



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

MAURO IRINEU VARELA

**APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E INTEGRAIS NO ESTUDO DO  
TRABALHO E ENERGIA DA FÍSICA**

CASTANHAL  
2022

MAURO IRINEU VARELA

**APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E INTEGRAIS NO ESTUDO DO  
TRABALHO E ENERGIA DA FÍSICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, *Campus* Universitário de Castanhal, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Licenciado Pleno em Matemática.


**Orientador:** Prof. Dr. Renato Germano Reis Nunes.

CASTANHAL  
2022

MAURO IRINEU VARELA

**APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E INTEGRAIS NO ESTUDO DO  
TRABALHO E ENERGIA DA FÍSICA**

**Banca Examinadora:**

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Renato Germano Reis Nunes **Orientador**

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Valdelírio da Silva e Silva **Examinador Interno**

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Roberta Modesto Braga **Examinadora Interna**

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Kátia Liège Nunes Gonçalves **Examinadora Interna**

Data: 29/04/2022.

Conceito: BOM.

## RESUMO

O presente trabalho de conclusão de curso trata das aplicações das Equações Diferenciais e Integrais na Física, onde se objetiva mostrar por meio de exemplos como se aplica tais ferramentas matemáticas na disciplina Física. Metodologicamente, utilizou de uma abordagem qualitativa, mediante um referencial bibliográfico onde a contribuição de inúmeros autores serviu de norteamento para este estudo. Como resultado, observou-se que o assunto é de suma importância para o ensino da Física, pois serve de base para o ensino de Mecânica Quântica, Física Moderna e Física no estado sólido.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais e Integral; Física; Análise de trabalho e Energia.

## **ABSTRACT**

This course conclusion work deals with the applications of Differential and Integral Equations in Physics, where the objective is to show through examples how such mathematical tools are applied in the Physics discipline. Methodologically, it used a qualitative approach, using a bibliographic reference where the contribution of numerous authors served as a guide for this study. As a result, it was observed that the subject is of paramount importance for the teaching of Physics, as it serves as a basis for the teaching of Quantum Mechanics, Modern Physics and Solid State Physics.

**Keywords:** Differential and Integral Equations; Physics; Work and Energy Analysis.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	06
<b>2 EVOLUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE CÁLCULO</b>	07
2.1 BREVE PERFIL HISTÓRICO-CONCEITUAL DO CÁLCULO	07
2.2 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DESENVOLVIDOS POR NEWTON E LEIBNIZ	09
<b>3 TRABALHO E ENERGIA</b>	17
3.1 TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA CONSTANTE	17
3.2 TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA VARIÁVEL: CASO UNIDIMENSIONAL	18
3.3 ENERGIA CINÉTICA E O TEOREMA DO TRABALHO E ENERGIA POTENCIAL	21
<b>3.3.1 Trabalho realizado por uma mola de constante elástica (k)</b>	21
<b>3.3.2 Potência</b>	22
<b>3.3.3 Derivada e integral</b>	22
<b>4 APLICAÇÕES</b>	26
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	34
<b>REFERÊNCIAS</b>	35

## 1 INTRODUÇÃO

Para resolver um problema físico, quase sempre é necessário buscar ferramentas matemáticas que facilitem as soluções e entendimento. Por essa razão, é muito importante fazer um bom curso de cálculo, pois auxiliará a entender a Física em cursos superiores. Deste modo, é importante ressaltar que muitas das aplicações de matemática são fáceis de serem aplicadas e percebidas.

O conhecimento ensinado na escola e a matemática aplicada ao cotidiano segue uma abordagem diferente: o conhecimento enfatiza o conhecimento formal, o qual se torna distante da realidade estudante, e a disciplina matemática dá ênfase ao cotidiano. Portanto, a escolha deste tema é relevante por ser direcionado especialmente a alunos do ensino básico (Física, Matemática, Engenharia, dentre outras áreas), que irão utilizar a aplicação do cálculo de diferencial e integral para o resto da vida, tanto no ambiente escolar como fora dele.

Quando se prioriza o ensino de cálculo, há o favorecimento de condições de interatividade criativa do aluno com vistas aos resultados almejados para o futuro, no ensino superior e no trabalho. É uma problemática a ser considerada, pois muitos alunos não passam nos vestibulares, por tais dificuldades, ou seja, tentam e não conseguem, sendo o vestibular um “crivo” para que o aluno demonstre seus conhecimentos quanto às aplicações matemáticas na Física.

As questões aplicadas utilizando-se do cotidiano mostra ao aluno inúmeras maneiras de solucionar diversos tipos de situação, que perpassam pela busca em progredir tal estudo de forma lógica e intuitiva.

Para responder à questão central da presente pesquisa, inicialmente buscou-se construir um estudo descritivo, de abordagem qualitativa, por meio de coleta de dados aplicada em obras publicadas, artigos científicos, periódicos, dentre outros métodos; posteriormente, complementou-se com exemplos de aplicação matemática para dar um suporte teórico-prático.

Corroborando o exposto, os questionamentos em torno dos saberes científicos e técnicos tornam possível equacionar fatores vivenciados no cotidiano, aplicando-as no raciocínio de forma correta. Por este motivo, temas relativos à realidade têm sido muito utilizados nas escolas de ensino regular e nas universidades.

O principal objetivo deste trabalho é aplicar as técnicas de derivação e de integração aprendidas no curso de Licenciatura em Matemática, no estudo dos conceitos de Energia e Trabalho da Física.

## 2 EVOLUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE CÁLCULO

### 2.1 BREVE PERFIL HISTÓRICO-CONCEITUAL DO CÁLCULO

Conforme Rodrigues (2008), a Matemática é a mais antiga das Ciências e que sua origem remonta às antigas civilizações egípcias. Anteriormente, os homens primitivos quando queriam se referir a algo que encontravam em grande quantidade, eles apontavam para qualquer objeto e em seguida colocavam a mão na cabeça, uma vez que os fios de cabelo são muitos, proporcionando essa ideia de “grande quantidade”, enfatizando que essa linguagem era facilmente compreendida por eles.

Quanto à origem dos números, Stéfano (2008) diz que foi dos Sumérios, há 5 mil anos, a ideia de criar símbolos que pudessem representar os sons vocais, através de uma escrita chamada “cuneiforme”, que na prática era simples: as marcas eram feitas em tabletes úmidos de barro, secados ao Sol. Os estiletos de madeira usados para marcar os símbolos no barro tinham a ponta em forma de “cunha”, daí o nome “cuneiforme”.

Este mesmo autor diz que, enquanto a escrita se desenvolvia através de diferentes símbolos para diferentes sílabas, as contagens continuavam a ser feitas com base no conceito 1. Um evento igual a um risco, numa pedra, numa árvore ou num osso.

Informações repassadas por Gehringer e London mostram que há cerca de quatro mil anos, os mercadores da Mesopotâmia desenvolveram o primeiro sistema para contar e acumular grandes quantias. Assim, faziam um sulco na areia e iam colocando

[...] sementes secas (ou contas) até chegar a dez. Depois, faziam um segundo sulco, onde colocavam uma só conta, que equivalia a dez; esvaziavam o primeiro sulco e iam repetindo a operação: cada dez contas no primeiro sulco valia uma conta no segundo sulco. Quando o segundo sulco completava dez contas, um terceiro sulco era feito e nele era colocado uma conta que equivalia a 100. Assim uma enorme quantia como 732 só precisava de 12 continhas para ser expressa. Este sistema deu origem à palavra “contar” (GEHRINGER; LONDON, 2001, p. 57).

Mesmos autores também comentam que, apesar da fama dos árabes e dos chineses, a contribuição mais importante para a abstração da Matemática foi um trabalho dos hindus. Sem eles não haveria o “zero” e, portanto, toda a base de abstração que, junto com o 1, deu origem a tudo que conhecemos hoje como ciências matemáticas.

Em um estudo proposto por Oliveira (2011), mostra-se que a primeira tentativa bem-sucedida de criar uma máquina de contar foi o “ábaco”. Sua origem vem da palavra hebraica *abaq* (pó), em memória a antiquíssimos tabletes de pedra, aspergidos com areia onde os antigos mestres desenhavam figuras com os dedos para ensinar seus discípulos.

Já os inventores do “ábaco de calcular” (*suan pan*), aparentemente, foram os chineses. Os japoneses também reivindicam a invenção (*soroban*), sem esquecer os russos (*tschoty*). Quase 3 mil anos depois de ter sido inventado, o ábaco ainda é usado por pequenos comerciantes em muitas regiões da Ásia.

Controvérsias à parte em relação à invenção do ábaco, uma das grandes descobertas da Matemática foram os “algarismos arábicos”, que têm pouco mais de mil anos. Porém, alguns autores afirmam que os algarismos arábicos não eram precisamente arábicos e sim, hindus.

Sobre a fama dos árabes, Clark (2015) afirma que foi através deles que os números escritos se espalharam pelo mundo. A palavra “algarismo”, por exemplo, é uma homenagem a um renomado matemático do século IX (d.C.), chamado al-Huarismi.

Os algarismos arábicos foram trazidos da Índia para o Ocidente por volta do ano 770 da era cristã, mas não foram adotados de imediato, porque outros povos já estavam acostumados com suas próprias maneiras de representar os numerais, por mais complicadas que elas parecessem (REVISTA SUPERINTERESSANTE, 2016, p. 2).

As duas principais correntes da época eram a romana e grega, que utilizavam letras que assumiam a função de números, com a socialização dos numerais, a coisa foi ficando cada vez mais sofisticada. A palavra grega “*arritmos*” (aritmética), por exemplo, era utilizada para designar “número”.

Conceitos muito simples foram sendo ampliados e viraram Ciência, como a Trigonometria, que antigamente era só uma conta para medir os lados de um triângulo: *trigon.*, em grego, quer dizer três cantos. As equações são utilizadas há muitos séculos. Eram, e continuam a ser usadas para resolver questões do dia a dia.

Os estudos de Abrasou (2006) demonstram que nos vestígios encontrados no antigo Egito (1600 a.C.), registrados no “papiro de Rhind”, mostram que as equações aparecem para resolver problemas concretos do cotidiano ou como ferramenta para resolução de problemas que tinham como objetivo o desenvolvimento da inteligência de quem os propunha e de quem os tentava resolver.

Segundo Roque (2012), os egípcios, os gregos, os árabes e os europeus, durante parte da Idade Média, por exemplo, deram às equações aspectos que, pouco a pouco, foram se aproximando da forma que hoje se usa. Através de princípios matemáticos era possível manipular as equações até torná-las o mais simples possível, permitindo estabelecer o valor de um número desconhecido.

Conforme os estudos de Grando; Marasini (2007, p. 2), matematicamente a palavra “equação” pressupõe

[...] um conjunto de conceitos cujos significados estão estreitamente relacionados. Considerando a sentença matemática que forma uma equação como a igualdade de duas expressões é importante que os estudantes tenham consciência do que significa expressar matematicamente, diferenciando expressão numérica de algébrica.

Portanto, para resolver em problema matemático, quase sempre é preciso transformar uma sentença apresentada com palavras em uma sentença que esteja escrita em linguagem matemática. Esta é a parte mais importante e talvez seja a mais difícil da matemática.

Quanto à invenção da álgebra, Lippert (2016) a considera como uma variante latina da palavra árabe *al-jabr* usada no título de um livro, “*Hisab al-jabr w'al-muqabalah ibn-Musa al Khowarizmi*” (Maomé, filho de Moisés, de Khowarizm). Este trabalho de álgebra é com frequência citado, abreviadamente como “Al-jabr”.

Contudo, uma informação repassada por Coelho (2016) mostra que, na verdade, a álgebra surgiu no Egito quase ao mesmo tempo em que na Babilônia. Neste período, porém, faltava à álgebra egípcia os métodos sofisticados da álgebra babilônica, bem como a variedade de equações resolvidas, a julgar pelo Papiro Moscou e o Papiro de Rind, documentos egípcios que datam de cerca de 1850 e 1650 a.C., respectivamente, mas que refletem métodos matemáticos de um período anterior.

## 2.2 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DESENVOLVIDOS POR NEWTON E LEIBNIZ

O cálculo diferencial e integral (ou cálculo infinitesimal) é uma poderosa ferramenta matemática, contribuidora para a evolução de inúmeras ciências. O item 2.2 segue o estudo de Melchior e Soares (2018) e autores colaboradores, que mostram o conceito, a história e as bases matemáticas para a pesquisa em questão.

Sobre os primeiros registros do cálculo diferencial e integral, os autores precitados dizem que datam de 1.800 a.C., e desde a antiguidade, grandes nomes, como Arquimedes, Kepler e Fermat, deram sua contribuição ao estudo. A partir do século XVII, Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz chegaram, de forma independente, a fórmulas para utilizar o cálculo de maneira funcional. Posterior a Newton e Leibniz, outras personalidades matemáticas trabalharam para lapidar a ferramenta, tendo como exemplo os irmãos Bernoulli, L'Hospital, Lagrange, D'Alembert, Cauchy, Weierstrass e Riemann.

Conceitualmente, o cálculo infinitesimal é o estudo do movimento e da mudança. Com o novo cálculo, foi possível aos matemáticos estudar,

[...] o movimento dos planetas e a queda dos corpos na terra, o funcionamento das máquinas, o fluxo dos líquidos, a expansão dos gases, forças físicas tais como o magnetismo e a eletricidade, o voo, o crescimento das plantas e animais, a propagação das epidemias e a flutuação dos lucros. A matemática tornou-se o estudo dos números, da forma, do movimento, da mudança e do espaço (DEVLIN, 2010, p. 25).

O cálculo integral surgiu muito antes que o cálculo diferencial. Eves (2004) coloca que os primeiros problemas da história do cálculo estavam relacionados ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos. As formas determinadas por linhas retas já são calculadas há milênios, contudo, cálculos precisos para formas compostas por linhas curvas são relativamente recentes.

Dos primeiros europeus modernos que desenvolveram ideias sobre infinitésimos em trabalhos com a integração, merece destaque o matemático alemão J. Kepler (1571-1630). Ele utilizou o processo de integração para calcular as áreas envolvidas na segunda lei do movimento planetário, e também para calcular os volumes de que se ocupou em seu tratado sobre a capacidade dos barris de vinho.

Kepler tinha pouca paciência com o extremo rigor do método da exaustão, porém, apesar das objeções levantadas sobre seu trabalho do ponto de vista do rigor matemático, conseguiu resultados corretos, e de maneira bem simples, e seus métodos são utilizados até hoje por físicos e engenheiros para armar problemas. (EVES, 2004, p. 424).

O matemático italiano B. Cavalieri (1598-1647) publicou, em 1635, um dos livros mais influentes do início do período moderno: *Geometria indivisibilibus continuorum*. Nesta obra, afirma que “uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou ‘indivisíveis’ e que volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase atômicos” (BOYER, 2010, p. 226).

Os princípios de Cavalieri diziam para considerar uma porção plana como formada de uma infinidade de cordas paralelas e um sólido formado de uma infinidade de seções planas paralelas. Ao deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas da porção plana ao longo de seu próprio eixo, para que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana será a área da figura original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas (MELCHORS; SOARES, 2018).

Para o cálculo do volume de um sólido, se faz o mesmo com as seções planas deste sólido. Para Eves, é possível escrever os princípios de Cavalieri de uma forma que permita resolver intuitivamente muitos problemas de mensuração:

Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante. 2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante (EVES, 2004, p. 426).

Outro importante matemático que desenvolveu o cálculo integral, foi o inglês J. Wallis (1616-1703). Este fez uso sistemático das séries em análise e foi o primeiro a considerar as cônicas como curvas de 2º grau, ao invés de considerá-las como secções de um cone. Também explicou de maneira satisfatória o significado dos expoentes zero, negativos e fracionários, introduzindo o atual símbolo do infinito ( $\infty$ ).

Quanto à derivação, Eves (2004) diz que a diferenciação se originou de problemas relativos ao traçado de tangentes a curvas e de questões que buscavam determinar máximos e mínimos de funções. Foi na Grécia antiga, porém, que surgiu a primeira manifestação realmente clara do método diferencial (por volta de 1629).

Voltando a citar os estudos de Kepler, este observou que os incrementos de uma função se tornam infinitesimais nas proximidades de um ponto de máximo ou de mínimo comum. No entanto, foi o matemático francês P. de Fermat (1601-1665) quem manifestou com clareza o método diferencial.

Corroborando a ideia de Kepler, Fermat estabeleceu um procedimento para determinar os pontos de máximo ou de mínimo:

Se  $f(x)$  tem um máximo ou mínimo comum em  $x$  e se  $e$  é muito pequeno, então o valor de  $f(x-e) = f(x)$  e, para tornar essa igualdade correta, impor que  $e$  assuma o valor zero. As raízes da equação resultante darão, então, os valores de  $x$  para os quais  $f(x)$  assume um máximo ou mínimo (EVES, 2004, p. 429).

Esse método é conhecido como método de Fermat. O método é incompleto, pois ignorou que a condição de a derivada de  $f(x)$  se anular não é suficiente para que se tenha um máximo ou mínimo comum e também não fazia distinção entre valor máximo e valor mínimo. Outra descoberta de Fermat foi um procedimento geral para determinar a tangente por um ponto de uma curva cuja equação cartesiana é dada; consistia em achar a subtangente relativa ao ponto de tangência sobre o eixo  $x$  e a intersecção da tangente com esse eixo.

Quanto ao Teorema Fundamental do Cálculo, foi no século XVII que os matemáticos costumavam utilizar limites para calcular a área de figuras com contornos curvos. Newton e Leibniz mostraram que é possível chegar muito mais facilmente ao resultado, usando a integração, pois se uma quantidade pode ser calculada por exaustão, então também pode ser calculada com o uso de antiderivadas (PIEHOWIAK, 2011, p. 191).

O matemático inglês I. Barrow (1630-1677) criou uma abordagem do cálculo diferencial muito próxima da atualmente usada. É o triângulo diferencial, onde se considera que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra. Essa descoberta é conhecida como Teorema Fundamental do Cálculo e aparece enunciada e provada nas *Lectiones de Barrow* (EVES, 2004, p. 435).

Sobre os estudos de Barrow, Vidal (2012, p. 23) diz que “se a derivada de uma função  $f$  é uma função  $g$ , então, para calcular a integral da função  $g$  no intervalo entre  $a$  e  $b$ , basta calcular  $f(a)$  e  $f(b)$  e tirar  $f(a)$  de  $f(b)$ ”.

Assim, em notação matemática moderna, o TFC é a base das duas operações centrais do cálculo, diferenciação e integração, que são considerados como inversos um do outro. Isto significa que se uma função contínua é primeiramente integrada e depois diferenciada, volta-se na função original.

Outras informações repassadas por Possani (apud VIDAL, 2012, p. 24) dão conta de que “a existência dessa ligação é surpreendente; e essas duas ideias (derivação e integração) são importantes e ricas de consequências e aplicações”.

Mesmo considerando várias descobertas na área do cálculo diferencial e integral, como as curvaturas, quadraturas e retificações, Melchior e Soares (2018) falam sobre o surgimento de um processo de diferenciação e muitas tangentes a curvas haviam sido construídas, a ideia de limite já estava difundida e o TFC era reconhecido.

No entanto, “faltava a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um redesenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria” (EVES, 2004, p. 435).

Newton e Leibniz sabiam que existia uma ligação entre coeficientes angulares de retas tangentes e áreas entre curvas. Esta ligação, segundo Piehowiak (2011), juntou o cálculo diferencial e integral, tornando-os a ferramenta mais poderosa que os matemáticos já tiveram para entender o universo.

Newton, por exemplo, era um físico que se interessou pela matemática, no intuito de provar que a sua teoria física sobre a gravitação universal e a força centrípeta estava correta. Sobre este fato, Gayo (2010) afirma que Newton descobriu o teorema do binômio generalizado e depois inventou o método dos fluxos (como ele chamava o atual cálculo diferencial).

O método dos fluxos, embora publicado em 1736, havia sido escrito em 1671; antes disso, em 1669, Newton já comunicara a essência do método a Barrow, mostrando em suas conclusões uma curva gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Com essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis.

A uma quantidade variável ele dava o nome de fluente (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome de fluxo de fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por  $y$ , então o fluxo desse fluente era denotado por  $\dot{y}$ . [...] Essa taxa de crescimento constante de alguma fluente é o que ele chamava fluxo principal, podendo o fluxo de qualquer outro fluente ser comparado com esse fluxo principal (EVES, 2004, p. 439).

Newton tratou de dois tipos de problemas com o método dos fluxos. No primeiro, considerou uma relação entre alguns fluentes, buscou uma relação envolvendo esses fluentes e seus fluxos (chamado atualmente de diferenciação). No segundo, estudou a relação inversa, considerando a relação entre os fluentes e seus fluxos, buscou encontrar uma relação envolvendo apenas os fluentes (processo de diferenciação).

Em seu estudo, encontrou diversas e importantes aplicações para o método dos fluxos, de modo que, segundo Eves (2004, p. 440): “Determinou máximos e mínimos, tangentes e curvas, curvatura de curvas, pontos de inflexão e convexidade e concavidade de curvas; aplicou-o também a muitas quadraturas e retificações de curvas”, e demonstrou uma habilidade extraordinária para integrar algumas curvas diferenciais.

Assim, apesar de não ter sido o primeiro a diferenciar ou a integrar, nem a ver a relação entre essas operações no teorema fundamental do cálculo, ele descobriu na consolidação desses elementos, um algoritmo geral aplicável a todas as funções, sejam algébricas sejam transcendentais, que segundo Boyler (2010, p. 274) é “uma equação que contém alguma função que não é redutível a uma fração entre polinômios, e cuja solução não pode ser expressa através de funções elementares. Ex.: espiral”.

Citando os estudos de Leibniz acerca do assunto em comento, este é considerado o último sábio que obteve o conhecimento universal. Criou o seu cálculo entre 1673 e 1676 e declarou que ao ler a carta *Traite des sinus du quart de cercle*, de A. Dettonville (ou Pascal), passou a determinar que “a tangente a uma curva dependia da razão das diferenças das ordenadas e das abscissas, quando essas se tornavam infinitamente pequenas, e que as quadraturas dependiam da soma dos retângulos infinitamente finos que formam a área” (BOYER, 2010, p. 276).

Foi o primeiro a utilizar o símbolo de integral, um S ( $\int$ ) alongado, derivado da primeira letra da palavra *summa* (soma), tendo feito isso em 1675, com o objetivo de indicar uma soma de indivisíveis. Após essa descoberta, ele já escrevia diferenciais e derivadas como é feito hoje. Para achar tangentes fez uso do *calculus differentialis* e para encontrar quadraturas utilizou o *calculus summatorius* ou *calculus integralis*, de onde se originou a nomenclatura (EVES, 2004; BOYER, 2010).

A integral definida é escrita da forma:  $\int_a^b f(x)dx$ , e lida como “a integral de  $a$  até  $b$  de  $f$ -de- $x$  em relação a  $x$ ”. A integral indefinida (antiderivada), é escrita da forma:  $\int f(x)dx$ .

Desde que a derivada da função  $y = x^2 + C$  é  $y' = 2x$  (onde  $C$  é qualquer constante), então:  $\int 2x dx = x^2 + C$ .

A partir destas informações, Leibniz, em 1684, publicou o primeiro artigo sobre o cálculo diferencial. Ele define  $dx$  como um intervalo finito e arbitrário e  $dy$  pela proporção

$$dy : dx = y : \text{subtangente}.$$

Em 1686 Leibniz fez outra importante publicação, onde enfatizou a relação inversa entre derivação e diferenciação no teorema fundamental do cálculo (BOYER, 2010).

Deduziu muitas das regras da diferenciação que atualmente são utilizadas nos cursos de cálculo. A fórmula da derivada enésima do produto de duas funções, conhecida como Regra de Leibniz, mostra ele

[...] tinha uma sensibilidade muito grande para a forma matemática e discernia com clareza as potencialidades de um simbolismo bem engendrado. Sua notação para o cálculo mostrou-se muito feliz e, inquestionavelmente, é mais conveniente e flexível do que a de Newton (EVES, 2004, p. 444).

Diferenciando os dois cientistas, Leibniz foi o primeiro a publicar suas descobertas relativas ao cálculo diferencial e integral, apesar de Newton ter desenvolvido sua teoria muitos anos antes. Este episódio levou à disputa sobre a paternidade do cálculo. Leibniz foi acusado de plágio, considerando ordem cronológica dos fatos proposta no quadro abaixo:

#### **CRONOLOGIA DO DESENVOLVIMENTO E PUBLICAÇÃO DO CÁLCULO**

Em 1666, Newton desenvolve o Cálculo Diferencial e Integral.
Em 1676, Leibniz desenvolve o Cálculo Diferencial e Integral com uma simbologia diferente da utilizada por Newton e sem conhecer seu trabalho.
Em 1684, Leibniz faz sua primeira publicação sobre o assunto no periódico mensal <i>Acta Eroditorum</i> com o título “ <i>Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes que não é obstruído por quantidades irracionais</i> ” (trad. para o português).
Em 1686, Newton publica <i>Philosophiae naturalis principia mathematica</i> (Princípios matemáticos da filosofia natural), obra que contém, além de Cálculo, Fundamentos da Física.

FONTE: Gayo (2010, p. 150)

Ainda segundo Gayo (op. cit.), as representações utilizadas pelos dois matemáticos eram absolutamente diferentes. A única semelhança mostrava o aproveitamento de simbologias criadas por outros matemáticos, por exemplo: “a adoção das letras  $x$  e  $y$  para os eixos cartesianos (conforme Descartes); a extensão destes eixos para os lados negativos; a utilização do atual sinal de igual” (criado por Robert Record, em 1557).

Por ter desenvolvido o raciocínio acerca da temática, Newton passou a ser chamado de “pai do cálculo”. Contudo, por outras opiniões, ambos criaram o cálculo de forma independente. Leibniz, por exemplo, foi o primeiro a publicar seus resultados, porém, ele tinha menos conhecimentos matemáticos; no entanto, era mais eclético e analista dotado de uma imaginação mais aguda e um sentido superior quanto à forma matemática.

Quanto ao cálculo, Leibniz diferentemente de Newton, encontrou discípulos ansiosos por aprender o cálculo diferencial e integral e transmitir o conhecimento a outros. O cálculo leibniziano passou a ser difundido a partir dos estudos dos irmãos italianos Jacques (1654-1705) e Johann (1667-1748) Bernoulli, na *Acta Eruditorum* (BOYER, 2010).

Os irmãos estudaram o trabalho de Leibniz entre os anos de 1687 e 1690, construindo a *Equação da Catenária*, sendo o primeiro problema importante resolvido por Johann Bernoulli. Utilizando o Cálculo Leibniziano, Bernoulli resolveu o problema e esse foi o primeiro sucesso público do novo Cálculo. (E-cálculo, apud PIEHOWIAK, 2008, p. 64).

A Equação da catenária descreve uma família de curvas planas semelhantes às que seriam geradas por uma corda suspensa pelas suas extremidades e sujeita à ação da gravidade e tem por equação geral:

$$y(x) = \frac{T_x}{\mu g} \cosh\left(\frac{\mu g}{T_x} x + C_1\right) + C_2 \quad (1)$$

$$\text{sendo, } \mu = m/L \quad (2),$$

$$T_x = T(s) \cos(\theta(s)) \quad (3)$$

$g$ , portanto, é a aceleração da gravidade e  $C_1$  e  $C_2$  são constantes que dependem das condições de contorno.

Segundo Boyce (2010), os irmãos Bernoulli contribuíram muito no desenvolvimento de métodos para resolver equações diferenciais e ampliaram o campo de aplicações destas, em especial a resolução de problemas em mecânica com ajuda do cálculo, formulando-os como equações diferenciais.

Em 1699, o Marquês de L’Hospital publicou o primeiro livro sobre cálculo, sob o título *Analyse des infiniment petits, pour l’intelligence des lignes courbes* (Análise dos infinitamente pequenos, para a compreensão das curvas). Um dos assuntos do livro de L’Hospital é a apresentação de um método que permite calcular o valor limite de uma fração onde o denominador e o numerador tendem simultaneamente a zero ou ao infinito (Regra de L’Hospital). Ball (apud PICKOVER, 2011, p.160) enaltece L’Hospital quando diz que:

O crédito de juntar o primeiro tratado que explicava os princípios e a utilização do método é devido a L'Hôpital [...]. Este trabalho foi amplamente difundido; generalizou o uso da notação diferencial em França, e contribuiu para torná-lo conhecido na Europa.

Após o falecimento de L'Hospital, Bernoulli tornou público o acordo realizado entre ambos, sobre o uso dos estudos de Bernoulli, reclamando que muitas das descobertas publicadas por L'Hospital eram suas (PICKOVER, 2011). Bernoulli já possuía várias desavenças que eram de conhecimento do público, inclusive com seu irmão Jacques, não lhe foi dado crédito. O reconhecimento de que Johann foi autor da Regra de L'Hospital aconteceu somente em 1922, quando foi encontrada uma cópia do curso de Bernoulli para o marquês.

Outro matemático importante para a história do cálculo foi Daniel Bernoulli (1700-1782), filho de J. Bernoulli. Mesmo sendo médico, seu maior mérito na área do cálculo foi o fato de ter aceito e utilizado as teorias de Newton em conjunto com o cálculo de Leibniz, o que contribuiu muito para o desenvolvimento da Física-Matemática. Também foi precursor no campo das equações diferenciais parciais.

### 3 TRABALHO E ENERGIA

Os conceitos físicos apresentados nos capítulos 3, 4 e 5, foram baseados nos seguintes autores: Halliday (2016), Schor & Tizziotti (1982), Young & Freedman (2008), Munem & Foulis (2008).

#### 3.1 TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA CONSTANTE

Quando se fala em um problema fundamental da Dinâmica, considerando as forças que atuam nele, é possível determinar como se moverá uma partícula.

$$a = \frac{F}{m},$$

em que  $a$  é a aceleração,  $F$  é a força e  $m$  é a massa. Se a força e a massa forem constantes, a aceleração deve ser constante também. Suponhamos que o sentido positivo do semieixo “ $ox$ ” coincide com o da aceleração, podemos, então determinar a velocidade da partícula.

$$v = v_0 + at,$$

em que  $v_0$  é a velocidade inicial da partícula. Assim, a posição da partícula será

$$x = v_0 t + \frac{F}{m} a t^2.$$

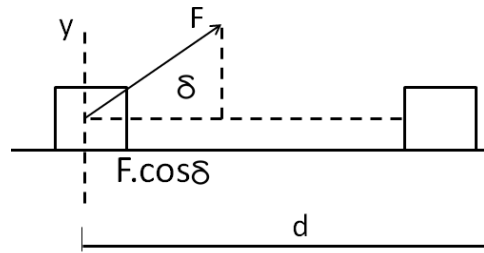
Nota-se que, por simplicidade, o subíndice “ $x$ ”, nesta equação. A última equação fornece diretamente a informação que em geral é desejada, isto é,  $x(t)$  a posição da partícula como função do tempo. O problema é mais difícil quando a força que age na partícula não é constante. Em tal caso, ainda é possível obter a aceleração da partícula através do processo de integração.

Portanto, o trabalho realizado por uma força constante será o produto da força pelo deslocamento. No caso mais simples, a força  $F$  é constante e o movimento da partícula é retilíneo e no sentido da força. Em tal situação, define-se o trabalho realizado pela força sobre a partícula como o produto do módulo de força pela distância que a partícula percorreu. Assim,

$$W = F \cdot d$$

No entanto, a força constante que atua na partícula pode não estar no sentido em que a partícula se move. Neste caso, se define o trabalho realizado pela força sobre a partícula como o produto do componente da força na direção do movimento pela distância que a partícula percorreu naquela direção.

$$W = (F \cdot \cos \delta) \cdot d$$



Trabalho é uma grandeza escalar, embora as duas grandezas envolvidas em sua definição, força e deslocamento, sejam vetoriais:

$$W = F \cdot d \rightarrow \text{Vetor}$$

$\swarrow$  Vetor  
 $\searrow$  Vetor

em que  $W$  é trabalho,  $F$  é a força e  $d$  é a distância. Sua unidade é

$$\text{SI} = \text{N} \cdot \text{m} = 1 \text{ Joule (J)};$$

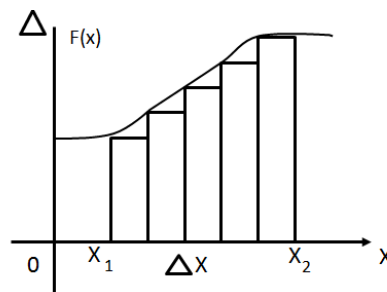
$$\text{CGS} = 1 \text{ dina} = \text{centímetro} = 1 \text{ erg}.$$

Deste modo, o trabalho pode ser positivo ou negativo se o particular sobre o qual atua a força tiver uma componente de seu movimento oposto ao sentido da força, o trabalho realizado por esta será negativo.

### 3.2 TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA VARIÁVEL: CASO UNIDIMENSIONAL

Ao considerar o trabalho realizado por uma força variável, supõe-se que a força seja uma função de posição  $F(x)$ , e que seu sentido seja o do semieixo positivo "ox" sob ação dessa força. Deste modo, qual o trabalho que ela realiza ao deslocá-lo de  $x_1$  e  $x_2$ ?

$$\Delta W = F \cdot \Delta X$$



Sendo  $F_1$  o valor da força em  $x_1$ , assim o trabalho no trecho 1, será

$$W_1 = F_1 x_1,$$

logo, em todo intervalo, tem-se:

$$W_{12} = \sum_{x_1}^{x_2} F \cdot \Delta X$$

A letra grega  $\Sigma$  (sigma) indica a soma em todos os intervalos  $x_1$  e  $x_2$ . Para melhorar a aproximação, pode-se dividir o deslocamento total de  $x_1$  a  $x_2$  num maior número do intervalo. Neste caso, no limite de infinitos intervalos, isto é, no limite do contínuo, tem-se:

$$W_{12} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_1}^{x_2} F \cdot \Delta X$$

Usaremos a seguinte notação

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_1}^{x_2} F \cdot \Delta X = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx$$

Desta forma,

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F(x) \cdot dX$$

Como exemplo, considere-se uma mola presa a uma parede. Escolhamos como o eixo  $ox$ , o eixo (horizontal) da mola. Supõe-se que a origem  $x=0$ , coincidem o extremo da mola, quando esta se encontra em seu estado relaxado (não distendida). Admite-se que o sentido positivo  $ox$  seja da parede para a força e a mola seja distendida até  $x = \theta$ ,  $a = 0$ . Se a mola foi distendida até que seu extremo se destaque até a posição  $x$ , então a lei de Hooke:

$$F = -k \cdot x,$$

em que  $F$  é a força,  $k$  é a constante elástica e  $x$  é o deslocamento da mola.

A atuação mais simples de enunciar é uma força resultante  $F$ , que agindo sobre em uma partícula de massa  $m$ , produzir uma aceleração constante “ $a$ ”, escolhe-se o eixo  $ox$  na direção comum da força  $F$  e da aceleração “ $a$ ”, que trabalho é realizado por esta força sobre a partícula ao deslocá-la da distância  $x$ ? Quando a aceleração é constante, podem usar as relações:

$$a = \frac{v - v_0}{T} \quad e$$

$$X = \frac{v + v_0}{2} \cdot T$$

Assim, o trabalho realizado será:

$$W = F.X,$$

como  $F = m.a$ , então

$$W = m.a.x$$

Usando,

$$a = \frac{v-v_0}{T} \quad x = \frac{v+v_0}{2} \cdot T$$

Obtém:

$$W = m \left[ \frac{v-v_0}{T} \right] \cdot \left[ \frac{v+v_0}{2} \right] T$$

$$W = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

Assim, o produto da massa do seu corpo pelo quadrado da sua velocidade é denominado energia cinética do corpo.

$$K = \frac{1}{2} m.v^2$$

$K =$  energia cinética  
 $m =$  massa  
 $v =$  velocidade

Supõe-se que ela varie em módulo para exemplificado e que o deslocamento se força na direção da força, escolhida como a direção do eixo  $ox$ , o trabalho será de  $x_0$  a  $x$ .

$$W = \int_{x_0}^x F.dr = \int_{x_0}^x F.dx$$

Porém, de acordo com a 2ª lei de Newton  $F = ma$  e a aceleração, usando a regra da cadeia

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx}$$

Portanto,

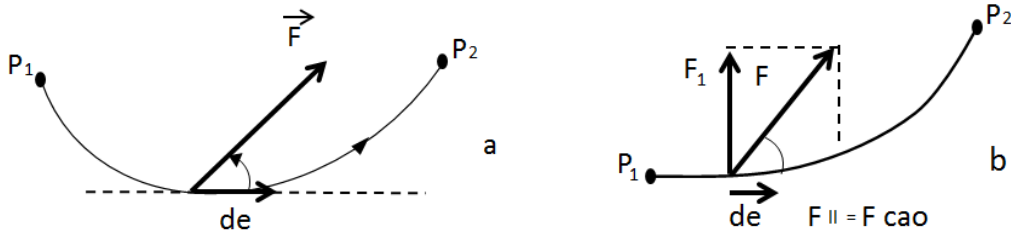
$$W = \int_{x_0}^x F.dx = \int_{x_0}^x m.a.dx = \int_{x_0}^x m.v \cdot \frac{dv}{dx} . dx$$

$$W = \int_{v_0}^v m.v.dv = m \int_{v_0}^v v.dv$$

$$W = m \left[ \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \right]$$

$$W = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

Um caso mais geral é aquele em que a força varia tanto em módulo, direção e sentido, sendo o movimento curvilíneo, onde  $F_{\parallel}$  é a componente da força  $F$  paralelo ao deslocamento da força, do trabalho realizado, em uma curva (o trabalho total realizado pela força  $F$  sobre a partícula que se desloca de seu ponto  $P_1$  a um ponto  $P_2$ ).



### 3.3 ENERGIA CINÉTICA E O TEOREMA DO TRABALHO E ENERGIA POTENCIAL

Nos exemplos anteriores do trabalho realizado pela força, lidou-se com objetos não acelerados. Em tais casos, a força resultante que atua no objeto é nula. Ao supor que essa resultante seja não nula, do modo que o objeto esteja acelerado, as condições são as mesmas, sob todos os aspectos, que àquela existente no caso em que atua em uma única força.

#### 3.3.1 Trabalho realizado por uma mola de constante elástica (k)

Quando a força aplicada for  $F = K \cdot X$  e o trabalho que ela realiza ao distender a mola de modo que a extremidade desta se mova de  $X_1$  a  $X_2$  será, portanto:

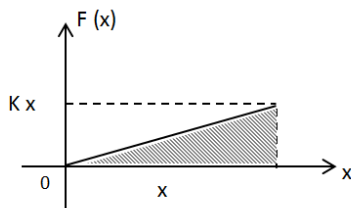
$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F(x) \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} (Kx) \cdot dx$$

$$W_{12} = k \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$W_{12} = \frac{1}{2} k \cdot x_2^2 - \frac{1}{2} k \cdot x_1^2$$

$$X_1 = 0 \quad w_{12} = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

Outra forma de obter o trabalho da força elástica ( $F_e$ ) é calcular a área de figuras regulares.



$$\text{Área} \quad \frac{b \cdot h}{2} = \frac{x \cdot k \cdot x}{2}$$

$$\text{Área} \quad \frac{k x^2}{2}$$

Todas as vezes em que se tem o gráfico F . X, quando se calcula a área tem-se o trabalho.

Deste modo, a fórmula será:  $W = \frac{1}{2} k \cdot x^2$

### 3.3.2 Potência

É a troca em que o trabalho é realizado. A potência media liberada por um agente é o quociente do trabalho total que ele realize pelo correspondente intervalo de tempo.

$$P = \frac{w}{\Delta t}$$

$$P = \frac{dw}{dt}$$

Onde:

P = potência

W = trabalho

$\Delta t$  = Intervalo de tempo

Quando a potência for constante com o tempo, a unidade é  $W = \text{Joule/s}$

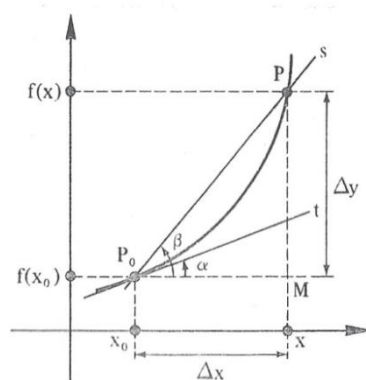
### 3.3.3 Derivada e integral

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$f(x)$  no ponto  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = y'_{x_0}$$

Geometricamente, a representação no triângulo retângulo  $P_0MP$ , tem-se:



$$\frac{MP}{PM} = \frac{\Delta v}{\Delta x} = \text{tg}$$

$$\frac{MP}{P_0M} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg } \beta$$

Quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , o ponto P tenderá ao ponto  $P_0$  e a reta secante S tenderá à reta t, tangente à curva no ponto  $P_0$ . Se s tende a t, então  $\beta$  tende a  $\alpha$ . Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg } \alpha$$

Lembrando-se que  $\text{tg } \alpha$  é o coeficiente angular da reta t, tem-se como conclusão que a derivada da função  $f(x)$  no ponto  $X_0$  é o coeficiente angular da reta t tangente ao gráfico de  $f(x)$  no ponto  $P(x_0, f(x_0))$ . Ou seja,

$$F'(x_0) = \text{tg } \alpha$$

$$\text{Obter a derivada primeira de } f(x) = x^3 \rightarrow f'(x_0) = 3x^2$$

Deste modo, a *função derivada de f* é a função  $f'$  definida em  $D'$  CD, que associa a cada ponto  $x \in D'$  a derivada de f nesse ponto.

$$\left\{ \begin{array}{l} D: \text{domínio de função } f \\ D': \text{domínio da função derivada } f' \end{array} \right.$$

Quanto ao *Diferencial*, seja f uma função e sejam x e y variáveis relacionadas por  $y = f(x)$ . Então a diferencial dx é uma quantidade que pode tomar (ou designar) qualquer valor em R se x é um número qualquer do domínio de f para o qual  $f'(x)$  existe.

Portanto, a diferencial de dy é definida por:

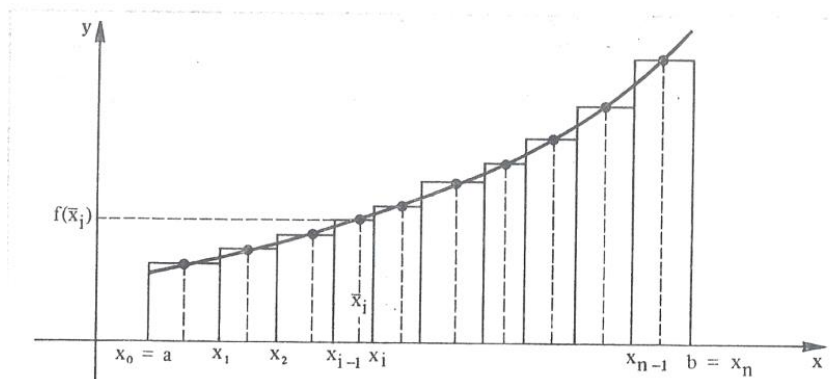
$$dy = f'(x) dx.$$

$$\text{Se } y = f(x) = 3x^2 - 2x + 1. \text{ ache } dy$$

Solução:

$$\text{Se } f(x) = 6x - 2, \text{ então } dy = (6x - 2)dx$$

Sobre a *integral*, foi a necessidade de calcular áreas de figuras planas surgiu a noção de integral.



A área  $A$  é aproximadamente a soma das áreas dos retângulos.

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta_i x \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta_i x \implies \boxed{A = \int_a^b f(x) dx}$$

A *Integral* pode ser definida (num intervalo). Deste modo, seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$ .

a) Existe uma função primitiva  $F(x)$ , tal que  $F'(x) = f(x)$

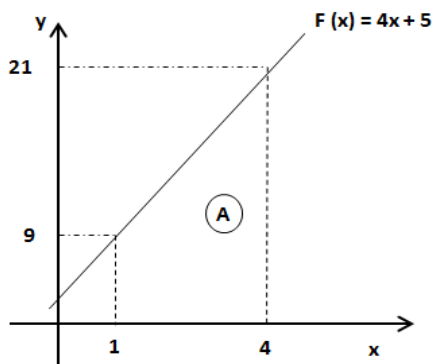
b)  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

$$F(x) = 2x^2 + 5x \quad F'(x) = 4x + 5$$

No cálculo  $\int_1^4 (4x + 5) dx$

$$\begin{aligned} \text{Então, } \int_1^4 (4x + 5) dx &= F(4) - F(1) \\ &= (2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4) - (2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1) = \\ &= 52 - 7 = 45 \end{aligned}$$

Na área do gráfico, observa-se:



$$A = \frac{(21+9) \cdot 3}{3}$$

$$A = \frac{30 \cdot 3}{2} \rightarrow A = 45$$

Quando a Integral indefinida de  $F(x)$  é a integral mais geral da função, então:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ onde}$$

$f(x)$  é tal que  $F'(x) = f(x)$ ,

$C$  é uma constante arbitrária.

## 4 APLICAÇÕES

Neste tópico incluem-se exemplos de aplicações de Equações Diferenciais direcionadas à Física no cotidiano, além de algumas considerações analíticas.

### 1) *Determine a energia potencial de uma mola de constante igual a K.*

**Solução.** Considere um corpo de massa  $m$  preso a uma mola. Quando deslocamos a massa de uma certa distância  $x$ , a força exercida pela mola sobre a massa é dada pela Lei de Hooke:

$$F = -kx \quad (1)$$

Onde  $k$  é a constante da mola que possui dimensão de força sobre dimensão de distância.

O sinal menos ( $-$ ) da fórmula indica que a força de reação da mola sobre a massa que a desloca é contrária ao deslocamento da definição de energia potencial dada pela equação acima.

Obtém-se, portanto:

$$\left. \begin{aligned} U - U_0 &= \int_0^x kx \cdot dx \\ U - U_0 &= k \int_0^x x \cdot dx \end{aligned} \right\} (2)$$

A relação (2) fornece a variação da energia potencial da mola quando ela sofre uma deformação  $0$  até  $X$ . para  $X = 0$ , a energia potencial da mola é igual a  $U_0$ . Fazendo, por conveniência,  $U_0 = 0$  para  $X = 0$ , tem-se, então:

$$U = k \cdot x^2 / 2$$

Esta equação fornece a energia potencial da mola em função da distância  $X$  correspondendo à deformação da mola a partir de uma posição inicial para a qual consideramos  $U_0 = 0$ . Em geral, consideramos a posição inicial a qual  $U_0 = 0$ , como sendo a posição de equilíbrio da mola.

2) *A energia potencial de uma partícula num campo conservativo unidimensional é dada pela expressão  $U = bx + cx^2$ , onde  $U$  é dado em Joules,  $b = 2J/m$ ,  $x$  é dado em metros e  $c = 2J/m^2$ . O eixo  $0x$  está orientado da esquerda para direita. Determine a força que atua sobre a partícula. Calcule o módulo da força para  $x = 2m$ .*

**Solução.** Como se sabe, a força é dada pelo gradiente da energia potencial com o sinal contrário. Em um campo conservativo unidimensional, a força pode ser obtida pela equação. Derivando  $U$  em relação  $x$  e trocando o sinal, encontra-se:

$$F = -b - 2cx.$$

Esta equação mostra que a força é orientada da direita para esquerda quando  $X$  for positivo. Para calcular o módulo da força para  $X = 2m$ , basta substituir este valor na equação acima. Obtém-se, para o módulo de  $F$ , o valor  $F = 10 N$ , sendo o sentido do  $F$  neste posto orientado da direita para esquerda.

**3) Considere uma partícula descrevendo uma trajetória retilínea. O módulo da força que atua sobre a partícula possui a mesma direção e o mesmo sentido do movimento da partícula: o módulo dessa força é dado por  $F(x) = -2kx + bx^2$ , onde  $K$  e  $b$  são constantes cujas unidades combinadas com as de  $X$  em metros fornecem força em newton. Obtenha uma expressão para energia potencial  $U$  da partícula em função de  $x$ . faça  $U = 0$  para  $X = 0$ .**

**Solução.** Como a força é o gradiente de energia potencial e o problema é unidimensional, pode-se escrever:  $F = -dU/dx$ .

$$\text{Portanto: } U - U_0 = - \int_0^x (-2kx + bx^2) dx$$

Fazendo a integral acima, obtém-se:

$$U - U_0 = kx^2 - b(x^3/3)$$

Como  $U = 0$  para  $X = 0$ .

Então,  $U_0 = 0$ . Logo, a expressão da energia potencial será:  $U = kx^2 - (bx^3/3)$ .

**4) Uma partícula de massa  $m = 0,5kg$  sofre a ação de uma força dada por:  $F = bi + cj + eki$ , onde  $F$  é dada em newtons, as coordenadas  $x$  e  $y$  são dadas em metros,  $b = 2N$ ,  $c = 4N$ ,  $e = 3N$ . Determine o trabalho realizado por esta força para deslocar uma partícula que estava inicialmente em repouso na origem. Sabendo que a partícula se desloca ao longo da reta  $x = y : z = 0$ , calcule a velocidade da partícula no ponto  $x = y = 2m$  .  $z = 0$ .**

**Solução.** A diferença do vetor posição é dada por:  $dr = dx i + dy j + dz k$  (1)

E a força, escrita na forma:  $F = F_x i + F_y j + F_z k$  (2)

Então, das relações (1) e (2), e de acordo com a definição de trabalho, obtém-se:

$$W = \int F \cdot dr = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz \quad (3)$$

Como a partícula se desloca ao longo do plano  $xy$ , tem-se  $dz = 0$ . No cálculo do trabalho, pela relação (3) basta considerar os componentes  $F_x$  e  $F_y$ . Levando em conta os dados do problema, tem-se:

$$W = \int_0^x b dx + \int_0^y c dy = bx + cy$$

Como a trajetória indicada no problema é dada por:  $x = y$ ,  $z = 0$ . Substituindo  $x = y$  na equação anterior, então:

$$W = (b + c)x \quad (4)$$

A relação (4) serve para calcular o trabalho (em joules) realizado pela força ao longo da trajetória dada em função de  $x$ . Substituindo os valores de  $b$  e de  $c$  e fazendo  $x = 2m$  na relação (4), obtém-se o trabalho realizado para deslocar o corpo da origem até o ponto  $x = 2m$  ao longo da trajetória mencionada:  $W = 12J$ .

De acordo com o teorema da energia cinética, tem-se  $W = \Delta E_c$ .

Como a partícula estava em repouso na origem, sua velocidade no ponto (2.2.0) então a resposta será:

$$V = \sqrt{2w/m} = 6,93m/s$$

**5) Uma partícula se move em linha reta a ação de uma força variável que atua na mesma direção e no mesmo sentido do deslocamento. O módulo desta força é dado por:  $F = cx + ex^2$ , onde  $c = 2 N/m$ ,  $e = 3 N/m^2$ . Determine o trabalho realizado pela força  $F$  para deslocar o corpo desde  $X = 0$  até o ponto  $X = 2m$  e a força média exercida neste intervalo.**

**Solução:** O produto escalar da força pelo deslocamento infinitesimal, neste caso, se reduz a  $F \cdot dr = Fdx$ , porque a força possui a mesma direção e o mesmo sentido do

deslocamento. Deste modo, para calcular o trabalho, deve-se integrar  $Fdx$  nos limites considerados no problema. Deste modo:

$$w = \int_0^2 (cx + ex^2) dx$$

Realizando esta integral e substituído os valores de  $c$  e de  $e$ , o resultado é:

$$w = \int_0^2 \frac{x}{2} + \frac{3x}{3} \quad w = [x^2 + x^3] \quad w = 2^2 + 2^3 = 12J$$

Portanto, o trabalho realizado é dado por  $W = 12J$ .

Pelo teorema do valor médio, tem-se:  $\langle F \rangle = \frac{l}{b-c} \int_b^a F dx$

Ou seja, levando em conta os limites deste problema:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2} \int_0^2 F dx = w/2$$

Usando o valor de  $w$  resulta  $\langle F \rangle = 6N$

**6) A energia potencial de uma partícula num campo conservativo é dada por  $U = -x^3 - 2x^2y^2$ . Obtenha os componentes da força que atuam sobre a partícula.**

**Solução.** Para determinar a força a partir da energia potencial, basta usar a equação abaixo, como o problema é bidimensional.

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j$$

O componente  $x$  da força será:  $F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 4xy^2$

E o componente  $y$  da força será dado por:  $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = 4x^2y$

**7) Mostre que velocidade  $V$  alcançada por um carro de massa  $m$  dirigido com a potência constante  $P$  e dada por**

$$V = \left( \frac{3xP}{m} \right)^{\frac{1}{3}}, \text{ onde } x \text{ é a distância percorrida a partir do repouso.}$$

**Solução.** Sabe-se que:  $P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot dx}{dt} = F \cdot v$

A expressão  $P = F \cdot v$  dá a potência instantânea gerada pelo motor do carro, onde  $F$  é a força instantânea de propulsão do motor e  $V$  é velocidade instantânea do carro.

Como  $P$  é constante e  $v$  aumenta com o tempo, então  $F$  também é variável, ou seja, o movimento do carro ocorre com aceleração variável

$$P = F \cdot v = Fv \cos\theta = Fv = mav = m \frac{dv}{dt} v \quad (1)$$

Na Equação (1),  $\theta$  é o ângulo entre  $F$  e  $V$  que, neste caso, é zero. Aplicando-se a regra da cadeia a (1):

$$P = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} v = mv^2 \frac{dv}{dx}$$

$$dx = \frac{m}{P} v^2 dv$$

$$\int_0^x dx = \frac{m}{P} \int_0^v v^2 dv$$

$$x = \frac{m}{P} \frac{v^3}{3}, \text{ então:}$$

$$V = \left( \frac{3xP}{m} \right)^{\frac{1}{3}}$$

### 8) *Demostre o teorema da energia cinética.*

**Solução.** De acordo com a definição de trabalho dada pela equação (5.1), vê-se que o trabalho infinitesimal realizado por uma força  $F$  é dado por:  $dw = Fdr$  (1)

Pode-se escrever a diferencial  $dar$  do seguinte modo:  $dr = \frac{dr}{dt} dt = v dt$

Substituindo este vetor na equação (1) resulta:  $dw = F \cdot V dt$  (2)

De acordo com a segunda lei de Newton, supondo  $m$  constante, tem-se:  $F = m dv/dt$  (3)

Substituindo a relação (3) na equação (2), o resultado é:  $dW = m dv \cdot v$  (4)

Da definição de produto é fácil verificar que:  $v \cdot v = v^2$  (5)

Diferenciando a equação (5) obtém-se:  $d(v^2) = 2 v \cdot dv$

Como a ordem dos fatores não altera o produto escalar, podemos escrever:

$$dv \cdot v = \left( \frac{1}{2} \right) d(v^2) \quad (6)$$

Substituindo a relação (6) na equação (4) encontra-se:  $dW = (m/2) d(v^2)$  (7)

Como integral de uma diferencial é a própria função, integrando a equação (7) entre os limites  $a$  e  $b$  obtém-se:  $W = (m/2) (v_b^2 - v_a^2) = \Delta E_e$

9) Uma força realiza um trabalho sobre uma partícula que se desloca em linha reta, e a expressão deste trabalho em função do tempo é dada por:  $W = bt + ct^2$ , onde  $b = 2\text{J/s}$ ,  $c = 3\text{J/s}^2$  e  $t$  é dado em segundos determine:

(a) a potência instantânea

(b) o valor da potência para  $t = 1\text{s}$ .

**Solução.**

$$a) \quad \frac{dw}{dt} = P = b + 2.ct$$

$$b) \quad P = b + 2.ct$$

$$P = 2 + 2.3.1$$

$$P = 8\text{w}$$

10) A potência desenvolvida por um motor é dada em função do tempo pela seguinte relação:

$P = P_0 + At$ , onde  $P_0 = 4\text{w}$ ,  $a = 2\text{w/s}$  e  $t$  é dado em segundos. Determine:

a) O trabalho realizado pelo motor em função do tempo

b) O trabalho realizado pelo motor durante os 10 segundos iniciais de seu funcionamento.

**Solução:**

$$a) \quad W = \int p_0 + A.T$$

$$W = P_0 T + \frac{At^2}{2}$$

$$b) \quad W = P_0t + \frac{At^2}{2}$$

$$W = 4.10 + \frac{2 \cdot 10^2}{2}$$

$$W = 40 + 100$$

$$W = 140\text{w}$$

11) Uma partícula se desloca em linha reta. A força que atua sobre a partícula é paralela à trajetória e possui o mesmo sentido do movimento. A força possui módulo variável, dado por:  $F = bx^2$ , onde  $b = 3\text{N/m}^2$ ,  $x$  é dado em m e  $F$  em newton.

a) Determine a expressão do trabalho em função da distância à origem.

b) Calcule o trabalho para deslocar a partícula desde o ponto  $X = 1\text{m}$  até o ponto  $X = 2\text{m}$ .

**Solução:**

$$\begin{array}{ll}
 a) F = bx^2 & b) W = [x_3]^2 \\
 W = \int bx^2 & W = [2^3 - 1^3] \\
 W = \frac{bx^2}{3} & W = 8 - 1 \\
 W = \frac{3 \cdot x^3}{3} & W = 7J \\
 W = x^3 &
 \end{array}$$

12) Uma partícula se desloca em linha reta. A força que atua sobre a partícula possui a mesma direção e o mesmo sentido do deslocamento. O módulo da força é dado em função da distância à origem pela seguinte relação:  $F = bx + cx^2$ , onde  $b = 2N/m$ ,  $c = 3N/m^2$ .  $x$  é dada em metros e a força é dada em newtons. Determine:

- a) A energia potencial desta partícula em função de  $x$ , sabendo que para  $x = 0$ ,  $U = 0$ .  
 b) O valor desta energia para  $x = 1m$ .

**Solução:**  $F = -U$

$$\begin{array}{ll}
 a) F = bx + cx^2 & b) U = -\frac{bx^2}{2} - \frac{cx^3}{3} \\
 U = -\int bx + cx^2 & U = -\frac{2 \cdot 1^2}{2} - \frac{3 \cdot 1^3}{3} \\
 U = -\frac{bx^2}{2} - \frac{cx^3}{3} & U = -1 - 1 \\
 & U = -2J
 \end{array}$$

13) Uma partícula se desloca num campo conservativo unidimensional e sua energia potencial é dada por:  $U = -bx^3 + cx^2$ , onde  $b = 3J/m^2$ ,  $c = 2J/m^2$  e  $X$  é dada em metros. Determine:

- a) A expressão da força em função de  $x$   
 b) O módulo da força quando  $x = 1m$

**Solução**

$$\begin{array}{l}
 a) U = -bx^3 + cx^2 \\
 \frac{du}{dx} = 3bx^2 - 2cx \\
 F = 3bx^2 - 2cx \\
 b) F = 3bx^2 - 2cx \\
 F = 3 \cdot 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1
 \end{array}$$

$$F = 9 - 4$$

$$F = 5\text{N}$$

14) A energia potencial de um carro conservativo em uma dimensão e dada por:  $U = 3x + 2x^2 - (7x^3/3)$ , onde todas as unidades são do sistema MKS. Determine:

a) A expressão da força em função da distância  $X$ .

b) Os pontos de equilíbrio, especificando-se se o equilíbrio é estável ou não.

**Solução:**

$$U_z = 3x + 2x^2 - \left(\frac{7x^3}{3}\right) \quad F = -U$$

$$-\frac{dU}{dx} = -(3x + 4x - \frac{3 \cdot 7x^2}{3})$$

$$F = -3 - 4x + 7x^2$$

$$F = 7x^2 - 4x - 3$$

$$7x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$X' = 1 \text{ m equilíbrio instável}$$

$$X'' = 0,43 \text{ m equilíbrio estável}$$

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A educação contemporânea não deve se limitar a formar alunos para dominar determinados conteúdos, e sim que saber pensar, refletir, trabalhar e cooperar uns com os outros, além de propor soluções sobre problemas e questões atuais. A escola deve favorecer a formação de seres críticos e participativos, conscientes de seu papel nas mudanças sociais, utilizando-se de tecnologias da informação e comunicação para favorecer uma nova postura frente ao processo ensino-aprendizagem.

Considerando o repasse de disciplinas como Matemática e Física, é preciso criar a necessidade de se trabalhar na formação de um sujeito crítico e consciente de seu papel na sociedade em constante transformação, pois se sabe que a maioria dos educadores percorrem os mesmos caminhos difíceis que os alunos o fazem hoje nas salas de aula.

Essas dificuldades ocorrem pelo desconforto de apreender algo que “aparentemente” não tem ligação com atividades práticas no cotidiano, até porque o conhecimento físico e matemático não deve ser considerado como “algo” que está concluído, e sim como um processo em construção, onde professores e alunos devem contribuir eficientemente na construção desse conhecimento.

Deste modo, o papel do professor é fundamental no repasse de qualquer disciplina, pois é dele que partem as tarefas que propiciam ao aluno fazer relações, ou seja, produzir significados para aquele estudo. É do professor, portanto, que partem as intervenções a fim de explorar situações cotidianas em sala de aula, aproveitando-as para facilitar o ensino aprendizagem, além da promoção de uma educação de qualidade.

Durante a confecção desta pesquisa, com pretensões de mostrar por meio de exemplos como se aplica tais ferramentas matemáticas na disciplina Física, especialmente a partir do ensino de equações diferenciais e integral, foi possível compreender durante a coleta de dados e por meio de exemplos, que o uso de noções mais intuitivas devem desencadear reflexões nos alunos, fazendo-os relacionar a Física e Matemática com o cotidiano, além de prepará-los para explorações mais formais.

Destarte, ao avaliar a matemática ensinada como ferramenta na escola, há de se propor inúmeras alternativas para que os alunos possam utilizá-las não apenas na abstração de conceitos, mas também de fórmulas, em uma alusão entre a teoria e a prática, que os levarão a desenvolver o pensamento com criticidade e criatividade, sendo capaz de fazer descobertas e compreender o “mundo” em todos os seus aspectos (social, cultural, político, dentre outros).

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, M. C. **Origens da Matemática: a Pré-História da Matemática**. Vol. I. A Matemática Paleolítica. Curitiba: Progressiva, 2009.
- BARASUOL, F. F. A matemática da pré-história ao antigo Egito. **UNirevista**. Vol. 1, nº 2: (abril 2006). Disponível em: [www.unirevista.unisinos.br](http://www.unirevista.unisinos.br). Acesso em: dez 2021.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. 3 ed. São Paulo: Blucher, 2010.
- COELHO, F. U. **Introdução à Álgebra Linear**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.
- DEVLIN, K. **O gene da matemática**. 5 ed. Rio de Janeiro: Record, 2010.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2011, 844p.
- MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J. **Cálculo**: Vol. 2. [Calculus: with analytic geometry (inglês)]. Trad. André Lima Cordeiro [et al.]. Rio de Janeiro: LTC, 2008 [606-1033].
- GEHRINGER, M.; LONDON, J. **Odisséia Digital**. Edição especial Abril Cultural. Cap. 1 - O Homem que calculou: a aventura do conhecimento humano, do dedo ao computador. Editora Abril. Publicado em 2001. Disponível em: [www.geocities.ws](http://www.geocities.ws). Acesso em: dez 2021.
- GRANDO, N. I.; MARASINI, S. M. Análise de percepções e procedimentos algébricos de estudantes da Educação Básica. **Práxis Educativa (Brasil)**, Vol. 7, n. 2, julho-diciembre, 2012, p. 397-420, Universidade Estadual de Ponta Grossa. Paraná, Brasil.
- HALLIDAY, R. **Fundamentos da Física**. Vol. 1, 10 ed. São Paulo: LTC Editora, 2016.
- LIPPERT, V. F. T.; BRAGA, C. A. Estudos e Reflexões sobre aprendizagem de Álgebra no 8º ano do Ensino Fundamental. Os desafios da escola pública paranaense. **Cadernos PDE**. Vol. 1. Disponível em: [www.diaadiaeducacao.pr.gov.br](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br). Acesso em: dez 2021.
- MELCHIORS, A.; SOARES, M. História do cálculo diferencial e integral. **Maiêutica - Curso de Matemática**. Centro Universitário Leonardo da Vinci (UNIASSELVI), p. 67-79, 2018. Disponível em: <https://core.ac.uk>. Acesso em: mar 2022.
- OLIVEIRA, W. S. Adição e subtração dos números inteiros e o uso de materiais concretos. **Monografia de Conclusão de Curso**. UFPB/CCEN. Itabaiana, 2011.

PICKOVER, C. A. **O livro da matemática**. Kerkdriel, Holanda: Librero, 2011.

PIEHOWIAK, R. **Equações diferenciais**. Indaial: Uniasselvi, 2008.

PIEHOWIAK, R. **Cálculo diferencial e integral**. Indaial: Uniasselvi, 2011.

RANIERI, L. P.; FATTORI, A. Mãos na argila: notas para uma abordagem da materialidade da escrita cuneiforme. **Anais do Museu Paulista: História e Cultura Material**, 29, 1-58, 2021.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1 ed. São Paulo: Zahar, 2012, 512p.

SCHOR, D.; TIZZIOTTI, J. G. **Matemática**. 2º Grau, Vol. 1. São Paulo: Editora Ática, 1982.

YOUNG, H. D.; FREDMAN, R. A. **Física I**. Trad. Sônia Modori Yamamoto. 12 ed. São Paulo: Addison Wesley, 2008, 413p.

VIDAL, A. **Matemáticos e seus queridinhos**. Cálculo. São Paulo: Segmento, 2012, ed. 14, 2012.