.

8 Referencial Teórico

Referências

[1] BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

[2] BOYCE, WILLIAN. E; **Equações diferencias elementares e problemas de valores de contorno**. 9.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

[3] BRANCO, A. C. C. **Matemática Financeira Aplicada**. São Paulo: Revista, 2005.

[4] FREITAS, Elisandra Konflanz. **Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem: aplicações na Economia**. Trabalho de Conclusão de Curso do Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio GrandeFURG. Rio Grande do Sul, 2019.

[5] NETO, A. A. **Matemática Financeira e suas Aplicações**. São paulo: Atlas, 2016.

[6] PUCCINI, A. de L. **Matemática Financeira Objetiva e Aplicada**. São Paulo: Saraiva, 1999.

[7] STEWART, James. **Cálculo**, Volume 2. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[8] SAMANEZ, C.P. **Matemática Financeira - Aplicações à Análise de Investimentos** São Paulo: Prentice Hall, 2002.

[9] ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais**, Volume 1. São paulo: Pearson Makron Books, 2001.

[10] ZOT, W. D. **Matemática Financeira**. Porto Alegre: UFRGS, 1999.

A Prova de $e = \lim_{h\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{h}\right)^h$

Neste anexo mostraremos que

$$e = \lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h.$$

Usando a definição de derivada

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
f'(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\
f'(1) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}\\
f'(1) &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}
\end{aligned}$$

Sabendo que $y = \ln 1 = y = \log e^1 = e^y = 1 = y = 0 = \ln 1 = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\\
f'(1) &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)
\end{aligned}$$

Derivando $f(x) = \ln x$, tem-se $f'(x) = \frac{1}{x} = f'(1) = \frac{1}{1} = 1$

$$1 = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Desde que $f(x) = e^x$ é contínua, temos

$$\begin{aligned}
e^1 &= e^{\lim_{x\to 0}}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\\
e &= e^{\lim_{x\to 0}}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\\
e &= \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

Se $h = \frac{1}{x}$, quando $x \to 0$, $h \to \infty$,

$$e = \lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h$$

B Função de Crescimento Populacional $P(t)$

Considere $p(t)$ a população em tempo t,

$$k = \frac{p'(t)}{p(t)}$$

a taxa de crescimento constante, onde $k = k_n - k_m$,
k_n = taxa de natalidade e k_m = taxa de mortalidade.

Este modelo não leva em consideração nenhum fator externo.

O modelo de Malthus é modelado pela seguinte equação

$$p'(t) - k\,p(t) = 0,$$

onde $p(t)$ é a variável desconhecida, ou seja, a solução que estamos a procura.

Intuitivamente se considerarmos $k = 1$, na equação acima, podemos concluir que

$$p(t) = C\,e^{kt}$$

é solução da equação diferencial.

No tempo $t = 0$, encontramos a população inicial

$$\begin{aligned} p(0) &= C\,e^{t.0} \\ p_0 &= C. \end{aligned}$$

Logo, o modelo foi a priori resolvido e interpretando os resultados podemos observar que:
– Se a taxa de crescimento é positiva a população cresce indefinidamente.
– Se $k < 0$, a população tende a zero, isto é, entra em extinção.

Existem outros modelos que tratam de crescimento populacional, dentre eles o modelo de Verhust que leva em consideração alguns fatores externos.