



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

HIAGO SALES VIANA

**MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS APLICADO A UM
PROBLEMA DE CONDUÇÃO DO CALOR EM ESTADO
ESTACIONÁRIO**

Castanhal – PA
2018

HIAGO SALES VIANA

**MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS APLICADO A UM
PROBLEMA DE CONDUÇÃO DO CALOR EM ESTADO
ESTACIONÁRIO**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Faculdade de Matemática da
Universidade Federal do Pará, como parte
integrante dos requisitos necessários para a
obtenção do Grau de Licenciatura Plena em
Matemática. Orientador: Prof. Dr. Nilsen
Fernando Lisboa

Castanhal – PA
2018

HIAGO SALES VIANA

**MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS APLICADO A UM
PROBLEMA DE CONDUÇÃO DO CALOR EM ESTADO
ESTACIONÁRIO**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Faculdade de Matemática da
Universidade Federal do Pará, como parte
integrante dos requisitos necessários para a
obtenção do Grau de Licenciatura Plena em
Matemática. Orientador: Prof. Dr. Nildsen
Fernando Lisboa

DATA DE APROVAÇÃO: 23/02/2018

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. NILDSEN FERNANDO LISBOA - Orientador
FACMAT/CUNCAST/UFPA

Prof. Me. Eng. José Geraldo Gonçalves da Silva - Membro da Banca
FACMAT/CUNCAST/UFPA

Prof. Me. Eng. Fábio Nogueira Batista - Membro da Banca
FACMAT/CUNCAST/UFPA

Castanhal – PA
2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais pelos ensinamentos e todo esforço que possibilitaram essa grande conquista.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso que contribuíram de maneira direta ou indiretamente para a conclusão desse trabalho.

Agradeço aos professores desta instituição por todo conhecimento repassado, por todos os conselhos e momentos de descontração, em especial aos professores Dr. Samuel Levi, que deu sua grande contribuição para o trabalho e o Dr. Nildsen Fernando, meu orientador, pela ajuda fundamental na construção deste trabalho, agradeço por toda paciência, acredito que sem eles não seria possível a conclusão do mesmo.

“ A matemática é o alfabeto com qual, Deus escreveu o universo ”
GALILEU GALILEI

“ A mente que se abre a uma nova ideia jamais volta ao seu tamanho original ”
ALBERT EINSTEIN

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	7
RESUMO.....	8
RESUMEN.....	9
1 INTRODUÇÃO.....	10
1.1 OBJETIVO GERAL.....	10
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	11
1.3 METODOLOGIA.....	11
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	12
2.1 TRANSFERÊNCIA DE CALOR.....	12
2.2 PROPAGAÇÃO DE CALOR POR CONDUÇÃO.....	12
2.3 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS.....	16
2.4 EQUAÇÃO UNIDIMENSIONAL DE DIFUSÃO DO CALOR.....	17
2.5 EQUAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE DIFUSÃO DO CALOR.....	19
3 MÉTODO NUMÉRICO APLICADO A CONDUÇÃO DE CALOR.....	23
3.1 DIFERENÇAS FINITAS.....	23
3.2 TÉCNICA DO BALANÇO DE ENERGIA.....	26
3.3 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS FINITAS.....	28
3.3.1 INVERSÃO DE MATRIZES.....	29
4 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS NO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR.....	32
4.1 VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR	32
4.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS NO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR.....	33
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	37
REFERÊNCIAS.....	38
APÊNDICE.....	39

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Condução de calor de T1 para T2 através de uma parede plana, com $T_2 < T_1$	13
Figura 2	Comportamento do gradiente de temperatura.....	14
Figura 3	Vetor n de fluxo térmico tridimensional normal à superfície isotérmica.....	15
Figura 4	Escoamento de calor por condução através de uma parede plana de área A.....	17
Figura 5	Esquema de cubo de volume diferencial $dx dy dz$	20
Figura 6	Malha de diferenças finitas para condução bidimensional em coordenadas retangulares.....	24
Figura 7	Esquema para o desenvolvimento da equação de diferenças finitas.....	25
Figura 8	Calor conduzido para o interior do nó (m, n) através dos nós adjacentes a ele.....	27
Figura 9	Rede nodal com nove nós internos.....	29
Figura 10	Resultado analítico.....	32
Figura 11	Resultado numérico.....	32
Figura 12	Esquema de uma placa com fontes de calor constantes.....	33
Figura 13	Superfície de temperatura de uma placa com 9 nós internos....	34
Figura 14	Superfície de temperatura de uma placa com 225 nós internos.....	34
Figura 15	Superfície de temperatura de uma placa com 961 nós internos.....	35
Figura 16	Superfície de temperatura de uma placa com 16129 nós internos.....	35

RESUMO

Neste trabalho será feito um levantamento bibliográfico a respeito da transferência de calor bem como a obtenção da equação de transferência de calor na sua forma de diferenças finitas para a solução de uma aplicação de um problema de condução de calor em uma placa em condições estacionárias onde será implementado um código no MATLAB para se obter a solução numérica para a distribuição de temperatura em estado de equilíbrio do problema.

Palavras chaves: Condução do calor. Método numérico. Método das diferenças finitas.

RESUMEN

En este trabajo se realizará un levantamiento bibliográfico acerca de la transferencia de calor así como la obtención de la ecuación de transferencia de calor en su forma de diferencias finitas para la solución de una aplicación de un problema de conducción de calor en una placa en condiciones estacionarias donde será implementó un código en MATLAB para obtener la solución numérica para la distribución de temperatura en estado de equilibrio del problema.

Palabras-clave: Conducción del calor. Método numérico. Método de las diferencias finitas.

1 INTRODUÇÃO

O estudo de fenômenos térmicos compreende uma área de grande importância para ciências exatas. Essa importância é salientada devido às diversas aplicações e processos que envolvem calor em trânsito.

Problemas de natureza térmica podem ser classificados quanto a sua maneira de difundir o calor, de três maneiras distintas: condução, convecção e radiação. Tão importante quanto determinar o processo utilizado, é descrever a distribuição de calor em dado meio e se possível quantificá-lo. A difusão do calor é representada por uma equação diferencial que é denominada equação do calor.

As equações diferenciais têm grande relevância por serem ferramentas poderosas para se ter respostas de problemas nas mais diversas áreas do conhecimento, seja ela na economia, na previsão do tempo ou mesmo na indústria. Porém, dependendo da aplicação o seu resultado pode se tornar muito complexo, o que dificulta ou até mesmo impossibilita sua solução exata por meio de métodos analíticos.

O avanço na tecnologia computacional e a necessidade crescente de se ter resultados de problemas entendidos como complexos, foram os propulsores para os métodos numéricos. Esses métodos têm como característica a redução de um problema contínuo com um número ilimitado de variáveis para um problema discreto com um número de variáveis limitado, sendo possível solucionar-se computacionalmente.

Dentre os métodos usados na solução de problemas com equações diferenciais, esta pesquisa utilizará o método das diferenças finitas, para obter a transferência de calor em um problema de condução do calor em uma placa em condições estacionárias.

1.1 OBJETIVO GERAL

O presente trabalho trata da solução de um problema de transferência do calor por condução, onde evidência em cores o campo de distribuição das temperaturas em condições de equilíbrio, que se encontra na região de uma

placa, utilizando o MATLAB como ferramenta operacional para o processamento numérico do Método das Diferenças Finitas.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Investigar de que maneira e como se comporta a difusão do calor por condução.
- Descrever a equação do calor na forma de diferenças finitas.
- Implementar a técnica das diferenças finitas em código computacional.

1.3 METODOLOGIA

Para o desenvolvimento deste trabalho fez-se necessário primeiramente fazer um levantamento bibliográfico com fontes relacionadas a teoria de transferência de calor, com os fins de esclarecer de que maneira acontece esse processo, quais suas características e como é possível quantificá-los em forma de equação.

Posterior a familiarização do tema, foi estudado a formulação da equação do calor, que é a peça chave para a solução de problemas de natureza térmica. Consequentemente, consideram-se as condições de contorno às quais uma placa está sendo submetida e a utilização do método de diferenças finitas como forma de solução do problema.

Para a implementação computacional do método das diferenças finitas utilizou-se o programa MATLAB. O programa foi escolhido como ferramenta de trabalho, devido a sua aceitação no meio acadêmico e por ser um dos utilizados na disciplina de Introdução à Ciência dos Computadores (ICC) no curso de graduação em licenciatura plena em matemática da UFPA (Campus Castanhal).

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 TRANSFERÊNCIA DE CALOR

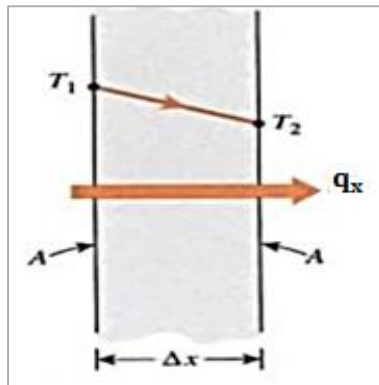
O calor é energia térmica em trânsito que se tem como resultado, devido a uma diferença de temperaturas no espaço (Çengel & Ghajar, 2012, p. 2). Como o calor é movimentação térmica, então ele obedece um dos enunciados propostos pela termodinâmica que diz que o calor sempre é transferido de um meio de alta concentração para um meio de baixa concentração de calor (INCROPERA, et al, 2008, p. 3). Os processos pelo qual o calor pode se propagar acontecem de três formas que são: radiação, convecção e condução. Mas que nesta abordagem bibliográfica será dado ênfase ao meio de transmissão de calor por condução, por se tratar do meio mais adequado para a transferência de calor em estado sólido da matéria.

2.2 PROPAGAÇÃO DO CALOR POR CONDUÇÃO

O mecanismo de condução está intimamente ligado à interação molecular, quando se aquece uma substância sólida, por exemplo. Por sua vez, os elétrons e átomos vibram com grande intensidade por conta da alta temperatura que foi exposta. A energia associada às vibrações são transferidas através de colisões entre os átomos, as partículas mais energéticas transferem energia na forma de calor para as menos energéticas (Halliday & Resnick, 2009, p. 200). O calor que se propaga no meio material, se quantifica por meio de taxa de condução e representa por q_x . A condução do calor pode sofrer algum tipo de influência, por parte da geometria, da espessura, do tipo de material ou da variação de temperatura que pode está submetido ao meio (Çengel & Ghajar, 2012, p. 18).

Considerando-se a condução de calor em regime estacionário através de uma parede plana sem geração de calor, com espessura Δx e área A , como observa-se na figura 1.

Figura 1: Condução de calor de T1 para T2 através de uma parede plana, com $T_2 < T_1$.



Fonte: Adaptado do Çengel (p. 139)

Com a distribuição de temperatura unidimensional em estado de equilíbrio, a diferença de temperatura sofrida pela parede é compreendida como linear e representa-se por ΔT . O calor propagado através da parede assume a mesma direção do gradiente de temperatura, que é designado como o quociente da diferença de temperatura da parede sobre a sua espessura.

$$q_x = -kA \frac{(T_2 - T_1)}{\Delta x} = kA \frac{(T_1 - T_2)}{\Delta x} = kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (2.1)$$

A taxa de condução do calor q_x , é compreendida como o produto da constante positiva de condutividade térmica do material k , com a área A , na qual o calor se propaga sempre perpendicular e o quociente da variação da temperatura ΔT pela espessura Δx . Se a equação (1) for simplificada a sua forma diferencial (fazendo $\Delta x \rightarrow 0$) obtém-se:

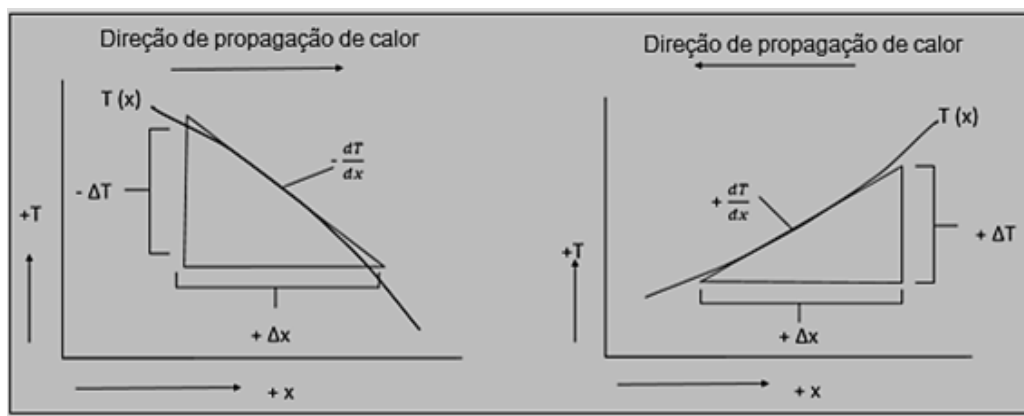
$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} \quad (2.2)$$

Onde a equação (2) é denominada Lei de Fourier da condução térmica, que faz menção ao seu descobridor J. Fourier¹. O termo dT/dx que é o gradiente de temperatura representado na sua forma diferencial.

¹ Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), matemático e físico, nasceu em Auxerre, França. Ele é mais conhecido por seu trabalho na série infinita de funções trigonométricas que levam seu nome e pelo desenvolvimento da teoria matemática de condução de calor. Fourier

Para escrever a equação (2) desta forma, há necessidade de se convencionar o uso do sinal de menos. Segundo HOLMAN (1983, p. 6), o sinal de menos é “[...] inserido para satisfazer o segundo princípio da termodinâmica, ou seja, o calor deve fluir no sentido de temperaturas decrescente”. Se usa o sinal de negativo na equação para se garantir que a transferência de calor será positiva na direção positiva da componente x quando o gradiente de temperatura for negativo como pode se observar na figura 2.

Figura 2: Comportamento do gradiente de temperatura



Fonte: Adaptado do Frank Kreith (p. 6)

É possível converter a equação de taxa em equação de fluxo térmico, isto é, o fluxo térmico é taxa de transferência de calor por condução q_x , por unidade de área A através da qual o calor está sendo conduzido, e é denotado por q_x'' como observa-se na equação (2.3).

$$q_x'' = \frac{q_x}{A} = \frac{-kA \frac{dT}{dx}}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad (2.3)$$

A lei de Fourier, como está representada acima, implica dizer que o fluxo térmico é uma grandeza vetorial. A direção de escoamento é sempre normal a uma superfície de temperatura constante, denominadas superfícies isotérmicas (INCROPERA, et al, 2008, p. 38). Dito isto, é possível escrever um enunciado mais geral para a lei de Fourier.

estabeleceu a equação diferencial parcial que rege a difusão do calor, resolvendo isso pelo uso da série de Fourier.

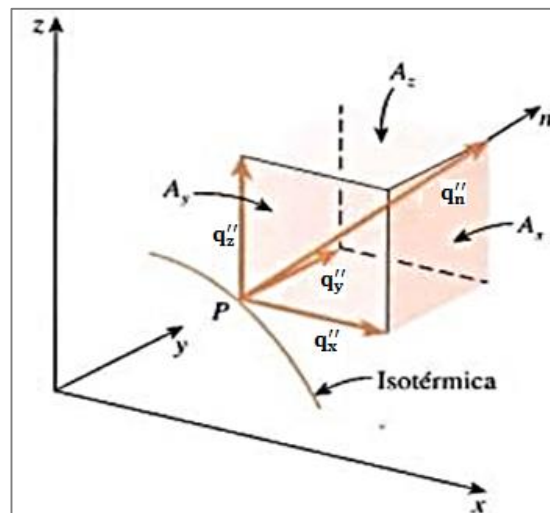
$$q'' = -k\nabla T = -k\left(i\frac{\partial T}{\partial x} + j\frac{\partial T}{\partial y} + k\frac{\partial T}{\partial z}\right) \quad (2.4)$$

Onde ∇ é um operador diferencial e $T(x, y, z)$ é campo escalar de temperatura, q'' é um vetor fluxo térmico que se encontra em uma direção perpendicular às superfícies isotérmicas. Por consequência, outra forma alternativa de se escrever a lei de Fourier é:

$$q''_n = -k\frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.5)$$

Se for considerado um caso onde a distribuição de temperatura seja tridimensional, q''_n é um vetor fluxo térmico que está orientado na direção n , e é normal a superfície isotérmica como mostra figura 3.

Figura 3: Vetor n de fluxo térmico tridimensional normal à superfície isotérmica.



Fonte: Adaptado do Çengel (p. 6)

O vetor fluxo térmico pode ser decomposto em forma de coordenadas cartesianas, pois então a expressão q'' assume a seguinte forma condensada (INCROPERA, et al, 2008, p. 39).

$$q'' = iq''_x + jq''_y + kq''_z \quad (2.6)$$

No qual a partir da equação (2.6) é possível constatar que as equações 2.7; 2.8 e 2.9; representam o fluxo de calor na direção das componentes x, y e z respectivamente pois, as expressões relacionam o fluxo térmico ao gradiente de temperatura que é perpendicular à superfície na qual o calor flui por condução (INCROPERA, et al, 2008, p. 39).

$$q_x'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$q_y'' = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.8)$$

$$q_z'' = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.9)$$

A lei de Fourier é o enunciado mais importante dentro da análise de transporte de calor. Pois, ela é uma expressão fenomenológica, isto é, constituída de constatações experimentais que não podem ser derivadas de princípios fundamentais. É também uma expressão vetorial onde expressa o fluxo de calor perpendicular a uma superfície de calor constante no sentido de decaimento das temperaturas, onde pode ser aplicada a toda estado físico da matéria sólido, líquido ou gasoso (INCROPERA, et al, 2008, p. 39).

2.3 PROPRIEDADE DOS MATERIAIS

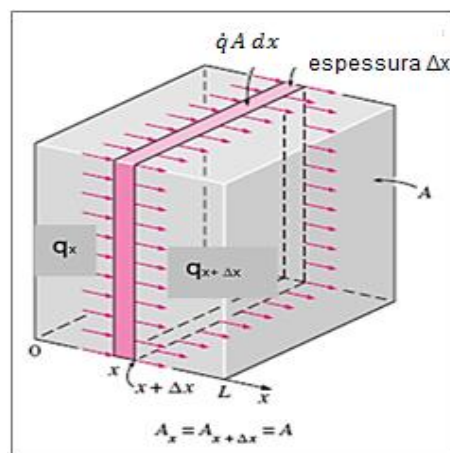
Os materiais tem importantes propriedades que não podem ser desconsideradas no processo de propagação de calor, como produto ρc_p , pois compreende-se como a densidade (ρ) e o calor específico a pressão constante (c_p), representando a capacidade térmica dos materiais que é a habilidade que o material tem de armazenar calor (Çengel & Ghajar, 2012, p. 22). Outra relação importante dos materiais, muito comum em análise de transmissão de calor, é a difusividade térmica α (m^2/s), compreende-se como a razão entre a capacidade que o material tem de conduzir calor e de armazená-lo, é representado pela equação abaixo (Keith, 1977, p. 64). Materiais com um valor elevado da difusividade térmica tendem a conduzir calor mais facilmente, se comparados a outros materiais com baixo valor de α .

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (2.10)$$

2.4 EQUAÇÃO UNIDIMENSIONAL DE DIFUSÃO DO CALOR

Para estabelecer uma equação geral para difusão do calor em um determinado meio material o ponto de partida é a equação (2.2). Se for considerado um sistema unidimensional onde pode haver possíveis fontes internas de geração ou sumidouros de calor, a temperatura variando em função do tempo, pois para essa determinada situação é necessário primeiro estabelecer um balanço de energia (HOLMAN, 1983, p. 2), considere-se uma parede plana de espessura Δx .

Figura 4: Escoamento de calor por condução através de uma parede plana de área A .



Fonte: Adaptado do Çengel (p. 69)

As relações do escoamento de energia através da parede e as taxas de geração e de acúmulo de energia estão expressas no enunciado abaixo.

$$\dot{E}_e - \dot{E}_s + \dot{E}_g = \dot{E}_a \quad (2.11)$$

O termo \dot{E}_e da equação acima representa em forma de taxa o calor que é transferido por condução para dentro da parede e é representado em forma de taxa pela lei de Fourier.

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} \quad (2.12)$$

O termo \dot{E}_s representa a taxa de calor que sai da parede que é denotado por $q_{x+\Delta x}$, mas para se obter o termo em forma de taxa de condução é necessário utilizar a série de Taylor, pois é considerado os dois primeiros termos da série e os demais termos são desprezados (HOLMAN, 1983, p. 5).

$$q_{x+\Delta x} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (2.13)$$

Em palavras, a equação acima diz que quando a coordenada x da taxa de transferência de calor na posição $x + \Delta x$ é igual ao valor da coordenada em x somado com a quantidade na qual ela varia com x multiplicado dx (INCROPERA, et al, 2008, p. 47).

O termo \dot{E}_g é denotado como a taxa de geração de energia térmica, por unidade de volume (w/m^3) no interior da parede que se representada por:

$$\dot{q}A dx \quad (2.14)$$

O termo \dot{E}_a exprime a taxa de variação de energia térmica interna em relação ao tempo no interior da parede, se expressa por:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} A dx \quad (2.15)$$

Substituindo as equações 2.12, 2.13, 2.14 e 2.15 pelos seus termos equivalentes na equação (2.11), tem-se:

$$q_x - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) + \dot{q}A dx = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} A dx$$

Reduzindo os termos simétricos, fica:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \dot{q}A dx = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} A dx$$

Substituindo q_x em forma de taxa de condução de calor, tem-se:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) A dx + \dot{q}A dx = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} A dx$$

Dividindo todos os termos por $A dx$, obtém-se:

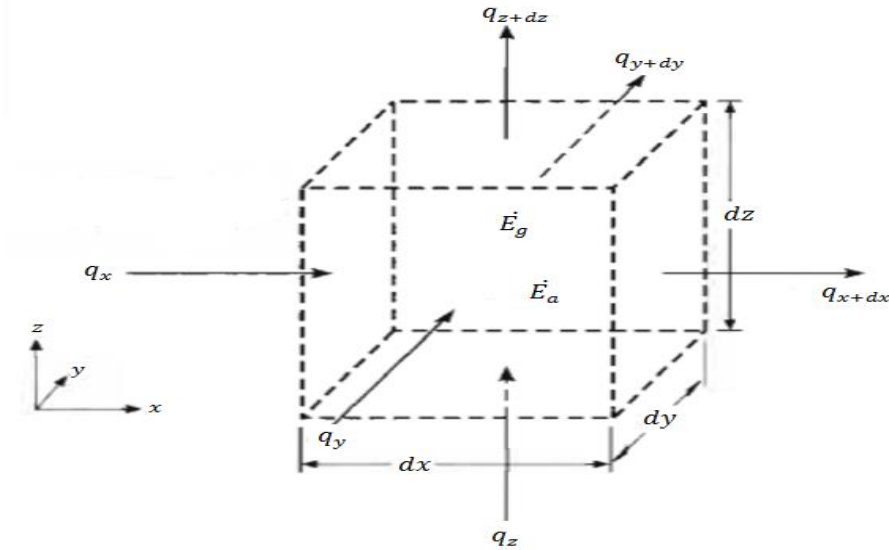
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.16)$$

A expressão acima é denominada equação de condução (ou difusão) do calor unidimensional onde expressa o fluxo de calor em uma única direção. Em alguns casos é suficiente se analisar o fluxo de calor em função de uma variável, pois na realidade problemas de natureza térmica podem vir a ter contornos irregulares e temperaturas ao longo dos contornos não uniformes e com isso uma análise unidimensional se torna insuficiente como solução para o problema, faz-se necessário considerar a propagação de calor em um meio bidimensional ou até mesmo tridimensional (Keith, 1977, p. 63). Dito isto, é de suma importância estabelecer a equação de difusão do calor para um meio multidimensional.

2.5 EQUAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE DIFUSÃO DO CALOR

Considera-se um cubo de volume diferencial, constituído de um material homogêneo, onde é possível definir a distribuição de temperatura, como mostra figura 5.

Figura 5: Esquema de cubo de volume diferencial $dx dy dz$



Fonte: Adaptado do Incropera (p. 45)

Utilizando a relação do balanço de energia como está expressa na equação (11), mas agora adicionando os demais termos para a propagação de calor tridimensional, obtém-se a seguinte formulação:

$$(q_x + q_y + q_z) - \left[\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) + \left(q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) \right] + \dot{q} dx dy dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$$

Reduzindo os termos simétricos, fica:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \dot{q} dx dy dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$$

Substituindo os termos q_x, q_y e q_z pelas suas respectivas equações de taxa de transferência de calor (lei de Fourier), tem-se:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz - \frac{\partial}{\partial y} \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dz - \frac{\partial}{\partial z} \left(-k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz + \dot{q} dx dy dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$$

É importante salientar que cada equação de taxa substituída na expressão anterior passou por um ajuste com relação a sua área na qual o calor flui perpendicular na direção das suas respectivas dimensões do cubo que constituem a lei de Fourier.

Dividindo todos os termos por $dx dy dz$, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.17)$$

A equação acima, denomina-se como equação de difusão do calor, expressa o fluxo de calor tridimensional para um dado meio material, onde é possível determinar a trajetória de um fluxo de calor ou a temperatura em qualquer ponto do meio em função do tempo. Segundo INCROPERA, et al (2008, p. 46)

[...] a equação postula que em qualquer ponto do meio, a taxa líquida de transferência por condução para o interior de um volume unitário somado à taxa volumétrica de geração de energia térmica deve ser igual à taxa de variação de energia térmica acumulada no interior deste volume.

Mas é possível escrever uma versão mais simplificada da equação (2.17) pois, se for considerado a condutividade térmica constante, assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{\rho c_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.18)$$

Substituindo o termo $\frac{\rho c_p}{k}$ por α , fica

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.19)$$

Se for desconsiderado a variação da temperatura em função do tempo e a geração de energia, e for desprezado a propagação de calor na direção da

coordenada z tem-se a equação que expressa a transferência de calor bidimensional permanente sem geração de calor.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.20)$$

A equação acima também é conhecida como equação de Laplace², pois ela é uma das equações diferenciais mais importantes que já se ocorreu na matemática aplicada. Além de ser possível descrever um problema de condução de calor bidimensional em estado estacionário (sem variação de energia em função do tempo), também ocorre em outros ramos da física matemática, como por exemplo, em campos eletrostáticos, no qual se tem partículas sem cargas elétricas que estão sob a ação, apenas de forças gravitacionais e que seu comportamento é descrito pela equação de Laplace (Boycer & Diprima, 2012, p. 340).

² A equação de Laplace leva esse nome em honra a Pierre-Simon de Laplace, que a partir de 1782 estudou extensivamente, suas soluções ao investigar a atração gravitacional de corpos arbitrário no espaço.

3 MÉTODO NUMÉRICO APLICADO A CONDUÇÃO DE CALOR

Grande parte dos problemas físicos encontrados podem ser descritos por equações diferenciais. Métodos analíticos são muito utilizados para suas soluções pelo fato de obterem resultados exatos, mas nem sempre é possível se utilizar desse recurso.

No caso de problemas que envolvem condução do calor, devido a condições importantes que podem ser encontradas na prática, que vem a limitar o processo de obtenção de solução por meio de método analítico (Çengel & Ghajar, 2012, p. 295).

Diante da inviabilidade de se utilizar método analítico para solução de problemas diferenciais que descrevem fenômenos térmicos, faz-se necessário recorrer a outro artifício matemático que possa viabilizar a solução, como a utilização de métodos numéricos. Dentre as técnicas numéricas destacam-se: diferenças finitas, elementos finitos, elementos de contorno e volumes finitos, mas que neste trabalho será direcionado a pesquisa para evidenciar a técnica de diferenças finitas, por ser de fácil entendimento e aplicação.

3.1 DIFERENÇAS FINITAS

De acordo com Ruggiero & Lopes (1996, p. 357)

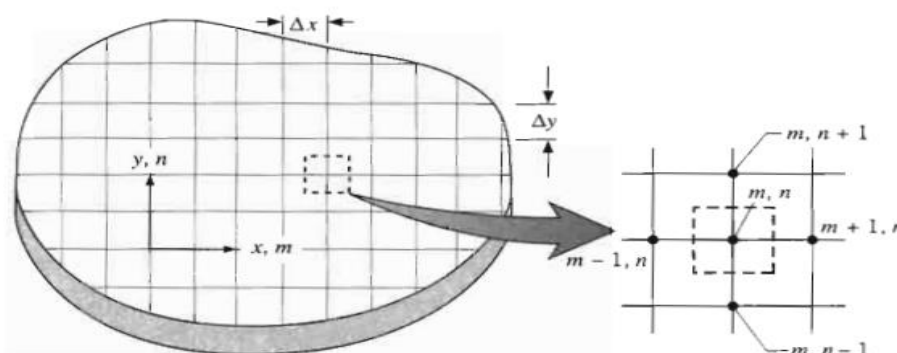
A ideia básica do método de diferenças finitas é transformar o problema de resolver uma equação diferencial num problema de resolver um sistema de equações algébricas, usando para isso aproximações das derivadas que aparecem na equação, por diferenças finitas.

A técnica numérica de diferenças finitas consiste em substituir equações diferenciais por equações algébricas, mas diferente do método analítico que é possível abranger todo o meio, a solução numérica se retém a obter resultado somente em alguns pontos que estão contidos na área de interesse. O processo pelo qual é possível se obter esses pontos, também chamados de nós ou ponto nodal, se dá pela subdivisão da área de interesse em pequenas regiões retangulares finitas com dimensões Δx e Δy previamente estabelecida, elas estão delimitadas por quatro nós localizados nos seus extremos, como se

observa na figura 6. Onde a intersecção dessas regiões geram um conjunto de nós que se dá o nome de malha ou rede nodal.

Cada nó da malha representa um valor numérico de uma pequena região, por exemplo, se for considerado uma distribuição de temperatura em estado estacionário e sem geração de energia interna em um dado domínio, o valor exato é obtido da equação 2.20; mas por se tratar de uma solução numérica se faz necessário utilizar uma versão aproximada da equação.

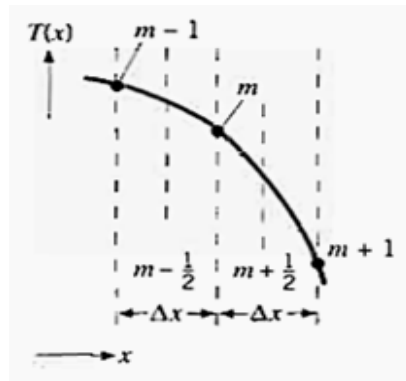
Figura 6: Malha de diferenças finitas para condução bidimensional em coordenadas retangulares



Fonte: Adaptado do Incropera (p. 136)

A forma aproximação da equação 2.20, adequada para os nós internos da malha se obtém da substituição dos termos diferencial por suas diferenças apropriadas, se for considerado inicialmente um termo da equação como o $\partial^2 T / \partial x^2$, com base na figura 7, o valor do termo no ponto (m, n) considerando-se apenas uma coordenada espacial inicialmente e mantendo-se constante a outra, pode ser aproximado como:

Figura 7: Esquema para o desenvolvimento da equação de diferenças finitas.



Fonte: Tirado do Incropera (p. 136)

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{m,n} \approx \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m+\frac{1}{2},n} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta x} \quad (3.1)$$

Os gradientes de temperatura podem ser representados como função das temperaturas nodais, ou seja:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m+\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (3.2)$$

e

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m-\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x} \quad (3.3)$$

Substituindo as equações 3.2 e 3.3 na 3.1, obtém-se:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{m,n} \approx \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} \quad (3.4)$$

Procedendo de maneira análoga, nota-se que:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{m,n} \approx \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{m,n+\frac{1}{2}} - \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Delta y}$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{m,n} \approx \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} \quad (3.5)$$

Substituindo as equações 3.4 e 3.5 na 2.20. Obtém-se:

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} = 0$$

Utilizando uma malha onde $\Delta x = \Delta y$, então:

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0 \quad (3.6)$$

A equação acima é uma expressão algébrica aproximada, que se obtém como resultado a partir de uma equação diferencial exata, onde se torna possível descrever a temperatura em cada nó interno da malha de diferenças finitas de um sistema bidimensional em estado estacionário, pela média dos quatros nós vizinhos equidistantes a ele. É importante salientar que os nós de contorno não exercem nenhuma influência nos resultados obtidos através da equação 3.6 (Çengel & Ghajar, 2012, p. 301).

3.2 TÉCNICA DO BALANÇO DE ENERGIA

Em alguns casos, quando necessário, é possível desenvolver a equação de diferenças finitas para os nós da malha através de uma técnica alternativa, denotado por método do balanço de energia. Neste método, a equação adequada para os nós é obtida através da aplicação da conservação de energia no volume de controle, referente a região onde o nó está contido. Onde a direção real do fluxo térmico (entrada ou saída do nó) é entendida como desconhecida, pois é conveniente formular o balanço de energia tendo como suposição que todos os fluxos térmicos estejam direcionados para dentro do nó. Tendo em vista que tal condição seja impossível, se as equações de taxa forem representadas de maneira consistente com essa suposição, a equação de diferenças finitas é obtida corretamente (INCROPERA, et al., 2008, p. 146).

Para condições de regime estacionário com geração de calor, a forma geral para a equação do balanço de energia pode ser representada pela equação abaixo:

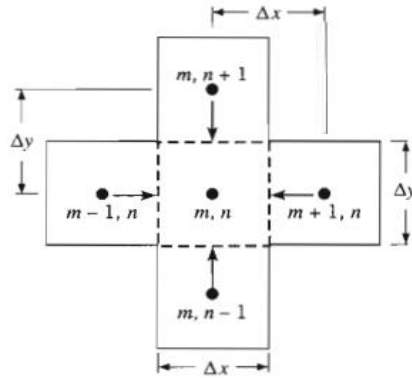
$$\dot{E}_{ent} + \dot{E}_g = 0 \quad (3.7)$$

Onde o termo \dot{E}_{ent} representa as taxas de calor transferida para dentro do nó, \dot{E}_g é a taxa de geração de energia interna por unidade de volume, mas por se tratar de uma análise bidimensional, considera-se as quatro direções da região do volume de controle, ou seja, obtém-se uma equação de taxa para cada direção de propagação de calor como mostra a figura 8. As equações de taxa podem ser representadas pela lei de Fourier (equação 2.1), pois expressa-

se em termos de taxa o calor propagado do nó $(m, n + 1)$ para o (m, n) da seguinte maneira:

$$q_{(m,n+1) \rightarrow (m,n)} = k(\Delta x) \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad (3.8)$$

Figura 8: Calor conduzido para o interior do nó (m, n) através dos nós adjacentes a ele.



Fonte: Tirado do Incropera (p. 137)

O calor transferido por condução é orientado em um sistema de coordenadas retangulares x e y , pois o termo $[\Delta x]$ representa a área na qual o calor se transfere por condução na direção de y (o um que multiplica o termo Δx faz referência à Δy , pois a transferência de calor é considerada como linear para o nó, daí utiliza-se o termo perpendicular à direção de propagação do calor) e o $(T_{m,n+1} - T_{m,n})/\Delta y$ é o gradiente de temperatura aproximado na forma de diferenças finitas, expresso entre os extremos dos dois nós, de maneira análoga, se obtém as outras três equações:

$$q_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} = k(\Delta y) \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (3.9)$$

$$q_{(m,n-1) \rightarrow (m,n)} = k(\Delta x) \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad (3.10)$$

$$q_{(m+1,n) \rightarrow (m,n)} = k(\Delta y) \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (3.11)$$

Substituindo as equações de 3.8 a 3.11 na 3.7:

$$k(\Delta y) \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} + k(\Delta y) \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} + k(\Delta x) \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} + k(\Delta x) \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} + \dot{q}(\Delta x \Delta y) = 0$$

Dividindo todos os termos por $(k \Delta x \Delta y)$

$$\frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{(\Delta y)^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

Agrupando os termos de mesmo denominador

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

Fazendo $\Delta x = \Delta y$, e então multiplicando por $(\Delta x)^2$, então:

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} + \frac{\dot{q}(\Delta x)^2}{k} = 0 \quad (3.12)$$

Quando não há taxa de geração de energia no elemento, a equação acima fica idêntica a 3.6; mas é possível simplificá-la ainda mais, onde se torna mais evidente a temperatura de um dado nó interno de uma malha em função da média aritmética dos valores das temperaturas dos quatro nós vizinhos a ele (Çengel & Ghajar, 2012, p. 314).

$$T_{m,n} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}}{4} \quad (3.13)$$

O método do balanço de energia, embora se baseie em propriedades físicas dos nós envolvidos em um volume de controle que estão sujeitas a ações de taxas de calor, é possível se obter a mesma equação para os pontos nodais internos deduzidos a partir da equação do calor, onde os seus termos diferenciais são aproximados por suas diferenças. A dedução para se obter a equação de diferenças finitas para nós internos de uma rede nodal utilizada neste trabalho é adaptado de Çengel & Ghajar (2012) e INCROPERA (et al., 2008).

3.3 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS FINITAS

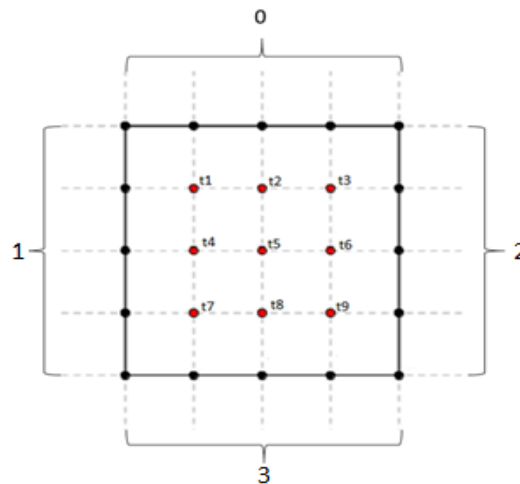
Com o desenvolvimento da equação de diferenças finitas previamente estabelecida para cada um dos nós de uma rede nodal, se torna necessário utilizar um mecanismo de solução para as equações, pois o problema agora se resume a resolver um sistema com equações lineares, onde se pode utilizar como recurso métodos diretos que tem como característica resolução de forma sistemática, seguindo etapas pré-estabelecida, ou métodos iterativos que se baseiam em uma estimativa inicial da solução e se realizam sucessivas

interações até convergir ao valor da solução (INCROPERA, et al., 2008, p. 140). Neste trabalho, será utilizado como solução para o sistema de equações lineares um método direto chamado de inversão de matrizes.

3.3.1 INVERSÃO DE MATRIZES

Dado um sistema constituído por um número finito de equações de diferenças finitas que, por sua vez, correspondem ao mesmo número de temperaturas desconhecidas a cada ponto nodal (m, n) é associado um número fixo que possibilita a contagem dos nós da rede nodal, e quanto a ordem de contagem ficou condicionado, como mostra a figura abaixo.

Figura 9: Rede nodal com nove nós internos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Como resultado da rede nodal acima, obtém-se nove equações de diferenças finitas que são expressas da seguinte forma:

$$t_1 = \frac{1}{4}(0 + t_2 + t_4 + 1)$$

$$t_2 = \frac{1}{4}(0 + t_3 + t_5 + t_1)$$

$$t_3 = \frac{1}{4}(0 + 2 + t_6 + t_2)$$

$$t_4 = \frac{1}{4}(t_1 + t_5 + t_7 + 1)$$

$$t_5 = \frac{1}{4}(t_2 + t_6 + t_8 + t_4)$$

$$t_6 = \frac{1}{4}(t_3 + 2 + t_9 + t_5)$$

$$t_7 = \frac{1}{4}(t_4 + t_8 + 3 + 1)$$

$$t_8 = \frac{1}{4}(t_5 + t_9 + 3 + t_7)$$

$$t_9 = \frac{1}{4}(t_6 + 2 + 3 + t_8)$$

Adotando-se a notação matricial para o sistema das nove equações acima, obtém-se a seguinte forma:

$$t = mt + b \quad (3.14)$$

Onde,

$$t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \\ t_9 \end{bmatrix}; m = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; b = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0 \\ 0,50 \\ 0,25 \\ 0 \\ 0,50 \\ 1 \\ 0,75 \\ 1,25 \end{bmatrix}$$

A matriz t , é uma matriz coluna, onde os seus valores correspondem às temperaturas desconhecidas dos nós internos da malha.

b é a matriz, onde os seus elementos representam os valores das temperaturas fixas nos contornos da área de interesse, onde se procura a distribuição de temperatura.

A matriz m , é uma matriz quadrada, onde sua ordem está associada ao número de nós da rede nodal, que por sua vez cada linha da matriz está associada a uma equação do sistema na sua respectiva ordem, onde os seus elementos não nulos representam as temperaturas desconhecidas dos nós que se pretende encontrar.

Mas para ser possível resolver a equação 3.14, primeiro organiza-se em função de b ,

$$b = t - mt$$

$$b = t(I - m) \quad (3.15)$$

I é uma matriz identidade, onde tem a mesma ordem de m . Mas como o propósito é obter os valores de t , então se ajusta a equação acima em função de t e resulta-se em:

$$t = (I - m)^{-1} b \quad (3.16)$$

Agora o problema se resume a identificar a inversa da matriz $(I - m)^{-1}$ pois de acordo com STEINBRUCH & WINTERLE (2010, p. 466) existem matrizes que nem sempre são possível se ter a sua inversa e são denominadas como singular, entretanto para esse caso em particular se torna continuamente viável se obter a sua inversa sempre que necessário (Anton & Rorres, 2001, p. 430). A solução obtida para as temperaturas dos nós internos da malha de acordo com os a equação 3.16; está expresso a seguir. Salienta-se que, o metodo de inversão de matrizes e juntamente com o desenvolvimento da equação matricial que se utiliza como resposta para as temperaturas desconhecidas nos pontos internos de malha abordados neste trabalho são adaptados de Anton & Rorres (2001).

$$t = \begin{bmatrix} 0,7857 \\ 0,8571 \\ 1,1429 \\ 1,2857 \\ 1,5000 \\ 1,7143 \\ 1,8571 \\ 2,1429 \\ 2,2143 \end{bmatrix}$$

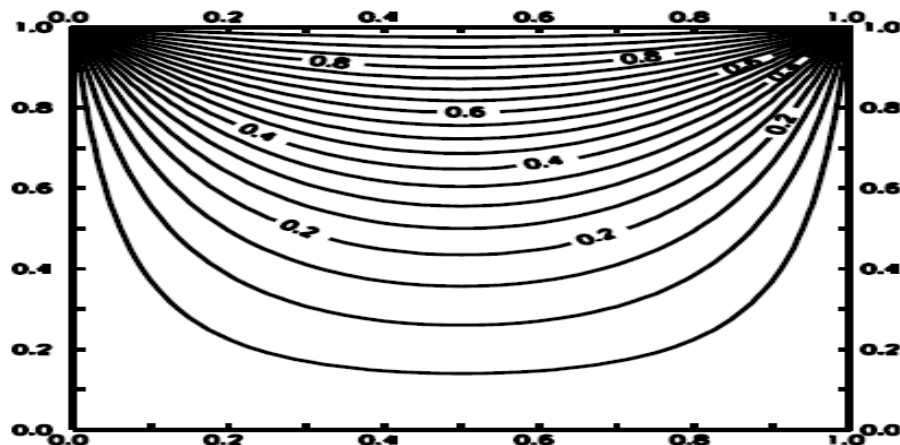
A solução acima é correspondente a somente nove nós internos da malha, mas se a malha for ajustada, isto é, aumentar o número de nós internos, com isso é possível se ter uma precisão maior com relação ao valores das temperaturas distribuidas ao longo da placa. Mais adiante no trabalho será tratado de um problema de condução de calor onde se encontra em condição estacionária, que se torna possível observar uma aproximação melhor dos resultados, conforme vai se avançando o refinamento da malha.

4 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS NO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR

4.1 VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR

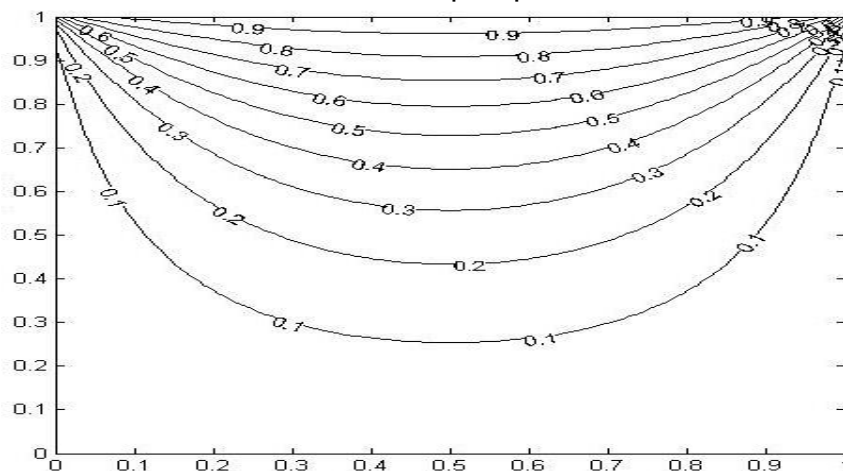
O algoritmo que implementa o método das diferenças finitas no MATLAB para resolver o problema de condução de calor é validado usando os resultados de Mackowski (2015). Abaixo o comparativo entre o resultado analítico da citação com o obtido nesta pesquisa, para a distribuição de calor em uma placa de 1 m de dimensão com temperatura superior de 1°C e as demais laterais a 0°C em condições estacionárias.

Figura 10: Resultado analítico



Fonte: Adaptado de uma nota de aula de Mackowski

Figura 11: Resultado numérico obtido na pesquisa.



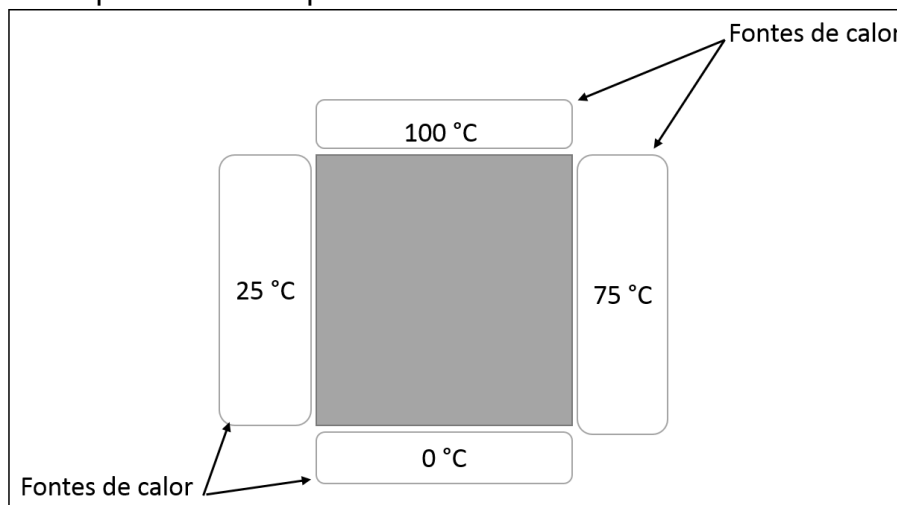
Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

4.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS NO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR

O presente trabalho irá tratar de um problema de calor por condução, onde está sendo considerado uma placa composta por um material com propriedades homogêneas e isotrópicas, admitindo-se que a composição do material permita que a difusividade térmica seja sempre constante, comprimento e larguras iguais $L = 1$ m, sendo possível ser desprezível a sua espessura e a troca de calor com o meio externo. Considerando-se que em cada uma das extremidades da placa estejam com uma fonte de calor com temperatura constante e de distintos valores.

A extremidade superior da placa está mantida a uma temperatura de 100°C , a extremidade inferior está mantida a uma temperatura de 0°C , a extremidade esquerda a 25°C e a direita a 75°C .

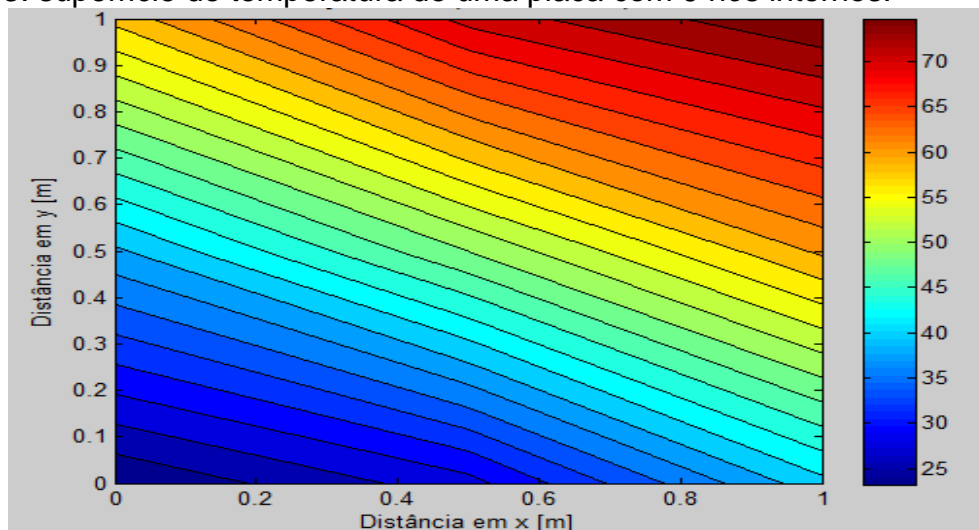
Figura 12: Esquema de uma placa com fontes de calor constantes.



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Após definir a malha e utilizar-se da equação 3.16 é implementado um código no MATLAB, assim é possível se obter o comportamento das temperaturas ao longo da placa conforme se amplia o número de nós na malha. A imagem abaixo é obtida como resultado da primeira interação do problema com a malha ajustada para 9 nós internos.

Figura 13: superfície de temperatura de uma placa com 9 nós internos.

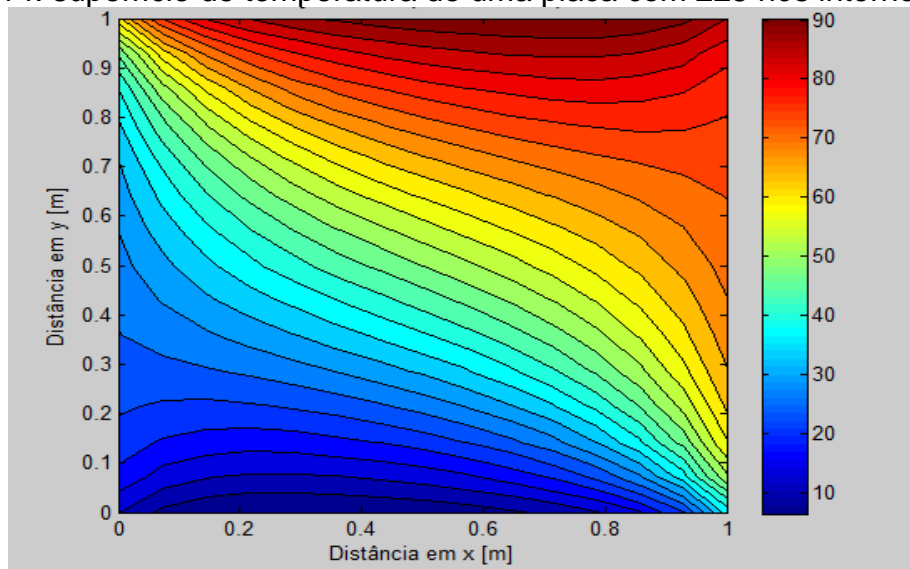


Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Observando a figura 13, pode ser constatado que as isoterms que têm um padrão muito particular estão se assemelhando a uma reta na sua grande maioria, isso se deve ao pequeno número de nós contidos na malha.

A malha agora será ajustada para uma nova interação que terá 225 nós de temperatura, veja a imagem a seguir.

Figura 14: superfície de temperatura de uma placa com 225 nós internos.

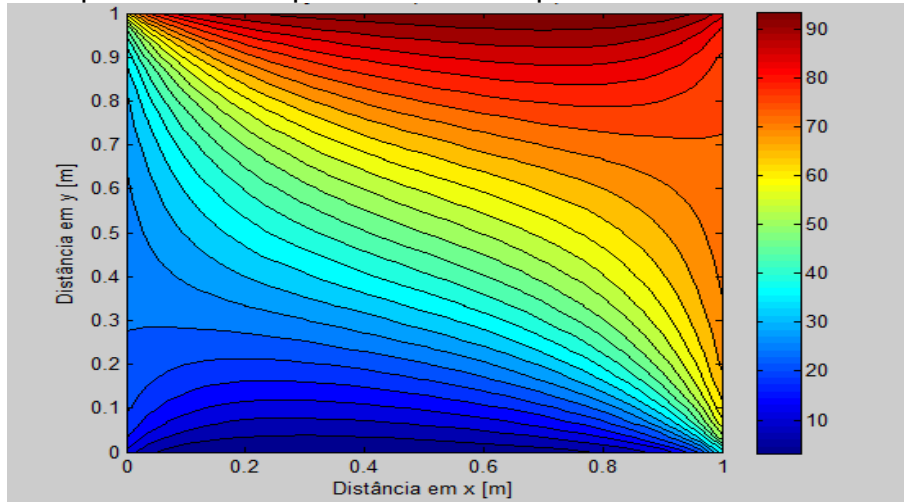


Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Agora é possível observar uma mudança com o padrão das isoterms, no caso anterior tinha semelhança com uma reta, mas agora estão adquirindo um novo padrão com uma característica mais próxima de uma curva.

Um novo ajuste será feito para que contenha 961 nós de temperatura, veja o resultado na imagem abaixo:

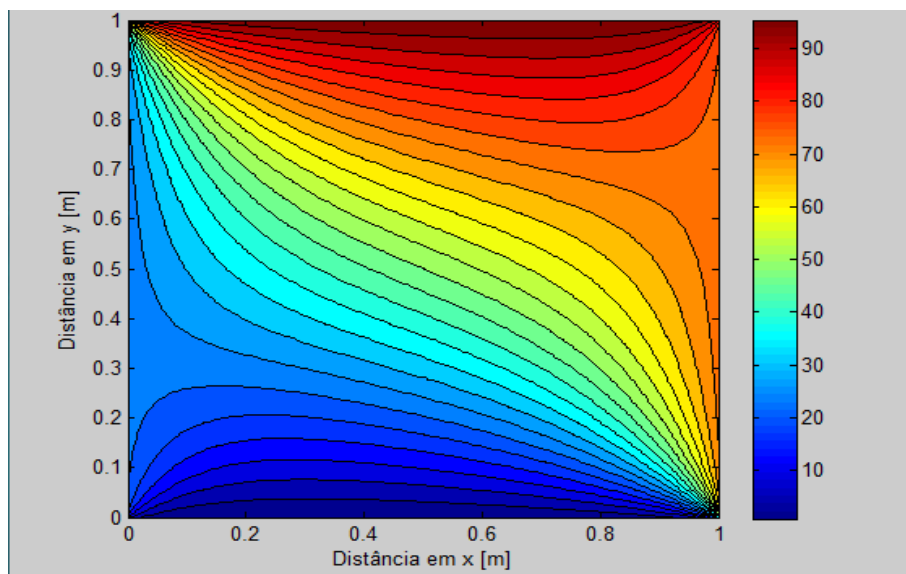
Figura 15: superfície de temperatura de uma placa com 961 nós internos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

É notório o fato de que as isoterms apresentam um padrão curvo, se acentuando cada vez mais, conforme se compara com as interações anteriores. Por fim, será ajustado pela última vez a malha para ser possível conter 16129 nós de temperatura.

Figura 16: superfície de temperatura de uma placa com 16129 nós internos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2018)

Nesta última imagem, onde se tem uma solução mais refinada para o problema da distribuição de temperatura da placa, ou seja, uma abrangência maior de nós de temperatura da malha, mas não menos importante, se verifica com maior intensidade o princípio da condução do calor, onde se constata o calor migrando da região do canto superior direito da placa, que contém a maior concentração de calor, para a região da placa onde tem uma menor concentração.

Como já era esperado, a ampliação do número de nós da malha gera uma aproximação cada vez melhor do resultado que a interação anterior. Mas se deve ter cautela com as sucessivas interações, pois o fato de o computador executar diversos arredondamentos para se obter os valores das temperaturas pode acarretar em erros de aproximação. A técnica apropriada para se ter conhecimento se a solução obtida está em nível aceitável de confiança é o balanço de energia, executando esse processo em alguns nós da malha consegue-se ter ideia do tamanho do erro gerado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No trabalho apresentado foi utilizado o método das diferenças finitas implementado em um código executado no MATLAB, para a solução de um problema de condução do calor em uma placa sob condições estacionárias. Inicialmente ao se observar os resultados numéricos das interações que eram obtidas do problema, se constatava que a cada nova interação a solução obtida era cada vez mais precisa em relação ao resultado da anterior. Mas devido as sucessivas interações executadas pelo computador, a cada nova interação é necessário um esforço maior de máquina, isso se deve ao aumento do número de cálculos que o computador tem que executar para as novas soluções.

Os objetivos propostos nesta pesquisa foram alcançados, conseguiu-se uma solução aproximada para o problema da condução do calor, onde se foi possível obter o comportamento da distribuição de temperatura ao longo da placa.

Para trabalhos futuros fica como sugestão a consideração de geometrias diferentes como por exemplo esféricas ou cilíndricas; a utilização de malhas não uniformes; a produção de resultados numéricos de problemas de condução do calor em estado transiente.

REFERÊNCIAS

ANTON, H., & RORRES, C.. **Álgebra linear com aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BOYCER, W. E., & DIPRIMA, R. C.. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

ÇENGEL, Y. A., & GHAJAR, A. J.. **Transferência de Calor e Massa**. AMGH EDITORA LTDA, 2012.

HALLIDAY, D., & RESNICK, J. W.. **Fundamentos de Física, vol.2**. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

HOLMAN, J. P.. **Transferência de Calor**. SÃO PAULO: MCGRAH-HILL, 1983.

INCROPERA, F. P., DEWITT, D. P., BERGMAN, T. L., & LAVINE, A. S.. **Fundamentos de Transferência de Calor e Massa**. Rio De Janeiro: LTC, 2008.

KEITH, F.. **Princípios da Transmissão de Calor**. São Paulo: Edgard Blücher, 1977.

MACKOWSKI, D. W.. **Conduction Heat Transfer Notes for MECH 7210**. Auburn, Alabama, 2015.

RUGGIERO, M. A., & LOPES, V. L.. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

STEINBRUCH, A., & WINTERLE, P.. **Álgebra Linear (2ª ed.)**. São Paulo: PEARSON MAKRON BOOKS, 2010.

APÊNDICE

Código implementado no MATLAB para solução do problema de condução do calor.

```

%Entrada de dados da geometria do problema de condução do calor
fprintf('!!Entrada de dados da geometria do problema de condução do calor!! \n');
L = input('Entre com o comprimento [m]: ');
H = input('Entre com a altura [m]: ');
nx = input('Entre com o número de pontos em x: ');
ny = input('Entre com o número de pontos em y: ');

%Entrada das temperaturas nos contornos da placa
fprintf('!!temperaturas do contorno da placa!! \n');
TS = input('Entre com a temperatura superior: ');
TD = input('Entre com a temperatura a direita: ');
TI = input('Entre com a temperatura inferior: ');
TE = input('Entre com a temperatura a esquerda: ');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Construção da matriz M dos coeficientes
nx_p = nx-2;
ny_p = ny-2;
deltax = (L-0)/(ny_p-1);
deltay = (H-0)/(nx_p-1);

n_M = nx_p*ny_p;
M = zeros(n_M,n_M);

%Colocando o valor zero na diagonal principal
for i = 1:n_M

    M(i,i) = 0.0;
end

%Montando as diagonais dos elementos agrupados
for j = 2:n_M

    M(j-1,j) = 1/4;
end

%Substituindo alguns valores 1/4 por 0
for i = ny_p:ny_p:n_M-ny_p
    M(i,i+1) = 0.0;
end

%Montando as diagonais dos elementos nulos

for k = 1:(ny_p-1)-1
    for i = 3+(k-1):n_M
        M(i-(2+(k-1)),i) = 0.0;
    end
end

```

```
%Montando ultima diagonal dos elementos não nulos
```

```
for j = ny_p+1:n_M
    M(j-(ny_p),j) = 1/4;
end
```

```
%Completando a matriz M
```

```
for i = 1:n_M
    for j = 1:n_M
        M(j,i) = M(i,j);
    end
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%Construção do vetor b dos termos independentes
```

```
%Contorno superior
```

```
for j = 1:ny_p
    b(1) = plus(TE,TS)/4;
    b(ny_p) = plus(TD,TS)/4;
    if (mod(j,ny_p)==j)
        b(j) = TS/4;
    end
end
```

```
%Contorno inferior
```

```
for j = (nx_p-1)*ny_p+1:n_M

    b((nx_p-1)*ny_p+1) = plus(TE,TI)/4;
    b(n_M) = plus(TD,TI)/4;
    if(mod(j,ny_p)==j-(nx_p-1)*ny_p)
        b(j) = TI/4;
    end
end
```

```
%Contorno esquerdo
```

```
for i = ny_p+1:ny_p:(nx_p-2)*ny_p+1
```

```
    b(i) = TE/4 ;           %
end
```

```
%Contorno direito
```

```
for i = 2*ny_p:ny_p:n_M-ny_p
```

```
    b(i) = TD/4 ;
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%Solução do sistema linear
```

```
I = eye(n_M);
D1 = I - M;
```

```

mat = mtimes(inv(D1), b');

%Ordenamento matricial dos valores de temperatura
k = 0;

for i = 1:nx_p
    for j = 1:ny_p
        k = k+1;
        Temp1(i,j) = mat(k);           %
    end
end

%Reescreve a matriz Temp para outras visualizações (para se adequar com o grid cartesiano)
k = 0;
for i = 1:nx_p
    k = nx_p - (i-1);
    for j = 1:ny_p
        Temp2(i,j) = Temp1(k,j);
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%visualizar resultado
x = 0:deltax:L;
y = 0:deltay:H;

figure(2);contourf(x,y,Temp2.*(Temp2<1e4),25);colorbar
xlabel('Distância em x [m]');
ylabel('Distância em y [m]');
title('Distribuição de Temperatura em Equilíbrio');

fprintf('\n');
fprintf('fim do procesamento! \n');

%Calcula tempo total de processamento
ttotal = cputime - t0;
fprintf('Tempo total: %f\n cputime',ttotal);

```