



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
FACULDADE DE ENGENHARIAS ELÉTRICA E BIOMÉDICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

JOÃO VICTOR CANCELA SOUSA

**PROJETOS DE CONTROLADORES DISCRETOS VIA *MODEL MATCHING*
USANDO AS CONFIGURAÇÕES DE REALIMENTAÇÃO UNITÁRIA, DE
DOIS PARÂMETROS E DE REALIMENTAÇÃO DE ENTRADA E SAÍDA DA
PLANTA**

BELÉM-PA

2025

JOÃO VICTOR CANCELA SOUSA

**PROJETOS DE CONTROLADORES DISCRETOS VIA *MODEL MATCHING*
USANDO AS CONFIGURAÇÕES DE REALIMENTAÇÃO UNITÁRIA, DE
DOIS PARÂMETROS E DE REALIMENTAÇÃO DE ENTRADA E SAÍDA DA
PLANTA**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao curso de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Pará, como requisito para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Orlando Fonseca Silva.

BELÉM-PA

2025

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe Patrícia, por todo apoio durante a minha graduação e incentivo ao longo desses anos.

Ao meu pai Enilson, por sempre me proporcionar uma educação de qualidade durante todos os anos de minha vida e me incentivar a estudar sempre.

A minha namorada Isabella, por sempre estar comigo nos momentos de dificuldade nos estudos e por me proporcionar momentos de alegria que me permitiram seguir em frente.

Agradeço ao Professor Orlando, por todo o auxílio, compreensão e disponibilidade durante a elaboração deste trabalho.

Por fim, agradeço a todos os meus amigos da Universidade que de alguma forma contribuíram para a minha formação acadêmica.

RESUMO

Este trabalho aborda o estudo, o projeto e a simulação de controladores discretos, utilizando o método *model matching*, com suas três configurações: entrada e saída da planta; realimentação unitária; e dois parâmetros. Os projetos foram desenvolvidos para controlar quatro modelos de plantas com dinâmicas variadas, sendo três provenientes de sistemas reais (sistema *Ball and Beam*, sistema *ArduRAJ* e sistema Pêndulo Amortecido) e um modelo matemático de Fase não Mínima, cujas funções de transferência foram extraídas da literatura. Os controladores projetados foram avaliados por meio de simulações computacionais realizadas no *software* Scilab. A análise de desempenho consistiu em comparar a resposta de malha fechada com a resposta de um modelo de referência que, pelo método *model matching*, tem de ser idênticas, considerando como referência um degrau unitário, bem como a capacidade ou não de rejeição de uma perturbação externa também do tipo degrau. Para cada uma das quatro plantas, confirmou-se que, de fato, as mesmas equações e algoritmos utilizados para a obtenção de controladores contínuos pelo *model mathing* podem ser utilizados para se obter controladores discretos. As técnicas de controle aplicadas às quatro plantas apresentaram resultados satisfatórios quando comparadas ao modelo de referência.

Palavras-chave: 1. Sistemas de controle. 2. Modelo de referência. 3. *Model Matching*. 4. Controladores digitais.

ABSTRACT

This work addresses the study, design, and simulation of discrete controllers using the model matching method, with its three configurations: plant input-output, unity feedback, and two-parameter. The projects were developed to control four plant models with varied dynamics, three of which come from real systems (the Ball and Beam system, the ArduRAJ system, and the Damped Pendulum system) and one mathematical model of a non-minimum phase system, whose transfer functions were obtained from the literature. The designed controllers were evaluated through computer simulations carried out in the Scilab software. The performance analysis consisted of comparing the closed-loop response with the response of a reference model which, by the model matching method, must be identical, considering as reference a unit step input, as well as the ability (or inability) to reject an external disturbance also of the step type. For each of the four plants, it was confirmed that the same equations and algorithms used to obtain continuous controllers through model matching can, in fact, be applied to obtain discrete controllers. The control techniques applied to the four plants showed satisfactory results when compared to the reference model.

Keywords: 1. Control systems. 2. Reference model. 3. Model Matching. 4. Digital controllers.

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	8
1.1.	Conceitos Iniciais	8
1.2.	Motivação e Justificativa	8
1.3.	Objetivos	8
1.3.1	Objetivo Geral	8
1.3.2.	Objetivo Específico	8
1.4.	Estrutura do Trabalho	9
2.	SISTEMAS DISCRETOS E CONTROLE DIGITAL	10
2.1.	Controle por computador	10
2.2.	Equações de diferenças	12
2.3.	Transformada Z e Função de Transferência	12
2.4.	Equivalente Discreto e Período de amostragem	14
2.4.1	Sistema Ball and Beam	15
2.4.2	Sistema Arduino-Based Robot Arm Joint (<i>ArduRAJ</i>)	16
2.4.3	Sistema de Fase não Mínima	17
2.4.4	Pêndulo Amortecido	18
3.	MODEL MATCHING	21
3.1	Função de Transferência Implementável - $G_0(z)$	21
3.2	Configuração de Realimentação Unitária	22
3.3	Configuração de Dois Parâmetros da Planta	23
3.4	Configuração de Realimentação de Entrada e Saída da Planta	27
4.	PROJETO DOS CONTROLADORES	30
4.1	Projetos de Controladores para o Sistema <i>Ball and Beam</i>	30
4.1.1	Projeto Usando Realimentação Unitária	31
4.1.2	Projeto Usando Configuração de Dois Parâmetros	32
4.1.3	Projeto Usando Realimentação de Entrada e Saída	35
4.2	Projetos de Controladores para o Sistema <i>ArduRAJ</i>	41
4.2.1	Projeto Usando Realimentação Unitária	42
4.2.2	Projeto Usando Configuração de Dois Parâmetros da Planta	43
4.2.3	Projeto Usando Realimentação de Entrada e Saída	49

4.3	Projetos de Controladores para planta de Fase não Mínima	51
4.3.1	Projeto Usando Realimentação Unitária	52
4.3.2	Projeto Usando Configuração de Dois Parâmetros da Planta	54
4.3.3	Projeto Usando Realimentação de Entrada e Saída	56
4.4	Projetos de Controladores para planta: Pêndulo Amortecido	65
4.3.1	Projeto Usando Realimentação Unitária	66
4.3.2	Projeto Usando Configuração de Dois Parâmetros da Planta	68
4.3.3	Projeto Usando Realimentação de Entrada e Saída	70
5.	CONCLUSÃO	74
	REFERÊNCIAS	76
	APÊNDICE A – Equivalente Discreto do sistema <i>Ball and Beam</i> obtido via Scilab.....	77
	APÊNDICE B – Equivalente Discreto do sistema <i>ArduRAJ</i> obtido via Scilab.....	77
	APÊNDICE C – Equivalente Discreto do sistema Pêndulo Amortecido obtido via Scilab.....	77
	APÊNDICE D – Equivalente Discreto do sistema Fase não Mínima obtido via Scilab.....	77
	APÊNDICE E – Função de transferência de malha fechada, Y/R, da Planta <i>Ball and Beam</i>.....	78
	APÊNDICE F – Projeto por Configuração de Entrada e Saída para Planta <i>Ball and Beam</i>.....	80
	APÊNDICE G – Segunda tentativa para a Configuração de Entrada e Saída da Planta Fase não Mínima.....	82
	APÊNDICE H – Terceira tentativa para a Configuração de Entrada e Saída da Planta Fase não Mínima.....	83
	APÊNDICE I – Quarta tentativa para a Configuração de Entrada e Saída da Planta Fase não Mínima.....	86
	APÊNDICE J – Quinta tentativa para a Configuração de Entrada e Saída da Planta Fase não Mínima.....	87

1. INTRODUÇÃO

1.1. Conceitos Iniciais

Controles automáticos são essenciais em diversos sistemas como: veículos espaciais, sistemas robóticos, modernos sistemas de manufatura, operações industriais que envolvam o controle de temperatura, pressão, umidade, viscosidade etc. (OGATA, 2010).

O projeto de um controlador automático normalmente envolve duas etapas principais: a obtenção de um modelo matemático que descreva o comportamento dinâmico do sistema; e o desenvolvimento de um controlador que faça o sistema atender a um conjunto de especificações de desempenho previamente definidas.

Existem diferentes métodos para realizar o projeto de um controlador que, de uma maneira abrangente, podem ser divididos em métodos empíricos e analíticos. Nesse trabalho o método analítico para projeto de controladores denominado *model matching* é abordado.

O método *model matching* apresentado em Chen (1995) é dividido em três configurações distintas: realimentação unitária; entrada e saída da planta; e dois parâmetros. Ainda em Chen (1995), para o caso de controladores contínuos, cada uma das três configurações é bastante detalhada e vários exemplos são apresentados.

Em Cabral (2020) as três configurações do método *model matching* com controladores contínuos foram utilizadas para projetar controladores para as seguintes plantas com características dinâmicas bem distintas: o sistema *ball and beam*, *ArduRAJ* (Silva, 2018), pêndulo amortecido (Coelho, Jerônimo, Araújo 2019) e um modelo puramente matemático que corresponde a uma planta de Fase não Mínima (Silva, 2018).

Em relação a controladores discretos Chen (1995) afirma que os mesmos algoritmos existentes no *model matching* para o caso contínuo podem ser aplicados para se obter controladores discretos contudo, poucos exemplos são apresentados para o caso discreto, assim a seguir são apresentadas a motivação, justificativa e os objetivos geral e específicos desse trabalho.

1.2. Motivação e Justificativa

A grande motivação desse trabalho consiste em dar continuidade ao trabalho de Cabral (2020) visando produzir conhecimento sobre a técnica analítica denominada *model matching* para o projeto de controladores.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo geral

Em Cabral (2020) o projeto de controladores contínuos via *model matching* é apresentado. O objetivo geral deste trabalho consiste em aplicar a técnica *model matching* visando a obtenção de controladores discretos.

1.3.2. Objetivos específicos

Como objetivos específicos têm-se:

- O projeto de controladores discretos usando a técnica analítica *model matching*, em suas três configurações possíveis: realimentação unitária; dois parâmetros; e entrada e saída da planta.

- Avaliar o desempenho dos controladores discretos projetados via simulação.

- Analisar a capacidade de rejeição de distúrbio externo

1.4. Estrutura do Trabalho

Além desse primeiro capítulo, o Capítulo 2 contém conceitos básicos de sistemas discretos e são apresentados os modelos de plantas utilizadas. O Capítulo 3 apresenta o conceito de função de transferência implementável, o método *model matching* e as três configurações de controle utilizadas. No Capítulo 4 são apresentados os projetos dos controladores discretos para cada planta e os resultados das simulações obtidas. E no Capítulo 5 é apresentada, a conclusão onde constam os principais resultados obtidos e as propostas para trabalhos futuros.

2. SISTEMAS DISCRETOS E CONTROLE DIGITAL

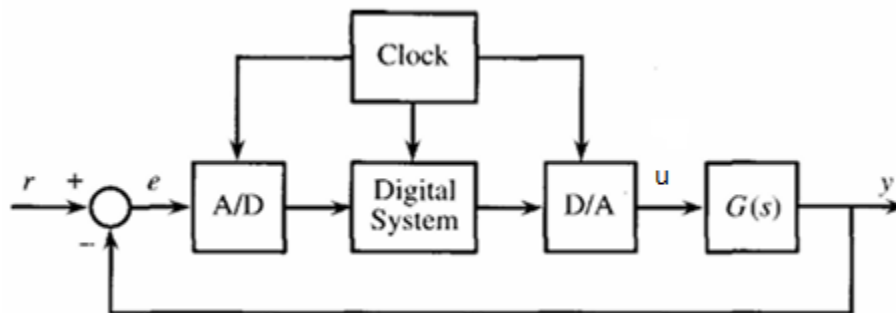
Neste capítulo, apresentam-se alguns conceitos importantes relacionados a sistemas discretos e controle digital. Esses conceitos são necessários para o projeto de controladores discretos pelo uso da técnica *model matching*.

Também são apresentados os modelos matemáticos das plantas para as quais as três configurações de controle da técnica *model matching*: realimentação unitária; dois parâmetros; e entrada e saída da planta. Serão desenvolvidas em sua versão discreta e avaliadas no Capítulo 4.

2.1 Controle por computador

Atualmente, todos os sistemas de controle que são implementados, utilizam controle por computador, noutras palavras utilizam controle digital (ASTROM, 1997). A Figura 2.1 ilustra esquematicamente um sistema de controle digital.

Figura 2.1: Sistema de controle digital.



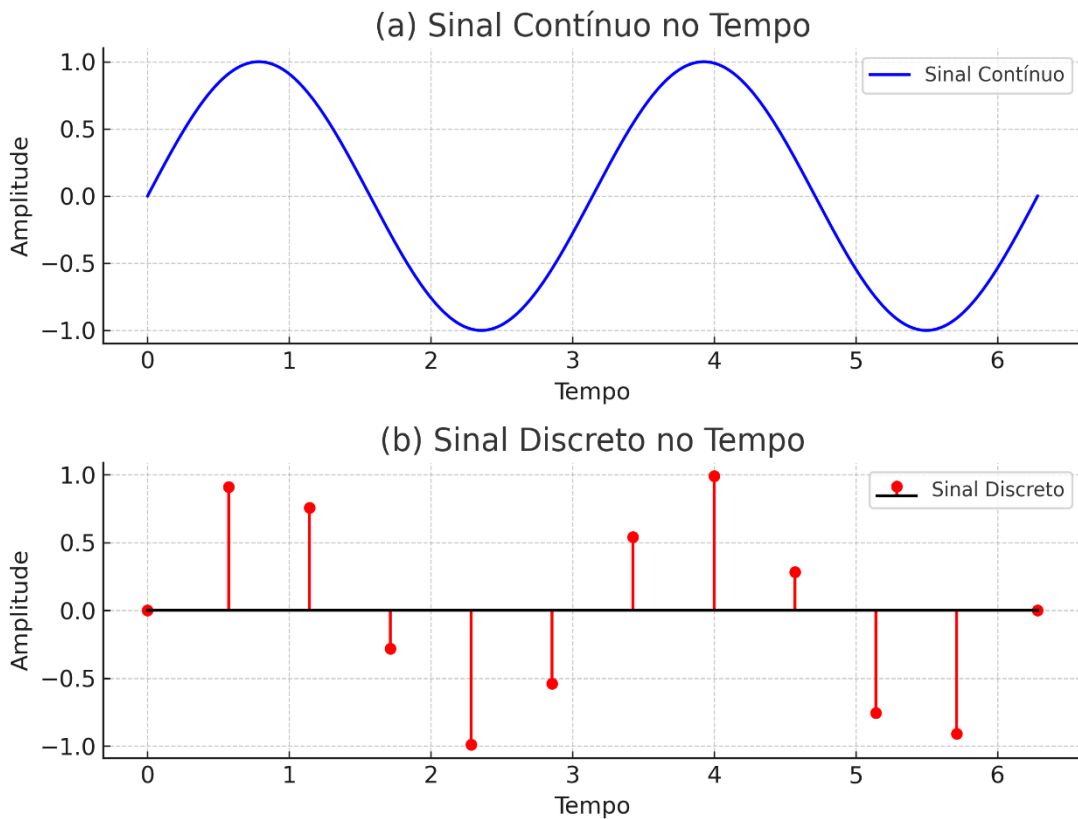
Fonte: Adaptado de Chen (1995).

Na Figura 2.1, $G(s)$ é a planta a ser controlada que, normalmente, é um sistema dinâmico contínuo no tempo e cuja saída ou resposta y deve ser adequada de acordo com algum critério de projeto, o que exige a determinação de uma ação de controle u que garanta que a resposta y consiga seguir a entrada de referência, r , independentemente de distúrbios internos ou externos ou da presença de ruído proveniente do sensor com uma magnitude da ação de controle u dentro de limites aceitáveis.

Observa-se a presença tanto de sinais contínuos relacionados com a planta, como também de sinais discretos relacionados com o controlador.

Para garantir que os sinais de diferentes naturezas sejam compatíveis, utilizam-se os conversores analógico-digital (A/D) e digital-analógico (D/A). O conversor A/D captura amostras da saída da planta, que é um sinal contínuo, ou seja, definido para qualquer instante de tempo, obtendo um sinal discreto que só é definido para instantes de tempo específicos dados por kT_s , com $k = 0, 1, 2, \dots$ e T_s é um número real fixo denominado período de amostragem. Seu inverso é denominado de frequência de amostragem $f_s = \frac{1}{T_s}$. A Figura 2.2 ilustra um sinal contínuo e um sinal discreto.

Figura 2.2 – Figura: (a) Sinal contínuo no tempo e (b) sinal discreto no tempo.



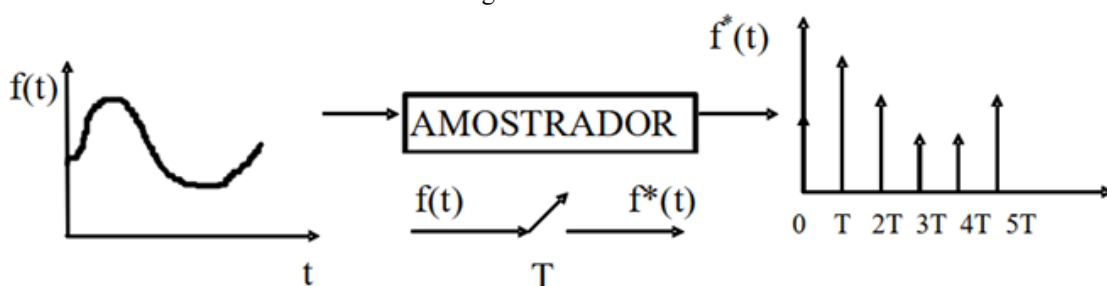
Fonte: Elaboração própria.

O sistema digital ou controlador digital lê os valores das amostras do sinal de erro $e(kT_s)$ e é responsável por calcular a ação de controle $u(kT_s)$, baseado no algoritmo implementado em seu programa.

O conversor D/A converte o sinal digital $u(kT_s)$ em um sinal analógico $u(t)$ e o envia para a entrada da planta. O principal componente desse conversor é o segurador de ordem zero (ZOH, do inglês Zero Order Holder), que mantém o valor da amostra constante a cada T_s .

O conversor A/D converte um sinal analógico $y(t)$ em um sinal digital $y(kT_s)$. Seu componente principal é um amostrador, uma chave eletrônica, que realiza a amostragem do sinal contínuo $y(t)$, produzindo um sinal amostrado, $y(kT_s)$.

Figura 2.3 – Amostrador.



Fonte: Adaptado de Chen (1995).

O *clock* ou relógio gera um pulso a cada T_s segundos e nesse intervalo de tempo o conversor A/D envia um valor para o computador, $e(kT_s)$, que calcula a ação de controle e então envia um novo valor, $u(kT_s)$, para o conversor D/A.

A planta sendo contínua é matematicamente representada por uma equação diferencial enquanto o controlador será representado por uma equação de diferenças.

2.2 Equações de diferenças

Equações de diferenças são utilizadas para representar matematicamente a dinâmica de um sistema cuja entrada e saída só ocorrem em intervalos de tempo discretos. Elas descrevem como a saída de um sistema em um instante de tempo depende de valores anteriores da entrada aplicada ao sistema.

Considerando a Figura 2.1 onde $e(kT_s)$ e $u(kT_s)$ são a entrada e a saída discretas do controlador e sendo este implementado num computador digital, com memória, a saída no instante kT_s pode ser calculada por uma função f , conforme a Equação (2.01).

$$u(kT_s) = f[u(kT_s - T_s), u(kT_s - 2T_s), \dots, u(kT_s - nT_s), e(kT_s), e(kT_s - T_s), e(kT_s - 2T_s), \dots, e(kT_s - mT_s)] \quad (2.01)$$

Sendo $f(\cdot)$ uma função linear, invariante no tempo e causal ($n \geq m$), resulta na Equação (2.02), denominada equação de recorrência, recursiva ou de diferenças, onde os vários coeficientes a e b são números reais:

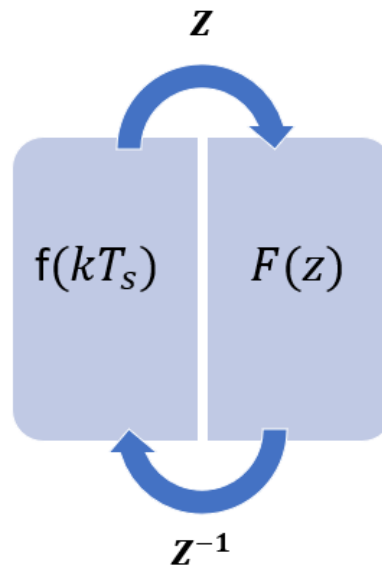
$$u(kT_s) = a_1 u(kT_s - T_s) + a_2 u(kT_s - 2T_s) + \dots + a_n u(kT_s - nT_s) + b_0 e(kT_s) + b_1 e(kT_s - T_s) + b_2 e(kT_s - 2T_s) + \dots + b_m e(kT_s - mT_s) \quad (2.02)$$

Para resolver equações de diferenças tem-se a transformada Z.

2.3 Transformada Z e Função de Transferência

A transformada Z unilateral é uma transformação que mapeia uma sequência *semi-infinita* de valores, denotada como $f(kT_s)$, definidos em instantes discretos de tempo múltiplos de T_s , para uma função de uma variável complexa, representada como $F(z)$.

Figura 2.4 – Mapeamento da transformada Z.



Fonte: Elaboração própria.

De maneira mais detalhada, a sequência $f(kT_s)$ é composta por um número infinito de valores, com k representando o índice da sequência e T_s o intervalo de amostragem entre os instantes discretos. A transformada Z transforma essa sequência de valores discretos em uma função contínua de uma variável complexa z .

Esse processo de mapeamento da sequência $f(kT_s)$ para a função $F(z)$ é crucial, pois permite que o comportamento da sequência no domínio do tempo seja analisado no domínio da variável complexa z . Isso facilita a resolução de equações de diferenças ou a análise de sistemas de controle discretos, além de permitir que se identifiquem características como estabilidade e resposta de sistemas.

A transformada Z unilateral, em particular, é utilizada para sequências que começam em um instante de tempo específico que não incluem termos negativos da sequência. Essa abordagem unilateral é útil em contextos em que o sistema começa a operar em um certo instante e não tem um comportamento anterior ao início da sequência.

A transformada Z é definida pela Equação (2.03) para um dado sinal discreto no tempo $f(kT_s)$, com $k = 0, 1, \dots, \infty$.

$$Z[f(kT)] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot z^{-k} \quad (2.03)$$

A aplicação da transformada Z na equação de diferenças da Equação (2.02) resulta na equação algébrica da Equação (2.04) que pode ser reescrita na forma da Equação (2.05) denominada função de transferência de um sistema discreto.

$$U(z) = a_1 z^{-1} U(z) + a_2 z^{-2} U(z) + \dots + a_n z^{-n} U(z) + b_0 E(z) + b_1 z^{-1} E(z) + \dots + b_m z^{-m} E(z) \quad (2.04)$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (2.05)$$

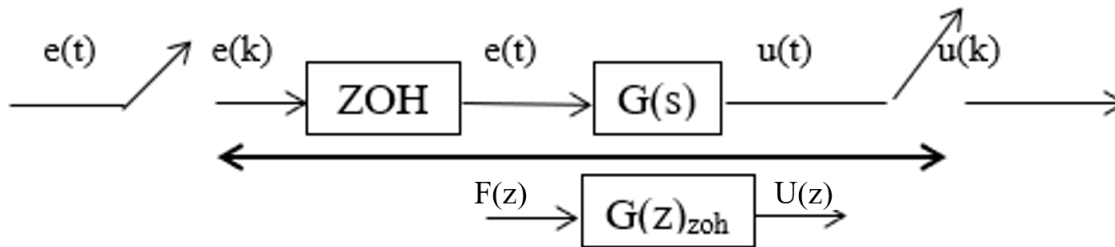
As raízes do polinômio do numerador da $G(z)$ são denominadas zeros e as raízes do polinômio do denominador denominadas polos.

2.4 Equivalente Discreto e Período de Amostragem

Um segurador de ordem zero ZOH mantém constante o valor da amostra, $e(kT_s)$, para a reconstrução de um sinal contínuo, $e(t)$, durante um período de amostragem T_s .

A filosofia da aproximação por ZOH é determinar um sistema discreto $G(z)$ que, com uma entrada consistindo em amostras $e(kT_s)$, do sinal contínuo $e(t)$, tenha uma saída que aproxime a saída discretizada de $G(s)$, $u(kT_s)$, cuja entrada é o sinal contínuo $e(t)$, Figura 2.5.

Figura 2.5: Equivalente discreto ZOH



Fonte: Elaboração própria.

Assim, a função de transferência discreta de uma planta precedida por um ZOH ou equivalente discreto ZOH é obtida analiticamente pela Equação (2.06). Contudo, nesse trabalho será utilizada função `ss2tf(dscr(G, T_s))` do *software* Scilab (SCILAB, 2025) para a obtenção dela, sendo $G(s)$ a função de transferência do sistema contínuo e T_s o período de amostragem conforme descrito na próxima seção.

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{G(s)}{s} \right] \quad (2.06)$$

Independentemente do método a ser utilizado no projeto do controlador digital, a escolha adequada do período de amostragem é fundamental. Esta, por sua vez, está intimamente relacionada à dinâmica da planta. Dentre os critérios para especificação tem-se adotou-se nesse trabalho que T_s seja de 5 a 10 vezes menor que a menor constante de tempo do sistema, Inequação (2.07).

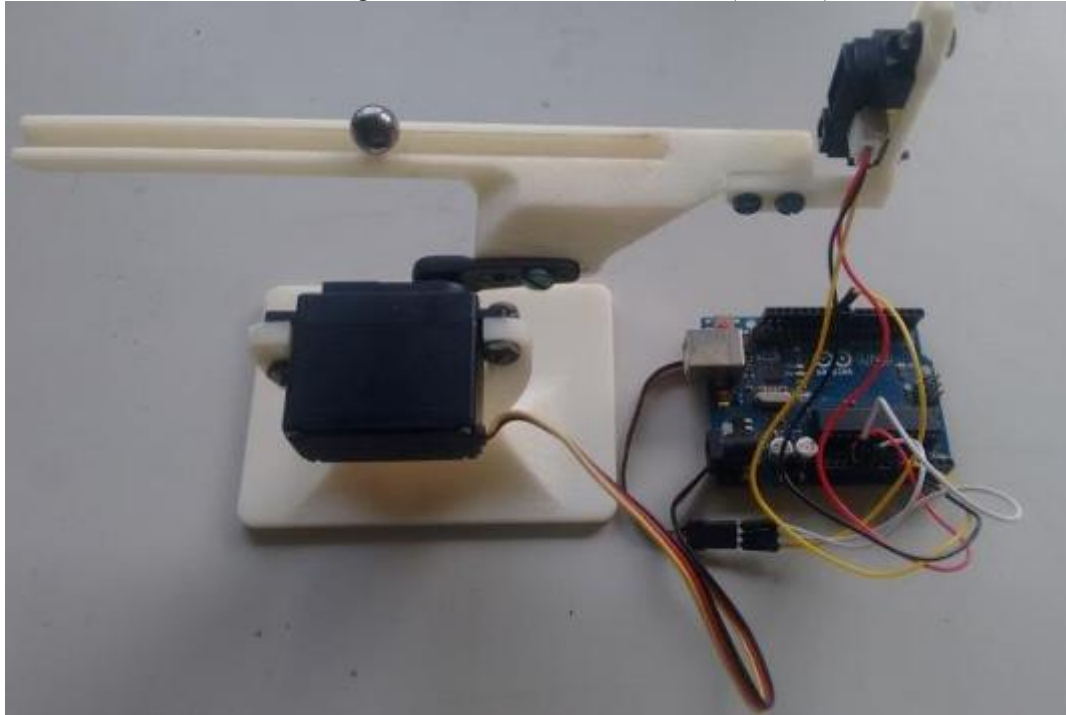
$$\frac{\tau_{\min}}{10} \leq T_s \leq \frac{\tau_{\min}}{5} \quad (2.07)$$

2.4.1 Sistema *Ball and Beam*

O Sistema *Ball and Beam* é bastante conhecido na literatura, devido ao fato das técnicas de controle que são aplicadas no mesmo serem semelhantes aos das áreas de aviação para controle de voo e no campo espacial. (SONI e STHANS, 2018).

Consiste numa barra horizontal, livre para rotacionar via acoplamento com um servo motor que está conectado a um microcontrolador *Arduino Uno R3*, e este por sua vez, a um sensor do tipo *sharp* e uma pequena bola de metal, ilustrado na Figura 2.6.

Figura 2.6 – Sistema *Ball and Beam* (LACOS).



Fonte: Silva (2018).

O objetivo nesse sistema é controlar a posição $y(t)$ da bola de metal na barra horizontal, a partir de uma tensão de armadura $u(t)$ aplicada ao servo motor que promove o deslocamento angular da barra. A função de transferência que relaciona tais variáveis é dada na Equação (2.08) (SILVA, 2018; SONI e SATHANS, 2018).

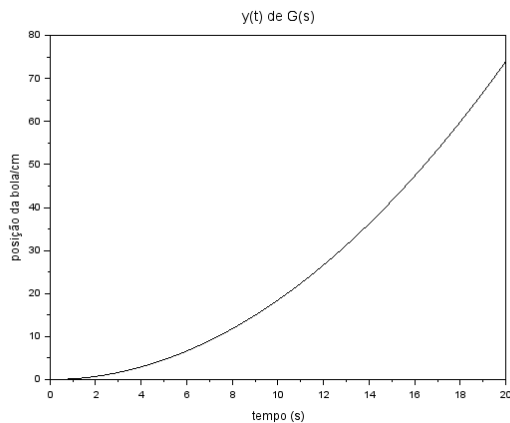
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0,37}{s^2} \quad (2.08)$$

O equivalente discreto ZOH, $G(z)$ da função de transferência $G(s)$ do sistema *Ball and Beam* é obtido através do *software* Scilab utilizando a função $ss2tf(dscr(G, T_s))$, o código utilizado é disponibilizado no APÊNDICE A e é dado na Equação (2.09).

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{0,0000185(1+z)}{1-2z+z^2} \quad (2.09)$$

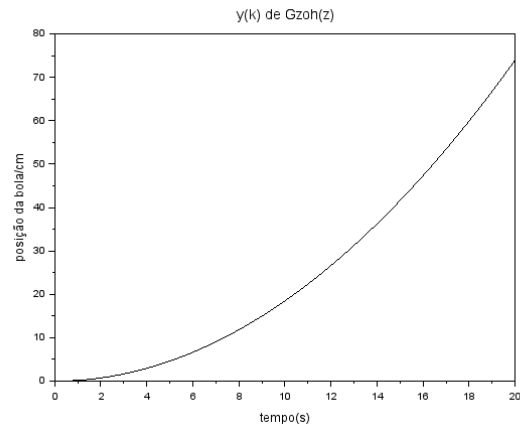
A Figura 2.7 ilustra as respostas ao degrau dos sistemas das Equações (2.08) e (2.09).

Figura 2.7 (a) – Resposta ao degrau do *Ball and Beam* em malha aberta
Contínuo, $G(s)$



Fonte: Elaboração própria.

Figura 2.7 (b) – Resposta ao degrau do *Ball and Beam* em malha aberta
Discreto, $G(z)$



Fonte: Elaboração própria.

Observa-se que os resultados são os mesmos para as duas funções de transferência e que o sistema é instável.

2.4.2 Sistema Arduino Based Robot Arm Joint (*ArduRAJ*)

O *ArduRAJ* é uma planta didática portátil que emula um braço manipulador controlado por um servo motor com um potenciômetro conectado ao seu eixo que mede a posição angular do braço. O sistema possui um Arduino Nano R3 com funções embarcadas (SILVEIRA, 2010). A Figura 2.8 mostra o sistema *ArduRAJ*.

Figura 2.8 – Protótipo *ArduRAJ* (LACOS).



Fonte: Silva (2018).

O modelo linear contínuo do sistema *ArduRAJ* é dado pela função de transferência da Equação (2.10), onde $Y(s)$ e $U(s)$ são respectivamente, as transformadas de Laplace da posição angular do servo motor e a tensão de entrada (SILVA, 2018).

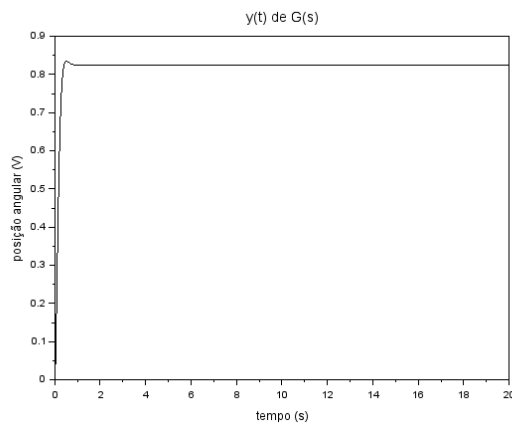
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0,001167s + 92,57}{s^2 + 17,3s + 112,2} \quad (2.10)$$

O equivalente discreto ZOH, $G(z)$, da função de transferência $G(s)$ do sistema *ArduRAJ* é obtido através do *software* Scilab usando a função $ss2tf(dscr(G, T_s))$, o código utilizado é disponibilizado no APÊNDICE B e é dado na Equação (2.11).

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Nzoh(z)}{Dzoh(z)} = \frac{0,0041132 + 0,0043794z}{0,8411376 - 1,8308441z + z^2} \quad (2.11)$$

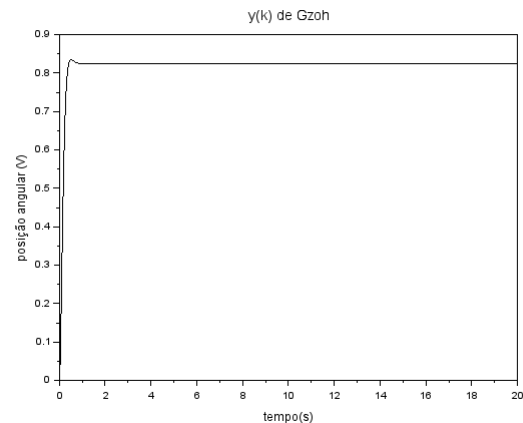
A Figura 2.9 ilustra as respostas ao degrau dos sistemas das Equações (2.10) e (2.11).

Figura 2.9 (a) – Resposta ao degrau do sistema *ArduRAJ* em malha aberta
Contínuo, $G(s)$



Fonte: Elaboração própria.

Figura 2.9 (b) – Resposta ao degrau do sistema *ArduRAJ* em malha aberta
Discreto, $G(z)$



Fonte: Elaboração própria.

Percebe-se que os resultados são os mesmos para as duas funções de transferência. Sobre o desempenho, o sistema apresenta uma resposta muito rápida (tempo de subida próximo de 0,4 segundos), contudo, tem elevado erro em regime permanente (aproximadamente 18 %).

2.4.3 Sistema de Fase não Mínima

Um sistema de Fase não Mínima tem como característica uma função de transferência com pelo menos um zero no semiplano direito do plano s . Utilizou-se o mesmo sistema apresentado por Silva (2018), expresso pela Equação (2.12), onde $Y(s)$ e $U(s)$ representam as transformadas de Laplace da saída e da entrada do sistema, respectivamente.

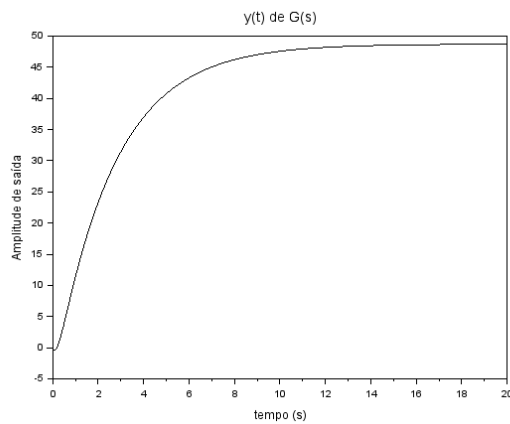
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-9,8167s + 92,57}{s^2 + 5,3s + 1,9} \quad (2.12)$$

O equivalente discreto ZOH, $G(z)$, da função de transferência $G(s)$ do sistema de Fase não Mínima é obtido através do *software* Scilab conforme o APÊNDICE D e é dado pela Equação (2.13).

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{0,100076 - 0,0910602z}{0,94838 - 1,948195z + z^2} \quad (2.13)$$

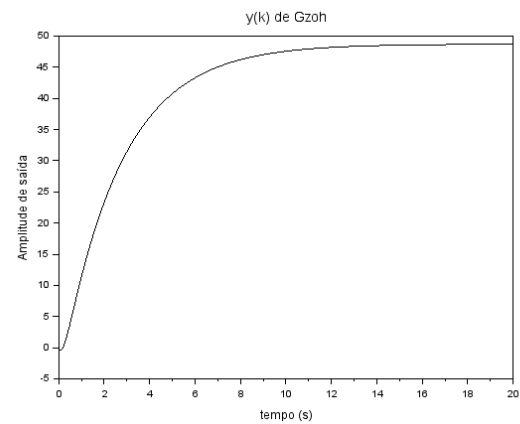
A Figura 2.12 ilustra as respostas ao degrau dos sistemas das Equações (2.12) e (2.13).

Figura 2.10 (a) – Resposta ao degrau do sistema
Fase não Mínima em malha aberta
Contínuo, $G(s)$



Fonte: Elaboração própria.

Figura 2.10 (b) – Resposta ao degrau do sistema
Fase não Mínima em malha aberta
Discreto, $G(z)$



Fonte: Elaboração própria.

Percebe-se que os resultados são os mesmos para e observa-se que a resposta inicialmente decresce e só depois cresce, característica de um sistema de fase não mínima, com elevado erro em regime permanente (470 %) e tempo de estabilização que pode ser considerado alto (8 segundos).

2.4.4 Pêndulo Amortecido

O processo denominado pêndulo amortecido (PAM), ilustrado na Figura 2.11, consiste em uma barra vertical equipada com um potenciômetro para medir sua posição angular, sendo que, na extremidade da barra, há um motor de corrente contínua. Quando é aplicada uma tensão de entrada, a posição angular da barra é alterada. O objetivo é controlar a posição da barra para atingir diferentes valores de referência, assegurando que ocorra sem oscilações (COELHO, JERÔNIMO e ARAÚJO, 2019).

Figura 2.11 – Pêndulo Amortecido.



Fonte: Coelho, Jerônimo e Araújo (2019).

Um modelo linear obtido é dado pela Equação (2.14).

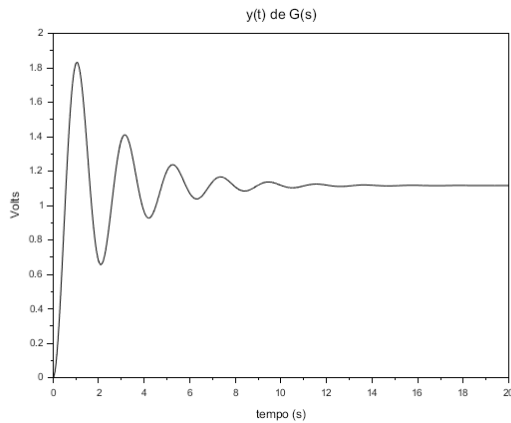
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10,19}{s^2 + 0,8451s + 9,131} \quad (2.14)$$

O equivalente discreto ZOH, $G(z)$, da função de transferência $G(s)$ do sistema PAM é obtido através do *software* Scilab conforme o APÊNDICE C e é dado pela Equação (2.15).

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{0,0005066 + 0,000508z}{0,9915846 - 1,9906754z + z^2} \quad (2.15)$$

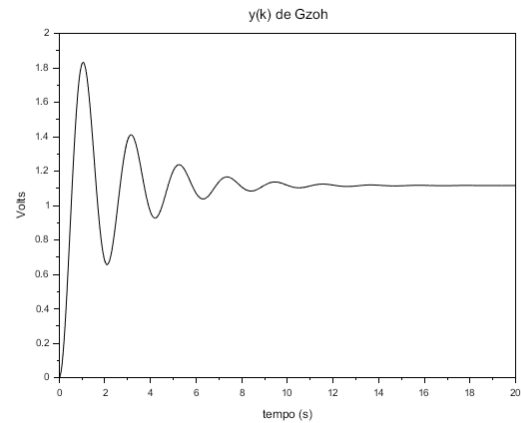
A Figura 2.12 ilustra as respostas ao degrau dos sistemas das Equações (2.14) e (2.15).

Figura 2.12 (a) – Resposta ao degrau do sistema do Pêndulo Amortecido em malha aberta Contínuo, $G(s)$



Fonte: Elaboração própria.

Figura 2.12 (b) – Resposta ao degrau do sistema do Pêndulo Amortecido em malha aberta Discreto, $G(z)$



Fonte: Elaboração própria.

Mais uma vez, os resultados são os mesmos para as duas funções de transferência. Sobre o desempenho a resposta tem um sobressinal indesejável de quase 100%, um erro de regime permanente elevado em torno de 12,5% e é bastante oscilatória.

3. MODEL MATCHING

Este capítulo aborda os conceitos relacionados a um modelo de referência implementável, bem como as três configurações de controle abordadas neste estudo: entrada e saída da planta; realimentação unitária; e dois parâmetros. Voltados para controladores discretos.

Cada uma dessas configurações é avaliada quanto à sua capacidade de assegurar que o controlador discreto projetado possibilite que o sistema em malha fechada apresente um comportamento equivalente ao de um modelo de referência previamente definido.

3.1 Função de Transferência implementável - $G_0(z)$

De acordo com Chen (1995), o posicionamento de polos e o ajuste de modelos, para sistemas analógicos, podem ser aplicados diretamente a sistemas digitais. Dessa forma, assim como no caso analógico, são necessárias as seguintes condições para os sistemas digitais:

1. Todos os controladores utilizados devem ter função de transferência racional própria.
2. Evitar amplificação de ruído de alta frequência e cancelamento de polos e zeros instáveis.
3. O sistema resultante tem de ser totalmente estável.
4. Todos os caminhos que liguem o sinal de referência (r) com o sinal de saída (y) passam pela planta.

Sendo a função de transferência discreta da planta dada pela Equação (3.01), uma função de transferência geral (modelo de referência) dada pela Equação (3.02), é dita ser implementável se existir uma configuração de controle tal que $G_0(z)$ possa ser implementada sem violar nenhuma das quatro restrições citadas anteriormente.

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (3.01)$$

$$G_0(z) = \frac{N_0(z)}{D_0(z)} \quad (3.02)$$

Essa definição é idêntica ao caso analógico. O Teorema 1 estabelece condições necessárias e suficientes para saber se uma função de transferência é ou não implementável e implica no Corolário 2 (CHEN, 1995):

TEOREMA 1 Para uma planta com função de transferência própria definida por $G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, então $G_0(z)$ é implementável se e somente se $G_0(z)$ e $T(z)$ são próprias e estáveis, sendo $T(z)$ dada na Equação (3.03).

$$T(z) = \frac{G_0(z)}{G(z)} \quad (3.03)$$

COROLÁRIO 1 Sendo uma planta com função de transferência própria $G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$.

Então $G_0(z) = \frac{N_0(z)}{D_0(z)}$ é implementável se e somente se:

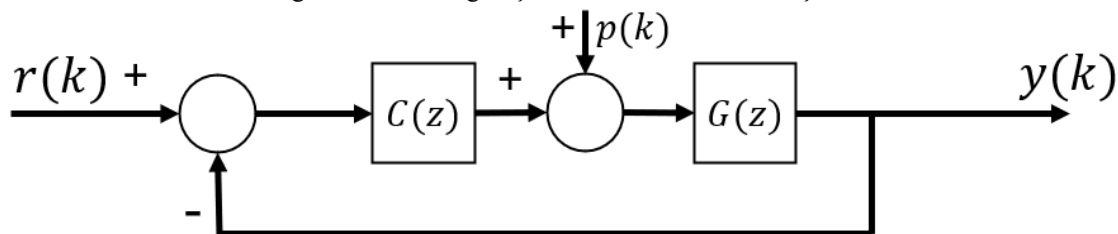
1. grau de $D_0(z)$ – grau de $N_0(z) \geq$ grau de $D(z)$ – grau de $N(z)$ (desigualdade de excesso de polos e zeros).
2. Todos os zeros de $N(z)$ pertencentes ao círculo de raio unitário fechado ou fora deste no plano z tem que estar contidos em $N_0(z)$ (retenção de zeros de fase não mínima).
3. Todas as raízes do polinômio $D_0(z)$ tem de estar dentro do círculo de raio unitário no plano z ($G_0(z)$ é estável). Ou seja, $D_0(z)$ é um polinômio de Hurwitz¹.

Dessa maneira, nota-se que os zeros de $G(z)$ pertencentes ao círculo de raio unitário fechado ou fora deste no plano z , denominados de zeros de fase não mínima, acabam por impor restrições a implementação de uma $G_0(z)$, enquanto os zeros de $G(z)$ pertencentes ao interior do círculo de raio unitário e ao interior da região desejada para os polos no plano z bem como a existência de polos instáveis de $G(z)$ não.

3.2 Configuração de Realimentação Unitária

A Figura 3.1 ilustra o diagrama de blocos da configuração de realimentação unitária sendo: $G(z)$ e $C(z)$ a função de transferência da planta e do controlador a ser projetado, respectivamente, com sinal de referência $r(k)$, resposta do sistema em malha fechada $y(k)$ e perturbação externa $p(k)$.

Figura 3.1 – Configuração discreta de Realimentação Unitária.



Fonte: Adaptado de Chen (1995).

Considerando que se deseje que a função de transferência de malha fechada do sistema seja igual a uma função de transferência implementável $G_0(z)$, tem-se então a Equação (3.04), resultando que o controlador $C(z)$ será obtido pela Equação (3.05)

$$G_0(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} \quad (3.04)$$

$$C(z) = \frac{G_0(z)}{G(z)(1 - G_0(z))} \quad (3.05)$$

¹ Um polinômio discreto é chamado de Hurwitz quando as raízes estão dentro do círculo unitário no plano z .

A configuração de controle por realimentação unitária é de aplicação prática, pois permite determinar o controlador $C(z)$ por meio de uma equação específica. No entanto, essa abordagem apresenta limitações, já que a obtenção da igualdade desejada na Equação (3.04) geralmente exige o cancelamento de polos e zeros. O problema é que o projetista não tem controle sobre quais desses elementos serão cancelados, pois isso depende diretamente da função de transferência da planta, $G(z)$.

Se a função $G(z)$ apresentar polos instáveis, isto é, polos localizados sobre ou fora do círculo de raio unitário no plano z , esses polos também serão cancelados no processo, visto que a função de referência $G_0(z)$ precisa, obrigatoriamente, ser estável (conforme estabelece o Teorema 1). No entanto, cancelar polos instáveis é indesejável em sistemas de controle, pois, na realidade, esses polos não desaparecem, mas permanecem "ocultos" dentro da estrutura de $G_0(z)$. Isso significa que, se houver uma perturbação no sistema o que é comum na prática, a resposta do sistema à perturbação ainda refletirá a presença desses polos instáveis. Como resultado, mesmo uma perturbação pequena pode gerar uma saída que cresce indefinidamente. Por essa razão, a configuração de realimentação unitária não é adequada quando se deseja obter um modelo de referência $G_0(z)$ em plantas com polos instáveis.

3.3 Configuração de Dois Parâmetros da Planta

Segundo Chen (1995), a configuração de dois parâmetros pode ser usada para obter qualquer modelo de referência $G_0(z)$ implementável. Da Figura 3.1, a transformada de Laplace do sinal de atuação pode ser escrita conforme a Equação (3.06).

$$U(z) = C(z)(R(z) - Y(z)) = C(z)R(z) - C(z)Y(z) \quad (3.06)$$

Nota-se que o mesmo controlador é aplicado à entrada de referência e à saída da planta gerando o sinal de atuação. Generalizando a Equação (3.06) com controladores distintos, têm-se a Equação (3.07).

$$U(z) = C_1(z)R(z) - C_2(z)Y(z) \quad (3.07)$$

Onde $C_1(z)$ e $C_2(z)$ são denominados controlador de *feedforward* e de *feedback*, respectivamente (CHEN,1995). Sendo tais controladores representados pelas Equações (3.08) e (3.09), onde $L(z)$, $M(z)$, $A_1(z)$ e $A_2(z)$ são polinômios. Mesmo que $A_1(z) = A_2(z) = A(z)$, ainda é possível obter qualquer modelo de referência $G_0(z)$ implementável. Desta forma, os controladores podem ser reescritos pelas Equações (3.10) e (3.11).

$$C_1(z) = \frac{L(z)}{A_1(z)} \quad (3.08)$$

$$C_2(z) = \frac{M(z)}{A_2(z)} \quad (3.09)$$

$$C_1(z) = \frac{L(z)}{A(z)} \quad (3.10)$$

$$C_2(z) = \frac{M(z)}{A(z)} \quad (3.11)$$

Substituindo as Equações (3.10) e (3.11) na Equação (3.07) e reescrevendo em forma de matriz, tem-se a Equação (3.12).

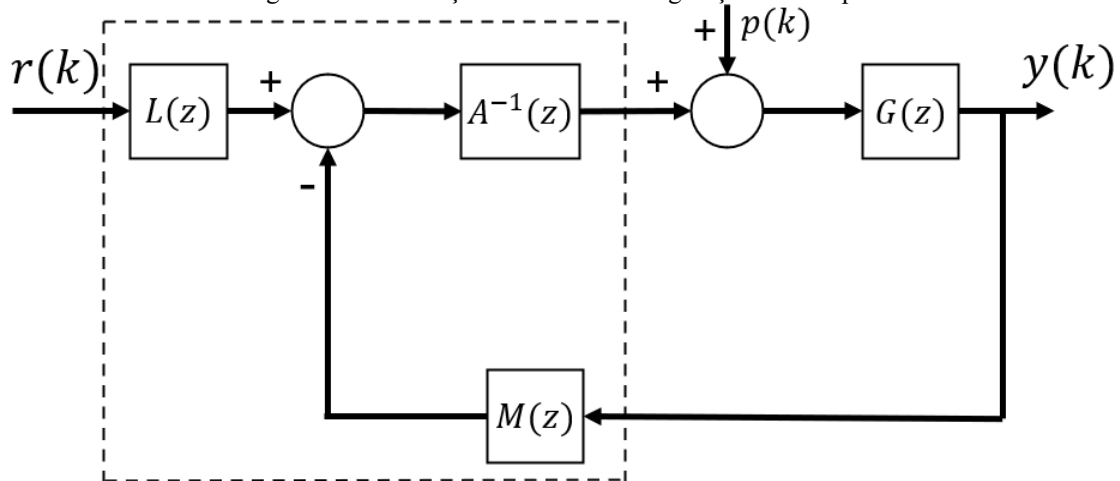
$$U(z) = \frac{L(z)}{A(z)}R(z) - \frac{M(z)}{A(z)}Y(z) = \left[\frac{L(z)}{A(z)} - \frac{M(z)}{A(z)} \right] \begin{bmatrix} R(z) \\ Y(z) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Desta forma, o controlador $C(z)$ é definido pela Equação (3.13).

$$C(z) = [C_1(z) \quad C_2(z)] = \left[\frac{L(z)}{A(z)} - \frac{M(z)}{A(z)} \right] \quad (3.13)$$

O diagrama de blocos da Figura 3.2 ilustra os controladores de *feedforward* e de *feedback*. Essa configuração é denominada de controlador de dois parâmetros, com sinal de referência $r(k)$, resposta do sistema em malha fechada $y(k)$ e perturbação externa $p(k)$. Ela é muito conveniente de ser implementada, pois não apresenta cancelamento de polos e zeros instáveis, fazendo com que o sistema geral seja estável (CHEN, 1995).

Figura 3.2 – Ilustração discreta da configuração de dois parâmetros.



Fonte: Adaptado de Chen (1995).

A partir da Figura 3.2, a função de transferência de $r(k)$ para $y(k)$ é dada pela Equação (3.14).

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{L(z)A^{-1}(z)G(z)}{1 + A^{-1}(z)M(z)G(z)} \quad (3.14)$$

Substituindo $G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ e multiplicando por $\frac{A(z)D(z)}{A(z)D(z)}$ resulta na Equação (3.15).

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{L(z)N(z)}{A(z)D(z) + M(z)N(z)} \quad (3.15)$$

Essa configuração pode ser usada para se obter qualquer modelo de referência $G_0(z)$ implementável. Apresenta-se a seguir os passos para a obtenção dos controladores para o caso de uma $G(z)$ estritamente própria de acordo com (CHEN, 1995).

Problema: Dada uma $G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, de maneira que os polinômios $N(z)$ e $D(z)$ são coprimos, ou seja, não possuem nenhum divisor comum além do 1. Além disso, o grau de $N(z) <$ grau de $D(z)$, onde o grau de $D(z) = n$ ($G(z)$ é estritamente própria), e dada uma $G_0(z) = \frac{N_0(z)}{D_0(z)}$ implementável, obter $\frac{L(z)}{A(z)}$ e $\frac{M(z)}{A(z)}$ próprias tal que a Equação (3.16) a seguir seja satisfeita.

$$G_0(z) = \frac{N_0(z)}{D_0(z)} = \frac{L(z)N(z)}{A(z)D(z) + M(z)N(z)} \quad (3.16)$$

Procedimento:

Primeiro passo: Calcular $\frac{G_0(z)}{N(z)}$ de acordo com a Equação (3.17).

$$\frac{G_0(z)}{N(z)} = \frac{N_0}{D_0(z)N(z)} =: \frac{N_p(z)}{D_p(z)} \quad (3.17)$$

De maneira que os fatores comuns entre os termos $N_0(z)$ e $N(z)$ devem ser simplificados de forma que $N_p(z)$ e $D_p(z)$ sejam coprimos (não tem fator comum entre si).

A Equação (3.16) é reescrita e igualada a Equação (3.17) resultando na Equação (3.18).

$$G_0(z) = \frac{N_p(z)N(z)}{D_p(z)} =: \frac{L(z)N(z)}{A(z)D(z) + M(z)N(z)} \quad (3.18)$$

Ressalta-se que o polinômio $N_p(z)$ for igual ao polinômio $L(z)$ os controladores obtidos, em geral, serão impróprios. Dessa maneira, são necessárias mais manipulações para encontrar controladores próprios.

Segundo passo: Reescrever a Equação (3.18) inserindo um polinômio de Hurwitz $\overline{D}_p(z)$ arbitrário, conforme a Equação (3.19).

$$G_0(z) = \frac{N(z)[N_p(z)\overline{D}_p(z)]}{D_p(z)\overline{D}_p(z)} = \frac{L(z)N(z)}{A(z)D(z) + M(z)N(z)} \quad (3.19)$$

Observa-se que o grau de $D_p(z)\overline{D}_p(z)$ é pelo menos $2n - 1$, ou seja, definindo o grau de $D_p(z)$ como p , ou seja, grau de $D_p(z) := p$, o grau de $\overline{D}_p(z)$ é pelo menos $2n - 1 - p$ e como $\overline{D}_p(z)$ deve ser cancelado, então suas raízes devem estar localizadas em uma região aceitável de cancelamento de polos e zeros (dentro do círculo de raio unitário no plano z).

É válido ressaltar que a escolha de $\overline{D}_p(z)$ não altera a propriedade de rastreamento e nem a magnitude do sinal de atuação do sistema, mas afeta as propriedades de robustez e rejeição a perturbação (CHEN,1995).

Percebe-se que o polinômio $L(z)$ é dado pela Equação (3.20) e os polinômios $A(z)$ e $M(z)$ são obtidos pela Equação (3.21).

$$L(z) = N_p(z)\overline{D}_p(z) \quad (3.20)$$

$$A(z)D(z) + M(z)N(z) = D_p(z)\overline{D}_p(z) =: F(z) \quad (3.21)$$

Definindo os polinômios $A(z)$, $M(z)$ e $F(z)$ pelas Equações (3.22), (3.23) e (3.24), respectivamente, com $m \geq n - 1$.

$$A(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + \dots + A_mz^m \quad (3.22)$$

$$M(z) = M_0 + M_1z + M_2z^2 + \dots + M_mz^m \quad (3.23)$$

$$F(z) := D(z)\overline{D}_p(z) = F_0 + F_1z + F_2z^2 + \dots + F_{n+m}z^{n+m} \quad (3.24)$$

A Equação (3.21) é uma equação Diofantina, onde Chen (1995) e Astrom Wittenmark (1997) apresentam de forma clara os métodos de obtenção da solução em que, considerando a planta $G(z)$ e a Equação (3.24), $A(z)$ e $M(z)$ podem ser obtidos a partir da resolução de um sistema de equações algébricas lineares formadas por um conjunto de $(n + m + 1)$ equações, sendo a matriz a esquerda com $(n + m + 1)$ linhas e $2(m + 1)$ colunas composta pelos coeficientes dos polinômios $D(z)$ e $N(z)$, sendo as primeiras duas colunas simplesmente os coeficientes de $N(z)$ e $D(z)$ organizados em ordem crescente. As próximas duas colunas são as duas primeiras deslocadas uma posição abaixo. O processo é repetido até ser alcançado um conjunto de $(m + 1)$ coeficientes, como mostra a Equação (3.25).

$$\begin{bmatrix} D_0 & N_0 & | & 0 & 0 & | & & | & 0 & 0 \\ D_1 & N_1 & | & D_0 & N_0 & | & & | & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & | & & | & 0 & 0 \\ D_n & N_n & | & D_{n-1} & N_{n-1} & | & \dots & | & D_0 & N_0 \\ 0 & 0 & | & D_n & N_n & | & & | & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & | & & | & D_{n-1} & N_{n-1} \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & & | & D_n & N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ M_0 \\ - \\ - \\ A_1 \\ M_1 \\ - \\ - \\ \vdots \\ - \\ - \\ A_m \\ M_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{m+n} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

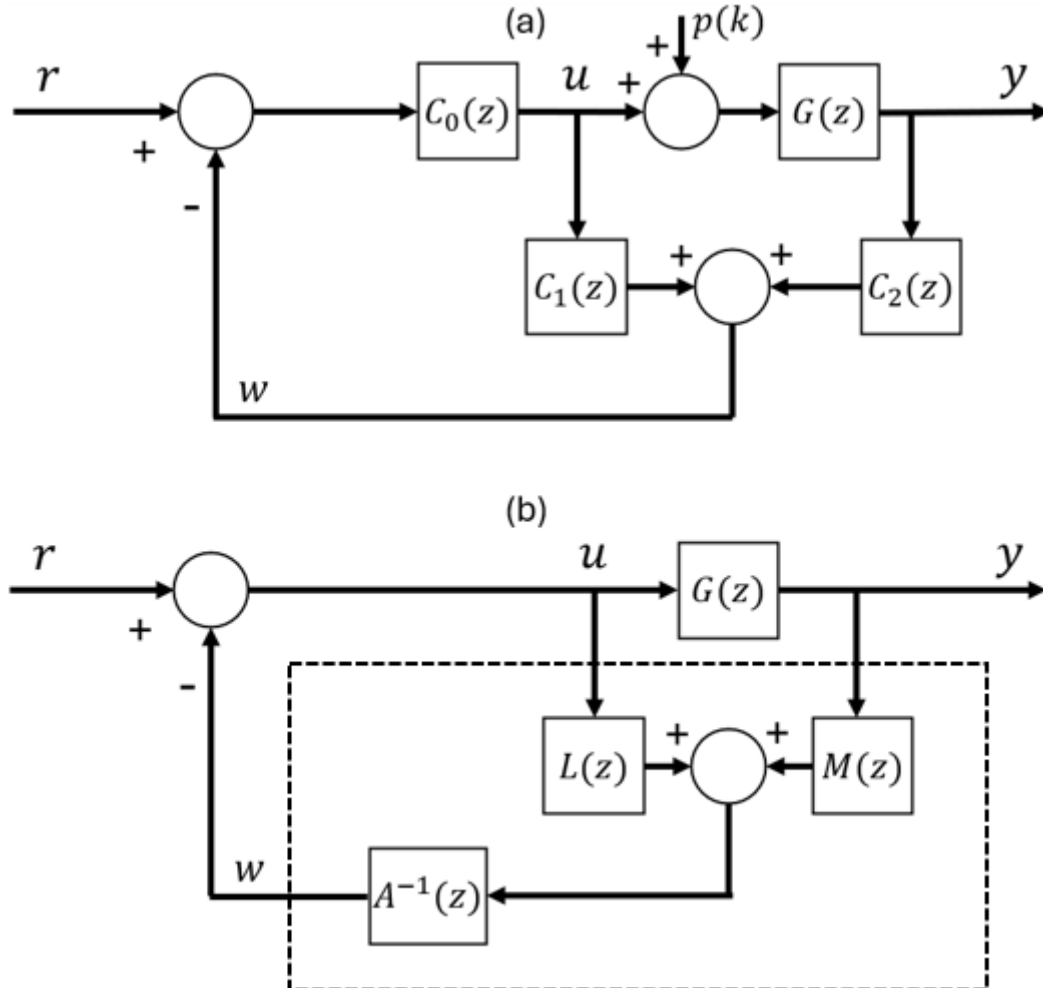
A solução da Equação (3.25) tem como resultado o controlador $C(z)$ da Equação (3.13) através de $\frac{L(z)}{A(z)}$ e $\frac{M(z)}{A(z)}$. O controlador obtido é próprio (CHEN, 1995).

$$C(z) = [C_1(z) \quad C_2(z)] = \left[\frac{L(z)}{A(z)} - \frac{M(z)}{A(z)} \right] \quad (3.13)$$

3.4 Configuração de Realimentação de Entrada e Saída da Planta

De acordo com Chen (1995), a configuração da Figura 3.3 (a), na qual $G(z)$ é a função de transferência do sistema a ser controlado e $C_0(z)$, $C_1(z)$ e $C_2(z)$ são controladores próprios, é denominada configuração de realimentação de entrada e saída da planta e pode ser usada para obter qualquer $G_0(z)$ implementável.

Figura 3.3 – Ilustração discreta da configuração de Entrada e Saída.



Fonte: Adaptado de Chen (1995).

O caso a ser tratado atende a Equação (3.26) e para esse caso pode-se considerar $C_0(z) = 1$, sendo $C_1(z)$ e $C_2(z)$ da forma apresentada nas Equações (3.27) e (3.28), (CHEN, 1995).

$$\text{grau de } D_0(z) - \text{grau de } N_0(z) = \text{grau de } D(z) - \text{grau de } N(z), \quad (3.26)$$

$$C_1(z) = \frac{L(z)}{A(z)} \quad (3.27)$$

$$C_2(z) = \frac{M(z)}{A(z)} \quad (3.28)$$

Desta forma, manipulando o diagrama da Figura 3.3 (a) obtém-se o diagrama da Figura 3.3 (b). Os dois controladores dentro do retângulo tracejado podem ser implementados como um único bloco que possui duas entradas, u e y e uma saída w conforme a Equações (3.29).

$$W(z) = uC_1(z) + yC_2(z) = u \frac{L(z)}{A(z)} + y \frac{M(z)}{A(z)} = \begin{bmatrix} L(z) & M(z) \\ A(z) & A(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Uma vez que essa configuração possui dois *loops* com ganhos $-\frac{L(z)}{A(z)}$ e $-\frac{M(z)}{A(z)}$, sua equação característica é dada pela Equação (3.30) e a função de transferência de r a y pode ser obtida a partir da fórmula de Mason sendo dada pela Equação (3.31).

$$\Delta(z) = 1 - \left(\frac{L(z)}{A(z)} - G(z) \frac{M(z)}{A(z)} \right) = 1 + \frac{L(z)}{A(z)} + \frac{N(z)M(z)}{D(z)A(z)} \quad (3.30)$$

$$G_0(z) = \frac{G(s)}{\Delta(z)} = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{N(z)A(z)}{A(z)D(z) + L(z)D(z) + M(z)N(z)} \quad (3.31)$$

Problema Dada uma planta $G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, sendo $N(z)$ e $D(z)$ coprimos e o grau de $D(z) \geq$ grau de $N(z)$, obter controladores que garantam uma $G_0(z) = \frac{N_0(z)}{D_0(z)}$ implementável com grau de $D(z) -$ grau de $N(z) =$ grau de $D_0(z) -$ grau de $N_0(z)$.

Procedimento:

Primeiro passo: Calcular $\frac{G_0(z)}{N(z)}$ pela Equação (3.32) em que $N_p(z)$ e $D_p(z)$ são coprimos entre si.

$$\frac{G_0(z)}{N(z)} = \frac{N_0(z)}{D_0(z)N(z)} =: \frac{N_p(z)}{D_p(z)} \quad (3.32)$$

Segundo passo: Se o grau de $N_p(z) =: \bar{m} < n - 1$, introduzir na Equação (3.32) um polinômio Hurwitz arbitrário $\bar{A}(z)$ de grau $n - 1 - \bar{m}$. Se $\bar{m} \geq n - 1$, fazer $\bar{A}(z) = 1$.

Terceiro passo: Reescrevendo a Equação (3.32) e igualando-a com a Equação (3.31), têm-se a Equação (3.33) de onde resultam as Equações (3.34) e (3.35).

$$G_0(z) = \frac{N(z)N_p(z)}{D_p(z)} = \frac{N(z)N_p(z)\bar{A}(z)}{D_p(z)\bar{A}(z)} = \frac{N(z)A(z)}{A(z)D(z) + L(z)D(z) + M(z)N(z)} \quad (3.33)$$

$$A(z) = N_p(z)\bar{A}(z) \quad (3.34)$$

$$A(z)D(z) + L(z)D(z) + M(z)N(z) = D_p(z)\bar{A}(z) \quad (3.35)$$

Substituindo a Equação (3.34) na Equação (3.35) obtém-se a Equação (3.36) que é uma equação Diofantina cuja solução resulta em $L(z)$ e $M(z)$.

$$L(z)D(z) + M(z)N(z) = \bar{A}(z)[D_p(z) - N_p(z)D(z)] =: F(z) \quad (3.36)$$

Com a introdução de $\bar{A}(z)$, $A(z)$ tem grau de pelo menos $n - 1$ deste modo o grau dos polinômios $L(z)$ e $M(z)$ tem no máximo o grau do polinômio $A(z)$. Isso assegura que os controladores $\frac{L(z)}{A(z)}$ e $\frac{M(z)}{A(z)}$ sejam próprios.

A Equação (3.36) pode ser resolvida da mesma forma como a Equação (3.21). Por exemplo, se *grau de* $A(z) = n - 1$, então *grau de* $F(z) = 2n - 1$. Sendo $L(z)$, $M(z)$ e $F(z)$ dados pelas Equações (3.37), (3.38) e (3.39), então $L(z)$ e $M(z)$ são a solução da Equação algébrica (3.40), sendo, desta forma, possível implementar o controlador $C(z)$.

$$L(z) = L_0 + L_1z + \dots + L_{n-1}z^{n-1}, \quad (3.37)$$

$$M(z) = M_0 + M_1z + \dots + M_{n-1}z^{n-1}, \quad (3.38)$$

$$F(z) = F_0 + F_1z + F_2z^2 + \dots + F_{2n-1}z^{2n-1} \quad (3.39)$$

$$\begin{bmatrix} D_0 & N_0 & | & 0 & 0 & | & & | & 0 & 0 \\ D_1 & N_1 & | & D_0 & N_0 & | & & | & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & | & & | & 0 & 0 \\ D_n & N_n & | & D_{n-1} & N_{n-1} & | & \dots & | & D_0 & N_0 \\ 0 & 0 & | & D_n & N_n & | & & | & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & | & & | & D_{n-1} & N_{n-1} \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & & | & D_n & N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 \\ M_0 \\ - \\ - \\ - \\ L_1 \\ M_1 \\ - \\ - \\ - \\ \vdots \\ L_{n-1} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{2n-1} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

4. PROJETOS DOS CONTROLADORES

Para cada uma das plantas descritas no Capítulo 2, são apresentados a seguir os projetos de controladores usando as três configurações descritas no Capítulo 3, ou seja, de realimentação unitária, de dois parâmetros, de realimentação de entrada e saída da planta. Para cada caso especifica-se a função de transferência do modelo de referência a ser adotada e são apresentados os diagramas de simulação e resultados obtidos.

4.1. Projetos de controladores para o Sistema *Ball and Beam*

O *Ball and Beam* se caracteriza por ser um sistema instável com função de transferência dada pela Equação (2.08) e equivalente discreto ZOH dado pela Equação (2.09) com $T_s = 0,01$, reescritas a seguir, conforme visto no Capítulo 2.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0,37}{s^2} \quad (2.08)$$

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{0,0000185(1+z)}{1-2z+z^2} \quad (2.09)$$

Para o projeto do controlador discreto será adotado o modelo de referência da Equação (4.01), cujo equivalente discreto ZOH, considerando $T_s = 0,01$ s, é dado pela Equação (4.02).

$$G_0(s) = \frac{N_0}{D_0} = \frac{3}{s^2 + 2,4s + 3} \quad (4.01)$$

$$G_0(z) = \frac{N_0(z)}{D_0(z)} = \frac{0,0001476 + 0,0001488z}{0,9762857 - 1,9759893z + z^2} \quad (4.02)$$

Como $G(z)$ possui um zero em -1 ele deve ser incluído no numerador de $G_0(z)$ que passa a ser expresso pela Equação (4.03).

$$\begin{aligned} G_02(z) &= \left(\frac{0,0001476 + 0,0001488z}{0,9762857 - 1,9759893z + z^2} \right) (z + 1) \\ &= \frac{0,0001476 + 0,0002964z + 0,0001488z^2}{0,9762857 - 1,9759893z + z^2} \end{aligned} \quad (4.03)$$

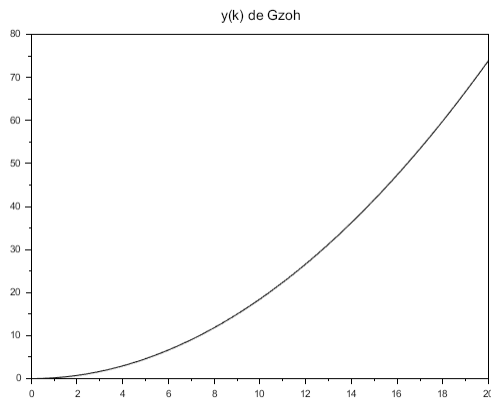
Como $g(D_02) = 2$, $g(N_02) = 2$, $g(D) = 2$ e $g(N) = 1$, então, a desigualdade $g(D_02) - g(N_02) \geq g(D) - g(N)$ não é satisfeita. Assim, incluindo um polo positivo, próximo da origem no plano z (não dominante) para torná-la verdadeira tem-se a Equação (4.04).

$$G_03 = \frac{G_02}{z - 0,1} = \left(\frac{0,0001476 + 0,0002964z + 0,0001488z^2}{-0,0976286 + 1,1738846z - 2,0759893z^2 + z^3} \right) \quad (4.04)$$

Ao simular a resposta ao degrau unitário da G_03 observa-se que o valor em regime é 2,22 vezes maior que um, então divide-se G_03 por 2,22, resultando na Equação (4.05). As Figuras 4.1 e 4.2 ilustram a resposta ao degrau unitário do *Ball and Beam* $G(z)$ e do modelo de referência final $G_0(z)4$ respectivamente.

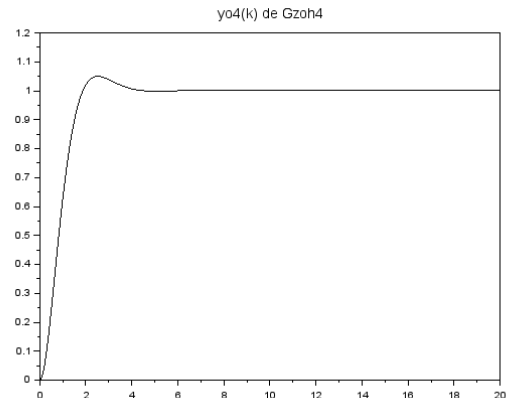
$$G_04 = \frac{G_03}{2,22} = \left(\frac{0,0000665 + 0,0001335z + 0,000067z^2}{-0,0976286 + 1,1738846z - 2,0759893z^2 + z^3} \right) \quad (4.05)$$

Figura 4.1 – Resposta em tempo discreto da $G(z)$ do *Ball and Beam*



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.2 – Resposta em tempo discreto da $G_04(z)$



Fonte: Elaboração própria.

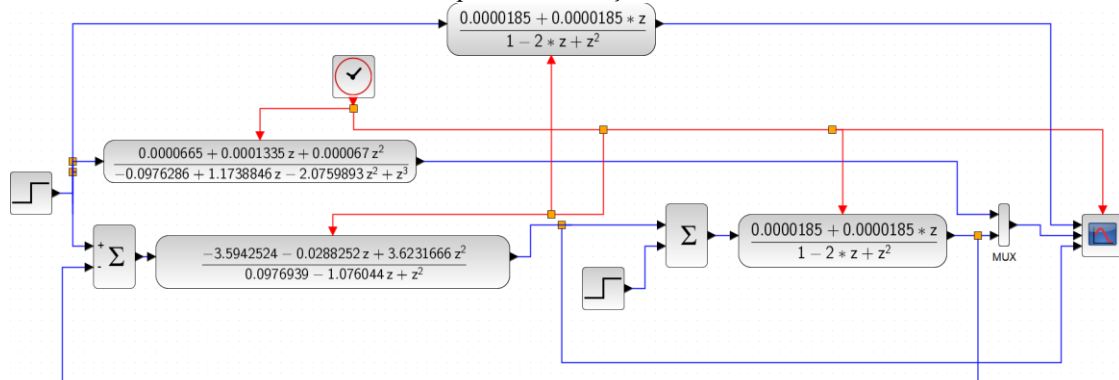
4.1.1. Projeto Usando Realimentação Unitária

Sendo a desigualdade de excesso de polos e zeros satisfeita, calcula-se o controlador discreto por realimentação unitária, Equação (4.06), usando a Equação (3.05)

$$C(z) = \frac{G_04(z)}{G(z)[1 - G_04(z)]} = \frac{-3,5942524 - 0,0288252z + 3,6231666z^2}{0,0976939 - 1,076044z + z^2} \quad (4.06)$$

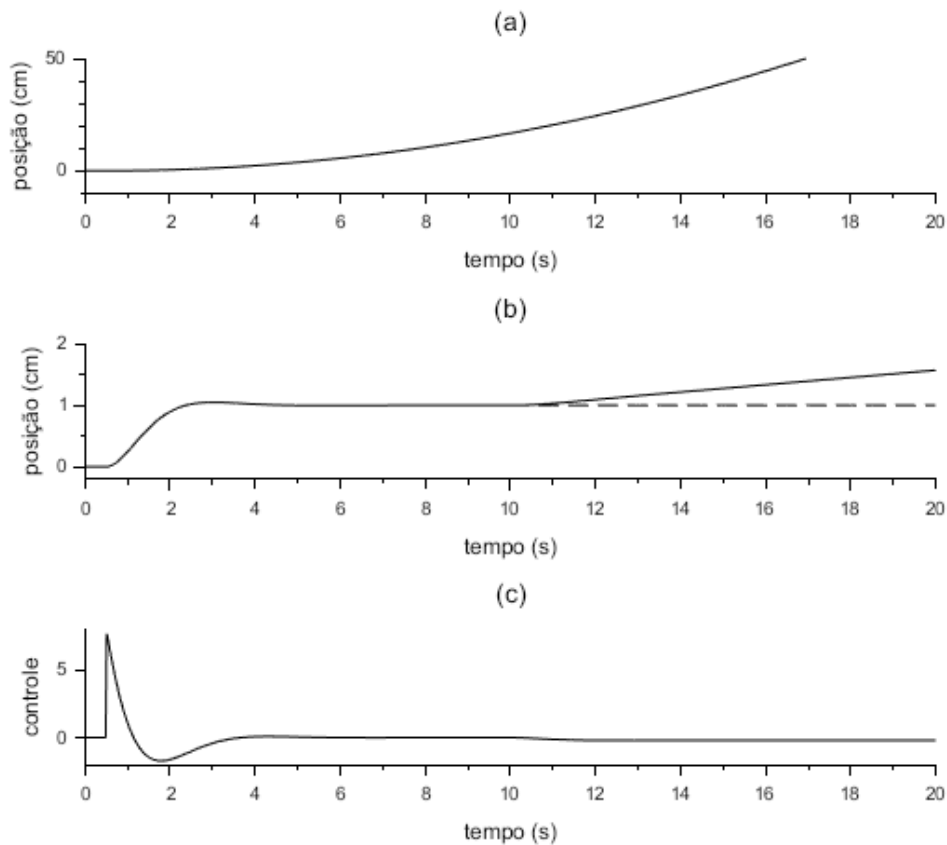
Para simulação com o *software* Scilab, desenvolveu-se o diagrama de blocos ilustrado na Figura 4.3. Os resultados da simulação são mostrados na Figura 4.4. Na Figura 4.4 (a) tem-se a resposta ao degrau unitário do sistema *Ball and Beam* em malha aberta. Na Figura 4.4 (b) tem-se a resposta ao degrau unitário do modelo de referência especificado (linha tracejada), e a resposta do sistema em malha fechada com o controlador projetado (linha contínua). Sendo aplicada uma perturbação externa do tipo degrau com amplitude 0,2 em $t = 10$ segundos percebe-se o efeito desestabilizador dela.

Figura 4.3 – Diagrama de simulação do sistema *Ball and Beam* com controlador discreto obtido por realimentação unitária.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.4 – Resposta ao degrau unitário: (a) do *Ball and Beam* em malha aberta; (b) do modelo de referência e do sistema com controle por Realimentação Unitária e em (c) a ação de controle.



Fonte: Elaboração própria.

Observa-se que o sistema em malha fechada consegue rastrear o sinal degrau unitário, de modo idêntico ao modelo de referência, até o momento em que a perturbação é aplicada provocando instabilidade.

Assim, esse controle não é aplicado na prática, pois em situações reais sempre haverá a possibilidade de ocorrer perturbações externas. A Figura 4.4 (c) mostra a ação de controle.

4.1.2. Projeto usando Configuração de Dois Parâmetros

No projeto do controlador discreto com configuração de dois parâmetros, Seção 3.3, divide-se o modelo de referência da Equação (4.05) por $N(z)$ gerando a Equação (4.07).

$$\frac{G_0 4(z)}{N(z)} = \frac{N_p(z)}{D_p(z)} \quad (4.07)$$

$$= \frac{0,0000665 + 0,0001335z + 0,000067z^2}{-0,0000018 + 0,0000199z - 0,0000167z^2 - 0,0000199z^3 + 0,0000185z^4}$$

Como os polinômios $N_p(z)$ e $D_p(z)$ possuem o fator -1 em comum ele tem de ser cancelado de modo que $N_p(z)$ e $D_p(z)$ sejam coprimos, resultado nas Equações (4.08) e (4.09).

$$N_{pfinal}(z) = 3,5942967 + 3,6231666z \quad (4.08)$$

$$D_{pfinal}(z) = -0,0976286 + 1,1738846z - 2,0759893z^2 + z^3 \quad (4.09)$$

Como $g(D_{pfinal}(z) = 3 = p)$, $g(G_0(z) = n = 2)$ e $g(\overline{D}_p(z) \geq 2n - 1 - p \geq 0)$. Adotando o $g(\overline{D}_p(z) = 1)$ e $\overline{D}_p(z) = (s + 100)$, então $\overline{D}_p(z) = z - e^{-100T_s}$. Para $T_s = 0,01s$, vem a Equação 4.10.

$$\overline{D}_p(z) = -0,3678794 + z \quad (4.10)$$

Os polinômios $L(z)$ e $F(z)$ são obtidos pelas Equações (4.11) e (4.12).

$$L(z) = N_{pfinal}(z) * \overline{D}_p(z) = -1,3222679 + 2,2614082z + 3,6231666z^2 \quad (4.11)$$

$$F(z) = D_{pfinal}(z) * \overline{D}_p(z) = 0,0359155 - 0,5294766z + 1,9375984z^2 - 2,4438687z^3 + z^4 \quad (4.12)$$

Como $g(F(z)) = 4$ e $n = 2$, então $m = 2$, resultado na Equação (4.13).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,0000185 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0,0000185 & 1 & 0,0000185 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0,0000185 & 1 & 0,0000185 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0,0000185 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ M_0 \\ A_1 \\ M_1 \\ A_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0359155 \\ -0,5294766 \\ 1,9375984 \\ -2,4438687 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

O sistema linear resultante possui 5 equações e 6 incógnitas, ou seja, tem infinitas soluções. Para resolvê-lo faz-se $A_0 = 0$, produzindo a Equação (4.14) que resulta em: $M_0 = 1941,3784$; $A_1 = -0,4867148$; $M_1 = -4252,8270$; $A_2 = 1$ e $M_2 = 2316,0054$.

$$\begin{bmatrix} 0,0000185 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0000185 & 1 & 0,0000185 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0,0000185 & 1 & 0,0000185 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0,0000185 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ A_1 \\ M_1 \\ A_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0359155 \\ -0,5294766 \\ 1,9375984 \\ -2,4438687 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Sendo $A(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2$ e $M(z) = M_0 + M_1z + M_2z^2$, Equações (3.22) e (3.23), então chega-se as Equações (4.15) e (4.16).

$$A(z) = -0,4867148z + z^2 \quad (4.15)$$

$$M(z) = 1941,3784 - 4252,827z + 2316,0054z^2 \quad (4.16)$$

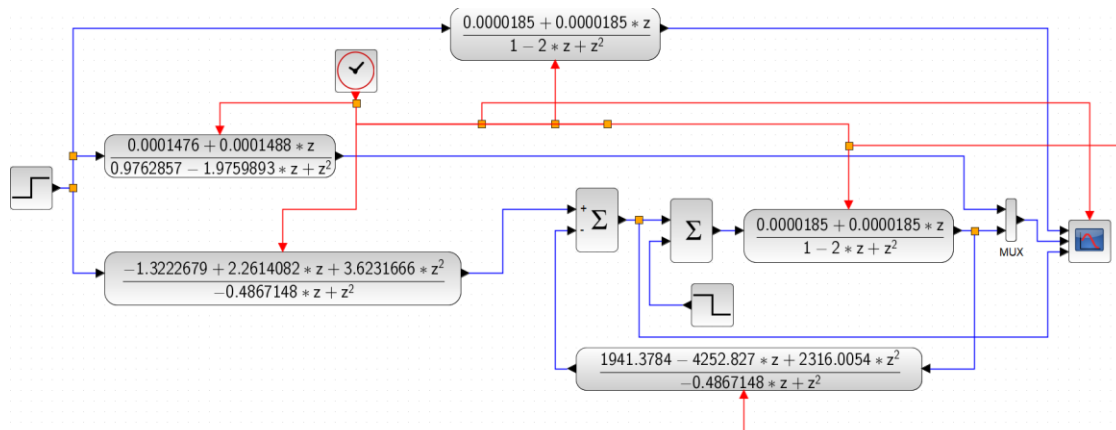
E o controlador $C(z) = [C_1(z)C_2(z)]$, Equação (3.13), é dado pelas Equações (4.17) e (4.18).

$$C_1(z) = \frac{L(z)}{A(z)} = \frac{-1,3222679 + 2,2614082z + 3,6231666z^2}{-0,4867148z + z^2} \quad (4.17)$$

$$C_2(z) = \frac{M(z)}{A(z)} = \frac{-1941,3784 - 4252,827z + 2316,0054z^2}{-0,4867148z + z^2} \quad (4.18)$$

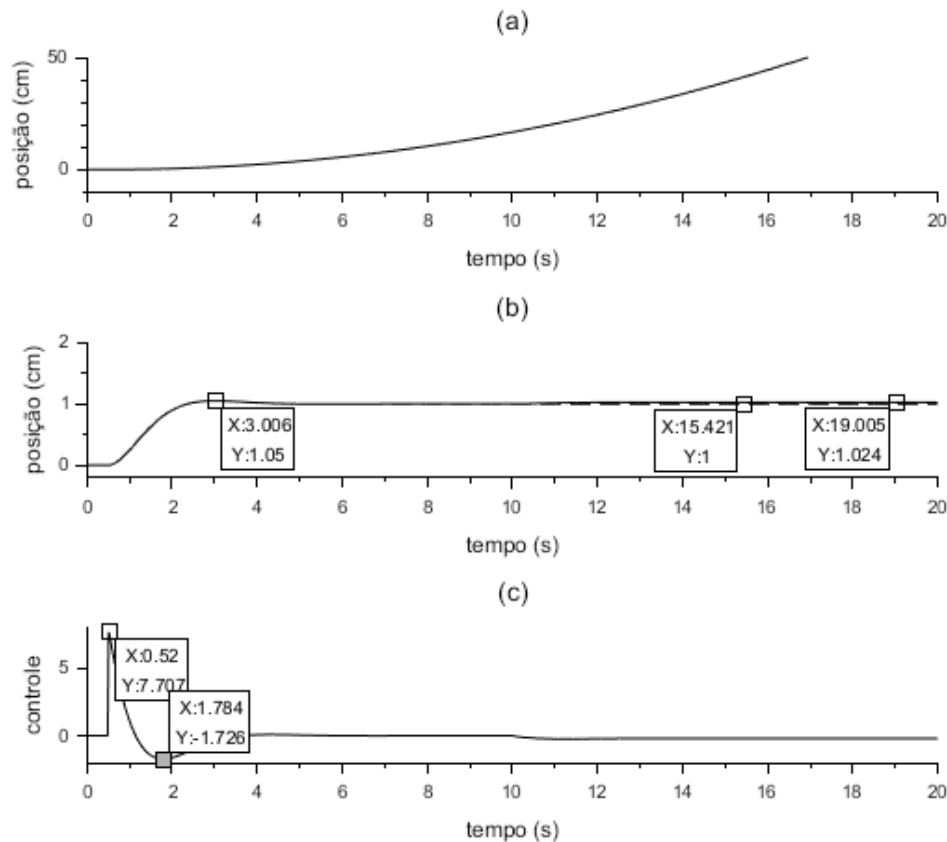
Para simulação do sistema em malha fechada com o controlador obtido montou-se o diagrama de blocos da Figura 4.5 e os resultados obtidos estão apresentados na Figura 4.6.

Figura 4.5 – Diagrama de blocos do sistema *Ball and Beam* usando um controlador discreto obtido por configuração de dois parâmetros para $\bar{D}_p(z) = (-0,3678794 + z)$.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.6 – Respostas ao degrau unitário: (a) do *Ball and Beam* em malha aberta (b) do modelo de referência (linha tracejada) e do sistema com Controlador por Configuração de Dois Parâmetros com $\bar{D}_p(z) = (-0,3678794 + z)$ com uma perturbação do tipo degrau de amplitude 0,2 aplicada em $t = 10$ segundos, e em (c) a ação de controle.



Fonte: Elaboração própria.

Percebe-se que o sistema em malha fechada consegue rastrear o sinal de entrada degrau unitário de modo idêntico ao modelo de referência, porém, em $t = 10$ segundos, com a presença do sinal de perturbação externa, a resposta do sistema passa a ter um erro em regime permanente em torno de 2,4 %, que se mantém até o final da simulação. Na Figura 4.6 (c) tem-se a ação de controle.

4.1.3. Projeto usando Configuração de Entrada e Saída da Planta

Apesar dos ótimos resultados obtidos com o controlador obtido com a configuração de dois parâmetros para o sistema *Ball and Beam*, a seguir utiliza-se o projeto do controlador usando Realimentação de Entrada e Saída seguindo os passos da Seção 3.4 e suas respectivas equações. O modelo de referência especificado será o mesmo definido na Equação (4.05).

Substituindo o numerador $N(z)$ da função de transferência da planta e a função de transferência do modelo de referência, Equações (2.09) e (4.02), respectivamente, na Equação (3.32), tem-se a Equação (4.19).

$$\begin{aligned}
\frac{G_04(z)}{N(z)} &= \frac{N_0(z)}{D_0(z)N(z)} \\
&= \frac{(0,0000665 + 0,0001335z + 0,000067z^2)}{(-0,0976286 + 1,1738846z - 2,0759893z^2 + z^3)(1 + z)0,0000185} \\
&= \frac{0,0000665 + 0,0001335z + 0,000067z^2}{-0,0000018 + 0,0000199z - 0,0000167z^2 - 0,0000199z^3 + 0,0000185z^4} = \\
&= \frac{3,6231666(0,9920319 + z)}{(0,9762856 - 1,9759893z + z^2)(z - 0,1)} = \frac{N_p(z)}{D_p(z)}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Como o grau de $N_p = \bar{m} = 1$, então a desigualdade $\bar{m} < n - 1$ não é satisfeita, pois $n = 2$. Nesse caso, faz-se $\bar{A} = 1$, resultando na Equação (4.20).

$$A(z) = N_p(z)\bar{A}(z) = 3,6231666(0,9920319 + z) \tag{4.20}$$

Como grau de $A = 1 = n - 1$, então grau de $F = 2n - 1 = 4 - 1 = 3$. $F(z)$ é dado pela Equações (4.21), respectivamente.

$$\begin{aligned}
F(z) &= \bar{A} * (D_p(z) - N_p * D(z)) \\
&= (0,9762856 - 1,9759893z + z^2)(z - 0,1) \\
&\quad - 3,6231666 (0,9920319 + z)(1 - 2z + z^2) \\
&= -3,5942968 + 3,5654271z + 3,6520364z^2 \\
&\quad - 3,6231666z^3
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Da Equação (3.36) resulta o sistema de Equações (4.22), cuja solução é: $L_0 = -3,6811723$; $M_0 = -581,24035$; $L_1 = -2,6231666$; $M_1 = 588,45059$. Substituindo esses resultados na Equação (3.29), tem-se os controladores dados pelas Equações (4.23) e (4.24).

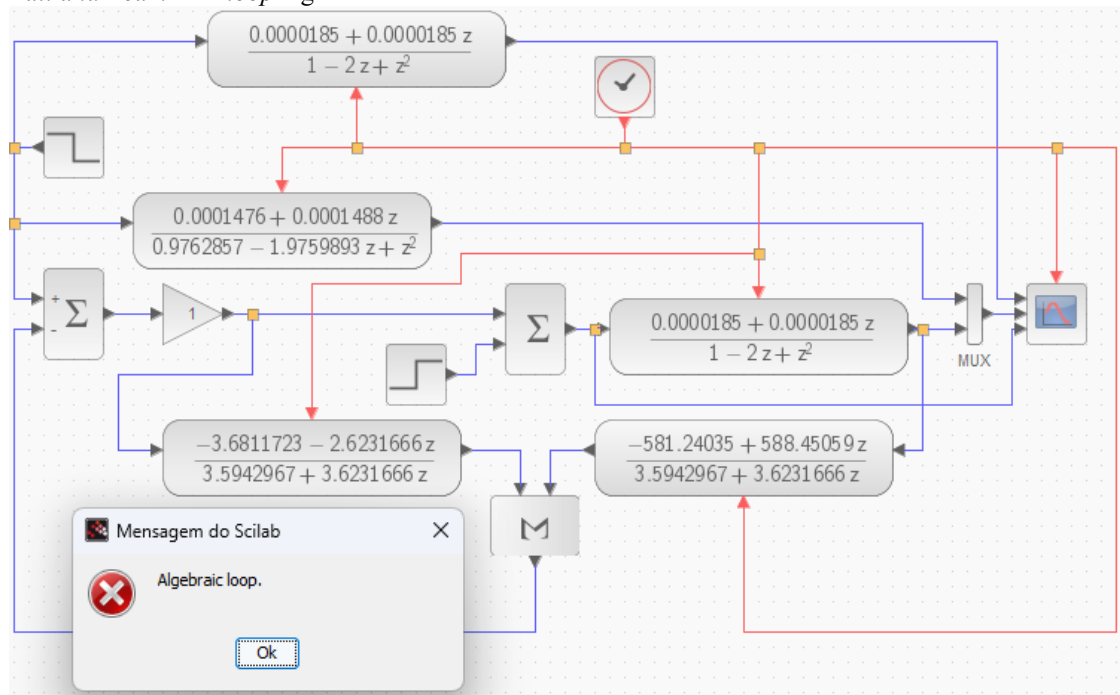
$$\begin{bmatrix} 1 & 0,0000185 & 0 & 0 \\ -2 & 0,0000185 & 1 & 0,0000185 \\ 1 & 0 & -2 & 0,0000185 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 \\ M_0 \\ L_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,5942968 \\ 3,5654271 \\ 3,6520364 \\ -3,6231666 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

$$C_1(z) = \frac{L(z)}{A(z)} = \frac{-3,6811723 - 2,6231666z}{3,5942967 + 3,6231666z} \tag{4.23}$$

$$C_2(z) = \frac{M(z)}{A(z)} = \frac{-581,24035 + 588,45059z}{3,5942967 + 3,6231666z} \tag{4.24}$$

Como no controlador $C_1(z)$ o grau de $L(z)$ é igual ao de $A(z)$, resulta em erro de *loop* algébrico na simulação como visto na Figura 4.7. O *loop* algébrico ocorre devido ao termo L_1 ser diferente de zero.

Figura 4.7: Diagrama de blocos da configuração de Realimentação de Entrada e Saída da planta *Ball and Beam* com *loop* algébrico.

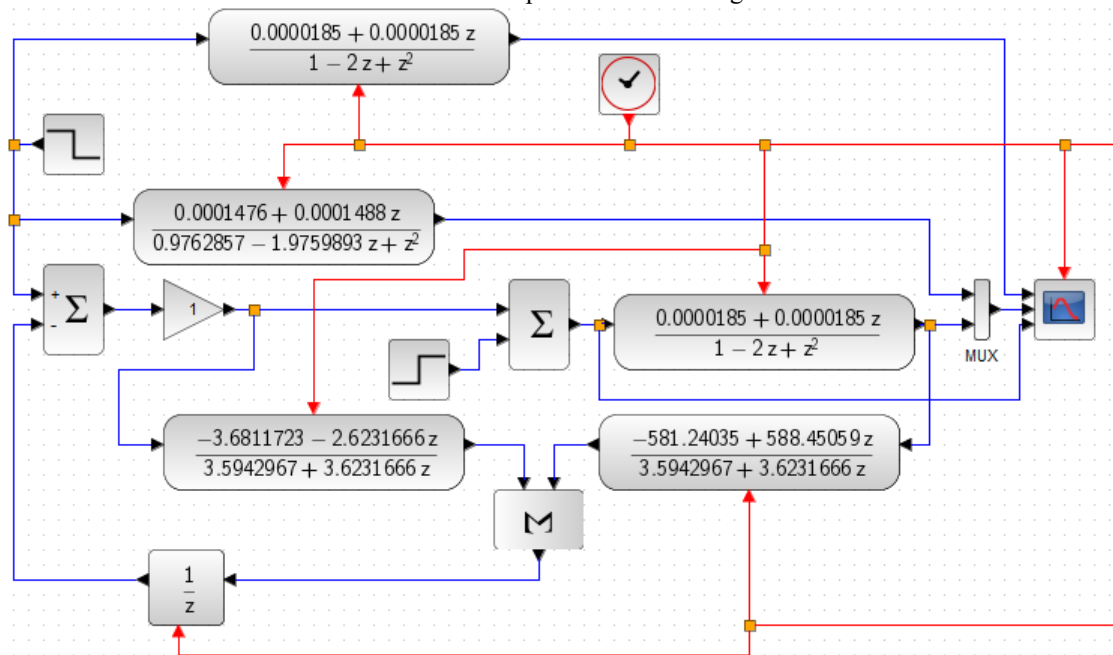


Fonte: Elaboração própria.

Uma maneira de eliminar esse erro é pela introdução do bloco de atraso, porém, conforme Carvalho (2000), o atraso implica no aumento da complexidade de análise, pois apresenta características distintas das observadas nos sistemas lineares no tempo sem atraso. Sistemas com atraso têm margens de ganho e fase reduzidas. Por conta disso precisa ser limitado para prevenir contra a instabilidade e a resposta transitória pode ser degradada.

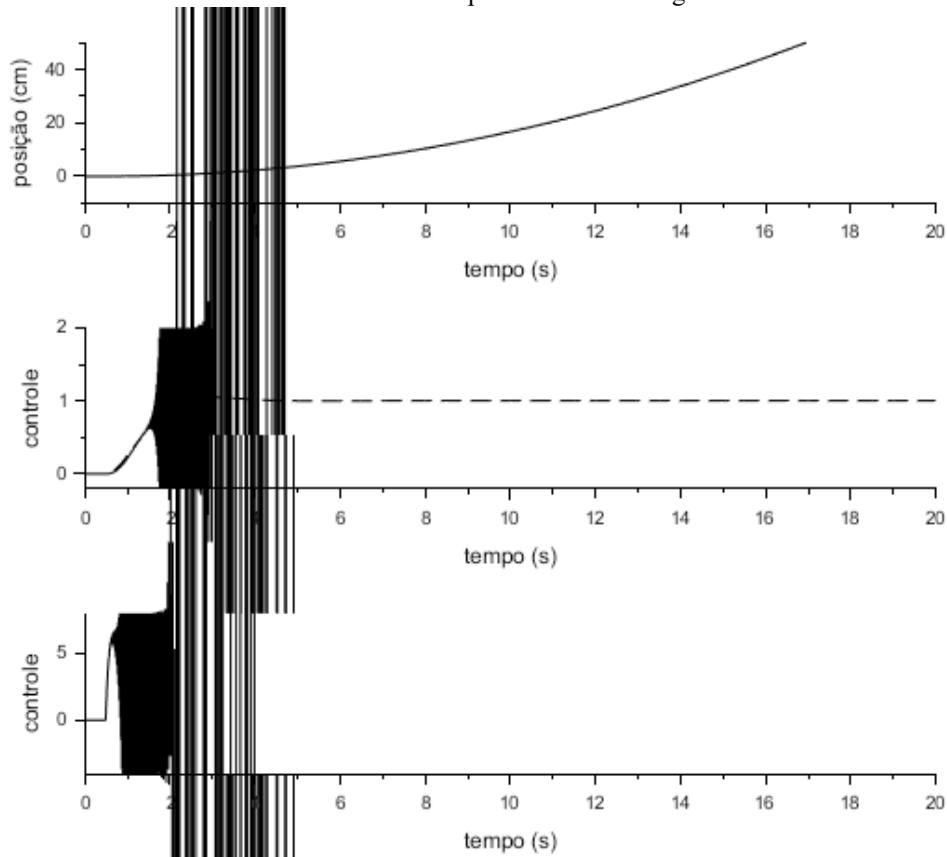
Caso se inclua um atraso de um período de amostragem no sinal $w(kT_s)$ resultando na Figura 4.8, onde se observa a presença de um bloco de atraso fixo de um período de amostragem (z^{-1}) que não faz parte do controlador projetado, o sistema fica instável como visto na Figura 4.9.

Figura 4.8: Resposta instável do sistema *Ball na Beam* tendo Controlador por Realimentação de Entrada e Saída da Planta e com atraso de um período de amostragem.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.9: Resposta instável do sistema *Ball na Beam* tendo Controlador por Realimentação de Entrada e Saída da Planta e com atraso de um período de amostragem



Fonte: Elaboração própria.

Para evitar erro de *loop* algébrico, sem inserir nenhum atraso, o grau de $L(z)$ tem de ser menor que o grau de $A(z)$, então é necessário que $L_1 = 0$ e para conseguir isso é preciso considerar na Figura 3.3(a) que $C_0(z) = C_0$, ou seja, uma constante a ser determinada (não necessariamente 1).

Considerando a Figura 3.3(a) demonstra-se APÊNDICE E que a função de transferência de malha fechada, para $p(k) = 0$, é dada pela Equação (4.25) que deve ser igual a G_04 da Equação 4.05.

$$Gmf(z) = \frac{Y(z)}{Ref(z)} = \frac{CoN(z)A(z)}{A(z)D(z) + L(z)D(z)Co + N(z)M(z)Co} \quad (4.25)$$

Como o grau de $D(z) = 2$ então o grau de $A(z)$ tem de ser pelo menos igual a 1 para garantir que o grau de $A(z)D(z) + CoL(z)D(z) + CoM(z)N(z)$ seja igual ao grau do denominador de G_04 . Seja então o polinômio A dado pela Equação 4.26.

$$A = A_0 + A_1z \quad (4.26)$$

Igualando os numeradores e denominadores das Equações 4.05 e 4.25 bem como impondo que L_1 seja igual a zero ($L_1 = 0$), no APÊNDICE F mostram-se os detalhes dos cálculos para a obtenção dos controladores que resultam nas Equações 4.27, 4.28 e 4.29.

$$C_0(z) = 3,6216216 \quad (4.27)$$

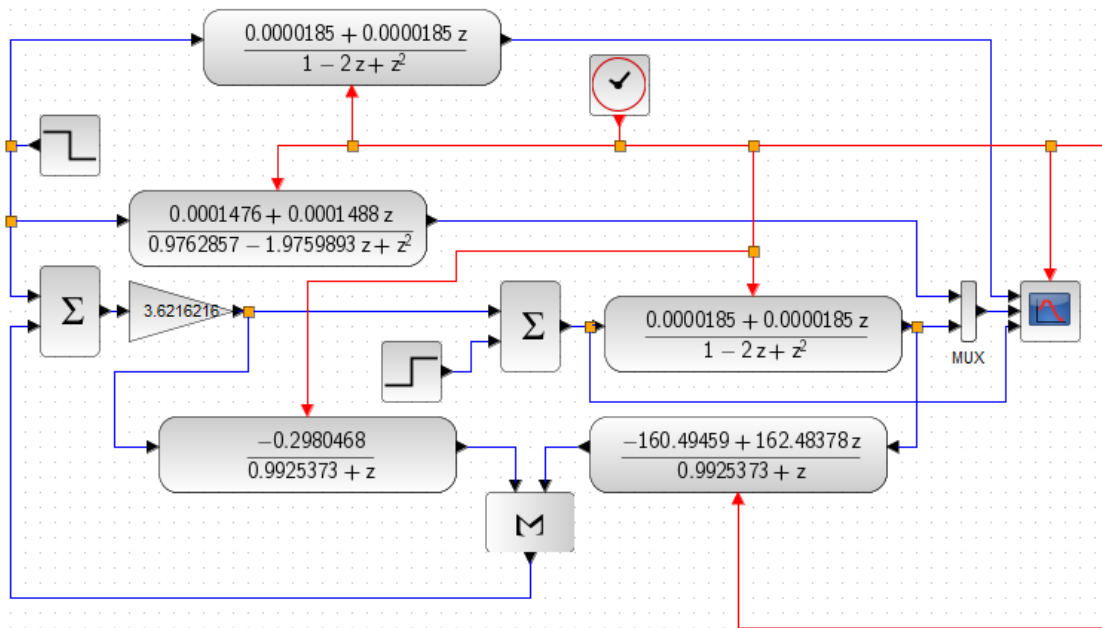
$$C_1(z) = \frac{L(z)}{A(z)} = \frac{-0,2980468}{0,9925373 + z} \quad (4.28)$$

$$C_2(z) = \frac{M(z)}{A(z)} = \frac{-160,49459 + 162,48378z}{0,9925373 + z} \quad (4.29)$$

Para simulação do sistema em malha fechada com o controlador obtido montou-se o diagrama de blocos da Figura 4.10 e os resultados obtidos estão apresentados na Figura 4.11.

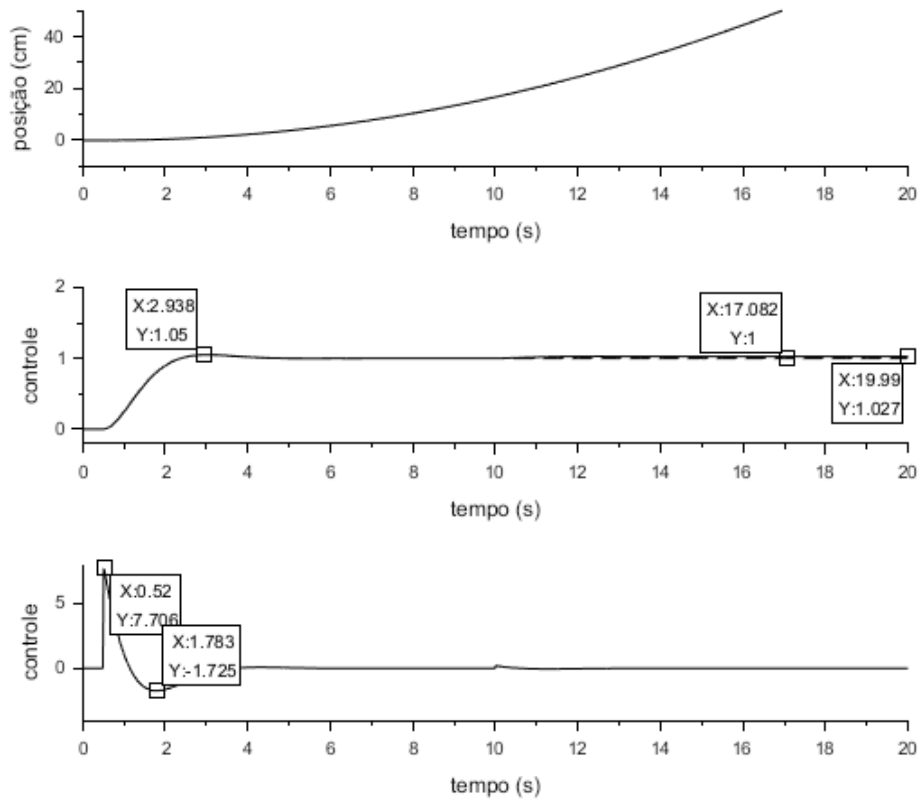
A Figura 4.11 (a) é a resposta ao degrau unitário do sistema *Ball and Beam*, Equação (2.09), em malha aberta. Na Figura (b) têm-se as respostas ao degrau unitário do modelo de referência especificado plotado em linha pontilhada, Equação (4.05), e do sistema em malha fechada com o controlador obtido pela configuração de Realimentação de Entrada e Saída da planta em linha contínua, com uma perturbação externa do tipo degrau de amplitude 0,2 aplicada a partir de 10 segundos.

Figura 4.10: Diagrama de blocos do sistema *Ball na Beam* tendo Controlador por Realimentação de Entrada e Saída da Planta.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.11: Respostas a degrau unitário: (a) do *Ball and Beam* em malha aberta; (b) do modelo de referência e do sistema com Controlador por Configuração de Entrada e Saída da Planta (c) a ação de controle.



Fonte: Elaboração própria.

Neste caso, o sistema em malha fechada consegue rastrear o sinal de entrada de modo idêntico ao modelo de referência, com erro em regime permanente nulo até o instante $t = 10$ segundos, quando atua a perturbação, e o sistema passa a ter um erro de regime permanente de 2,7%. A Figura (c) mostra a ação de controle deste sistema.

4.2. Projetos de Controladores para o Sistema *ArduRAJ*

No Capítulo 2 viu-se que a função de transferência da planta *ArduRAJ* é dada pela Equação (2.10) e seu equivalente discreto dado pela Equação (2.11) com $T_s = 0,01s$, repetidas a seguir. Observou-se que sua resposta é rápida, sem sobressinal, mas tem erro de regime não nulo.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0,001167s + 92,57}{s^2 + 17,3s + 112,2} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.10)$$

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{0,0041132 + 0,0043794z}{0,8411376 - 1,8308441z + z^2} \quad (2.11)$$

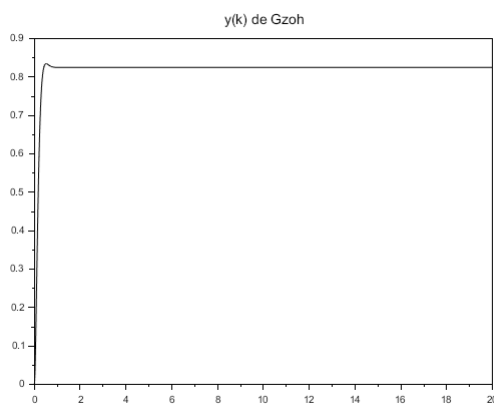
Impondo que em malha fechada o erro em regime seja nulo e que a resposta seja mais rápida que em malha aberta, adotou-se o modelo de referência da Equação (4.30), cujo equivalente discreto ZOH com $T_s = 0,01s$ é dado pela Equação (4.31).

$$G_0(s) = \frac{N_0(s)}{D_0(s)} = \frac{256}{(s^2 + 28,8s + 256)} \quad (4.30)$$

$$G_0(z) = \frac{0,0105377 + 0,0116584z}{0,7497616 - 1,7275655z + z^2} \quad (4.31)$$

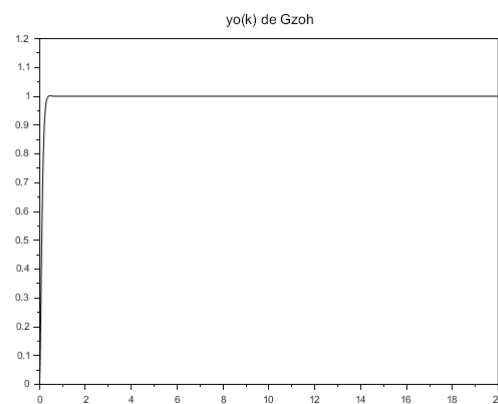
As respostas ao degrau de $G(z)$ e $G_0(z)$ constam nas Figura 4.12 e 4.13.

Figura 4.12 – Resposta em tempo discreto do $G(z)$



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.13 – Resposta em tempo discreto do $G_0(z)$



Fonte: Elaboração própria.

4.2.1 Projeto usando Realimentação Unitária

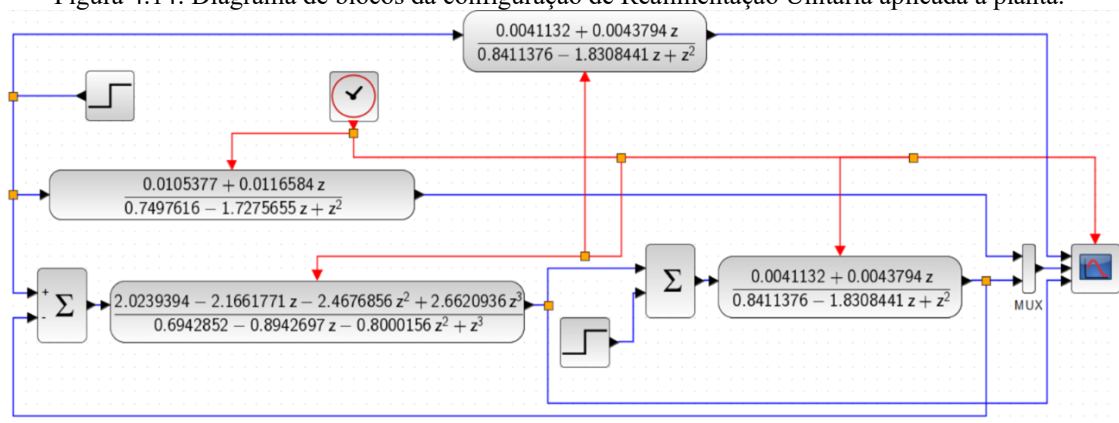
Observa-se que $G(z)$ não tem nenhum zero fora ou sobre do círculo unitário, então, com a Equação (3.05), a função de transferência do controlador é dada na Equação (4.32).

$$C(z) = \frac{G_0(z)}{G(z)(1 - G_0(z))} \quad (4.32)$$

$$= \frac{2,0239394 - 2,1661771z - 2,4676856z^2 + 2,6620936z^3}{0,6942852 - 0,8942697z - 0,8000156z^2 + z^3}$$

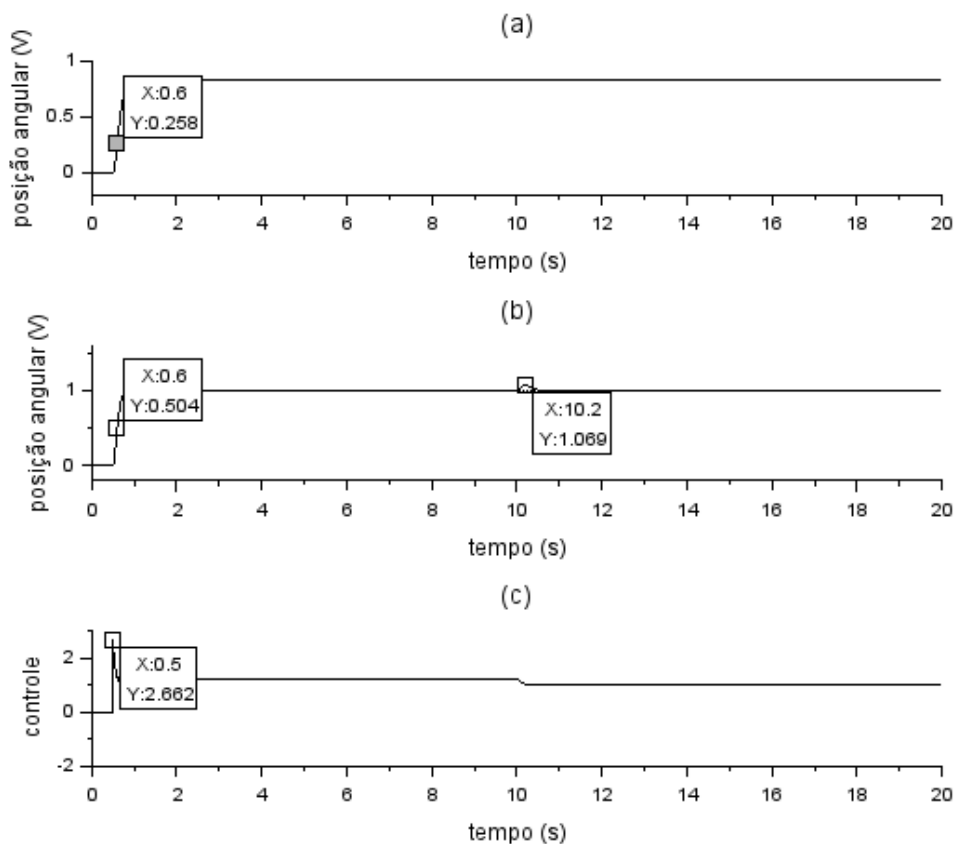
Para simulação desenvolveu-se o diagrama de blocos da Figura 4.14 e os resultados da simulação são apresentados na Figura 4.15.

Figura 4.14: Diagrama de blocos da configuração de Realimentação Unitária aplicada a planta.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.15 - Resposta ao degrau unitário: (a) do *ArduRAJ* em malha aberta; (b) do modelo de referência e do sistema com controle por Realimentação Unitária e em (c) a ação de controle.



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 4.15 (a) tem-se a resposta ao degrau unitário do sistema *ArduRAJ*, Equação (2.11), em malha aberta.

Na Figura 4.15 (b) tem-se as respostas ao degrau unitário do modelo de referência especificado, Equação (4.31), plotada em linha pontilhada, e do sistema em malha fechada com o controlador obtido pela técnica de Realimentação Unitária, Equação (4.32), plotada em linha contínua, com uma perturbação degrau de amplitude 0,2 aplicada em $t = 10$ segundos.

Observa-se na Figura 4.15 (b), que em 0,6 segundos, a resposta de malha fechada é 0,504 e na Figura 4.15 (a) a resposta de malha aberta, no mesmo instante de tempo, é de 0,258 caracterizando a maior velocidade da resposta em malha fechada.

Observa-se ainda que o sistema em malha fechada rastreia o sinal degrau de entrada modo idêntico ao modelo de referência com erro de regime permanente nulo até o instante em que ocorre a perturbação externa em $t = 10$ segundos. Então a resposta sofre uma variação de 6,9% em relação ao sinal de entrada, mas em menos 0,4 segundos retoma um erro de regime permanente nulo. Na Figura 4.15 (c) tem-se a ação de controle do sistema.

4.2.2. Projeto usando Configuração de dois Parâmetros da Planta

Para a configuração de dois parâmetros segue-se os passos da Seção 3.3. Dividindo a função de transferência do modelo de referência, Equação (4.31) pelo numerador $N(z)$ da função de transferência da planta, Equação (2.11), resultando na Equação (4.33).

$$\begin{aligned} \frac{G_0(z)}{N(z)} &= \frac{N_0(z)}{D_0(z)N(z)} =: \frac{N_p(z)}{D_p(z)} \\ &= \frac{0,0105656 + 0,0116305z}{0,0030839 - 0,0038223z - 0,0034525z^2 + 0,0043794z^3} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Como $g(D_p(z)) = p = 3$ e $g(D(z))$ é $n = 2$, então $g(\overline{D}_p(z)) \geq 2n - 1 - p \geq 0$. Adotando $g(\overline{D}_p(z)) = 1$, seja $\overline{D}_p(z) = (s + 100)$, logo $\overline{D}_p(z) = z - e^{-100*Ts}$ resultando na Equação (4.34).

$$\overline{D}_p(z) = z - 0,3678794 \quad (4.34)$$

$L(z)$ e $F(z)$ são dados pelas Equações (4.35) e (4.36), respectivamente.

$$L(z) = N_p(z) * \overline{D}_p(z) = -0,0038869 + 0,0062870z + 0,0116305z^2 \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} F(z) &= D_p(z)\overline{D}_p(z) \\ &= -0,0011345 + 0,00449z - 0,0025521z^2 - 0,0050636z^3 \\ &\quad + 0,0043794z^4 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Como $g(F) = 4$ e $n = 2$, então $m = 2$. Assim da Equação (3.25), tem-se a Equação (4.37).

$$\begin{bmatrix} 0,8411376 & 0,0041132 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,8308441 & 0,0043794 & 0,8411376 & 0,0041132 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1,8308441 & 0,0043794 & 0,8411376 & 0,0041132 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1,8308441 & 0,0043794 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ M_0 \\ A_1 \\ M_1 \\ A_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0011345 \\ 0,00449 \\ -0,0025521 \\ -0,0050636 \\ 0,0043794 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

O sistema linear resultante possui 5 equações e 6 incógnitas, ou seja, tem infinitas soluções. Para resolvê-lo faz-se $A_0 = 0$, produzindo a Equação (4.38).

$$\begin{bmatrix} 0,0041132 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0043794 & 0,8411376 & 0,0041132 & 0 & 0 \\ 0 & -1,830844 & 0,0043794 & 0,8411376 & 0,0041132 \\ 0 & 1 & 0 & -1,8308441 & 0,0043794 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ A_1 \\ M_1 \\ A_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0011345 \\ 0,00449 \\ -0,0025521 \\ -0,0050636 \\ 0,0043794 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Resultando em: $M_0 = -0,2758193$; $A_1 = -0,0041131$; $M_1 = 0,5441514$; $A_2 = 0,0043794$ e $M_2 = -0,2645898$.

Sendo $A(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2$ e $M(z) = M_0 + M_1z + M_2z^2$, Equações (3.22) e (3.23), chega-se as Equações (4.39) e (4.40).

$$A(z) = 0,0041131z + 0,0043794z^2 \quad (4.39)$$

$$M(z) = -0,2758193 + 0,5441514z - 0,2645898z^2 \quad (4.40)$$

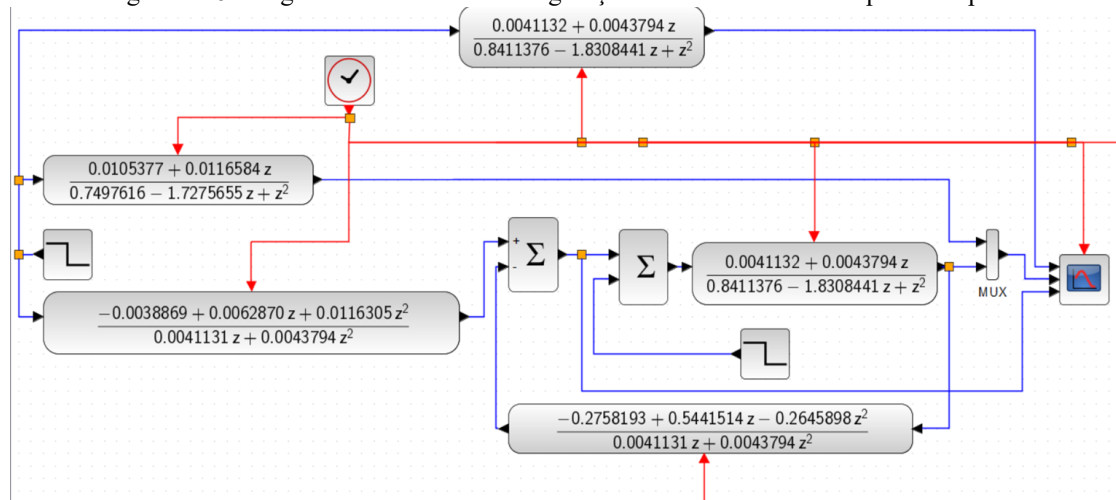
Resulta que o controlador da Equação (3.13) é dado pelas Equações (4.41) e (4.42).

$$C_1(z) = \frac{L(z)}{A(z)} = \frac{-0,0038869 + 0,0062870z + 0,0116305z^2}{0,0041131z + 0,0043794z^2} \quad (4.41)$$

$$C_2(z) = \frac{M(z)}{A(z)} = \frac{-0,2758193 + 0,5441514z - 0,2645898z^2}{0,0041131z + 0,0043794z^2} \quad (4.42)$$

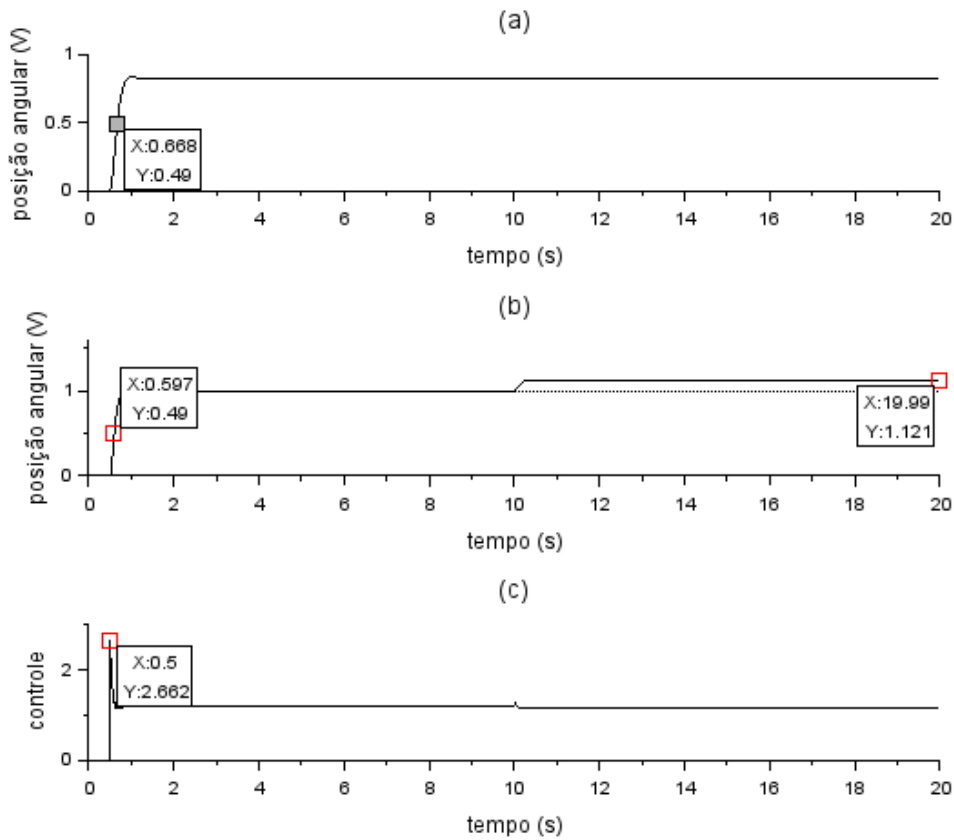
Com o diagrama de blocos da Figura 4.16 os resultados obtidos constam na Figura 4.17.

Figura 4.16: Diagrama de blocos da configuração de Dois Parâmetros aplicada a planta.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.17: Respostas ao degrau unitário: (a) do *ArduRAJ* em malha aberta (b) do modelo de referência (linha tracejada) e do sistema com Controlador por Configuração de Dois Parâmetros com uma perturbação do tipo degrau de amplitude 0,2 aplicada em $t = 10$ segundos, e em (c) a ação de controle.



Fonte: Elaboração própria.

Percebe-se que o sistema em malha fechada consegue rastrear o sinal de entrada degrau unitário de modo idêntico ao modelo de referência, porém, em $t = 10$ segundos, com a presença do sinal de perturbação externa, a resposta do sistema passa a ter um erro em regime permanente constante em torno de 12,1%, o que é considerado insatisfatório.

Para resolver essa situação na configuração de dois parâmetros tem-se que a função de transferência entre a saída $Y(z)$ e a perturbação $W(z)$ é dada pela Equação (4.43) onde: $N(z)$ é o polinômio do numerador do equivalente discreto ZOH da planta $G(z)$.

$$G_{yw}(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{N(z)A(z)}{D(z)A(z) + N(z)M(z)} \quad (4.43)$$

Para uma perturbação do tipo degrau de amplitude W , a resposta em regime permanente é calculada pelo Teorema do Valor Final conforme a Equação (4.44).

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{N(z)A(z)Wz}{(z - 1)[D(z)A(z) + N(z)M(z)]} \quad (4.44)$$

Neste caso, para garantir que após a aplicação da perturbação a saída em regime permanente $y(\infty)$ volte para zero, ou seja, para que o sistema de controle anule o efeito da perturbação, é necessário que o numerador de $G_{yw}(z)$ seja igual a zero em regime permanente, isto é, quando z tende para 1.

Então, $N(1)A(1) = 0$, como $N(1)$ é diferente de zero, resta fazer $A(1) = 0$, onde $A(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2$. Para garantir que $A(z)$ seja nulo com z tendendo para 1, então $A(z) = (z - 1) \times (xz - y)$, sendo x e y parâmetros a serem calculados.

Resolvendo $A_0 + A_1z + A_2z^2 = (z - 1) \times (xz - y)$ resulta que $A_2 = -A_1 - A_0$. Por fim, substituindo $A_2 = -A_1 - A_0$ na equação matricial (4.38) tem-se a Equação (4.45).

$$\begin{bmatrix} 0,8411376 & 0,0041132 & 0 & 0 & 0 \\ -1,8308441 & 0,0043794 & 0,8411376 & 0,0041132 & 0 \\ 0,1588624 & 0 & -2,6719817 & 0,0043794 & 0,0041132 \\ 1,8308441 & 0 & 2,8308441 & 0 & 0,0043794 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ M_0 \\ A_1 \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0011345 \\ 0,00449 \\ -0,0025521 \\ -0,0050636 \\ 0,0043794 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Resultando que: $A_0 = -0,0041132$; $M_0 = 0,5653127$; $A_1 = -0,0002662$; $M_1 = -1,2866804$; $A_2 = 0,0043794$ e $M_2 = 0,7354035$.

Das Equações (3.22) e (3.23), ou seja, $A(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2$; $M(z) = M_0 + M_1z + M_2z^2$, resulta que $A(z)$ e $M(z)$ são dados pelas Equações (4.46) e (4.47).

$$A(z) = -0,0041132 - 0,0002662z + 0,0043794z^2 \quad (4.46)$$

$$M(z) = 0,5653127 - 1,2866804z + 0,7354035z^2 \quad (4.47)$$

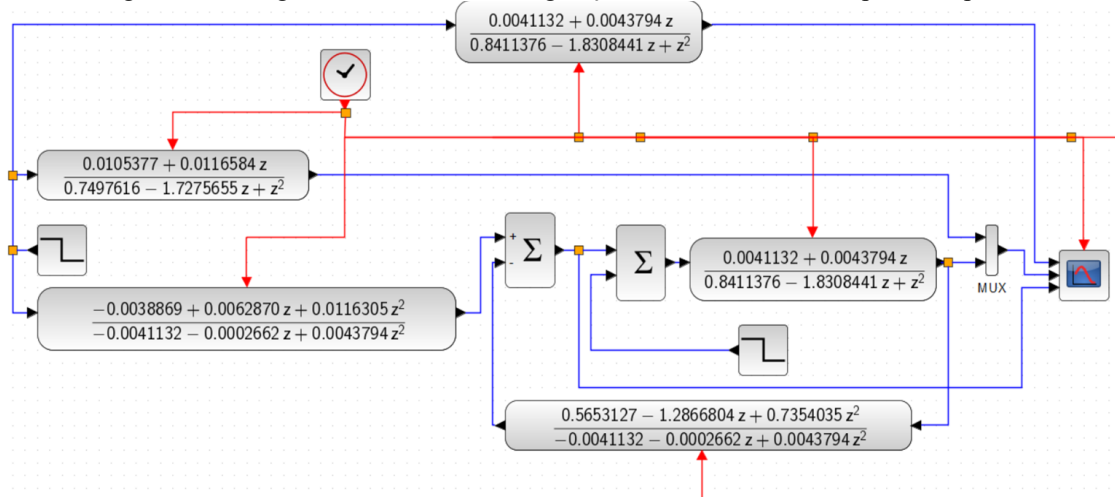
Resulta que o controlador da Equação (3.13) é dado pelas Equações (4.48) e (4.49).

$$C_1(z) = \frac{L(z)}{A(z)} = \frac{-0,0038869 + 0,0062870z + 0,0116305z^2}{-0,0041132 - 0,0002662z + 0,0043794z^2} \quad (4.48)$$

$$C_2(z) = \frac{M(z)}{A(z)} = \frac{0,5653127 - 1,2866804z + 0,7354035z^2}{-0,0041132 - 0,0002662z + 0,0043794z^2} \quad (4.49)$$

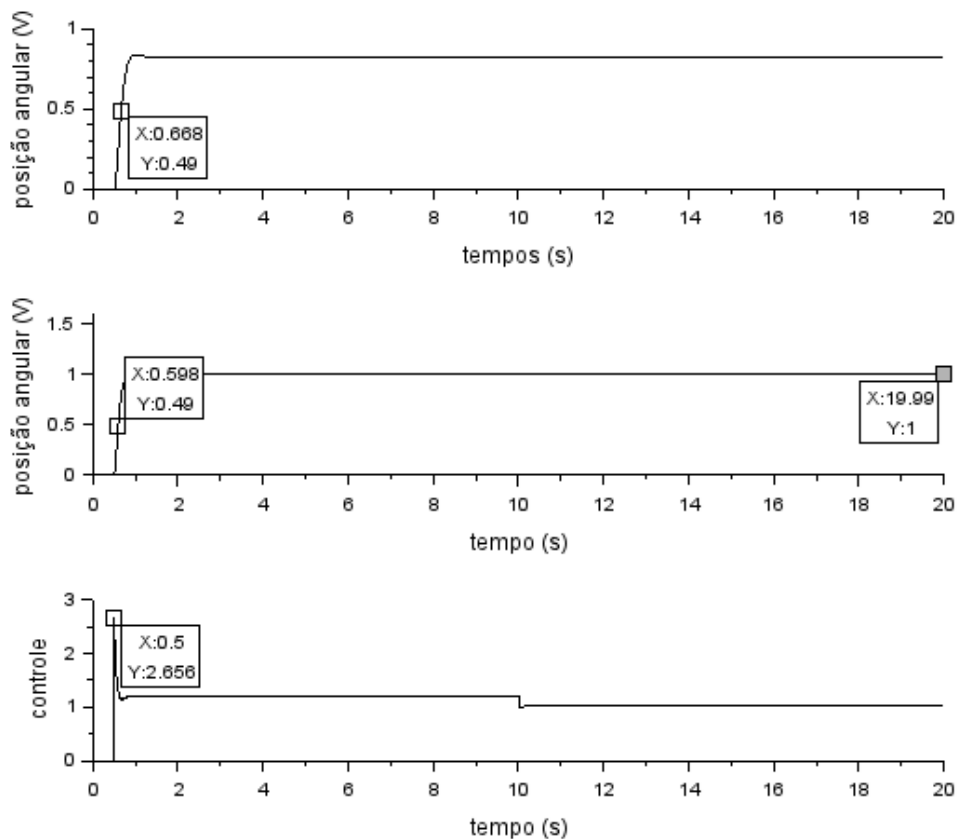
Para simulação desenvolveu-se o diagrama de blocos da Figura 4.18 e os resultados da simulação são apresentados na Figura 4.19.

Figura 4.18: Diagrama de blocos da configuração de Dois Parâmetros aplicada a planta.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.19: Respostas ao degrau unitário: (a) do *ArduRAJ* em malha aberta (b) do modelo de referência (linha tracejada) e do sistema com Controlador por Configuração de Dois Parâmetros com uma perturbação do tipo degrau de amplitude 0,2 aplicada em $t = 10$ segundos, e em (c) a ação de controle. Após a aplicação do Teorema do Valor Final.



Fonte: Elaboração própria.

Percebe-se que o sistema em malha fechada consegue rastrear o sinal de entrada degrau unitário de modo idêntico ao modelo de referência e, nesse caso, a resposta permanece inalterada mesmo após a aplicação da perturbação em $t = 10$.

4.2.3. Projeto Usando Realimentação de entrada e saída da planta

A seguir utiliza-se o projeto do controlador via Realimentação de Entrada e Saída aplicado ao sistema *ArduRAJ*, Equação (2.11), reescrita a seguir por conveniência.

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{0,0041132 + 0,0043794z}{0,8411376 - 1,8308441z + z^2} \quad (2.11)$$

O modelo de referência especificado será o mesmo expresso na Equação (4.31), reescrito a seguir, ou seja, além de erro nulo em regime permanente deseja-se uma resposta em malha fechada mais rápida que em malha aberta.

$$G_0(z) = \frac{0,0105377 + 0,0116584z}{0,7497616 - 1,7275655z + z^2} \quad (4.31)$$

Segue-se os passos da Seção 3.4 e suas respectivas equações, observando que $G_0(z)$ é implementável pois: $g(D_0(z)) - g(N_0(z)) \geq g(D(z)) - g(N(z))$. Substituindo o numerador $N(z)$ da função de transferência da planta e a função de transferência do modelo de referência, Equações (2.11) e (4.31), respectivamente, na Equação (3.32), tem-se a Equação (4.50).

$$\begin{aligned} \frac{G_0(z)}{N(z)} &= \frac{N_0(z)}{D_0(z)N(z)} =: \frac{N_p(z)}{D_p(z)} \\ &= \frac{0,0125417 + 0,013939z}{0,0035847 - 0,0045382z - 0,004044z^2 + 0,0052673z^3} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Como o grau de $N_p = \bar{m} = 1$, então a desigualdade $\bar{m} < n - 1$ não é satisfeita, pois $n = 2$. Nesse caso, faz-se $\bar{A} = 1$, resultando na Equação (4.51).

$$A(z) = N_p(z)\bar{A}(z) = 0,0125417 + 0,013939z \quad (4.51)$$

Como $g(A(z)) = 1 = n - 1$, então $g(F(z)) = 2n - 1 = 4 - 1 = 3$. $F(z)$ é dado pela Equações (4.52), respectivamente.

$$\begin{aligned} F(z) &= \bar{A}(z) (D_p(z) - N_p(z)D(z)) \\ &= -0,0067836 + 0,0066934z + 0,0087046z^2 - 0,0086717z^3 \end{aligned} \quad (4.52)$$

Da Equação (3.40) resulta o sistema de Equações (4.53), cuja solução é: $L_0 = -0,0076208$; $M_0 = -0,0982344$; $L_1 = -0,0086717$; $M_1 = 0,1123665$. Substituindo esses resultados na Equação (3.29), tem-se os controladores dados pelas Equações (4.54) e (4.55).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,0049209 & 0 & 0 \\ -1,8143624 & 0,0052673 & 0,8267111 & 0,0049209 \\ 1 & 0 & -1,8143624 & 0,0052673 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 \\ M_0 \\ L_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0067836 \\ 0,0066934 \\ 0,0087046 \\ -0,0086717 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

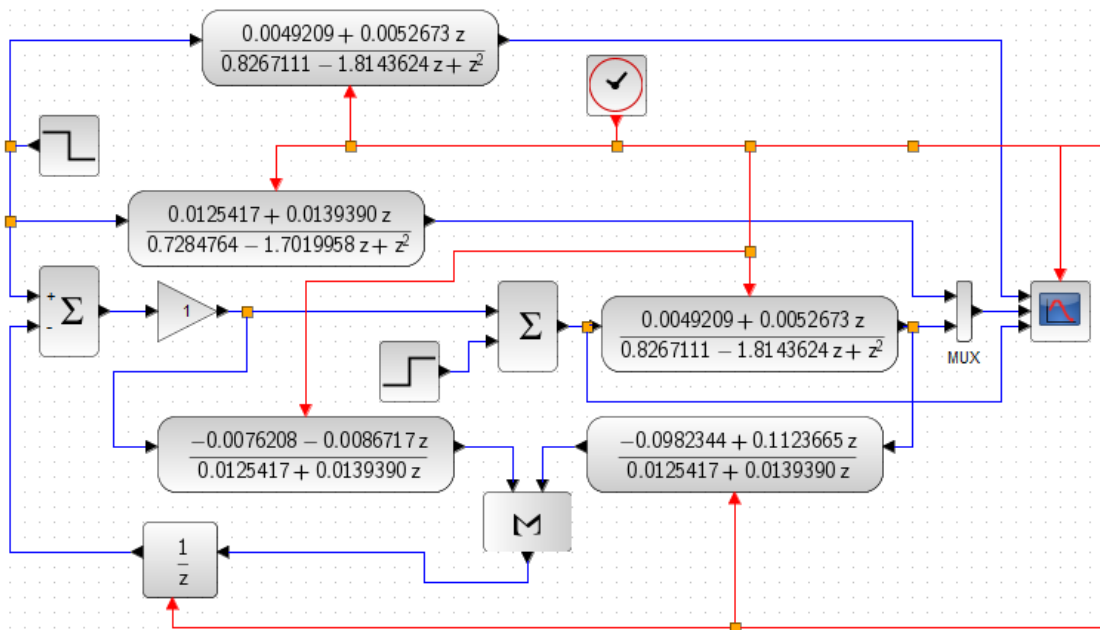
$$C_1(z) = \frac{L(z)}{A(z)} = \frac{-0,0076208 - 0,0086717z}{0,0125417 + 0,0139390z} \quad (4.54)$$

$$C_2(z) = \frac{M(z)}{A(z)} = \frac{-0,0982344 + 0,1123665z}{0,0125417 + 0,0139390z} \quad (4.55)$$

Para simulação desenvolveu-se o diagrama de blocos ilustrado a Figura 4.20, onde se destaca a adição de um atraso de um período de amostragem (z^{-1}) para evitar erro de *loop* algébrico que ocorre devido ao termo L_1 ser diferente de zero. Os resultados da simulação são apresentados na Figura 4.21.

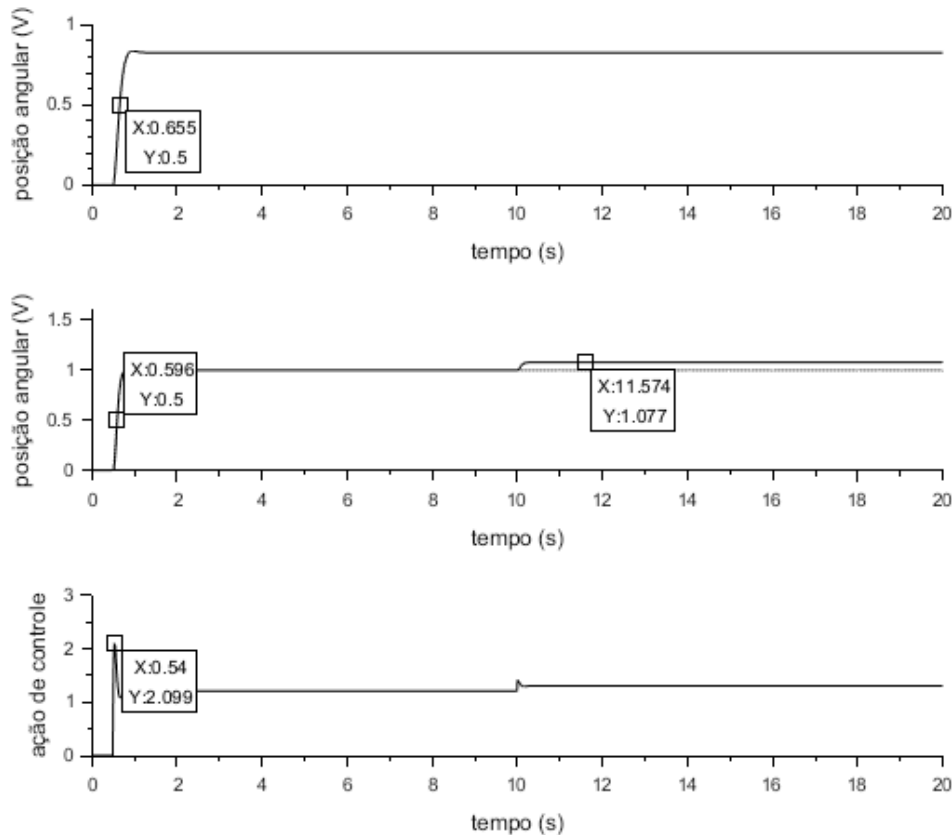
A Figura 4.21 (a) é a resposta ao degrau unitário do sistema *ArduRAJ*, Equação (2.11), em malha aberta. Na Figura 4.21 (b) têm-se as respostas ao degrau unitário do modelo de referência especificado plotada em linha pontilhada, Equação (4.31), e do sistema em malha fechada com os controladores obtidos pela configuração de Realimentação de Entrada e Saída da planta em linha contínua, Equações (4.54) e (4.55), com uma perturbação externa do tipo degrau de amplitude 0,2 aplicada a partir de 10 segundos.

Figura 4.20: Diagrama de blocos do sistema *ArduRAJ* usando controlador obtido por Realimentação de Entrada e Saída.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.21: Resultados a degrau unitário: (a) do *ArduRAJ* em malha aberta; (b) do modelo de referência e do sistema com Controlador por Configuração de Entrada e Saída da Planta (c) a ação de controle.



Fonte: Elaboração própria.

Observa-se na Figura 4.21 (b) que o atraso não compromete o desempenho em malha fechada e nas Figuras 4.21 (b) e 4.21 (a), mais uma vez, que a resposta em malha fechada é mais rápida que a resposta em malha aberta, ou seja, com um intervalo de tempo menor para atingir o valor 0,5 na resposta em malha fechada.

Neste caso, o sistema em malha fechada consegue rastrear o sinal de entrada de modo idêntico ao modelo de referência com erro em regime permanente nulo até o instante $t = 10$ segundos, quando atua a perturbação, e o sistema passa a ter um erro em regime permanente em torno de 7,7%. A Figura 4.21 (c) mostra a ação de controle deste sistema.

4.3. Projetos de Controladores para planta de Fase não Mínima

No Capítulo 2 viu-se que a função de transferência da planta de Fase não Mínima é dada pela Equação (2.12) e seu equivalente discreto dado pela Equação (2.13) com $T_s = 0,01$, repetidas a seguir. Observou-se que sua resposta é lenta, sem sobressinal e com elevado erro de regime.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{-9,8167s + 92,57}{s^2 + 5,3s + 1,9} = \frac{-9,8167(s - 9,4298491)}{s^2 + 5,3s + 1,9} \quad (2.12)$$

$$G(z) = \frac{0,100076 - 0,0910602z}{0,94838 - 1,948195z + z^2} = \frac{-0,0910602(-1,0990095 + z)}{(-0,9961404 + z)(-0,9520546 + z)} \quad (2.13)$$

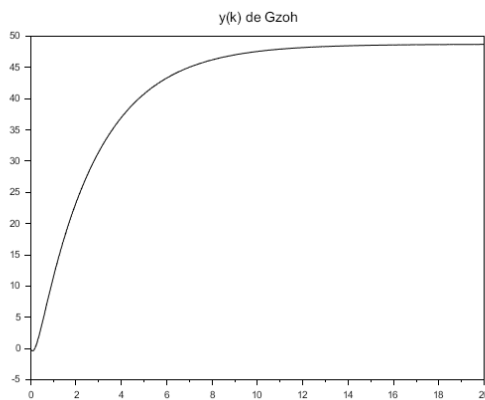
Para que seja satisfeito o corolário apresentado na Seção 3.1, o modelo de referência $G_0(s)$ a ser especificado, obrigatoriamente deve possuir o zero de Fase não Mínima da planta em malha aberta. Assim, adotou-se como modelo de referência o da Equação (4.56), que garante resposta ao degrau unitário igual a um em regime (ganho DC unitário) e com $T_s = 0,01s$ seu equivalente discreto ZOH, $G_0(z)$, é dado pela Equação (4.57).

$$G_0(s) = \frac{-3,1813871(s - 9,4298491)}{s^2 + 12,7s + 30} \quad (4.56)$$

$$G_0(z) = \frac{0,0312401 - 0,0284235z}{0,8807337 - 1,8779171z + z^2} = \frac{-0,0284235(-1,0990944 + z)}{(-0,9691156 + z)(-0,9088014 + z)} \quad (4.57)$$

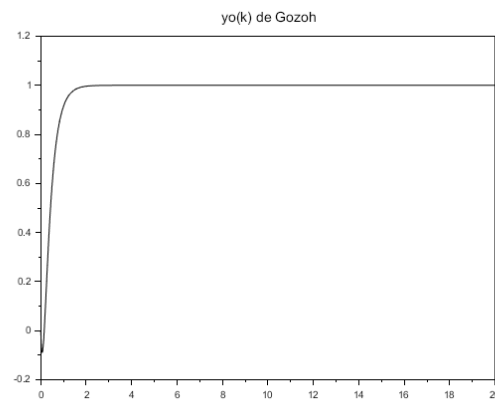
As respostas ao degrau unitário de $G(z)$ e $G_0(z)$ constam na Figura 4.22 e 4.23.

Figura 4.22 – Resposta em tempo discreto do $G(z)$



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.23 – Resposta em tempo discreto do $G_0(z)$



Fonte: Elaboração própria.

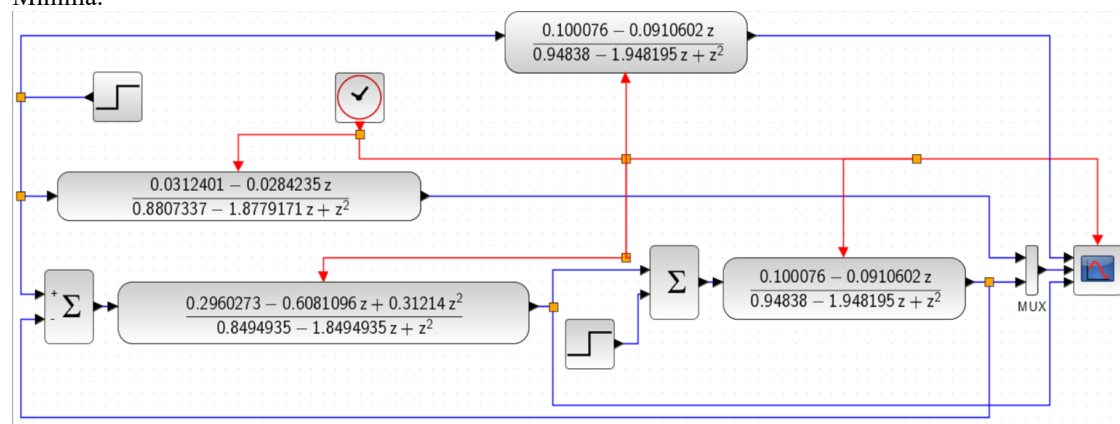
4.3.1. Projeto usando Realimentação Unitária

Utilizando a Equação (3.05), a função de transferência do controlador é dada pela Equação (4.58).

$$C(z) = \frac{G_0(z)}{G(z)(1 - G_0(z))} = \frac{0,2960273 - 0,6081096z + 0,31214z^2}{0,8494935 - 1,8494935z + z^2} \quad (4.58)$$

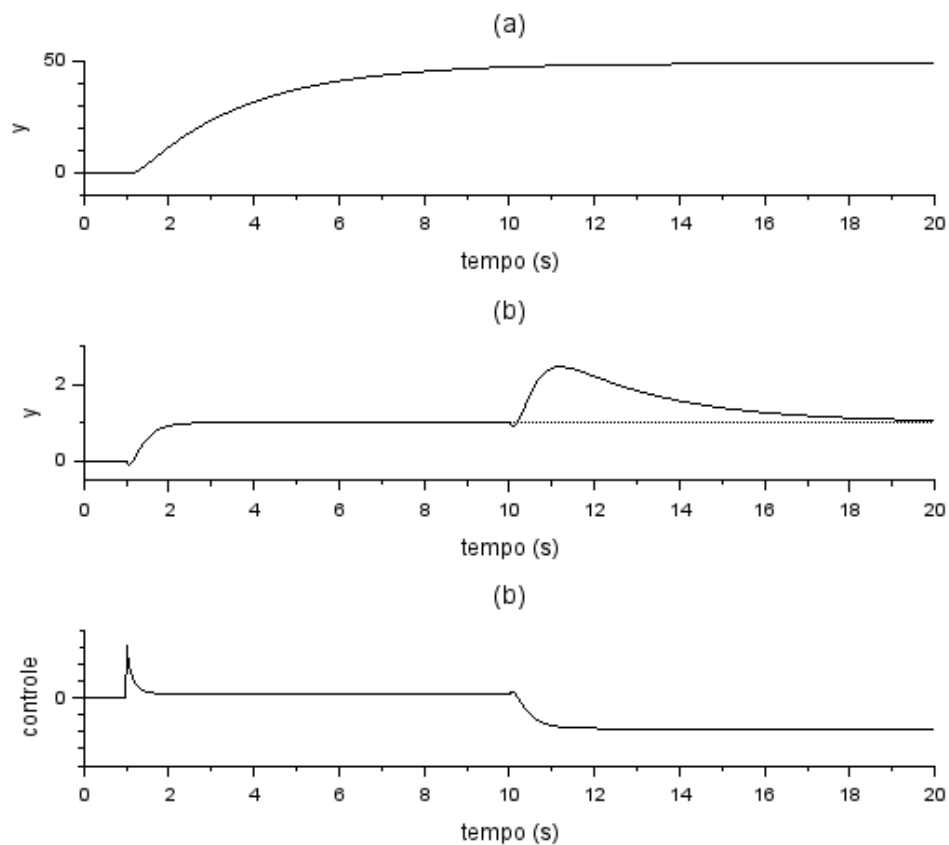
Para simulação desenvolveu-se o diagrama de blocos da Figura 4.24 e os resultados da simulação são apresentados na Figura 4.25.

Figura 4.24: Diagrama de blocos da configuração de Realimentação Unitária com planta de Fase não Mínima.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.25: Resposta ao degrau unitário: (a) do Sistema de Fase Não Mínima em malha aberta; (b) do modelo de referência e do sistema com controle por Realimentação Unitária e em (c) a ação de controle.



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 4.25 (a) tem-se a resposta ao degrau unitário do sistema de Fase não Mínima, Equação (2.13), em malha aberta que é bastante lenta e tem elevado erro em regime permanente.

A Figura 4.25 (b) mostra a resposta ao degrau unitário do modelo de referência, Equação (4.57) (linha pontilhada) e a do sistema em malha fechada com controle por

Realimentação Unitária, Equação (4.58) (linha contínua), com uma perturbação degrau de amplitude 0,2 aplicada em $t = 10$ segundos. Nota-se que a perturbação provoca um sobressinal de amplitude próxima de 2,5, o que pode ser indesejável, e, em seguida a resposta volta para um, anulando o erro em regime.

Na Figura 4.25 (c) tem-se a ação de controle do sistema, que está dentro de limites aceitáveis para o projeto.

4.3.2. Projeto usando Configuração de Dois Parâmetros

Seguindo os passos da Seção 3.3, divide-se a função de transferência do modelo de referência $G_0(z)$, Equação (4.57) pelo numerador $N(z)$ da função de transferência da planta, Equação (2.13), resultando na Equação (4.59) para a obtenção de $N_p(z)$ e $D_p(z)$.

$$\begin{aligned} \frac{G_0(z)}{N(z)} = \frac{N_p(z)}{D_p(z)} &= \frac{-0,0284235(-1,0990944 + z)}{-0,0910602(-0,9691156 + z)(-0,9088014 + z)} \\ &= \frac{0,3121397}{(0,8807336 - 1,8779171z + z^2)} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Para que o controlador rejeite a perturbação é preciso que ele possua um integrador. No caso contínuo significa $A(s)$ possuir uma raiz em zero (polo na origem), no caso discreto significa $A(z)$ possuir uma raiz em 1 (polo no círculo de raio unitário), ou seja, ele tem de ser da forma $A(z) = (z - 1)(A_0 + A_1z)$, assim os controladores $C_1(z)$ e $C_2(z)$ terão um integrador e esse integrador eliminará o efeito da perturbação. Assim $A(z)$ tem de satisfazer a Equação (4.60).

$$A(z) = (z - 1)(A_0 + A_1z) = A_1z^2 + (A_0 - A_1)z - A_0 \quad (4.60)$$

Como $g(D_p(z))$ é $p = 2$ e o grau do denominador de $G_0(z)$ é $n = 2$, o grau de $\overline{D}_p(z) \geq 2n - 1 - p \geq 1$. Adotando $g(\overline{D}_p(z)) = 2$, com $\overline{D}_p(z) = (s + 10)^2$, logo $\overline{D}_p(z) = (z - e^{-10*Ts})^2$. Portanto $\overline{D}_p(z) = 0,8187308 - 1,8096748z + z^2$.

$L(z)$ e $F(z)$ são dados pelas Equações (4.61) e (4.62), respectivamente.

$$L(z) = N_{pfinal}(z) * \overline{D}_p(z) = 0,2555583 - 0,5648713z + 0,3121397z^2 \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} F(z) &= D_{pfinal}(z) * \overline{D}_p(z) \\ &= -0,7210837 - 3,1313499z + 5,0978835z^2 - 3,6875918z^3 \\ &\quad + z^4 \end{aligned} \quad (4.62)$$

Como o $g(F(z)) = 4$, e $n = 2$ então $m = 2$. Assim da Equação (3.25), tem-se a Equação (4.63) com 5 equações e 5 incógnitas (solução única).

$$\begin{bmatrix} -0,94838 & 0,100076 & 0 & 0 & 0 \\ 2,896575 & -0,0910602 & -0,94838 & 0,100076 & 0 \\ -2,948195 & 0 & 2,896575 & -0,0910602 & 0,100076 \\ 1 & 0 & -2,948195 & 0 & -0,0910602 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ M_0 \\ A_1 \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7210837 \\ -3,1313499 \\ 5,0978835 \\ -3,6875918 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resultando: $A_0 = -0,4766412$; $M_0 = 2,6884243$; $A_1 = 1$; $M_1 = -5,5711112$ e $M_2 = 2,8855161$.

Como $A(z) = -A_0 + (A_0 - A_1)z + A_1z^2$ e $M(z) = M_0 + M_1z + M_2z^2$, resulta as Equações (4.64) e (4.65).

$$A(z) = 0,4766412 - 1,4766412z + z^2 \quad (4.64)$$

$$M(z) = 2,6884243 - 5,5711112z + 2,8855161z^2 \quad (4.65)$$

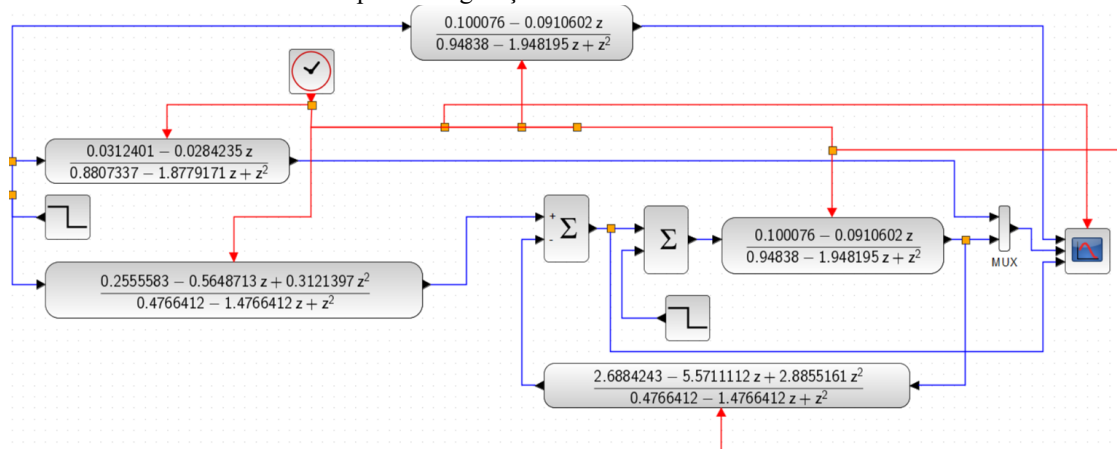
O controlador $C(z) = [C_1(z)C_2(z)]$ é dado pelas Equações (4.66) e (4.67).

$$C_1(z) = \frac{L(z)}{A(z)} = \frac{0,2555583 - 0,5648713z + 0,3121397z^2}{0,4766412 - 1,4766412z + z^2} \quad (4.66)$$

$$C_2(z) = \frac{M(z)}{A(z)} = \frac{2,6884243 - 5,5711112z + 2,8855161z^2}{0,4766412 - 1,4766412z + z^2} \quad (4.67)$$

Para simulação desenvolveu-se o diagrama de blocos da Figura 4.26 e os resultados da simulação são apresentados na Figura 4.27.

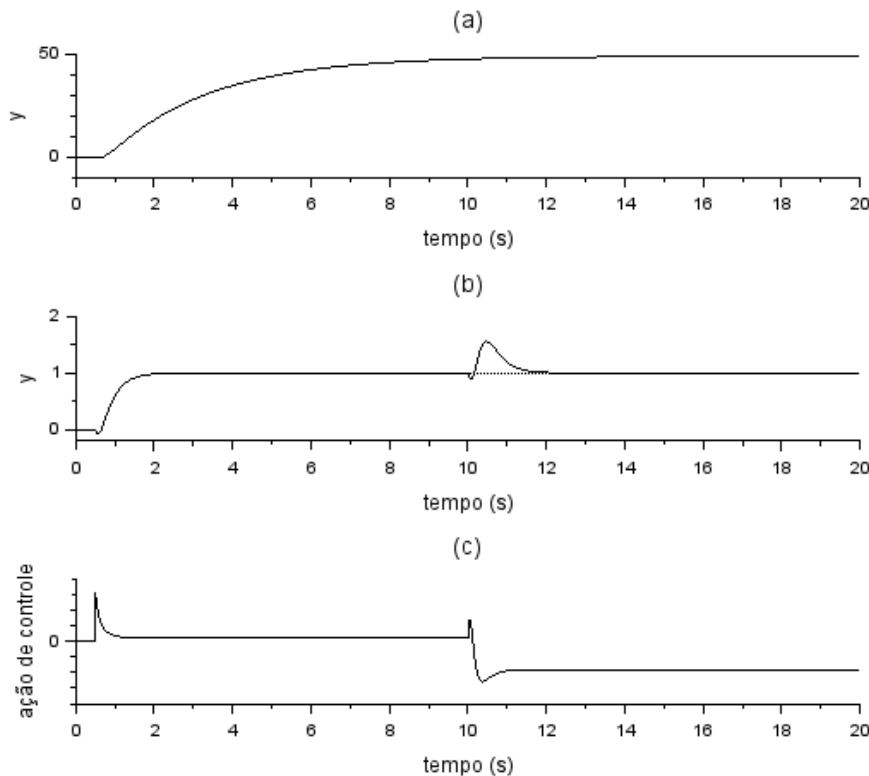
Figura 4.26: Diagrama de blocos do sistema de Fase não Mínima usando controlador obtido por Configuração de Dois Parâmetros.



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 4.27 (a) tem-se a resposta ao degrau unitário do sistema de Fase não Mínima, Equação (2.13), em malha aberta. Na Figura 4.27 (b) têm-se as respostas ao degrau unitário do modelo de referência especificado, Equação (4.57) (linha pontilhada), e do sistema em malha fechada com o controlador projetado via Configuração de Dois Parâmetros (linha contínua), com uma perturbação degrau de amplitude 0,2 aplicada em $t = 10$ segundos.

Figura 4.27: Respostas a degrau unitário: (a) do Sistema de Fase não Mínima em malha aberta; (b) do modelo de referência e do sistema com o controlador obtido por Configuração de Dois Parâmetros e em (c) a ação de controle.



Fonte: Elaboração própria.

Nota-se que a resposta obtida em malha fechada não elimina o efeito de Fase não Mínima, mas segue perfeitamente o sinal do modelo de referência especificado até o instante em que ocorre a perturbação, surgindo então uma variação de amplitude de cerca de 0,5 durante aproximadamente 2 segundos, voltando em seguida a ter erro nulo em regime permanente. Na Figura 4.27 (c) tem-se a ação de controle do sistema.

4.3.3. Projeto usando Configuração de Entrada e Saída

O equivalente discreto ZOH da planta de Fase não Mínima obtido na Seção 2.4.3 é dado pela Equação (2.13). Como modelo de referência adotou-se a função de transferência da Equação (4.57) que contém o zero de Fase não Mínima de $G(z)$ e garante erro nulo em regime permanente.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{0,100076 - 0,0910602z}{0,94838 - 1,948195z + z^2} \quad (2.13)$$

$$G_0(z) = \frac{0,0312401 - 0,0284235z}{0,8807337 - 1,8779171z + z^2} = \frac{-0,0284235(-1,0990944 + z)}{(-0,9691156 + z)(-0,9088014 + z)} \quad (4.57)$$

Como $g(D_0(z)) - g(N_0(z)) = g(D(z)) - g(N(z))$, então $C_0(z) = 1$, conforme estabelecido na Seção 3.4. Seguindo os passos da referida Seção, divide-se a função de transferência do modelo de referência da Equação (4.57) por $N(z)$ da Equação (2.13) gerando a Equação (4.68).

$$\frac{G_0(z)}{N(z)} =: \frac{N_p(z)}{D_p(z)} = \frac{0,3121397}{(z - 0,9691156)(z - 0,9088014)} = \frac{0,3121397}{0,8807336 - 1,877917z + z^2} \quad (4.68)$$

Como $n = 2$ e o grau de $N_p(z) = \bar{m} = 0$, então a desigualdade $\bar{m} < n - 1$ é satisfeita assim, o polinômio Hurwitz arbitrário $\bar{A}(z)$ terá grau igual a $n - 1 - \bar{m} = 1$. Nesse caso, fez-se $\bar{A} = z - \exp^{-300T_s}$, resultando na Equação (4.69).

$$A(z) = N_p \bar{A}(z) = 0,3121397(z - 0,0497871) = (-0,0155405 + 0,3121397z) \quad (4.69)$$

Da Equação (3.39), Seção 3.4 resulta que $F(z)$ é dado pela Equação (4.70) e o sistema de equações da Equação (3.40) resulta na Equação (4.71) cuja solução gera os controladores das Equações (4.72) e (4.73).

$$F(z) = \bar{A}(z)[D_p - N_p D] = -0,0291108 + 0,6479266z - 1,3040546z^2 + 0,6878603z^3 \quad (4.70)$$

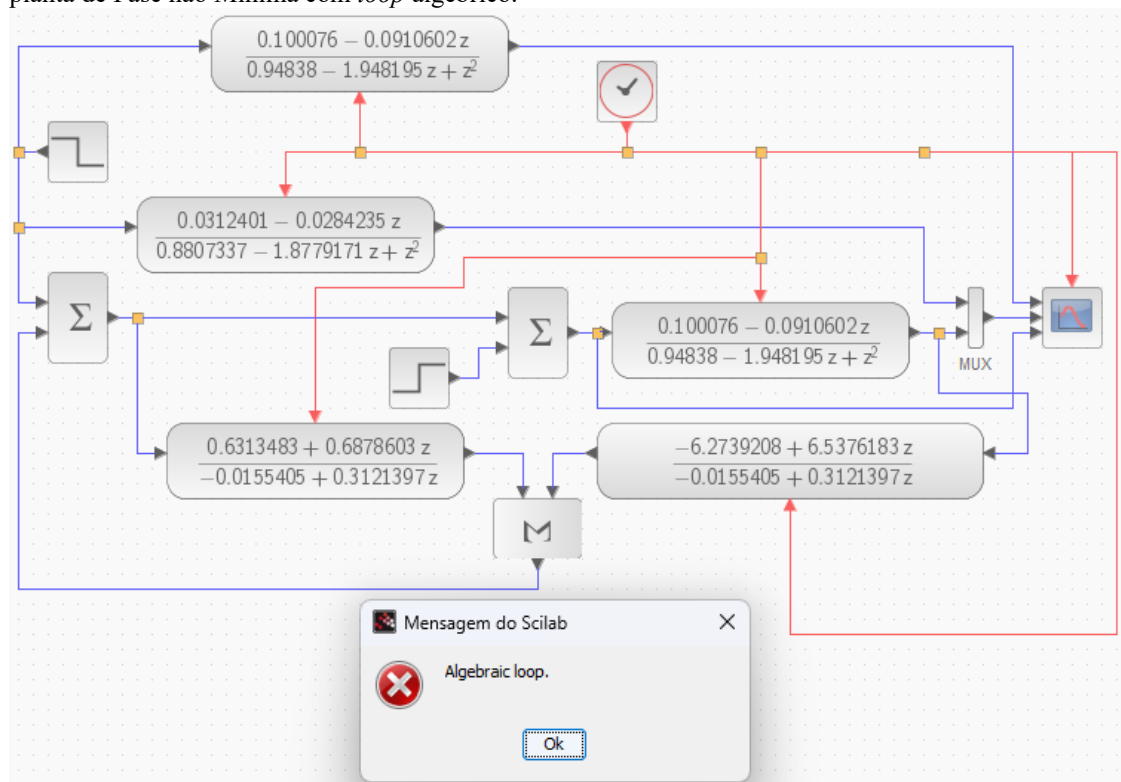
$$\begin{bmatrix} 1 & 0,0049209 & 0 & 0 \\ -1,8143624 & 0,0052673 & 0,8267111 & 0,0049209 \\ 1 & 0 & -1,8143624 & 0,0052673 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 \\ M_0 \\ L_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0067836 \\ 0,0066934 \\ 0,0087046 \\ -0,0086717 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

$$C_1(z) = \frac{L(z)}{A(z)} = \frac{0,6313483 + 0,6878603z}{-0,0155405 + 0,3121397z} \quad (4.72)$$

$$C_2(z) = \frac{M(z)}{A(z)} = \frac{-6,2739208 + 6,5376183z}{-0,0155405 + 0,3121397z} \quad (4.73)$$

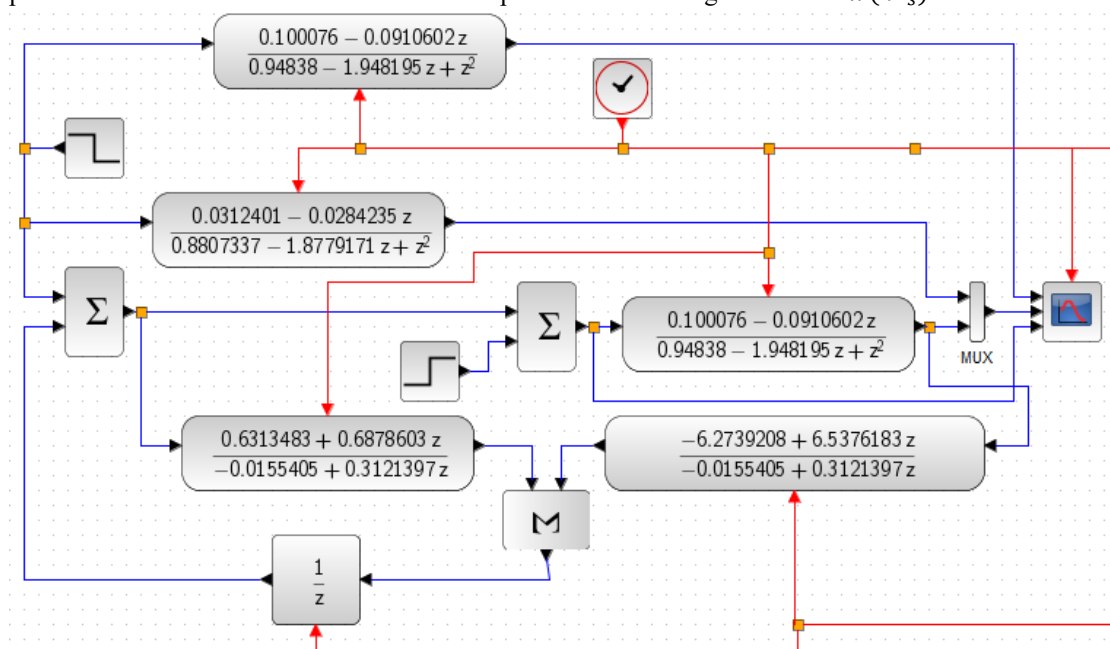
Como no controlador $C_1(z)$ o grau de $L(z)$ é igual ao grau de $A(z)$, resulta em erro de *loop* algébrico na simulação como visto na Figura 4.28 e caso se inclua um atraso no sinal $w(kT_s)$ resultando na Figura 4.29, o sistema fica instável como visto na Figura 4.30.

Figura 4.28: Diagrama de blocos da configuração de Realimentação de Entrada e Saída da planta de Fase não Mínima com *loop* algébrico.



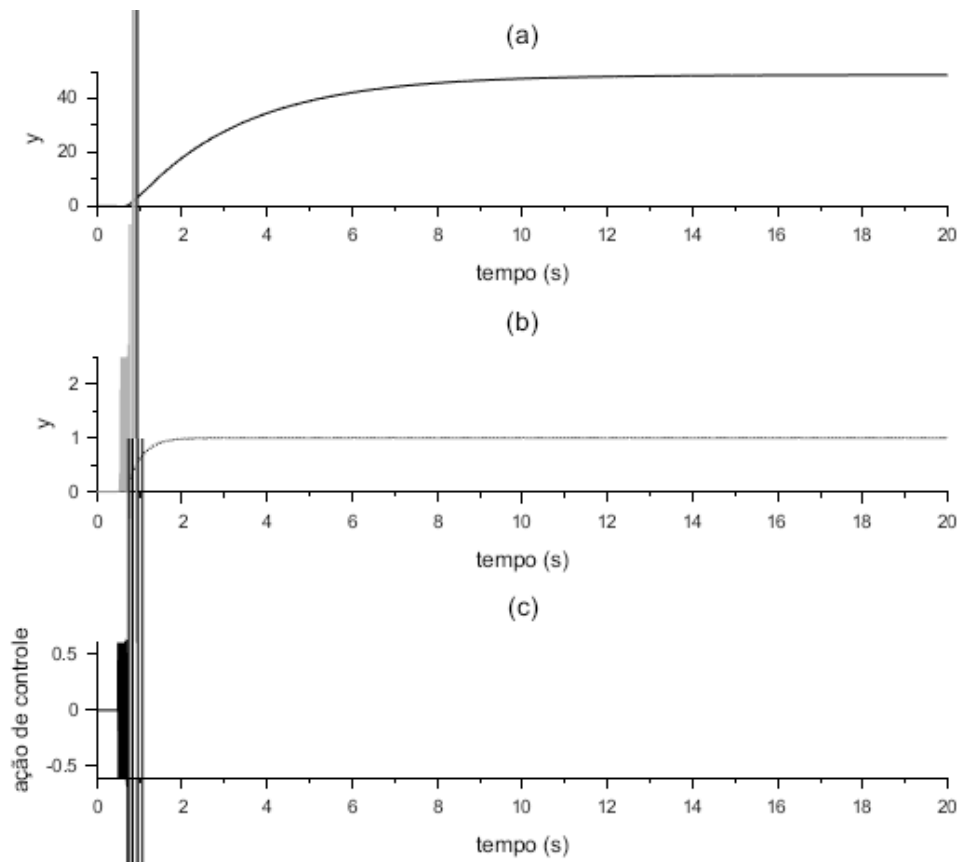
Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.29: Diagrama de blocos da configuração de Realimentação de Entrada e Saída da planta de Fase não Mínima com atraso de um período de amostragem no sinal $w(kT_s)$



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.30: Respostas ao degrau unitário com *atraso de um período de amostragem no sinal* $w(kT_s)$. (a) do Sistema em malha aberta; (b) do modelo de referência e do sistema com o controlador obtido por Configuração de Entrada e Saída e em (c) a ação de controle.



Fonte: Elaboração própria.

Para evitar o erro de *loop* algébrico o grau de $L(z)$ tem de ser menor que o grau de $A(z)$ restando como primeira alternativa aumentar o grau de $A(z)$ mantendo o grau de $L(z)$ uma unidade a menos.

Primeira alternativa:

Seja uma nova $G_0(z)$, Equação (4.74), sendo “ p ” um polo não dominante. Observa-se que a igualdade $g(D_0(z)) - g(N_0(z)) = g(D(z)) - g(N(z))$, é satisfeita então $C_0(z) = 1$.

$$G_0(z) = \frac{-0,0284235(z - 1,0990944)(z - p)}{(z - 0,9691156)(z - 0,9088014)(z - p)} \quad (4.74)$$

Então têm-se a Equação (4.75) que é idêntica a Equação (4.68), ou seja, o polinômio $A(z)$ terá grau 1 e não haverá mudanças nos resultados.

$$\frac{G_0(z)}{N(z)} =: \frac{N_p(z)}{D_p(z)} = \frac{0,3121397}{(z - 0,9691156)(z - 0,9088014)} \quad (4.75)$$

Segunda alternativa:

Com a segunda alternativa pode-se usar a desigualdade $g(D_0(z)) - g(N_0(z)) \geq g(D(z)) - g(N(z))$ e permitir que $C_0(z)$ seja um número real qualquer. Para tanto deve-se utilizar a função de transferência de malha fechada dada pela Equação (4.76)

$$G_{mf}(z) = \frac{Y(z)}{Ref(z)} = \frac{C_0 N(z) A(z)}{A(z) D(z) + L(z) D(z) C_0 + N(z) M(z) C_0} \quad (4.76)$$

Sendo $G_0(z)$ ainda dada pela Equação (4.57), e que deve ser igualada a Equação (4.69), como o $g(D(z)) = 2$, então $g(A(z))$ e $g(L(z))$ tem de ser igual a zero para garantir que o grau de $A(z)D(z) + C_0L(z)D(z) + C_0M(z)N(z)$ seja igual ao grau do denominador de $G_0(z)$ e o grau de $M(z)$ tem de ser igual a zero para garantir que $\frac{M(z)}{A(z)}$ seja causal já que o grau de $A(z)$ é zero.

Então sejam: $A = A_0$, $L = L_0$ e $M = M_0$. Mostra-se no APÊNDICE G que com essas três condições não existe solução para a igualdade $G_{mf}(z) = G_0(z)$.

Terceira alternativa:

Para obter uma solução só aumentando o grau do denominador de $G_0(z)$ permitindo que $A(z)$ tenha grau 1 e de tal modo que o grau de $A(z)D(z)$ seja igual a 3.

Assim, sendo $A(z)$ de grau 1, então o grau de $N(z)A(z)$ é igual a 2, mas o grau do numerador de $G_0(z)$ é 1, então tem de aumentar o grau do numerador de $G_0(z)$. Isso significa que é necessário incluir um polo e um zero (estáveis) em $G_0(z)$. Assim, serão incluídos um polo e um zero, ambos situados em 0.1 em $G_0(z)$ conforme a Equação (4.77).

$$\begin{aligned} G_0(z) &= \frac{(0,0312401 - 0,0284235z)(z - 0,1)}{(0,8807337 - 1,8779171z + z^2)(z - 0,1)} \\ &= \frac{-0,0284235(z - 1,0990944)(z - 0,1)}{(z - 0,9691156)(z - 0,9088014)(z - 0,1)} \end{aligned} \quad (4.77)$$

Sendo o equivalente discreto ZOH da planta dado pela Equação (2.13), $G(z)$, então serão igualados os numeradores e denominadores das funções de transferência do sistema em malha fechada, $G_{mf}(z)$, e do modelo de referência, $G(z)$, Equações (4.69) e (4.70) respectivamente.

Para que os denominadores sejam iguais é necessário que $g(A(z))$ seja igual a 1, pois $g(D(z))$ é igual a dois, então seja $A(z) = A_0 + A_1z$. Sendo $A(z)$ de grau um e para que não ocorra *loop* algébrico, $L(z)$ tem de ser de grau zero, então $L = L_0$, ou seja $L_1 = 0$. Por fim, sendo $N(z)$ de grau um, $M(z)$ pode ser de grau menor ou igual a dois, adotando grau um tem-se, $M(z) = M_0 + M_1z$.

A igualdade pode ser estabelecida para os numeradores visto que o grau de $N(z)$ é um e o grau de $A(z)$ também é um.

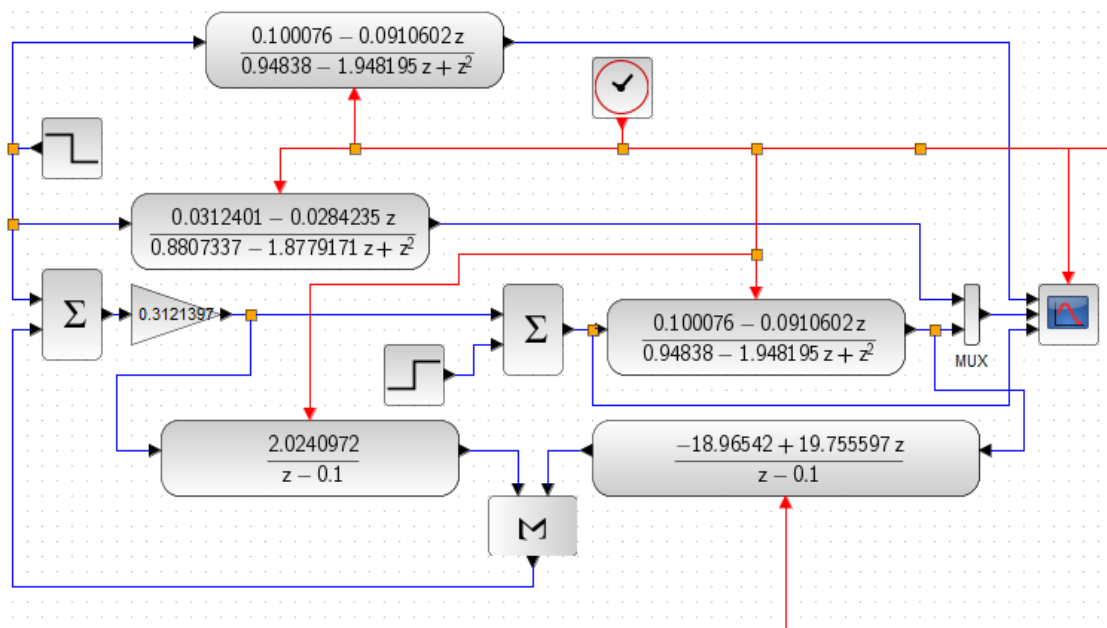
Nessas condições no APÊNDICE H desenvolve-se todas as equações e obtém-se os controladores expressos nas Equações (4.79) e (4.80).

$$C_0 = 0,3121397 \quad (4.78)$$

$$C_1(z) = \frac{L(z)}{A(z)} = \frac{2,0240972}{z - 0,1} \quad (4.79)$$

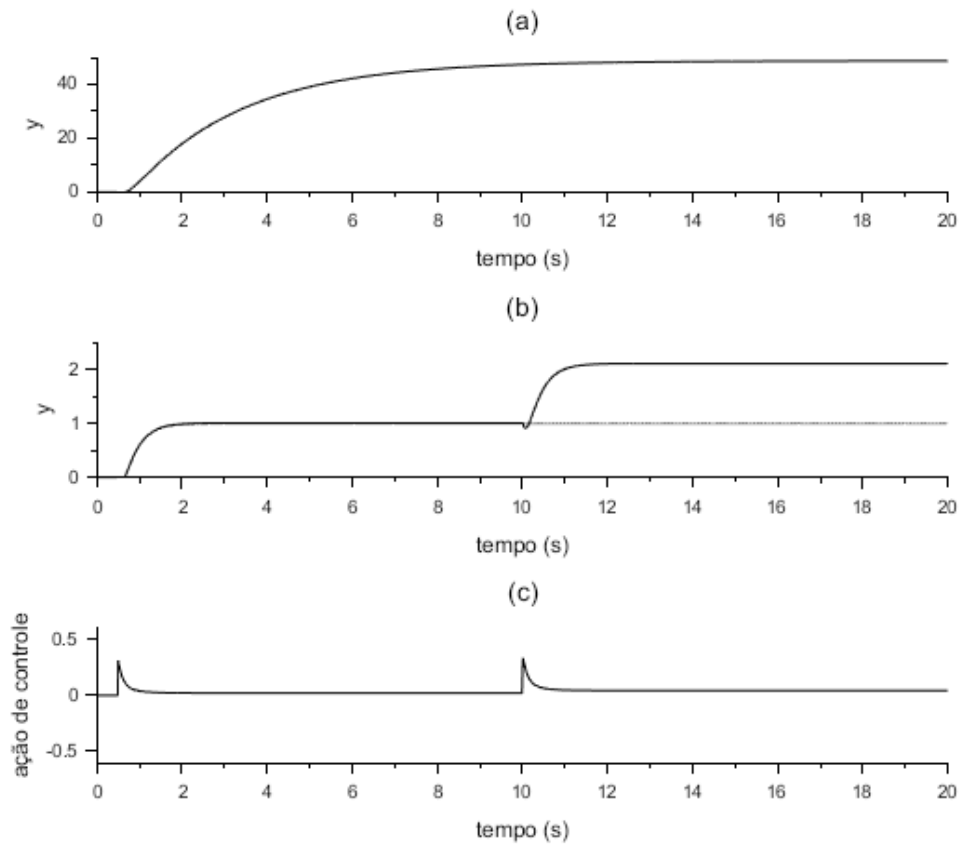
$$C_2(z) = \frac{M(z)}{A(z)} = \frac{-18,96542 + 19,755597z}{z - 0,1} \quad (4.80)$$

Figura 4.31: Diagrama de blocos da configuração de Realimentação de Entrada e Saída da planta de Fase não Mínima com controlador da Terceira Alternativa.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.32: Respostas a degrau unitário com o controlador da Terceira Alternativa: (a) do Sistema em malha aberta; (b) do modelo de referência e do sistema com o controlador obtido por Configuração de Entrada e Saída e em (c) a ação de controle.



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 4.32 observa-se que o controlador garante que o sistema em malha fechada tenha um comportamento idêntico ao do modelo de referência $G_0(z)$, contudo, diante da perturbação externa apresenta um erro de regime permanente de 100%, o que não é admissível.

Quarta alternativa:

Para garantir a rejeição ao distúrbio é necessário considerar o numerador da função de malha fechada entre a saída $Y(z)$ e a perturbação $P(z)$, Equação (4.81)

$$Gmf = \frac{Y(z)}{P(z)} = \frac{N(z)[A(z) + L(z)C_0]}{A(z)D(z) + L(z)D(z)C_0 + N(z)M(z)C_0} \quad (4.81)$$

Para ter rejeição de distúrbio, pelo Teorema do Valor Final, Equação (4.82), o numerador de $\frac{Y(z)}{P(z)}$ tem de ser nulo para $z = 1$, ou seja, $N(1)[A(1) + L(1)C_0] = 0$. Mas como $N(z) = -0,0910602(z - 1,0990095)$, Equação (2.13), então $N(1)$ não é nulo, restando, portanto, a Equação (4.83) a ser satisfeita.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F(z) \quad (4.82)$$

$$A(1) + L(1)C_0 = 0 \quad (4.83)$$

Supondo que se use os polinômios especificados na terceira alternativa, isto é, $A(z) = A_0 + A_1z$, $L = L_0$, $M(z) = M_0 + M_1z$ e C_0 sendo um número real, da Equação (4.83) resulta a Equação (4.84) que é uma restrição adicional para o problema.

$$A_0 + A_1 + L_0C_0 = 0 \quad (4.84)$$

No APÊNDICE I esta restrição é considerada e mostra-se que o problema não tem solução. Para satisfazer a Equação (4.84) é necessário que $A(z)$ tenha pelo menos grau dois.

Quinta alternativa:

Sendo o equivalente discreto ZOH da planta a ser controlada dada pela Equação (2.13), para garantir o rastreamento do sinal de referência, os polinômios do numerador e do denominador da função de transferência da malha fechada, $G_{mf}(z)$ entre a saída $Y(z)$ e referência $U(z)$, Equação (4.76), tem de ser iguais aos polinômios do numerador e do denominador de um modelo de referência $G_0(z)$.

Se o polinômio $A(z)$ é de grau dois, Equação (4.85), então o polinômio $L(z)$ poderia ser de grau dois também, contudo, para não haver *loop* algébrico será adotado como de grau um ($L_2 = 0$), Equação (4.86). Sendo $A(z)D(z)$ de grau quatro e $N(z)$ de grau um, $M(z)$ poderia ser de grau três, porém será adotado grau dois, Equação (4.87). Sendo $A(z)D(z)$ de grau quatro então o denominador de $G_0(z)$ tem de ser de grau quatro, assim ela será adotada conforme a Equação (4.88). Finalmente para garantir a rejeição de distúrbio deve-se assegurar a Equação (4.89) que resulta na (4.90).

$$A(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 \quad (4.85)$$

$$L = L_0 + L_1z \quad (4.86)$$

$$M(z) = M_0 + M_1z + M_2z^2 \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} G_0(z) &= \frac{(0,0312401 - 0,0284235z)(z - 0,1)}{(0,8807337 - 1,8779171z + z^2)(z - 0,1)} \\ &= \frac{-0,0284235(z - 1,0990944)(z - 0,9)(z - 0,9)}{(z - 0,9691156)(z - 0,9088014)(z - 0,9)(z - 0,9)} \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$A(1) + L(1)C_0 = 0 \quad (4.89)$$

$$A_0 + A_1 + A_2 + L_0C_0 + L_1C_0 = 0 \quad (4.90)$$

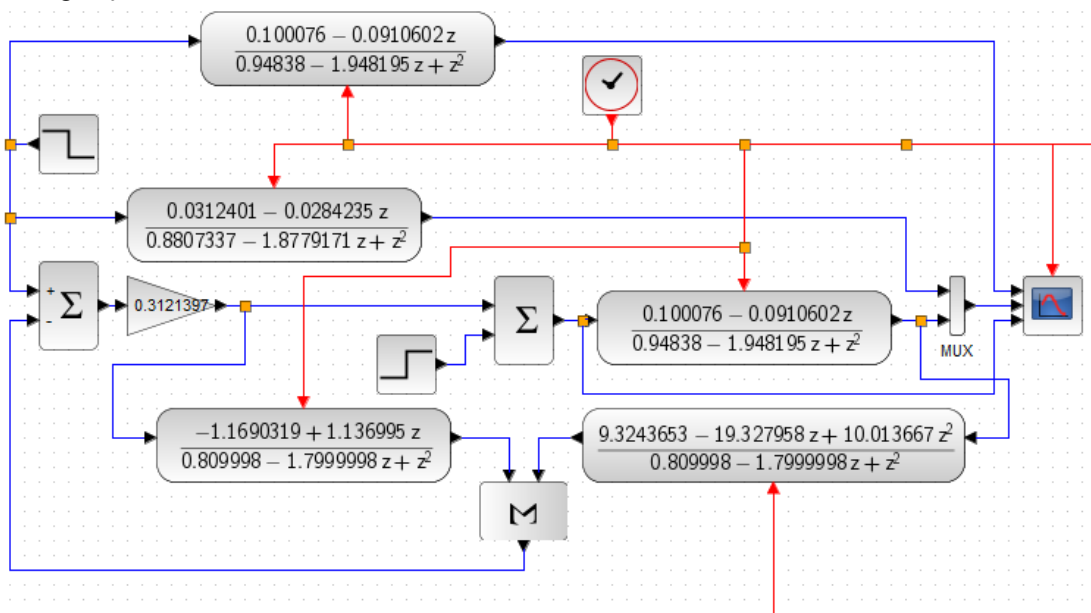
Nessas condições no APÊNDICE J mostra-se que o controlador $C(z) = [C_1(z)C_2(z)]$ é dado pelas Equações (4.91) e (4.92).

$$C_1(z) = \frac{L(z)}{A(z)} = \frac{-1,1690319 + 1,136995z}{0,809998 - 1,7999998z + z^2} \quad (4.91)$$

$$C_2(z) = \frac{M(z)}{A(z)} = \frac{9,3243653 - 19,327958z + 10,013667z^2}{0,809998 - 1,7999998z + z^2} \quad (4.92)$$

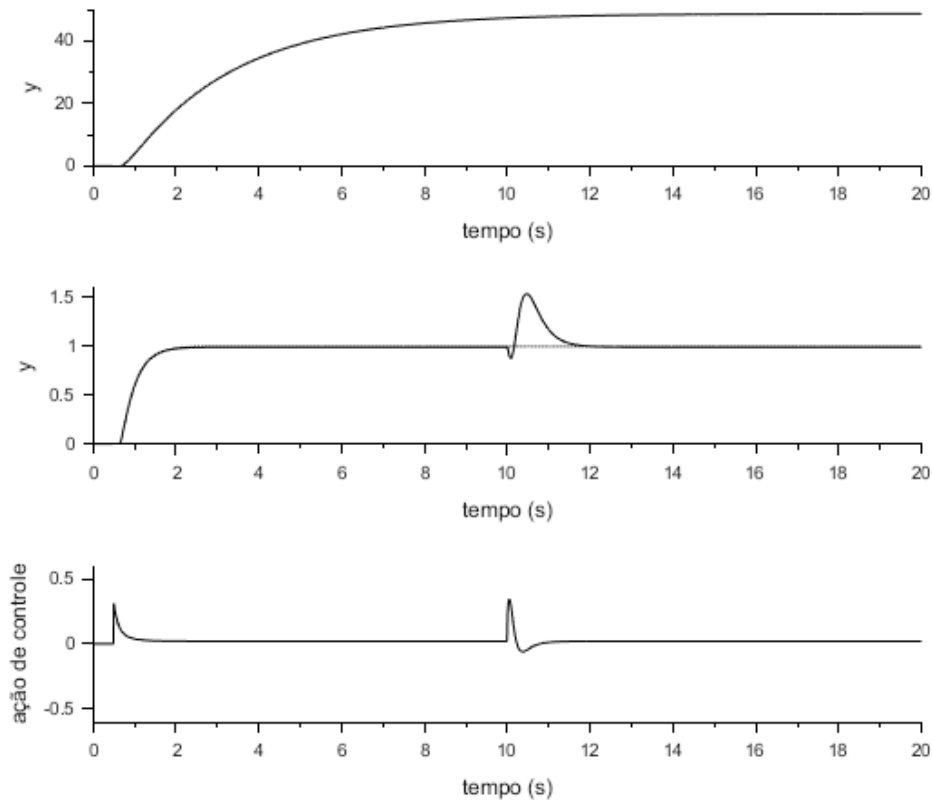
A Figura 4.33 ilustra o diagrama de blocos para simulação do sistema de Fase não Mínima e a Figura 4.34 ilustra os resultados obtidos.

Figura 4.33: Diagrama de blocos do sistema de Fase não Mínima usando controlador obtido por Configuração de Entrada e Saída.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.34: Respostas a degrau unitário: (a) do Sistema de Fase não Mínima em malha aberta; (b) do modelo de referência e do sistema com o controlador obtido por Configuração de Entrada e Saída e em (c) a ação de controle.



Fonte: Elaboração própria.

Observa-se que o sistema em malha fechada rastreia a referência de entrada de modo idêntico ao modelo de referência com erro em regime permanente nulo até o instante em que ocorre a perturbação externa, $t = 10$ segundos que provoca um erro de 50%, mas que retorna a zero em menos de 2 segundos.

4.4. Projetos de Controladores para a planta: Pêndulo Amortecido

Para o projeto de um controlador discreto para a planta Pêndulo Amortecido (PAM), Equação (2.14), com equivalente discreto ZOH da Equação (2.15) para $T_s = 0,01$, repetidas a seguir, utilizou-se o modelo de referência $G_0(s)$ da Equação (4.93) com equivalente discreto ZOH dado pela Equação (4.94) para $T_s = 0,01$.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{10,19}{s^2 + 0,8451s + 9,131} \quad (2.14)$$

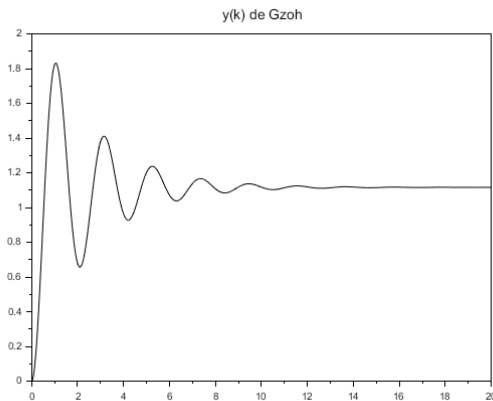
$$G(z) = \frac{0,0005066 + 0,000508z}{0,9915846 - 1,9906754z + z^2} \quad (2.15)$$

$$G_0(s) = \frac{N_0(s)}{D_0(s)} = \frac{50,95}{s^2 + 9,9931s + 50,95} \quad (4.93)$$

$$G_0(z) = \frac{0,002383 + 0,0024637z}{0,9048999 - 1,9000532z + z^2} \quad (4.94)$$

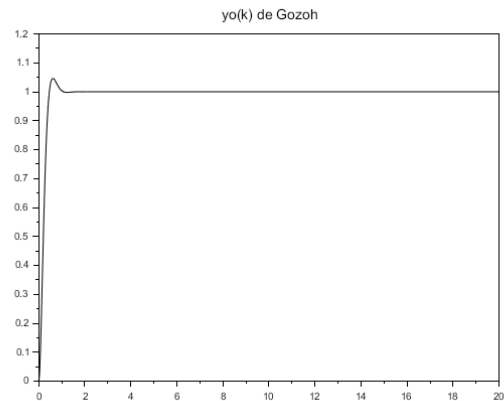
Como observado no Capítulo 2, o sistema PAM é extremamente oscilatório, com elevado sobre sinal e tempo de estabilização longo. As Figuras 4.35 e 4.36 ilustram as respostas ao degrau unitário de $G(z)$ e $G_0(z)$

Figura 4.35 - Resposta ao degrau de $G(z)$



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.36 – Resposta ao degrau de $G_0(z)$



Fonte: Elaboração própria.

4.4.1 Projeto usando Realimentação Unitária

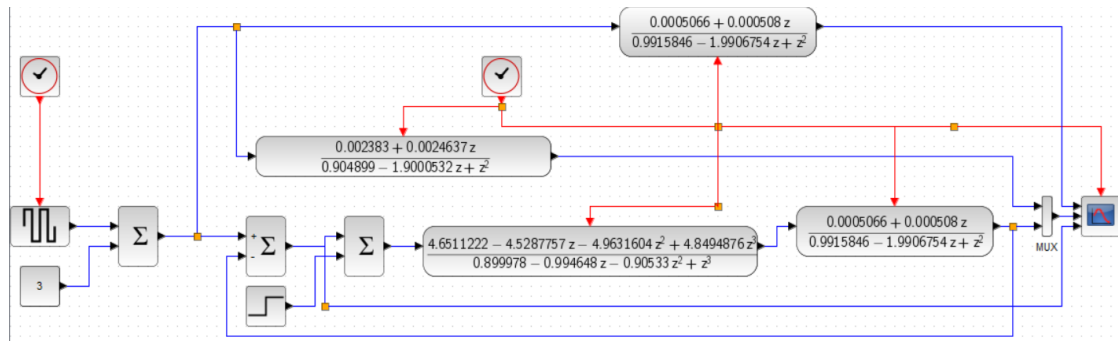
Utilizando a Equação (3.05), a função de transferência do controlador é dada pela Equação 4.95.

$$C(z) = \frac{G_0(z)}{G(z)(1 - G_0(z))} = \frac{4,6511222 - 4,5287757z - 4,9631604z^2 + 4,8494876z^3}{0,899978 - 0,994648z - 0,90533z^2 + z^3} \quad (4.95)$$

Para simulação desenvolveu-se o diagrama de blocos da Figura 4.37 e os resultados na simulação são apresentados na Figura 4.38.

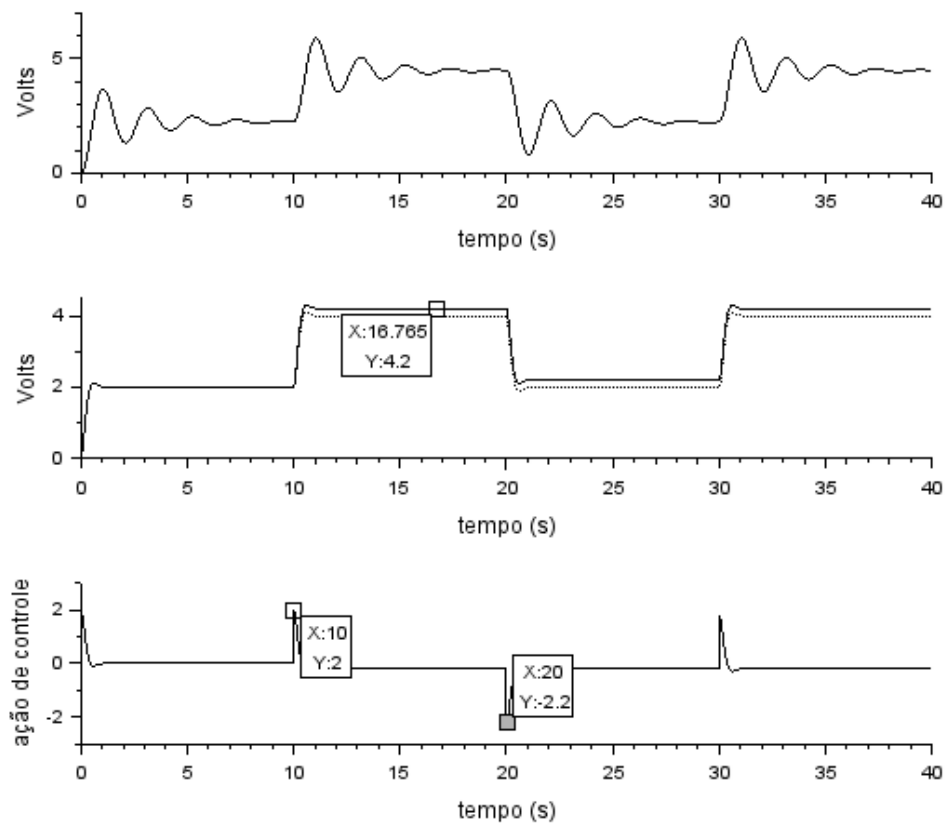
Na Figura 4.38 (a) tem-se a resposta do sistema PAM, Equação (2.15), em malha aberta a uma onda quadrada, de período $T = 20$ segundos com amplitude variando de 2 a 4. A troca do degrau pela onda quadrada no pêndulo amortecido se deve ao fato de que, sendo um sistema oscilatório, ele mostra melhor suas características de amortecimento, e dissipação de energia quando submetido a uma entrada periódica, enquanto os demais sistemas são mais bem caracterizados pela clássica resposta ao degrau. Na Figura 4.38 (b) tem-se a resposta a onda quadrada citada anteriormente, do modelo de referência especificado, Equação (4.94) (linha pontilhada), e do sistema em malha fechada, linha contínua, com o controlador obtido por Realimentação Unitária, Equação (4.95), com uma perturbação degrau de amplitude 0,2 aplicada em $t = 10$ segundos.

Figura 4.37: Diagrama de blocos da configuração de Realimentação Unitária aplicada a planta Pêndulo Amortecido Invertido



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.38: Respostas a uma onda quadrada, de período $T = 20$ segundos com amplitude variando de 2 a 4 Volts: (a) do PAM em malha aberta; (b) do modelo de referência e do sistema com controlador por Realimentação Unitária (c) a ação de controle.



Fonte: Elaboração própria.

Observa-se que o sistema em malha fechada rastreia a onda quadrada de entrada de modo idêntico ao modelo de referência com erro em regime permanente nulo até o instante em que ocorre a perturbação externa, $t = 10$ segundos. Então a resposta sofre uma variação de 5% em relação ao sinal de entrada e o erro é mantido até o final da simulação. Na Figura 4.38 (c) tem-se a ação de controle do sistema.

4.4.2 Projeto usando Configuração de Dois Parâmetros

Seguindo os passos da Seção 3.3, divide-se a função de transferência do modelo de referência $G(z)$, Equação (4.94) pelo numerador $N(z)$ da função de transferência da planta, Equação (2.15), resultando na Equação (4.96) para a obtenção de $N_p(z)$ e $D_p(z)$.

$$\begin{aligned} \frac{G_0(z)}{N(z)} &= \frac{N_0(z)}{D_0(z)N(z)} =: \frac{N_p(z)}{D_p(z)} \\ &= \frac{0,002383 + 0,0024637z}{0,0030839 - 0,0038223z - 0,0034525z^2 + 0,0043794z^3} \end{aligned} \quad (4.96)$$

Como o grau de D_p é $p = 3$ e o grau do denominador $G_{0zoh}(z)$ é $n = 2$, o grau de $\overline{D}_p(z) \geq 2n - 1 - p \geq 0$. Será adotado o grau de $\overline{D}_p(z) = 1$, sendo $\overline{D}_p(s) = (s + 100)$, logo $\overline{D}_p(z) = z - e^{-100*Ts}$. Portanto $\overline{D}_p(z) = -0,3678794 + z$.

$L(z)$ e $F(z)$ são dados pelas Equações (4.97) e (4.98), respectivamente.

$$L(z) = N_{pfinal}(z)\overline{D}_p(z) = -0,0008766 + 0,0014766z + 0,0024637z^2 \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} F(z) &= D_{pfinal}(z)\overline{D}_p(z) \\ &= -0,0001686 + 0,0006434z - 0,0003341z^2 - 0,0006456z^3 \\ &\quad + 0,000508z^4 \end{aligned} \quad (4.98)$$

Como o grau de $F(z)$ é 4 e $n = 2$, então $m = 2$. Assim da Equação (3.25), tem-se a Equação (4.99) com 5 equações e 6 incógnitas, ou seja, tem infinitas soluções. Para resolvê-lo faz-se $A_0 = 0$, produzindo a equação (4.100).

$$\begin{bmatrix} 0,9915846 & 0,0005066 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,9906754 & 0,000508 & 0,9915846 & 0,0005066 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1,9906754 & 0,000508 & 0,9915846 & 0,0005066 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1,9906754 & 0,000508 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ M_0 \\ A_1 \\ M_1 \\ A_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0001686 \\ 0,0006434 \\ -0,0003341 \\ -0,0006456 \\ 0,000508 \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

$$\begin{bmatrix} 0,0005066 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,000508 & 0,9915846 & 0,0005066 & 0 & 0 \\ 0 & -1,9906754 & 0,000508 & 0,9915846 & 0,0005066 \\ 0 & 1 & 0 & -1,9906754 & 0,000508 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ A_1 \\ M_1 \\ A_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0001686 \\ 0,0006434 \\ -0,0003341 \\ -0,0006456 \\ 0,000508 \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

Resultando que: $M_0 = -0,3328069$; $A_1 = 0,0005065$; $M_1 = 0,6122825$; $A_2 = 0,000508$; $M_2 = -0,2773293$.

Como $A(z) = -A_0 + (A_0 - A_1)z + A_1z^2$ e $M(z) = M_0 + M_1z + M_2z^2$, resulta as Equações (4.101) e (4.102).

$$A(z) = 0,0005065z + 0,000508z^2 \quad (4.101)$$

$$M(z) = -0,3328069 + 0,6122825z - 0,2773293z^2 \quad (4.102)$$

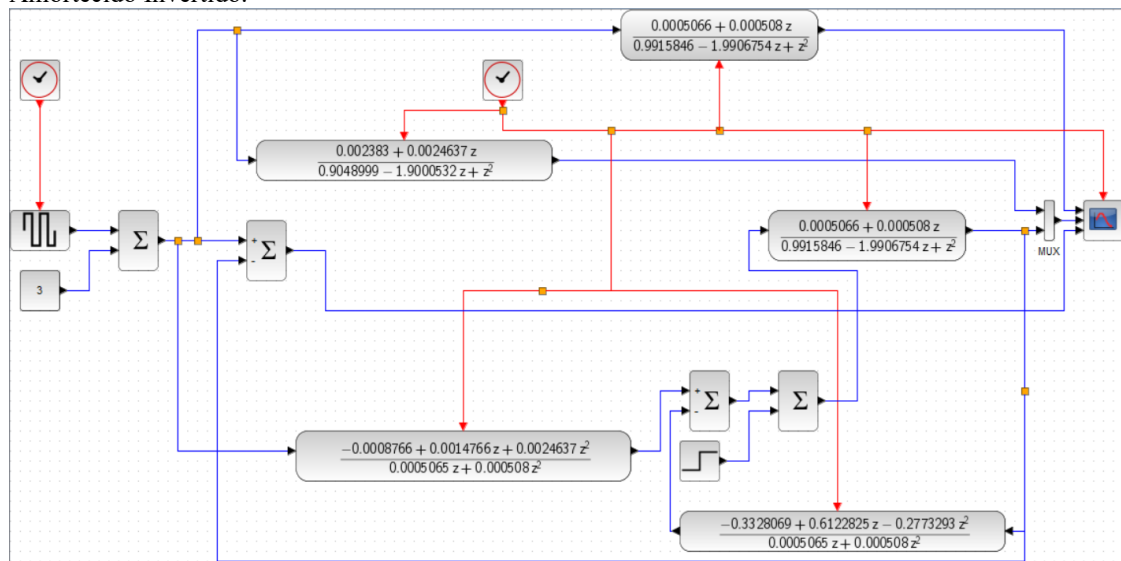
O controlador $C(z) = [C_1(z)C_2(z)]$ é dado pelas Equações (4.103) e (4.104).

$$C_1(z) = \frac{L(z)}{A(z)} = \frac{-0,0008766 + 0,0014766z + 0,0024637z^2}{0,0005065z + 0,000508z^2} \quad (4.103)$$

$$C_2(z) = \frac{M(z)}{A(z)} = \frac{-0,3328069 + 0,6122825z - 0,2773293z^2}{0,0005065z + 0,000508z^2} \quad (4.104)$$

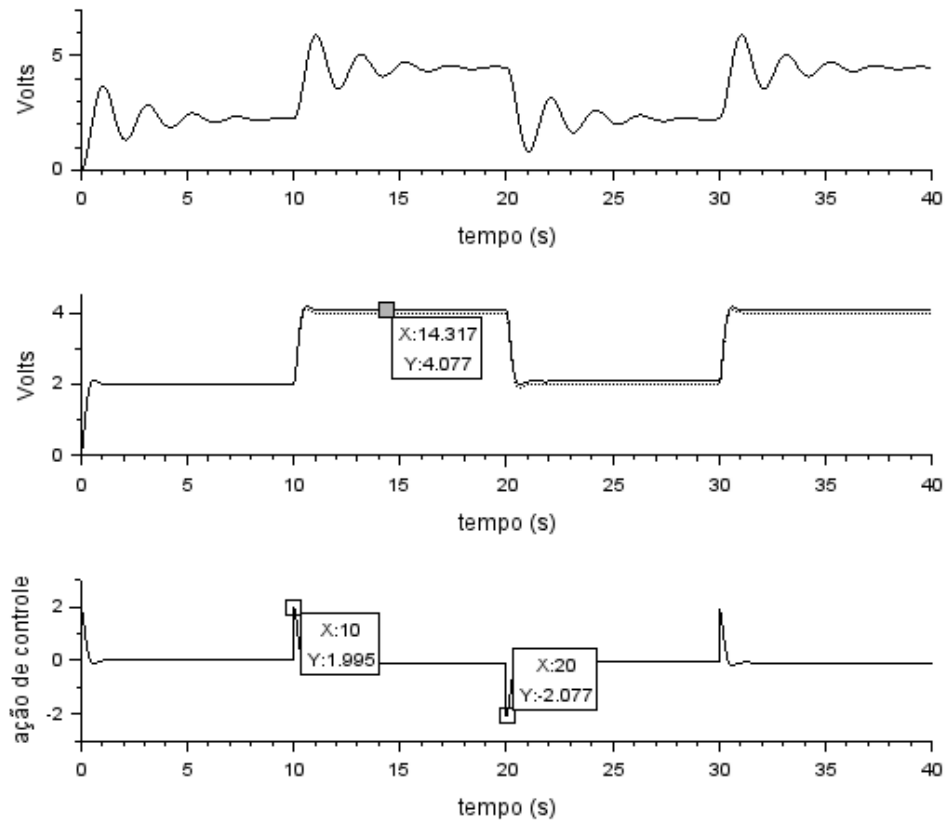
Para simulação desenvolveu-se o diagrama de blocos da Figura 4.39 e os resultados na simulação são apresentados na Figura 4.40.

Figura 4.39: Diagrama de blocos da configuração de Dois Parâmetros aplicada a planta Pêndulo Amortecido Invertido.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 4.40: Respostas a uma onda quadrada, de período $T = 20$ segundos com amplitude variando de 2 a 4 Volts: (a) do PAM em malha aberta; (b) do modelo de referência e do sistema com controlador obtido por Configuração de Dois Parâmetros (c) a ação de controle.



Fonte: Elaboração própria.

Observa-se que o sistema em malha fechada rastreia a onda quadrada de entrada de modo idêntico ao modelo de referência com erro de regime permanente nulo. Quando ocorre a perturbação externa, $t = 10$ segundos, a resposta sofre uma variação em torno de 2% em relação ao sinal de entrada e o erro é mantido até o final da simulação. Na Figura 4.40 (c) tem-se a ação de controle do sistema.

4.4.3 Projeto usando Configuração de Entrada e Saída

Para a configuração de realimentação de entrada e saída da planta segue-se os passos da Seção 3.4 e suas respectivas equações.

Substituindo o numerador $N(z)$ da função de transferência do sistema Pêndulo Amortecido, Equação (2.15), e a função de transferência do modelo de referência, Equação (4.94), reescritas a seguir por conveniência, na Equação (3.32), resulta na Equação (4.105).

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{0,0005066 + 0,000508z}{0,9915846 - 1,9906754z + z^2} \quad (2.15)$$

$$G_0(z) = \frac{0,002383 + 0,0024637z}{0,9048999 - 1,9000532z + z^2} \quad (4.94)$$

$$\frac{G_0(z)}{N(z)} = \frac{N_0(z)}{D_0(z)N(z)} =: \frac{N_p(z)}{D_p(z)} \quad (4.105)$$

$$= \frac{0,002383 + 0,0024637z}{0,0004584 - 0,0005029z - 0,0004587z^2 + 0,000508z^3}$$

Como o grau de $N_p = \bar{m} = 1$, então a desigualdade $\bar{m} < n - 1$ não é satisfeita, pois $n = 2$. Nesse caso, faz-se $\bar{A} = 1$, resultando na Equação (4.106).

$$A(z) = N_p(z)\bar{A}(z) = 0,002383 + 0,0024637z \quad (4.106)$$

Como grau de $A = 1 = n - 1$, então grau de $F = 2n - 1 = 4 - 1 = 3$. $F(z)$ é dado pela Equação (4.107).

$$F(z) = \bar{A} * (D_p(z) - N_p * D(z)) \quad (4.107)$$

$$= -0,0019045 + 0,0017979z + 0,0020627z^2 - 0,0019557z^3$$

Da Equação (3.40) resulta o sistema de Equações (4.108), cuja solução é: $L_0 = 0,0018764$; $M_0 = -0,0866873$; $L_1 = -0,0019557$; $M_1 = 0,0906250$. Substituindo esses resultados na Equação (3.29), tem-se os controladores dados pelas Equações (4.109) e (4.110).

$$\begin{bmatrix} 0,9915846 & 0,0005066 & 0 & 0 \\ -1,9906754 & 0,000508 & 0,9915846 & 0,0005066 \\ 1 & 0 & -1,9906754 & 0,000508 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 \\ M_0 \\ L_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0019045 \\ 0,0017979 \\ 0,0020627 \\ -0,0019557 \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

$$C_1(z) = \frac{L(z)}{A(z)} = \frac{-0,0018764 - 0,0019557z}{0,002383 + 0,0024637z} \quad (4.109)$$

$$C_2(z) = \frac{M(z)}{A(z)} = \frac{-0,0866873 + 0,090625z}{0,002383 + 0,0024637z} \quad (4.110)$$

Para simulação desenvolveu-se o diagrama de blocos ilustrado a Figura 4.41, onde destaca a adição de um atraso de um período de amostragem (z^{-1}) para evitar erro de *loop* algébrico que ocorre devido ao L_1 ser diferente de zero. Os resultados da simulação são apresentados na Figura 4.42.

Na Figura 4.42 (a) tem-se a resposta a uma onda quadrada, com período $T = 20$ segundos e amplitude variando de 2 a 4 Volts, do sistema Pêndulo Amortecido em malha aberta, Equação (2.15). Na Figura 4.42 (b) têm-se as respostas a mesma onda já citada: do modelo de referência especificado, Equação (4.94), plotada em linha pontilhada, e do sistema em malha fechada com os controladores obtidos, Equação (4.109) e (4.110), com uma perturbação degrau de amplitude 0,2 aplicada em $t = 10$ segundos, plotada em linha contínua.

segundos, momento em que atua a perturbação externa do tipo degrau com amplitude 0,2 provocando um erro de regime permanente em torno de 1 % entre o sinal de saída e o sinal de referência. Na Figura 4.42 (c) tem-se a ação de controle do sistema.

5. CONCLUSÃO

No desenvolvimento deste trabalho, foram apresentadas três técnicas de projeto de controladores discretos, baseadas no método de projeto de controladores chamado *model matching*, as três técnicas são denominadas de configuração de realimentação unitária, configuração com dois parâmetros e configuração de entrada e saída da planta.

Na sequência, realizou-se um estudo comparativo do desempenho dessas três técnicas por meio da simulação dos controladores projetados, utilizando o *software* Scilab. Para isso, foram considerados quatro modelos de plantas com dinâmicas distintas, sendo três deles baseados em sistemas reais sendo elas *Ball and Beam*, planta *ArduRAJ* e Pêndulo Amortecido, e um modelo teórico matemático de uma planta com comportamento de Fase não Mínima. Com exceção do Pêndulo Amortecido, em todas as simulações foi utilizado um sinal de referência do tipo degrau unitário, além da inclusão de uma perturbação externa, também do tipo degrau de amplitude 0,2 aplicada aos 10 segundos em todas. Os objetivos de projeto foram, além da estabilidade, o rastreamento do sinal de referência de modo idêntico ao modelo de referência estabelecido e avaliar o comportamento do erro na fase de regime permanente após a perturbação externa. Não foi objetivo do trabalho avaliar o desempenho em termos da amplitude da ação de controle.

Como afirma Chen (1995), para as plantas utilizadas nesse trabalho, mostrou-se que, de fato, as três técnicas podem ser aplicadas para a obtenção de controladores discretos do mesmo modo, isto é, com as mesmas equações e algoritmos que são utilizados no caso contínuo.

Sob o ponto de vista dos controladores obtidos garantirem uma resposta de malha fechada idêntica à resposta do modelo de referência estabelecido e rejeição a um distúrbio externo, a três técnicas, realimentação unitária, dois parâmetros e entrada e saída da planta, apresentaram diferentes situações para as quais algumas observações são apresentadas a seguir para cada uma das quatro plantas.

Em relação ao sistema *Ball and Beam* as três técnicas atingiram plenamente o objetivo de garantir que os sistemas em malha fechada rastreassem o sinal degrau unitário de modo idêntico ao modelo de referência com erro de regime permanente nulo. Contudo, diante da perturbação externa a configuração de realimentação unitária levou o sistema a instabilidade o que limita seu uso em situações reais, enquanto as configurações de dois parâmetros e entrada e saída da planta permitiram um erro de regime permanente de 2,4 % e 2,5 % respectivamente que podem ser aceitáveis ou não em situações reais, observando ainda que na configuração de dois parâmetros foi utilizado um polinômio $\overline{D}_p(z)$ Hurwitz de grau 1, havendo ainda a possibilidade de investigar uma melhora de desempenho pelo aumento de seu grau e, na configuração de entrada e saída, foi incluído um bloco de atraso fixo de um período de amostragem (z^{-1}) sem o qual ocorre erro de *loop* algébrico que interrompe a simulação e impediria uma implementação real do controlador.

Quanto ao *ArduRAJ* as três técnicas atingiram plenamente o objetivo de garantir que os sistemas em malha fechada rastreassem o sinal degrau unitário de modo idêntico ao modelo de referência com erro de regime permanente nulo. Contudo, diante da perturbação externa a técnica de projeto de configuração de dois parâmetros, seguindo o

procedimento estabelecido em Chen (1995), apresentou erro em regime permanente constante em torno de 12,1%, contudo, após considerar uma restrição adicional aplicada na função de transferência de malha fechada entre a saída e a perturbação, obteve-se um excelente resultado onde não houve influencia alguma da perturbação externa. Observa-se ainda que na configuração de entrada e saída foi incluído um bloco de atraso fixo de um período de amostragem (z^{-1}) sem o qual ocorre erro de *loop* algébrico.

No sistema de Fase não Mínima, as técnicas de projeto por realimentação unitária e configuração de dois parâmetros garantiram o rastreamento da referência de modo idêntico ao modelo de referência até a ocorrência da perturbação quando então apresentaram variações de amplitude de 1,5 e 0,5 respectivamente. Quanto à configuração de entrada e saída a mesma apresentou erro de *loop* algébrico e a inclusão de um atraso de um período de amostragem resultou na instabilidade do sistema, assim, para evitar o *loop* algébrico o problema foi reformulado impondo que o grau de $L(z)$ fosse menor que o grau de $A(z)$ resultando que o sistema em malha fechada rastreasse a referência de modo idêntico ao modelo de referência, contudo, com uma variação de amplitude de aproximadamente 1,1 e constante. Por fim considerando $C_0(z) \neq 1$ e impondo restrições na função de transferência de malha fechada entre a saída e a perturbação externa, foi possível encontrar uma solução onde o rastreamento foi garantido e a variação de amplitude após a perturbação foi de apenas 0,5 com duração semelhante a da configuração de dois parâmetros.

No sistema o Pêndulo Amortecido, as três técnicas de projeto atingiram plenamente o objetivo de garantir que os sistemas em malha fechada rastreassem o sinal degrau unitário de modo idêntico ao modelo de referência com erro de regime permanente nulo. Contudo, observa-se que na configuração de dois parâmetros foi necessário incluir um atraso de um período de amostragem para evitar erro de *loop* algébrico. Em relação à rejeição de distúrbio, o melhor resultado foi obtido com a configuração de entrada e saída que apresentou um erro de regime permanente em torno de 1 % entre o sinal de saída e o sinal de referência.

Por fim, observa-se que, de fato, a obtenção dos controladores discretos pelas três técnicas apresentadas, pode ser feita utilizando as mesmas soluções usadas no caso contínuo e o desempenho do sistema em malha fechada com cada uma depende da dinâmica da planta a ser controlada.

Como proposta de trabalho futuro considera-se a possibilidade de incluir restrições sobre a magnitude do sinal de controle para controladores discretos, nas três configurações apresentadas nesse trabalho.

REFERÊNCIAS

ASTROM, Karl J., Wittenmark, B. **Computer-Controlled Systems: theory and design**. 3^a ed. Prentice Hall. 1997.

CABRAL, MARCOS PAULO RODRIGUES. **Projetos de controladores via Model Matching usando as configurações de realimentação unitária, de dois parâmetros e de realimentação de entrada e saída da planta**. Trabalho de Conclusão de Curso, Faculdade de Engenharias Elétrica e Biomédica, Universidade Federal do Pará, 2020.

CHEN, C.-T. **Analog and Digital Control System Design: Transfer-Function, State-Space, and Algebraic Methods**. 1^a. ed. New York: Saunders College Publishing, 1995.

CARVALHO, J. L. M. de. **Sistemas de Controle Automáticos**. São Paulo: Érica, 2000.

ESI. **Scilab**. Version 2025.0.0, 2025. Disponível em: <<https://www.scilab.org/download/2025.0.0>>. Acesso em: 30 de março 2025.

LATHI, B. P. **Sinais e Sistemas Lineares**. 2^a. ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5^a. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

SILVA, M. G. D. **Projeto de Controlador Preditivo: Abordagem Polinomial e no Espaço de Estados**. Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.

SILVEIRA, A. S.; COELHO, A. A. R. **Simple Process Control and Hardware-In-The-Loop Setups Using Foss: ScicosLab**. XVIII Congresso Brasileiro de Automática, Bonito-MS, 2010.

SONI, R.; SATHANS. **Robust Control of Ball and Beam System through Sliding Mode Controller**. Proceedings of 2018 International Conference on Emerging Trends and Innovations in Engineering and Technological Research, 2018.

APÊNDICE A - Equivalente Discreto do sistema *Ball and Beam* obtido via Scilab.

```
//Definição do numerador e denominador da G(s):
n=0.37; d=%s*%s;
//Criação da função de transferência G(s):
G=syslin('c',n,d);
//Definição do período de amostragem.
//arbitrou-se 0.01.
Ts=0.01; t=0:Ts:20;
//Obtenção do equivalente discreto
Gzoh = ss2tf(dscr(G,Ts))
```

APÊNDICE B - Equivalente Discreto do sistema *ArduRAJ* obtido via Scilab.

```
//Definição do numerador e denominador da G(s):
n=0.001167*%s+92.57; d=%s*%s+17.3*%s+112.2;
//Criação da função de transferência G(s):
G=syslin('c',n,d);
//Definição do período de amostragem.
//arbitrou-se 0.01.
Ts=0.01; t=0:Ts:20;
//Obtenção do equivalente discreto
Gzoh = ss2tf(dscr(G,Ts))
```

APÊNDICE C - Equivalente Discreto do sistema *Pêndulo Amortecido* obtido via Scilab.

```
//Definição do numerador e denominador da G(s):
n=10.19; d=%s*%s+0.8451*%s+9.131;
//Criação da função de transferência G(s):
G=syslin('c',n,d);
//Definição do período de amostragem.
//arbitrou-se 0.01.
Ts=0.01; t=0:Ts:20;
//Obtenção do equivalente discreto
Gzoh = ss2tf(dscr(G,Ts))
```

APÊNDICE D - Equivalente Discreto do sistema *Fase não Mínima* obtido via Scilab.

```
//Definição do numerador e denominador da G(s):
n=-9.8167*(%s-9.4298491); d=%s*%s+5.3*%s+1.9;
//Criação da função de transferência G(s):
G=syslin('c',n,d);
//Definição do período de amostragem.
//arbitrou-se 0.01.
Ts=0.01; t=0:Ts:20;
//Obtenção do equivalente discreto
Gzoh = ss2tf(dscr(G,Ts))
```

APÊNDICE E – Função de transferência de malha fechada, Y/R, da Planta *Ball and Beam*

Da figura 3.3(a), sendo $p(k) = 0$, tem-se que:

$$y = G \cdot u \quad (\text{A.01})$$

$$u = C_0 r - C_0 w \quad (\text{A.02})$$

$$w = C_1 C_0 r - C_1 C_0 w + C_2 y \quad (\text{A.03})$$

De (A.02) temos:

$$w = \frac{C_0 r - u}{C_0} \quad (\text{A.04})$$

Substituindo (A.04) em (A.03)

$$\frac{C_0 r - u}{C_0} = C_1 C_0 r - C_1 C_0 \left[\frac{C_0 r - u}{C_0} \right] + C_2 y \quad (\text{A.05})$$

De (A.01) $u = \frac{y}{G}$ e substituindo em (A.05)

$$r - \frac{y}{G \cdot C_0} = C_1 C_0 r - C_1 C_0 r + \frac{C_1 y}{G} + C_2 y \quad (\text{A.06})$$

$$r = \frac{y}{G C_0} + \frac{C_1 y}{G} + C_2 y \quad (\text{A.07})$$

Ou

$$r G C_0 = y + C_1 y C_0 + C_0 G C_2 y = y(1 + C_1 C_0 + C_0 G C_2) \quad (\text{A.08})$$

Portanto a função de transferência de malha fechada fica

$$G_{mf} = \frac{y}{r} = \frac{C_0 G}{1 + C_0 C_1 + C_0 C_2 G} \quad (\text{A.09})$$

Como

$$G = \frac{N}{D}, C_1 = \frac{L}{A} \text{ e } C_2 = \frac{M}{A} \quad (\text{A.10})$$

Então G_{mf} fica

$$G_{mf} = \frac{y}{r} = \frac{\left(\frac{C_0 N}{D}\right)}{\left(1 + \frac{C_0 L}{A} + \frac{C_0 M}{\frac{AN}{D}}\right)} \quad (\text{A.11})$$

Finalmente

$$G_{mf} = \frac{C_0 NA}{(AD + C_0 LD + C_0 MN)} \quad (\text{A.12})$$

Onde: $N = Gzoh.num, D = Gzoh.den$

E G_{mf} tem de ser igual a G_04 onde $grau(G_04.num) = 2$ e $grau(G_04.den) = 3$

APÊNDICE F – Projeto por Configuração de Entrada e Saída para Planta *Ball and Beam*

$$Gmf.num = Gozoh4.num: Co.N.A = Gzoh4.num;$$

$$G_{o4} = \frac{G_{o3}}{2,22} = \left(\frac{0,0000665 + 0,0001335z + 0,000067z^2}{-0,0976286 + 1,1738846z - 2,0759893z^2 + z^3} \right) G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (B.01)$$

$$= \frac{0,0000185(1+z)}{1-2z+z^2}$$

$$G_{o4} = \left(\frac{0,000067(1+z)(0,9925373+z)}{(0,9762856-1,9759893z+z^2)(-0,1+z)} \right) \quad (B.02)$$

$$C_0 0,0000185(1+z)(A_0 + A_1z) = 0,000067(1+z)(0,9925373+z) \quad (B.03)$$

$$C_0(A_0 + A_1z) = 3,6216216(0,9925373+z) = 3,5945945 + 3,6216216z \quad (B.04)$$

$$A_0 = \frac{3,5945945}{C_0} \quad (B.05)$$

$$A_1 = \frac{3,6216216}{C_0} \quad (B.06)$$

Igualando os denominadores:

$$\begin{aligned} AD + C_0LD + CoMN &= G_{o4}.den \\ &= (0,9762856 - 1,9759893z + z^2)(-0,1+z)(A_0 + A_1z)(z^2 - 2z + 1) + C_0(L_0 + L_1z)(z^2 - 2z + 1) + C_0(M_0 + M_1z)0,0000185(1+z) \\ &= -0,0976286 + 1,1738846z - 2,0759893z^2 + z^3 \end{aligned} \quad (B.07)$$

Impondo $L_1 = 0$:

$$(A_0 + A_1z)(z^2 - 2z + 1) + C_0L_0(z^2 - 2z + 1) + C_0(M_0 + M_1z)0,0000185(1+z) = -0,0976286 + 1,1738846z - 2,0759893z^2 + z^3 \quad (B.08)$$

$$\begin{aligned} A_0z^2 - 2A_0z + A_0 + A_1z^3 - 2A_1z^2 + A_1z + C_0L_0z^2 - 2C_0L_0z + C_0L_0 \\ + 0,0000185C_0(M_0 + M_0z + M_1z + M_1z^2) \\ = -0,0976286 + 1,1738846z - 2,0759893z^2 + z^3 \end{aligned} \quad (B.09)$$

$$z^3: A_1 = 1 \quad (B.10)$$

Então:

$$C_0 = \frac{3,6216216}{A_1} = 3,6216216. \text{ Como } A_1 = 1; C_0 = 1 \quad (B.11)$$

$$A_0 = \frac{3,5945945}{C_0} = \frac{3,5945945}{3,6216216}. \text{ Como } C_0 = 1; C_0 = 0,9925373 \quad (B.12)$$

$$z^2: A_0 - 2A_1 + C_0L_0 + 0,0000185C_0M_1 = -2,0759893 \quad (\text{B.13})$$

$$z^2: 0,9925373 - 2 * 1 + 3,6216216L_0 + 0,0000185 * 3,6216216M_1 = -2,0759893 \quad (\text{B.14})$$

$$z^2: -0,27818 + L_0 + 0,0000185M_1 = -0,5732209 \quad (\text{B.15})$$

$$z^2: L_0 + 0,0000185M_1 = -0,2950409 \quad (\text{B.16})$$

$$z: -2A_0 + A_1 - 2C_0L_0 + 0,0000185C_0(M_1 + M_0) = 1,1738846 \quad (\text{B.17})$$

$$z: -2 * 0,9925373 + 1 - 2 * 3,6216216L_0 + 0,0000185 * 3,6216216 (M_1 + M_0) = 1,1738846 \quad (\text{B.18})$$

$$z: -0,2719982 - 2L_0 + 0,0000185 (M_1 + M_0) = 0,3241323 \quad (\text{B.19})$$

$$z: -2L_0 + 0,0000185(M_1 + M_0) = 0,5961305 \quad (\text{B.20})$$

$$z^0: A_0 + C_0L_0 + 0,0000185C_0M_0 = -0,0976286 \quad (\text{B.21})$$

$$z^0: 0,9925373 + 3,6216216L_0 + 0,0000185 * 3,6216216M_0 = -0,0976286 \quad (\text{B.22})$$

$$z^0: \frac{0,9925373}{3,6216216} + L_0 + 0,0000185M_0 = -\frac{0,0976286}{3,6216216} \quad (\text{B.23})$$

$$z^0: L_0 + 0,000185M_0 = -0,301016 \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,0000185 & 0 \\ -2 & 0,0000185 & 0,0000185 \\ 1 & 0 & 0,0000185 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 \\ M_1 \\ M_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,2950409 \\ 0,5961305 \\ -0,301016 \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

A seguir apresenta-se o *Script* em Scilab para o cálculo de L_0 , M_0 , e M_1

```
inv([1 0.0000185 0;-2 0.0000185 0.0000185;1 0 0.0000185])*[-0.2950409; 0.5961305;
-0.301016] // [-0.2980468; 162.48378; -160.49459;]
```

Dessa forma temos que $L_0 = -0,2980468$; $M_1 = 162,48378$; $M_0 = -160,49459$;

APÊNDICE G – Segunda tentativa para a Configuração de Entrada e Saída da Planta Fase não Mínima.

Igualando os numeradores e denominadores das Equações (4.57) e (4.76) dadas a seguir:

$$G_0(z) = \frac{0,0312401 - 0,0284235z}{0,8807337 - 1,8779171z + z^2} = \frac{-0,0284235(-1,0990944 + z)}{(-0,9691156 + z)(-0,9088014 + z)} \quad (4.57)$$

$$Gmf(z) = \frac{Y(z)}{Ref(z)} = \frac{CoN(z)A(z)}{A(z)D(z) + L(z)D(z)Co + N(z)M(z)Co} \quad (4.76)$$

Igualando os numeradores:

$$-C_0 0,0910602(z - 1,0990095)A_0 = -0,0284235(z - 1,0990944) \quad (C.01)$$

$$C_0 A_0 = \frac{0,0284235}{0,0910602} = 0,3121397 \quad (C.02)$$

Igualando os denominadores:

$$(A_0 + C_0 L_0)D(z) + C_0 M_0 N(z) = (z - 0,9691156)(z - 0,9088014) \quad (C.03)$$

$$C_0 A_0 = \frac{0,0284235}{0,0910602} = 0,3121397 \quad (C.04)$$

$$\begin{aligned} (A_0 + C_0 L_0)[(z - 0,9961404)(z - 0,9520546)] \\ - C_0 M_0 0,0910602(z - 1,0990095) \\ = (z - 0,9691156)(z - 0,9088014) \end{aligned} \quad (C.05)$$

$$\begin{aligned} (A_0 + C_0 L_0)(0,9483801 - 1,948195z + z^2) - C_0 M_0 0,0910602z \\ + C_0 M_0 0,100076 = 0,8807336 - 1,877917z + z^2 \end{aligned} \quad (C.06)$$

$$(a)z^2 \rightarrow (A_0 + C_0 L_0) = 1 \quad (C.07)$$

$$(b)z \rightarrow -(A_0 + C_0 L_0)1,948195 - C_0 M_0 0,0910602 = -1,877917 \quad (C.08)$$

$$(c)z^0 \rightarrow (A_0 + C_0 L_0)0,9483801 + C_0 M_0 0,100076 = 0,8807336 \quad (C.09)$$

Com (a) em (b) e (c).

$$\begin{aligned} (b)z \rightarrow -1,948195 - C_0 M_0 0,0910602 = -1,877917; \\ -C_0 M_0 = \frac{-1,877917 + 1,948195}{0,0910602}; C_0 M_0 = -0,7717752 \end{aligned} \quad (C.10)$$

$$\begin{aligned} (c) \rightarrow 0,9483801 + C_0 M_0 0,100076 = 0,8807336; \\ C_0 M_0 = \frac{0,8807336 - 0,9483801}{0,100076}; C_0 M_0 = -0,6759513 \end{aligned} \quad (C.11)$$

APÊNDICE H – Terceira tentativa para a Configuração de Entrada e Saída da Planta Fase não Mínima.

Sendo o equivalente discreto ZOH da planta dado pela Equação (2.13), então serão igualados os numerados e denominadores das funções de transferência do sistema em malha fechada e do modelo de referência, Equações (4.76) e (4.57) respectivamente.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{0,100076 - 0,0910602z}{0,94838 - 1,948195z + z^2} \quad (2.13)$$

$$Gmf(z) = \frac{Y(z)}{Ref(z)} = \frac{CoN(z)A(z)}{A(z)D(z) + L(z)D(z)Co + N(z)M(z)Co} \quad (4.76)$$

$$G_0(z) = \frac{0,0312401 - 0,0284235z}{0,8807337 - 1,8779171z + z^2} = \frac{-0,0284235(-1,0990944 + z)}{(-0,9691156 + z)(-0,9088014 + z)} \quad (4.57)$$

Para que os denominadores sejam iguais é necessário que o grau de $A(z)$ seja igual a um, pois o grau de $D(z)$ é dois, então seja $A(z) = A_0 + A_1z$. Sendo $A(z)$ de grau um e para que não ocorra loop algébrico, $L(z)$ tem de ser de grau zero, então $L = L_0$ ($L_1 = 0$). Por fim, sendo $N(z)$ de grau um, $M(z)$ pode ser de grau menor ou igual a dois, adotando grau um tem-se, $M(z) = M_0 + M_1z$.

Para que os numeradores sejam iguais, sendo o grau de $N(z)$ um e o grau de $A(z)$ também um a igualdade pode ser estabelecida.

Igualando numeradores:

$$C_0N(z)A(z) = \text{Numerador de } G_0(z) \quad (D.01)$$

$$C_0 - 0,0910602(z - 1,099095)(A_0 + A_1z) = -0,0284235(z - 1,0990944)(z - 0,1) \quad (D.02)$$

$$C_0 - 0,0910602(A_0 + A_1z) = -0,0284235(z - 0,1) \quad (D.03)$$

$$C_0(A_0 + A_1z) = \left(-\frac{0,0284235}{-0,0910602} \right) (z - 0,1) = 0,3121397(z - 0,1) \quad (D.04)$$

$$C_0A_0 + C_0A_1z = 0,3121397z - 0,03121397 \quad (D.05)$$

Igualando os coeficientes dos termos de mesma potência de z :

$$z^1 \rightarrow C_0A_1 = 0,3121397 \quad (D.06)$$

$$z^0 \rightarrow C_0A_0 = -0,03121397 \quad (D.07)$$

Igualando os denominadores:

$$A(z)D(z) + C_0L(z)D(z) + CoM(z)N(z) = \text{denominador de } G_0(z) \quad (D.08)$$

$$\begin{aligned} (A_0 + A_1z)(0,9483800 - 1,948195z + z^2) + C_0L_0(0,9483800 - 1,948195z + z^2) \\ + C_0(M_0 + M_1z)(0,100076 - 0,0910602z) = \dots \\ \dots = (0,8807337 - 1,8779171z + z^2)(z - 0,1) \\ = -0,0880734 + 1,0685254z - 1,9779171z^2 + z^3 \end{aligned} \quad (D.09)$$

$$\begin{aligned}
& 0,9483800A_0 - 1,948195A_0z + A_0z^2 + 0,9483800A_1z - 1,948195A_1z^2 + A_1z^3 \\
& \quad + 0,9483800C_0L_0 - 1,948195C_0L_0z + C_0L_0z^2 + 0,100076C_0M_0 \\
& \quad - 0,0910602C_0M_0z + 0,100076C_0M_1z - 0,0910602C_0M_1z^2 \\
& = -0,0880734 + 1,0685254z - 1,9779171z^2 + z^3
\end{aligned} \tag{D.10}$$

$$\begin{aligned}
& A_1z^3 + (A_0 - 1,948195A_1 + C_0L_0 - 0,0910602C_0M_1)z^2 \\
& \quad + (0,9483800A_1 - 1,948195A_0 - 1,948195C_0L_0 - 0,0910602C_0M_0 \\
& \quad + 0,100076C_0M_1)z + 0,9483800A_0 + 0,9483800C_0L_0 \\
& \quad + 0,100076C_0M_0 \\
& = -0,0880734 + 1,0685254z - 1,9779171z^2 + z^3
\end{aligned} \tag{D.11}$$

Igualando os coeficientes dos termos de mesma potência de z:

$$z^3 \rightarrow \mathbf{A1} = \mathbf{1} \tag{D.12}$$

Então de (D.06), $C_0 = \mathbf{0,3121397}$ e de (D.07) $A_0 = -\frac{0,03121397}{0,3121397} = \mathbf{-0,1}$

$$z^2 \rightarrow A_0 - 1,948195A_1 + C_0L_0 - 0,0910602C_0M_1 = -1,9779171 \tag{D.13}$$

$$z^2 \rightarrow -0,1 - 1,948195 + C_0L_0 - 0,0910602 * 0,3121397M_1 = -1,9779171 \tag{D.14}$$

$$z^2 \rightarrow C_0L_0 - 0,0284235M_1 = -1,9779171 + 0,1 + 1,948195 = 0,0702779 \tag{D.15}$$

Como $C_0 = 0,3121397$.

$$\begin{aligned}
z^1 \rightarrow 0,9483800A_1 - 1,948195A_0 - 1,948195C_0L_0 - 0,0910602C_0M_0 + \dots \\
+ 0,100076C_0M_1 = 1,0685254
\end{aligned} \tag{D.16}$$

$$\begin{aligned}
z^1 \rightarrow 0,9483800 - 1,948195(-0,1) - 1,948195C_0L_0 - 0,0910602 * 0,3121397M_0 \\
+ 0,100076 * 0,3121397 * M_1 \\
= 1,0685254 - 1,948195C_0L_0 - \dots - 0,0284235M_0 + 0,0312377M_1 \\
= 1,0685254 - 0,9483800 - 1,948195(0,1) = -0,0746741
\end{aligned} \tag{D.17}$$

$$z^1 \rightarrow -0,608109L_0 - 0,0284235M_0 + 0,0312377M_1 - 0,0746741 \tag{D.18}$$

$$z^0 \rightarrow 0,94838A_0 + 0,94838C_0L_0 + 0,100076C_0M_0 = -0,0880734 \tag{D.19}$$

$$z^0 \rightarrow 0,94838(-0,1) + 0,94838C_0L_0 + 0,100076 * 0,3121397M_0 = -0,0880734 \tag{D.20}$$

$$z^0 \rightarrow 0,94838C_0L_0 + 0,0312377M_0 = -0,0880734 + 0,94838 * (0,1) = 0,0067646 \tag{D.21}$$

Como $C_0 = 0,3121397$.

$$0,296027L_0 + 0,0312377M_0 = 0,0067646 \tag{D.22}$$

Têm-se assim três Equações (D.15), (D.18) e (D.21) e três incógnitas (L_0 , M_0 e M_1)

$$\begin{array}{rcl}
0,3121397L_0 & & -0,0284235M_1 & = 0,0702779 \\
-0,608109L_0 & -0,0284235M_0 & +0,031237M_1 & = -0,0746741 \\
0,296027L_0 & +0,0312377M_0 & & = 0,0067646
\end{array} \quad (D.23)$$

A seguir apresenta-se o *Script* em Scilab para o cálculo de L_0 , M_0 , e M_1 bem como dos controladores $C_1 = \frac{L(z)}{A(z)}$ e $C_2 = \frac{M(z)}{A(z)}$.

```

c1=[0.3121397;-0.608109;0.296027];
c2=[0;-0.028425;0.031237];
c3=[-0.0284235;0.031237;0];
cbig=[c1 c2 c3];
bbig=[0.0702779;-0.0746741;0.0067646];
L0M0M1=inv(cbig)*bbig;
L0=L0M0M1(1); M0=L0M0M1(2); M1=L0M0M1(3);
A1 = 1; Co = 0.3121397; A0 = -0.1; L1=0;

A = A0+A1*%z;
L = L0+L1*%z;
M = M0+M1*%z;

C1 = (L)/(A) // C1 = 2.0240972 / (-0.1 + %z)
C2 = (M)/(A) // C2 = (-18.96542 + 19.755597*%z) / (-0.1 + %z)

```

Os controladores obtidos constam na Equações (4.78), (4.79) e (4.80). Com eles criou-se o diagrama de simulação da Figura 4.31 e os resultados obtidos constam na Figura 4.32.

APÊNDICE I – Quarta tentativa para a Configuração de Entrada e Saída da Planta Fase não Mínima.

Na 3ª alterativa utilizou-se $A(z) = A_0 + A_1z$, $L(z) = L_0$ e $M(z) = M_0 + M_1z$ e chegou-se aos seguintes resultados: $A_1 = 1$, $C_0 = 0,3121397$ e $A_0 = -0,1$. Com a restrição da Equação (4.84), $A_0 + A_1 + L_0C_0 = 0$, resulta que $L_0C_0 = 0,9$, ou seja, $L_0 = -2,883324$ que é diferente de $2,0240972$.

APÊNDICE J – Quinta tentativa para a Configuração de Entrada e Saída da Planta Fase não Mínima.

Equivalente discreto ZOH da planta, Equação (2.13).

$$G(z) = \frac{0,100076 - 0,0910602z}{0,94838 - 1,948195z + z^2} = \frac{-0,0910602(-1,0990095 + z)}{(-0,9961404 + z)(-0,9520546 + z)} \quad (2.13)$$

Função de transferência de malha fechada.

$$Gmf(z) = \frac{Y(z)}{Ref(z)} = \frac{CoN(z)A(z)}{A(z)D(z) + L(z)D(z)Co + N(z)M(z)Co} \quad (4.76)$$

Modelo de referência desejado.

$$\begin{aligned} G_0(z) &= \frac{(0,0312401 - 0,0284235z)(z - 0,1)}{(0,8807337 - 1,8779171z + z^2)(z - 0,1)} \\ &= \frac{-0,0284235(z - 1,0990944)(z - 0,9)(z - 0,9)}{(z - 0,9691156)(z - 0,9088014)(z - 0,9)(z - 0,9)} \end{aligned} \quad (4.88)$$

Igualando os denominadores das Equações (4.71) e (4.83).

$$\begin{aligned} (A_0 + A_1z + A_2z^2)(z - 0,9961404)(z - 0,9520546) \\ + Co(L_0 + L_1z)(z - 0,9961404)(z - 0,9520546) \\ - 0,0910602Co(M_0 + M_1z + M_2z^2)(z - 1,0990095) \\ = (0,8807337 - 1,8779171z + z^2)(z - 0,9)^2 \end{aligned} \quad (F.01)$$

$$\begin{aligned} (A_0 + A_1z + A_2z^2)(0,9483801 - 1,948195z + z^2) \\ + Co(L_0 + L_1z)(0,9483801 - 1,948195z + z^2) \\ - 0,0910602Co(M_0 + M_1z + M_2z^2)(z - 1,0990095) \\ = 0,7133943 - 3,1064335z + 5,0709845z^2 - 3,6779171z^3 + z^4 \end{aligned} \quad (F.02)$$

$$\begin{aligned} 0,9483801A_0 - 1,948195A_0z + A_0z^2 + 0,9483801A_1z - 1,948195A_1z^2 + A_1z^3 \\ + 0,9483801A_2z^2 - 1,948195A_2z^3 + A_2z^4 + 0,9483801CoL_0 \\ - 1,948195CoL_0z + CoL_0z^2 + 0,9483801CoL_1z - 1,948195CoL_1z^2 \\ + CoL_1z^3 \\ - 0,0910602Co(zM_0 + M_1z^2 + M_2z^3 - 1,0990095M_0 \\ - 1,0990095M_1z - 1,0990095M_2z^2) \\ = 0,7133943 - 3,1064335z + 5,0709845z^2 - 3,6779171z^3 + z^4 \end{aligned} \quad (F.03)$$

Igualando os coeficientes dos termos de mesma potência:

$$z^4: A_2z^4 = z^4 \quad (F.04)$$

$$z^3: A_1z^3 - 1,948195A_2z^3 + CoL_1z^3 - 0,0910602CoM_2z^3 = -3,6779171z^3 \quad (F.05)$$

$$\begin{aligned} z^2: A_0z^2 - 1,948195A_1z^2 + 0,9483801A_2z^2 + CoL_0z^2 - 1,948195CoL_1z^2 \\ - 0,0910602CoM_1z^2 + 1,0990095(0,0910602M_2Coz^2) \\ = 5,0709845z^2 \end{aligned} \quad (F.06)$$

$$z: -1,948195A_0z + 0,9483801A_1z - 1,948195C_0L_0z + 0,9483801C_0L_1z - 0,0910602C_0zM_0 + 1,0990095(0,0910602M_1C_0z) = -3,1064335z \quad (F.07)$$

$$z^0: 0,9483801A_0 + 0,9483801C_0L_0 + 0,0910602 * 1,0990095C_0M_0 = 0,7133943 \quad (F.08)$$

Simplificando as equações:

$$z^4: A_2 = 1 \quad (F.09)$$

$$z^3: A_1 - 1,948195 + C_0L_1 - 0,0910602C_0M_2 = -3,6779171 \quad (F.10)$$

$$z^2: A_0 - 1,948195A_1 + 0,9483801 + C_0L_0 - 1,948195C_0L_1 - 0,0910602C_0M_1 + 1,0990095(0,0910602M_2C_0) = 5,0709845 \quad (F.11)$$

$$z: -1,948195A_0 + 0,9483801A_1 - 1,948195C_0L_0 + 0,9483801C_0L_1 - 0,0910602C_0M_0 + 1,0990095(0,0910602M_1C_0) = -3,1064335 \quad (F.12)$$

$$z^0: 0,9483801A_0 + 0,9483801C_0L_0 + 0,0910602(1,0990095M_0C_0) = 0,7133943 \quad (F.13)$$

Igualando os numeradores de (4.76) e (4.88)

$$-0,0910602Co(z - 1,0990095)(A_0 + A_1z + A_2z^2) = -0,0284235(z - 1,0990944) * (z - 0,9)^2 \quad (F.14)$$

$$Co(A_0 + A_1z + A_2z^2) = \left(\frac{0,0284235}{0,0910602}\right) * (z - 0,9)^2 = 0,2528331 - 0,5618514z + 0,3121397z^2 \quad (F.15)$$

$$CoA_0 + CoA_1z + CoA_2z^2 = 0,2528331 - 0,5618514z + 0,3121397z^2 \quad (F.16)$$

Igualando os coeficientes dos termos de mesma potência:

$$C_0A_2 = 0,3121397. \text{ Como } A_2 = 1; C_0 = \mathbf{0,3121397} \quad (F.17)$$

$$C_0A_1 = -0,5618514; A_1 = -\frac{0,5618514}{0,3121397}; A_1 = \mathbf{-1,7999998} \quad (F.18)$$

$$C_0A_0 = 0,2528331; A_0 = \frac{0,2528331}{0,3121397}; A_0 = \mathbf{0,8099998} \quad (F.19)$$

Considerando a Equação (4.90), ou seja, $A_0 + A_1 + A_2 + LoCo + L_1Co = 0$, vem:

$$0,8099998 - 1,7999998 + 1 + L_0C_0 + L_1C_0 = 0 \quad (F.20)$$

$$L_0C_0 + L_1C_0 = -0,8099998 + 1,7999998 - 1 = -0,01 \quad (\text{F.21})$$

$$L_0C_0 + L_1C_0 = -0,01 \quad (\text{F.22})$$

Continuando a encontrar os termos de $A(z)$:

$$z^3: -1,7999998 - 1,948195 + 0,3121397L_1 - 0,0910602(0,3121397M_2) = -3,6779171 \quad (\text{F.23})$$

$$z^2: 0,8099998 - 1,948195(-1,7999998) + 0,9483801 + 0,3121397L_0 - 1,948195(0,3121397L_1) - 0,0910602(0,3121397M_1) + 1,0990095 * 0,0910602(0,3121397M_2) = 5,0709845 \quad (\text{F.24})$$

$$z: -1,948195 * 0,8099998 + 0,9483801(-1,7999998) - 1,948195(0,3121397L_0) + 0,9483801(0,3121397L_1) - 0,0910602(0,3121397M_0) + 1,0990095 * 0,0910602(0,3121397M_1) = -3,1064335 \quad (\text{F.25})$$

$$z^0: 0,9483801(0,8099998) + 0,9483801(0,3121397L_0) + 0,0910602 * 0,3121397(1,0990095M_0) = 0,7133943 \quad (\text{F.26})$$

Ou:

$$z^3: 0,3121397L_1 - 0,0284235M_2 = -3,6779171 + 1,7999998 + 1,948195 \quad (\text{F.27})$$

$$z^2: 0,3121397L_0 - 0,6081090L_1 - 0,0284235M_1 + 0,0312377M_2 = 5,0709845 - 0,8099998 - 1,948195(1,7999998) - 0,9483801 \quad (\text{F.28})$$

$$z: -0,6081090L_0 + 0,2960271L_1 - 0,0284235M_0 + 0,0312377M_1 = -3,1064335 + 1,948195 * 0,8099998 + 0,9483801 * 1,7999998 \quad (\text{F.29})$$

$$z^0: 0,2960271L_0 + 0,0312377M_0 = 0,7133943 - 0,9483801 * 0,8099998 \quad (\text{F.30})$$

Manipulando as equações

$$z^3: 0,3121397L_1 - 0,0284235M_2 = 0,0702777 \quad (\text{F.31})$$

$$z^2: 0,3121397L_0 - 0,6081090L_1 - 0,0284235M_1 + 0,0312377M_2 = -0,1941460 \quad (\text{F.32})$$

$$z: -0,6081090L_0 + 0,2960271L_1 - 0,0284235M_0 + 0,0312377M_1 = 0,1786881 \quad (\text{F.33})$$

$$z^0: 0,2960271L_0 + 0,0312377M_0 = -0,0547934 \quad (\text{F.34})$$

Lembrando que: $0,3121397L_0 + 0,3121397L_1 = -0,01$

Depois de todas as manipulações tem-se o sistema de equações a seguir.

$$\begin{array}{rcl}
0,3121397L_0 & +0,3121397L_1 & = -0,01 \\
& 0,3121397L_1 & -0,0284235M_2 = 0,0702778 \\
0,3121397L_0 & -0,6081090L_1 & -0,0284235M_1 + 0,0312377M_2 = -0,1941460 \quad (F.35) \\
-0,6081090L_0 & +0,2960271L_1 & -0,0284235M_0 + 0,0312377M_1 = 0,1786881 \\
0,2960271L_0 & & +0,0312377M_0 = -0,0547934
\end{array}$$

Que pode ser expresso de forma matricial como mostrado a seguir e cuja solução é: $L_0 = -1,1690319$; $M_0 = 9,3243653$; $L_1 = 1,1369950$; $M_1 = -19,327958$; $M_2 = 10,013667$.

$$\begin{bmatrix} 0,3121397 & 0,3121397 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3121397 & 0 & 0 & -0,0284235 \\ 0,3121397 & -0,6081090 & 0 & -0,0284235 & 0,0312377 \\ -0,6081090 & 0,2960271 & -0,0284235 & 0,0312377 & 0 \\ 0,2960271 & 0 & 0,0312377 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,01 \\ 0,0702778 \\ -0,1941460 \\ 0,1786881 \\ -0,0547934 \end{bmatrix} \quad (F.36)$$

Como $A_2 = 1$; $A_0 = 0,8099998$; $A_1 = -1,7999998$; $C_0 = 0,3121397$ e $A(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2$, $L(z) = L_0 + L_1z$ e $M(z) = M_0 + M_1z + M_2z^2$ tem-se que

$$A(z) = 0,809998 - 1,7999998z + z^2 \quad (F.37)$$

$$L(z) = -1,1690319 + 1,136995z \quad (F.38)$$

$$M(z) = 9,3243653 - 19,327958z + 10,013667z^2 \quad (F.39)$$

O controlador $C(z) = [C_1(z)C_2(z)]$ é dado pelas Equações (4.91) e (4.92).

$$C_1(z) = \frac{L(z)}{A(z)} = \frac{-1,1690319 + 1,136995z}{0,809998 - 1,7999998z + z^2} \quad (4.91)$$

$$C_2(z) = \frac{M(z)}{A(z)} = \frac{9,3243653 - 19,327958z + 10,013667z^2}{0,809998 - 1,7999998z + z^2} \quad (4.92)$$