



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FELIPE FRANCISCO DA COSTA FARIAS

TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH: uma introdução ao estudo de
espaços métricos

ABAETETUBA - PA

2024

FELIPE FRANCISCO DA COSTA FARIAS

TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH: uma introdução ao estudo de
espaços métricos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, do Campus Universitário de Abaetetuba, da Universidade Federal do Pará, como requisito obrigatório para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Suellen Cristina Queiroz Arruda

ABAETETUBA - PA

2024

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

F224t Farias, Felipe Francisco da Costa.
Teorema do Ponto Fixo de Banach : uma introdução ao estudo
de espaços métricos / Felipe Francisco da Costa Farias. — 2024.
25 f. : il. color.

Orientador(a): Prof^a. Dra. Suellen Cristina Queiroz Arruda
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade
Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Curso de
Matemática, Abaetetuba, 2024.

1. Espaços Métricos. 2. Teorema do Ponto Fixo de
Banach. 3. Ponto Fixo. I. Título.

CDD 510

FELIPE FRANCISCO DA COSTA FARIAS

TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH: uma introdução ao estudo de
espaços métricos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
a Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia,
do Campus Universitário de Abaetetuba, da
Universidade Federal do Pará, como requisito
obrigatório para obtenção do grau de Licenciado em
Matemática.

Data de Aprovação: 20/02/2024

Conceito: Excelente

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente

gov.br

SUELLEN CRISTINA QUEIROZ ARRUDA

Data: 06/03/2024 16:51:05-0300

Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof.^a Dr.^a Suellen Cristina Queiroz Arruda

Orientadora - FACET/CUBT/UFPA

Genivaldo dos Passos Corrêa

Prof. Dr. Genivaldo dos Passos Corrêa

Membro Interno - FACET/CUBT/UFPA

Documento assinado digitalmente

gov.br

RUBIA GONCALVES NASCIMENTO

Data: 06/03/2024 15:53:09-0300

Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof.^a Dr.^a Rúbia Gonçalves Nascimento

Membro Externo - ICEN/FACMAT/UFPA

Este trabalho é todo dedicado aos meus pais,
pois é graças ao seu esforço que hoje posso
concluir o meu curso.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da minha vida, por ser bondoso e misericordioso com seus filhos, assim me permitindo vencer todos os obstáculos que surgiram no decorrer deste trabalho.

Aos meus Pais, Francisco Correa Farias e Lucrécia Santana da Costa, por todo apoio e incentivos desde o início da graduação e principalmente na construção desse trabalho.

À minha madrinha, que nas conversas sempre me estimulava para continuar o curso.

À professora Dr.^a Suellen Cristina Queiroz Arruda, minha orientadora, por cada oportunidade de participar de vários projetos: PIBID, monitoria, iniciação científica, Residência Pedagógica. Agradeço pela paciência com a qual me guiou nesse período todo da graduação e pela sua amizade.

À minha namorada Vanilza, pelo apoio nos momentos difíceis e alegres, por cada motivação, por cada incentivo para não desistir do curso e pela paciência, principalmente nos momentos de ausência.

Aos meus amigos, Carol, Darlene, Edilson, Deivid, Graziela, Simone, que foram essenciais no decorrer do curso.

A todos os professores que contribuíram para formação acadêmica e pessoal.

À todas as pessoas que conheci e que de alguma forma contribuíram para a minha permanência na graduação.

“O próprio Senhor irá a sua frente e estará com você, ele nunca deixará, nunca abandonará. Não tenha medo! Não desanime!”
(Deuteronômio 31:8).

RESUMO

A formalização dos espaços métricos, que consistem em conjuntos munidos de uma métrica que mensura distâncias entre elementos, oferece uma generalização valiosa das propriedades dos números reais para conjuntos mais abstratos. O presente trabalho tem como objetivo demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, que se constitui como um dos resultados mais importantes no estudo dos espaços métricos ao estabelecer condições para a existência e a unicidade de pontos fixos de certas funções contínuas, além da interdisciplinaridade da Matemática com outras áreas do conhecimento. Os resultados obtidos mostram que o estudo de espaços métricos e do teorema em questão proporciona um aprofundamento teórico de grande importância para estudos mais avançados na área da Matemática Pura.

Palavras-chave: Espaços Métricos; Teorema Ponto Fixo de Banach; Ponto fixo.

ABSTRACT

The formalization of metric spaces, which consist of sets equipped with a metric which measures distances between elements, offers a valuable generalization of the properties from real numbers to more abstract sets. The present work aims to objective to demonstrate Banach's Fixed Point Theorem, which constitutes one of the most important result in the study of metric spaces when establishing conditions for the existence and uniqueness of fixed points of certain continuous functions, in addition to influencing the interdisciplinary of Mathematics with other areas of knowledge. The results obtained data show that the study of metric spaces and the theorem in question provides an theoretical deepening of great importance for more advanced studies in the area of Pure Mathematics.

Keywords: Metric Spaces; Banach Fixed Point Theorem; Fixed Point.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	1
1 ESPAÇOS MÉTRICOS	3
1.1 Métrica	3
1.2 Funções contínuas em espaços métricos	10
1.3 Sequências e Convergência em espaços métricos	12
1.4 Sequências de Cauchy e Espaços métricos completos	15
2 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH	18
2.1 Ponto fixo e contração	18
2.2 Demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach	20
CONSIDERAÇÕES FINAIS	23
REFERÊNCIAS	24

INTRODUÇÃO

A Matemática, como um campo do conhecimento, está intrinsecamente ligada à busca incessante por padrões e estruturas básicas. O conceito de distância entre dois pontos, seja em \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , é fundamental no desenvolvimento de diversos ramos da Matemática, principalmente do Cálculo e da Geometria. O processo de derivar ou integrar funções de uma ou múltiplas variáveis está relacionado aos conceitos de convergência e limite, e estes recaem sobre a noção de distância entre pontos. Com o estudo de novas teorias matemáticas, a noção intuitiva de distância foi generalizada para outros conjuntos, onde um ponto poderia ser uma função ou até matrizes. Essa evolução conduziu ao desenvolvimento do conceito de espaços métricos.

Um espaço métrico refere-se a um conjunto não vazio munido de uma métrica, sendo esta uma função que quantifica a distância entre seus elementos. A formalização desse conceito permite a generalização de propriedades fundamentais dos números reais para conjuntos mais abstratos, conferindo uma estrutura matemática rica e poderosa. Os espaços métricos desempenham um papel fundamental na Análise Matemática ao proporcionar um arcabouço abstrato para a compreensão das propriedades métricas de conjuntos, se constituindo como base para o estudo de diversas disciplinas, como, por exemplo, a Análise Funcional.

Um espaço métrico é considerado completo se toda sequência de Cauchy neste espaço converge para um ponto dentro do próprio espaço. Neste contexto, um dos resultados mais importantes é o Teorema do Ponto Fixo de Banach, que estabelece condições sob as quais funções contínuas possuem um único ponto fixo. O estudo do teorema em questão se justifica pelo fato de que, muitas vezes, encontrar pontos fixos de uma função não é uma tarefa trivial, assim como pode ser difícil saber se uma função possui algum ponto fixo.

O Teorema do Ponto Fixo de Banach recebe esse nome em homenagem ao matemático que o estabeleceu em 1922, o polonês Stefan Banach (1891-1945), cujos trabalhos no início do século XX foram cruciais para o desenvolvimento da Análise Funcional e da teoria dos espaços normados. Um dos motivos da importância deste teorema é que, além de garantir a existência e unicidade de um ponto fixo para certos tipos de funções contínuas, ele fornece um método iterativo para determinar este ponto.

O teorema é amplamente aplicado em diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, em economia, física e ciência da computação, onde é natural saber se um determinado problema tem solução antes de gastar tempo e energia para resolvê-lo.

Como aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach, podemos citar o Teorema de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), conhecido também como Teorema de Picard, utilizado para mostrar se existe solução para problemas de valor inicial e se esta solução é única.

O presente trabalho consiste em apresentar e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, o qual nos garante que "Se M é um espaço métrico completo, toda contração $f : M \rightarrow M$ possui um único ponto fixo em M ". Para isto, o trabalho está dividido em dois capítulos: No Capítulo 1, serão apresentados as definições e resultados de espaços métricos, desde o conceito de métrica até a definição de espaço métrico completo. O Capítulo 2 é destinado para a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach, trazendo as definições de ponto fixo e de contração.

ESPAÇOS MÉTRICOS

Neste capítulo, apresentaremos as noções básicas sobre espaços métricos e os resultados necessários para a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

1.1 Métrica

Os espaços métricos são conjuntos não vazios onde podemos definir uma métrica. Em Matemática, uma métrica é uma função que, a cada par de elementos tomados em um determinado conjunto, associa uma distância entre esses elementos.

Definição 1.1. *Seja M um conjunto não vazio. Uma métrica em M é uma função*

$$d: M \times M \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto d(x, y),$$

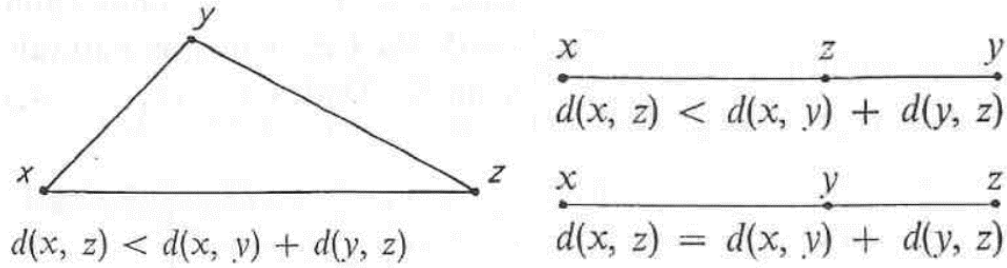
chamada distância, que satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer $x, y, z \in M$:

- (d1) $d(x, x) = 0$;*
- (d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;*
- (d3) $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetria);*
- (d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Desigualdade Triangular).*

As propriedades (d1) e (d2) nos diz que $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. A propriedade (d4) recebe o nome de *Desigualdade Triangular* pelo fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulo não ultrapassa a soma dos outros dois lados, conforme é mostrado na Figura [1.1](#).

Definição 1.2. *Um espaço métrico é um conjunto munido de uma métrica. Em outras palavras, é um par ordenado (M, d) , onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M .*

Figura 1.1: Desigualdade triangular.



Fonte: Lima, 2020, p. 2.

Os elementos de um espaço métrico podem ser números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc. Quando não houver dúvida em relação à métrica considerada, indicaremos o espaço métrico apenas por M . A seguir, alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 1.1. *A métrica "zero-um".*

Seja M um conjunto não vazio qualquer. A função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$, se $x \neq y$, é uma métrica. As propriedades (d1) a (d4) são facilmente verificadas e o espaço métrico que se obtém desta forma é trivial.

Exemplo 1.2. *O conjunto \mathbb{R} dos números reais.*

O valor absoluto $|\cdot|$ em \mathbb{R} induz uma noção de distância no conjunto dos números reais da seguinte forma

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = |x - y|.$$

A função d é uma métrica em \mathbb{R} . De fato, sejam quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos que:

(d1) $d(x, x) = |x - x| = |0| = 0$.

(d2) Considere $x \neq y$. Se $x > y$ então $d(x, y) = |x - y| = x - y > 0$. Para $x < y$, temos $d(x, y) = |x - y| = -(x - y) = y - x > 0$.

(d3) $d(x, y) = |x - y| = |-1(y - x)| = |-1| \cdot |y - x| = |y - x| = d(y, x)$.

(d4) $d(x, z) = |x - z| = |x + (-y + y) - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z|$
Logo, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

As propriedades (d1) a (d4) decorrem imediatamente das propriedades de valor absoluto de números reais. Assim, (\mathbb{R}, d) é um espaço métrico, onde a métrica d é denominada "métrica usual" da reta.

Exemplo 1.3. *O espaço euclidiano \mathbb{R}^n (generalização do exemplo anterior).*

Dados $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, a função

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

é uma métrica em \mathbb{R}^n . Com efeito, sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, então:

(d1) $d(x, x) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + \dots + (x_n - x_n)^2} = \sqrt{0^2 + \dots + 0^2} = 0;$

(d2) Se $x \neq y$ então $x_i \neq y_i$, para algum $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Assim, como $x_i - y_i \neq 0$, em particular, temos que $(x_i - y_i)^2 > 0$. Portanto,

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} > 0;$$

(d3) Sabemos que $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$, para algum $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Logo,

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} = d(y, x);$$

(d4) Considere os números $a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i$, com $i \in \{1, \dots, n\}$. Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, temos que $a_i + b_i = x_i - z_i$. Assim, demonstrar que vale a desigualdade triangular é equivalente a provar que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Para verificarmos que esta desigualdade é verdadeira, basta verificarmos que ao elevar os dois membros ao quadrado temos uma desigualdade válida. Fazendo isto, obtemos:

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2,$$

que será válida se, e somente se

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2},$$

que é a conhecida como *Desigualdade de Schwarz*. Portanto, (\mathbb{R}^n, d) é um espaço métrico.

É costume chamar esta métrica d de "métrica euclidiana ou natural", uma vez que a sua definição fornece a distância entre dois pontos na Geometria Euclidiana, a qual se prova usando o Teorema de Pitagóras.

Em \mathbb{R}^n , há outras duas métricas, as quais são definidas por:

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

e

$$d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Estas métricas são conhecidas, respectivamente, como métrica da soma e métrica do máximo.

Vamos mostrar que d' e d'' verificam as quatro propriedades da Definição [1.1](#). De fato,

(i) Para $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(d'1) \quad d'(x, x) = |x_1 - x_1| + \cdots + |x_n - x_n| = |0| + \cdots + |0| = 0;$$

$$(d''1) \quad d''(x, x) = \max\{|x_1 - x_1|, \cdots, |x_n - x_n|\} = \max\{0, \cdots, 0\} = 0;$$

(ii) Para $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $x \neq y$, temos que $x_i \neq y_i$, para algum $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Assim, como $x_i - y_i \neq 0$, em particular, segue que $|x_i - y_i| > 0$. Logo,

$$(d'2) \quad d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \geq |x_i - y_i| > 0;$$

$$(d''2) \quad d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\} \geq |x_i - y_i| > 0.$$

(iii) Para $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos que $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$, para qualquer $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Então,

$$(d'3) \quad d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = |y_1 - x_1| + \cdots + |y_n - x_n| = d'(y, x);$$

$$(d''3) \quad d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\} = \max\{|y_1 - x_1|, \cdots, |y_n - x_n|\} = d''(y, x).$$

(iv) Para $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, temos que $|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Assim,

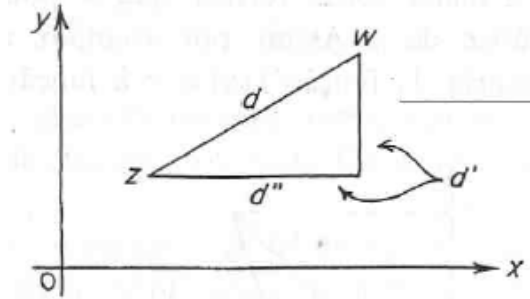
$$(d'4) \quad \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^n |y_i - z_i| \text{ e, portanto, } d'(x, z) \leq d'(x, y) + d'(y, z);$$

$$(d''4) \quad d''(x, z) = \max\{|x_1 - z_1|, \cdots, |x_n - z_n|\} \leq \max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\} + \max\{|y_1 - z_1|, \cdots, |y_n - z_n|\} = d''(x, y) + d''(y, z).$$

Observe que, para o caso $n = 2$, é possível fazer uma interpretação das métricas d , d' e d'' . Consideremos dois pontos $z = (x, y)$ e $w = (u, v)$ em \mathbb{R}^2 , com ambas coordenadas distintas entre si, de modo que formem um triângulo retângulo com um

outro ponto de \mathbb{R}^2 , conforme mostra a Figura 1.2. A distância $d(z, w)$ corresponde a hipotenusa, $d'(z, w)$ mede a soma dos catetos e $d''(z, w)$ mede o maior dos catetos.

Figura 1.2: Interpretação de d, d', d'' no \mathbb{R}^2 .



Fonte: Lima, 2020, p. 3.

Observação 1.1. Quando não é dito explicitamente a métrica utilizada em \mathbb{R}^n , fica subentendido que se trata da métrica euclidiana.

Para o próximo exemplo, precisamos de dois resultados de supremo. Primeiramente, lembremos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se *limitado superiormente* quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq a$, para todo $x \in X$. Cada $a \in \mathbb{R}$ com esta propriedade chama-se *cota superior* de X .

Definição 1.3. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente, dizemos que $\alpha \in \mathbb{R}$ é o supremo de X , denotado por $\alpha = \sup X$, quando α é a menor das cotas superiores de X em \mathbb{R} . Em outras palavras, α é o supremo de X se:

- (i) Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq \alpha$;
- (ii) Se $\beta \in \mathbb{R}$ for uma cota superior, então $\alpha \leq \beta$.

No conjunto \mathbb{R} dos números reais, todo subconjunto de \mathbb{R} não vazio e limitado superiormente admite supremo.

Observação 1.2. A condição (ii) da Definição 1.3 pode ser reformulada da seguinte forma: Se $\beta < \alpha$ em \mathbb{R} , então existe $x \in X$ tal que $\beta < x$. Esta condição nos diz que nenhum elemento de \mathbb{R} , que seja menor que α , pode ser cota superior de X . Note ainda que, se dois elementos α e α' em \mathbb{R} cumprem as condições da Definição 1.3, então $\alpha \leq \alpha'$ e $\alpha' \leq \alpha$, ou seja, $\alpha = \alpha'$. Assim, o supremo de um conjunto, quando existe, é único. Portanto, as condições que caracterizam o supremo podem ser resumidas do seguinte modo:

- S1. $x \in X \Rightarrow x \leq \sup X$;

- S2. $\beta \geq x$, para todo $x \in X \Rightarrow \beta \geq \sup X$;
 S2'. Se $\beta < \sup X$, então existe $x \in X$ tal que $\beta < x$.

Lema 1.1. *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ não vazios e limitados superiormente. Se*

$$Z = X + Y = \{x + y; x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

então Z é limitado superiormente e $\sup Z = \sup X + \sup Y$.

Demonstração. Como X e Y são limitados superiormente, eles admitem supremo e, portanto, $x \leq \sup X, \forall x \in X$ e $y \leq \sup Y, \forall y \in Y$. Assim, dado $z \in Z$, existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $z = x + y \leq \sup X + \sup Y$. Logo, $\sup X + \sup Y$ é uma cota superior de Z e, em particular, Z é limitado superiormente.

Seja agora $l < \sup X + \sup Y$, vamos mostrar que $l \in \mathbb{R}$ não é cota superior de Z . De fato, desde que $l < \sup X + \sup Y$, existem $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ tais que $l = l_1 + l_2$, $l_1 < \sup X$ e $l_2 < \sup Y$. Assim, existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $l_1 < x$ e $l_2 < y$. Logo, $l = l_1 + l_2 < x + y$. Como $x + y \in Z$ então existe $z \in Z$ tal que $l < z$ e, portanto, $\sup X + \sup Y$ é a menor das cotas superiores de Z . Logo, concluímos que $\sup Z = \sup X + \sup Y$.

□

Lema 1.2. *Se $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente e $Y \subseteq X$ então $\sup Y \leq \sup X$.*

Demonstração. Como X é limitado superiormente então X admite supremo. Assim, $x \leq \sup X, \forall x \in X$. Em particular, para todo $y \in Y$, temos que $y \leq \sup X$, pois $Y \subseteq X$. Isso mostra que $\sup X$ é uma cota superior para Y , logo, Y admite supremo. Portanto, $\sup Y \leq \sup X$.

□

Exemplo 1.4. *Espaço das funções limitadas*

Seja X um conjunto qualquer não vazio. Uma função real $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *limitada* quando existe uma constante $k > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq k, \forall x \in X.$$

Indicaremos por $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções reais limitadas.

Vamos mostrar que $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ é um espaço métrico com a métrica d definida por

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|, \forall f, g \in \mathcal{B}(X; \mathbb{R}).$$

Primeiramente, note que d está bem definida, pois, se $f, g \in \mathcal{B}(X; \mathbb{R})$, então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tais que $|f(x)| \leq k_1$ e $|g(x)| \leq k_2, \forall x \in X$. Assim, pela desigualdade triangular, temos que

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |-g(x)| = |f(x)| + |g(x)| \leq k_1 + k_2.$$

Logo, $(f - g) \in \mathcal{B}(X; \mathbb{R})$. Agora, basta verificarmos se as condições da Definição [1.1](#) são satisfeitas. De fato, sejam $f, g, h \in \mathcal{B}(X; \mathbb{R})$:

$$(d1) \quad d(f, f) = \sup_{x \in X} |f(x) - f(x)| = 0;$$

(d2) Se $f(x) \neq g(x)$, para algum $x \in X$, então

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \geq |f(x) - g(x)| > 0;$$

$$(d3) \quad d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)| = d(g, f);.$$

(d4) Tomemos os seguintes conjuntos:

$$A = \{|f(x) - g(x)| ; x \in X\};$$

$$B = \{|g(x) - h(x)| ; x \in X\};$$

$$C = \{|f(x) - h(x)| ; x \in X\}.$$

Para mostrar a desigualdade triangular, basta provar que $\sup C \leq \sup A + \sup B$. Com efeito, seja

$$D = \{|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| ; x \in X\}.$$

É claro que $D \subseteq A + B$. Assim, pelos Lemas [1.1](#) e [1.2](#), obtemos

$$\sup D \leq \sup (A + B) = \sup A + \sup B \tag{1.1}$$

Agora, por outro lado, dado $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &= |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\ &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \\ &\leq \sup D \end{aligned}$$

Da definição de C e de supremo, tem-se

$$\sup C \leq \sup D. \tag{1.2}$$

Por [1.1](#) e [1.2](#), concluímos que

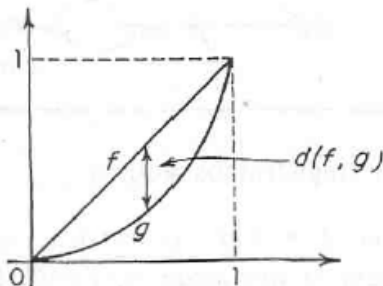
$$\sup C \leq \sup A + \sup B,$$

ou seja, $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$. Portanto $(\mathcal{B}(X; \mathbb{R}), d)$ é um espaço métrico, onde a métrica d é conhecida como *métrica do supremo*.

Seja $X = [a, b]$. Dadas $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitadas, a distância $d(f, g)$, será o

comprimento do maior segmento vertical que se pode traçar ligando o gráfico de f ao gráfico de g . Assim, por exemplo, no espaço métrico $\mathcal{B}([0, 1]; \mathbb{R})$, a distância de $f(x) = x$ à $g(x) = x^2$ é $d(f, g) = \frac{1}{4}$, veja a figura abaixo.

Figura 1.3: Representação da métrica do supremo em $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$.



Fonte: Lima, 2020, p. 4.

Exemplo 1.5. Subespaço métrico

Dado um espaço métrico (M, d) , podemos tornar qualquer subconjunto N de M em espaço métrico, basta considerar a restrição de d a $N \times N$, ou seja, a mesma distância de M será usada entre os elementos de N . Quando isso acontece, chamamos N de subespaço métrico de M e a métrica de N é chamada *métrica induzida* pela de M .

1.2 Funções contínuas em espaços métricos

Por definição, uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $a \in \mathbb{R}$ se, e somente se, dado qualquer $\epsilon > 0$ existir $\delta = \delta(a, \epsilon) > 0$ tal que

$$|x - a| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Nesta subseção, veremos que a definição a seguir generaliza o conceito de continuidade para o contexto dos espaços métricos.

Definição 1.4. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) dois espaços métricos.*

(i) *Uma função $f : M \rightarrow N$ é contínua em um ponto $a \in M$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, é possível exibir $\delta = \delta(a, \epsilon) > 0$ tal que*

$$d_M(x, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(a)) < \epsilon, \forall x \in M.$$

Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos de M .

Quando uma função $f : M \rightarrow N$ não é contínua em um ponto $a \in M$, dizemos que ela é descontínua em a . Neste caso, significa que

$$d_M(x, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(a)) \geq \epsilon, \text{ para algum } \epsilon > 0.$$

(ii) Uma função $f : M \rightarrow N$ é uniformemente contínua quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$d_M(x, y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) < \epsilon, \forall x, y \in M.$$

Observação 1.3. Note que na continuidade, para obter valores de $f(x)$ "arbitrariamente" próximos de $f(a)$ tomamos pontos x "suficientemente" próximos de a , com a fixo. Observe que se f é uniformemente contínua, então f é também contínua, basta tomar $y = a$, porém, a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é contínua, mas não é uniformemente contínua. Com efeito, dado $\epsilon = 1$, tomemos $x = n$ e $y = n + \frac{1}{n}$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, tomando $\delta > 0$ tal que $\delta > \frac{1}{n}$, teremos

$$|x - y| = \left| n - \left(n + \frac{1}{n} \right) \right| = \frac{1}{n} < \delta,$$

porém,

$$|f(x) - f(y)| = \left| n^2 - \left(n + \frac{1}{n} \right)^2 \right| = \left| -2 - \frac{1}{n^2} \right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 1 = \epsilon.$$

Logo f não é uniformemente contínua.

O estudo de funções lipschitziana é fundamental para o trabalho, veremos isso no próximo capítulo.

Definição 1.5. Sejam M e N espaços métricos. Uma função $f : M \rightarrow N$ é lipschitziana se existir uma constante $c > 0$, chamada constante de Lipschitz, tal que

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c d_M(x, y),$$

para quaisquer $x, y \in M$.

Teorema 1.1. Toda função lipschitziana é uniformemente contínua.

Demonstração. Considere $f : M \rightarrow N$ uma função lipschitziana. Dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{c} > 0$ que teremos

$$d_M(x, y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) \leq c d_M(x, y) < c \delta = \epsilon.$$

Portanto, f é uniformemente contínua em M . □

Note que além de ser uniformemente contínua, toda função lipschitziana é contínua.

1.3 Sequências e Convergência em espaços métricos

A seguir, veremos alguns resultados importantes sobre convergência de sequências, que serão necessários para o entendimento da próxima seção.

Definição 1.6. *Uma sequência em um espaço métrico M é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow M$, onde $x(n) := x_n$, com $n \in \mathbb{N}$. Costumamos denotar a sequência x por (x_n) ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$.*

Dada a sequência (x_n) , o valor $x_n \in M$ é chamado n -ésimo termo da sequência. Assim, escrevemos $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ ou $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ para indicar o conjunto dos termos da sequência (x_n) .

Definição 1.7. *Seja (x_n) uma sequência em um espaço métrico M . Dizemos que um ponto $a \in M$ é o limite da sequência (x_n) quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon.$$

Para indicar que a é o limite da sequência (x_n) , escreve-se:

$$\lim x_n = a \text{ ou } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ ou } \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = a.$$

Diremos que uma sequência (x_n) é *convergente* em M quando existir $a \in M$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Caso contrário, dizemos que a sequência é *divergente* em M . Usaremos a notação $x_n \rightarrow a$ para indicar a convergência.

Observação 1.4. *Se (x_n) é uma sequência em M , então tomando*

$$\alpha_n = d(x_n, x) \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

temos que,

$$x_n \rightarrow x \text{ em } M \iff \alpha_n \rightarrow 0 \text{ em } \mathbb{R}.$$

Exemplo 1.6. *Considere o espaço métrico (\mathbb{R}, d) , onde a métrica é $d(x, y) = |x - y|$. A sequência (x_n) dada por $x_n = \frac{n}{n+1}$ converge para 1. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, devemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow d\left(\frac{n}{n+1}, 1\right) < \epsilon \iff \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon.$$

Sabendo que

$$\frac{n}{n+1} - 1 = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} = -\frac{1}{n+1},$$

temos que

$$\left| -\frac{1}{n+1} \right| < \epsilon \iff \frac{1}{n+1} < \epsilon.$$

Mas,

$$\frac{1}{n+1} < \epsilon \iff \frac{1}{\epsilon} < n+1 \iff \frac{1}{\epsilon} - 1 < n.$$

Assim, tomando $n_0 > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$, obtemos

$$n > \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \Rightarrow d\left(\frac{n}{n+1}, 1\right) < \epsilon.$$

Portanto, $x_n \rightarrow 1$.

O próximo resultado garante a unicidade do limite de uma sequência convergente.

Proposição 1.1. *Seja M um espaço métrico. Se (x_n) é uma sequência convergente em M então o seu limite é único.*

Demonstração. Sejam $a, b \in M$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$. Dado $\epsilon > 0$, existem um $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$$

e

$$n > n_1 \Rightarrow d(x_n, b) < \epsilon.$$

Tomando $m = \max\{n_0, n_1\} \in \mathbb{N}$, tem-se, para todo $n > m$, que

$$d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < 2\epsilon.$$

Desde que $0 \leq d(a, b) < 2\epsilon, \forall \epsilon > 0$, então $d(a, b) = 0$. Logo, $a = b$.

□

Definição 1.8. *Uma sequência (x_n) no espaço métrico M é dita limitada quando existe $k > 0$ tal que*

$$d(x_m, x_n) \leq k, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 1.7. *Considere o espaço métrico (\mathbb{R}, d) , onde d é a métrica usual. A sequência (x_n) dada por $x_n = (-1)^n$ é limitada, pois, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, temos*

$$d(x_m, x_n) = |(-1)^m - (-1)^n| \leq |(-1)^m| + |(-1)^n| \leq 1 + 1 = 2.$$

A proposição a seguir garante a limitação de toda sequência convergente.

Proposição 1.2. *Toda sequência convergente em um espaço métrico é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente em um espaço métrico (M, d) e suponha que $x_n \rightarrow x$ em M . Então, fixando $\epsilon = 1$, encontramos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < 1.$$

Observe que, para todo $m \leq n_0$, temos que

$$d(x_m, x) \leq \max\{d(x_1, x), d(x_2, x), \dots, d(x_{n_0}, x)\}.$$

Da desigualdade triangular resulta que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m),$$

logo,

$$d(x_n, x_m) \leq 1 + \max\{d(x_1, x), d(x_2, x), \dots, d(x_{n_0}, x)\}.$$

Isto mostra que (x_n) é limitada ao tomar

$$k = 1 + \max\{d(x_1, x), d(x_2, x), \dots, d(x_{n_0}, x)\}.$$

□

Observação 1.5. A recíproca da Proposição 1.2 não é verdadeira. Por exemplo, a sequência do Exemplo 1.7 é limitada, no entanto, ela não é convergente, pois o limite varia de acordo com o valor de n . Isto é, para n par, $\lim x_n = 1$ e, para n ímpar, $\lim x_n = -1$.

Definição 1.9. Sejam (M, d) um espaço métrico e (x_n) uma sequência em M . Uma subsequência de (x_n) em M é uma restrição da função $x : \mathbb{N} \rightarrow M$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$ de \mathbb{N} tal que $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Costumamos denotar por (x_{n_k}) ou $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ a subsequência formada pela restrição de x a \mathbb{N}' .

Exemplo 1.8. A sequência dada no Exemplo 1.7 possui duas subsequências. Para n par, temos a subsequência $(1, 1, 1, \dots)$ e, para n ímpar, a subsequência $(-1, -1, -1, \dots)$.

Proposição 1.3. Seja (x_n) uma sequência em um espaço métrico (M, d) . Se $x_n \rightarrow x$ em M , então toda subsequência de (x_n) converge para x em M .

Demonstração. Como $x_n \rightarrow x$, então dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon.$$

Tomemos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} > n_0$ de modo que

$$k > k_0 \Rightarrow n_k > n_{k_0} > n_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, x) < \epsilon.$$

Logo, toda subsequência de (x_n) também converge para x . □

Observação 1.6. A recíproca da Proposição 1.3 é falsa. No Exemplo 1.8 temos uma sequência que não é convergente, porém, as subsequências são convergentes.

Observação 1.7. Toda subsequência de uma sequência limitada é limitada. De fato, por hipótese, a sequência é limitada, ou seja, existe $k > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq k$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$. Como a subsequência é formada por termos da sequência, então quaisquer dois termos da subsequência terá $d(x_{n_t}, x_{n_k}) \leq k$, com $t, k \in \mathbb{N}$, logo, a subsequência também é limitada.

1.4 Sequências de Cauchy e Espaços métricos completos

O Teorema do Ponto Fixo é aplicado em espaços métricos completos, por isso, precisamos estudar o conceito de sequências de Cauchy.

Definição 1.10. Uma sequência (x_n) em um espaço métrico M é uma sequência de Cauchy se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Intuitivamente, uma sequência ser de Cauchy significa que, após um determinado índice n_0 , as distâncias entre os termos da sequência se tornam arbitrariamente pequenas. Ou seja, para índices convenientemente grandes, os termos da sequência vão se aproximando cada vez mais um do outro.

Observação 1.8. Para que uma sequência (x_n) seja de Cauchy é necessário e suficiente que, para cada $\epsilon > 0$ dado, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon,$$

para algum $p \in \mathbb{N}$. Para isto, basta considerar que $m > n$ e $m = n + p$ na Definição 1.10.

O resultado abaixo nos garante que quando uma sequência é convergente, os termos desta sequência se aproximam entre si.

Proposição 1.4. Toda sequência convergente em um espaço métrico (M, d) é de Cauchy.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente em um espaço métrico M . Se $\lim x_n = a$ então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Tomando $m, n > n_0$, obtemos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, a sequência (x_n) é de Cauchy. \square

Exemplo 1.9. A sequência (x_n) dada por $x_n = \frac{n}{n+1}$ é de Cauchy, pois ela converge para 1, conforme mostra o Exemplo 1.6.

Observação 1.9. Nem toda sequência de Cauchy é convergente. Para ver tal fato, considere o subconjunto Q de \mathbb{R} com métrica induzida pela métrica d usual de \mathbb{R} e tome uma sequência $(x_n) \subset Q$ tal que $x_n \rightarrow a$, onde a é um número irracional (Por exemplo, $x_1 = 1$; $x_2 = 1,4$; $x_3 = 1,41$; ..., com o $\lim x_n = \sqrt{2}$). Desde que a sequência é convergente em \mathbb{R} , segue-se da Proposição 1.4 que (x_n) é uma sequência de Cauchy no espaço métrico Q , porém, não é convergente em Q .

Observação 1.10. Toda subsequência de uma sequência de Cauchy é também de Cauchy. De fato, se (x_n) é de Cauchy então, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \epsilon$, para qualquer $m, n > n_0$. Como todo termo da subsequência é também termo de (x_n) segue que $d(x_{n_p}, x_{n_k}) < \epsilon$, para todo $n_p, n_k > n_0$. Logo, a subsequência é de Cauchy.

Proposição 1.5. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em um espaço métrico (M, d) . Se existe uma subsequência (x_{n_k}) convergente, então (x_n) também é convergente. Em particular, (x_n) converge para o mesmo limite de (x_{n_k}) .

Demonstração. Considere que a subsequência (x_{n_k}) converge para x . Então, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_k > n_{k_1} \Rightarrow d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, como (x_n) é uma sequência de Cauchy, existe um índice $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_1 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $n_0 = \max\{n_{k_1}, n_1\}$. Tomando $m = n_0 + 1$, obtemos que

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_0+1}) + d(x_{n_0+1}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \forall n > n_0.$$

Portanto, $x_n \rightarrow x$. \square

Observação 1.11. Nem toda sequência que possui uma subsequência convergente é convergente, basta olhar a sequência dada no Exemplo 1.7.

Proposição 1.6. Toda sequência de Cauchy em um espaço métrico (M, d) é limitada.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico (M, d) . Então, fixando $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < 1.$$

Deste modo, o conjunto $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$ é limitado e, além disso, o seu diâmetro é menor ou igual a 1.

Note que o conjunto de termos da sequência (x_n) pode ser escrito como a união de dois subconjuntos da seguinte forma:

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}.$$

Desde que o conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\}$ é limitado por ser finito, segue que a união também é limitada. Logo, a sequência de Cauchy (x_n) é limitada. \square

Observação 1.12. *Nem toda sequência limitada é de Cauchy. Por exemplo, a sequência do Exemplo 1.7 é limitada, porém não é de Cauchy, uma vez que a distância entre dois termos consecutivos é constante igual a 2, isto é, $d(x_n, x_{n+1}) = 2$, para todo n .*

Como já foi dito, o Teorema do Ponto Fixo de Banach, foco deste trabalho, é válido em espaços métricos completos, sendo assim, vamos à sua definição.

Definição 1.11. *Um espaço métrico (M, d) é completo se toda sequência de Cauchy em M é convergente em M .*

Exemplo 1.10. *Todo espaço métrico com a métrica "zero-um" é completo, pois qualquer sequência de Cauchy é constante para todo $n > n_0$, com $n_0 \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, convergente.*

Exemplo 1.11. *A reta real munida da métrica usual d é um espaço métrico completo, na qual toda sequência de Cauchy em \mathbb{R} é convergente.*

Exemplo 1.12. *O conjunto dos números racionais não é completo quando dotado da métrica usual em \mathbb{R} . De acordo com a Observação 1.9, obtemos uma sequência de Cauchy que converge para o $\sqrt{2}$ em \mathbb{R} , porém, não converge em \mathbb{Q} .*

Exemplo 1.13. *O \mathbb{R}^n é um espaço métrico completo com as métricas d , d' e d'' dadas no Exemplo 1.3.*

Exemplo 1.14. *O espaço das funções limitadas $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ é um espaço métrico completo com a métrica $d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$.*

TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

Neste capítulo, estudaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, que sob certas condições garante a existência e a unicidade de solução. Para isto, introduziremos os conceitos de ponto fixo e contração.

2.1 Ponto fixo e contração

O conceito de ponto fixo é de grande importância para encontrar soluções de uma dada equação. Assim, o estudo de teoremas de pontos fixos auxiliam na resolução de problemas em diversos ramos da Matemática, tais como Geometria, Análise e Cálculo Numérico.

Definição 2.1. *Seja M um conjunto não vazio. Um ponto fixo de uma aplicação $f : M \rightarrow M$ é um ponto $x \in M$ tal que $f(x) = x$.*

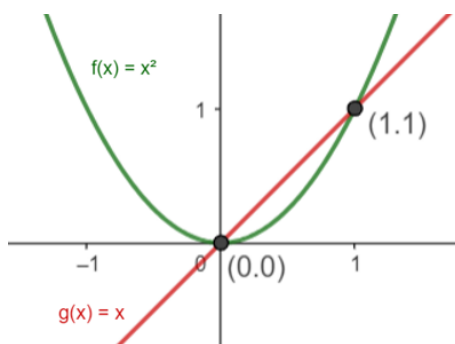
Exemplo 2.1. *A origem $0 \in \mathbb{R}^n$ é o único ponto fixo da função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = -x$.*

Exemplo 2.2. *A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ possui dois pontos fixos, os quais são: 0 e 1, como podemos ver na figura [2.1](#), pois, $f(0) = 0^2 = 0$ e $f(1) = 1^2 = 1$.*

Note que os pontos fixos de uma função real de variável real são as abscissas dos pontos do plano em que o gráfico de f intersecta a diagonal $y = x$.

Observação 2.1. *Dada uma função contínua $f : M \rightarrow M$, onde M é um espaço métrico, suponhamos que se queira obter a solução (ou soluções) x da equação $f(x) = b$. Escrevendo $\phi(x) = f(x) + x - b$, temos que ϕ é contínua e que a equação original equivale a encontrar x tal que $\phi(x) = 0$. Para resolver $\phi(x) = 0$, tomamos um ponto qualquer $x_0 \in M$ e consideramos a sequência de pontos $x_1 = \phi(x_0), x_2 =$*

Figura 2.1: Pontos fixos da aplicação



Fonte: Elaborado pelo autor

$\phi(x_1), \dots, x_{n+1} = \phi(x_n), \dots$. Se esta sequência convergir no domínio de ϕ , então $a = \lim x_n$ será

$$a = \lim x_{n+1} = \lim \phi(x_n) = \phi(\lim x_n) = \phi(a),$$

isto é, a é uma raiz da equação $\phi(x) = x$, e portanto da equação original $f(x) = b$. Esta estratégia de se encontrar pontos fixos é chamada Método das aproximações sucessivas.

Neste momento, destacaremos algumas particularidades das funções lipschitziana.

Definição 2.2. Uma função lipschitziana é dita contração se sua constante de Lipschitz c é menor que 1. Caso $c = 1$, dizemos que a função é uma contração fraca.

Intuitivamente, uma função ser contração significa que a distância entre as imagens é muito menor que a distância entre os pontos do conjunto.

Observação 2.2. Decorre do Teorema [1.1](#) que toda contração é uniformemente contínua.

Exemplo 2.3. A função $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$, na qual a métrica é a usual no conjunto dos números reais, é uma contração. De fato,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \\ &= |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \cdot \frac{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \\ &= \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \cdot |x - y|. \end{aligned}$$

Como $x, y \geq 1$ segue que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2$, logo,

$$\frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \leq \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2} \cdot |x - y|.$$

Portanto, f é uma contração uma vez que a constante de Lipschitz é menor que 1, no caso $c = \frac{1}{2}$.

Exemplo 2.4. A função constante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = k$, para todo $k \in \mathbb{R}$ é uma contração fraca, pois

$$d(f(x), f(y)) = d(k, k) = 0.$$

Desde que $d(x, y) \geq 0$, concluímos que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$, o que implica que $c = 1$.

Observação 2.3. Ser uma função lipschitziana não implica em ser uma contração. Com efeito, considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$ e \mathbb{R} dotado da métrica usual. Temos que f é lipschitziana, pois

$$d(f(x), f(y)) = |2x - 2y| = 2|x - y| = 2d(x, y).$$

No entanto, f não é uma contração já que a constante de Lipschitz é maior que 1.

2.2 Demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach

O Teorema seguinte dá condições para existência e unicidade de pontos fixos de função contínuas em espaços métricos: M ser completo e f ser contração.

Teorema 2.1. Considere (M, d) um espaço métrico completo, onde $M \neq \emptyset$. Se $f : M \rightarrow M$ é uma contração, então f possui um único ponto fixo.

Demonstração. Passo 1 (Existência do ponto fixo): Desde que $M \neq \emptyset$, considere $x_0 \in M$ e (x_n) uma sequência em M dada por $x_{n+1} = f(x_n)$, ou seja,

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

Afirmamos que a sequência (x_n) é de Cauchy em M . De fato, como f é uma contração, note que

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq cd(x_0, x_1)$$

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq cd(x_1, x_2) \leq c^2d(x_0, x_1)$$

⋮

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq cd(x_{n-1}, x_n) \leq c^n d(x_0, x_1), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, usando a desigualdade triangular, obtemos que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq c^n d(x_0, x_1) + c^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + c^{n+p-1} d(x_0, x_1) \\ &= (c^n + c^{n+1} + \cdots + c^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &= c^n (1 + c + c^2 + \cdots + c^{p-1}) d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Sabendo que $(1 + c + c^2 + \cdots + c^{p-1}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} c^n$ e que esse somatório é uma série convergente cujo limite é $\frac{1}{1-c}$, temos

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_0, x_1), \forall n, p \in \mathbb{N}.$$

Como $0 \leq c < 1$ segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$, logo, (x_n) é uma sequência de Cauchy em M . Desde que M é um espaço métrico completo, existe $a \in M$ tal que $x_n \rightarrow a$, assim, da continuidade de f resulta em

$$f(a) = f(\lim_{x \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow \infty} x_{n-1} = a.$$

Portanto, a é ponto fixo de f .

Passo 2 (Unicidade do ponto fixo): Suponha que a e b são dois pontos fixos de f , isto é, $f(a) = a$ e $f(b) = b$. Como f é uma contração segue que

$$0 \leq d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq cd(a, b), \text{ com } 0 \leq c < 1,$$

logo, $(1 - c)d(a, b) \leq 0$. Desde que $(1 - c) > 0$, conclui-se que $0 \leq d(a, b) \leq 0$, o que implica que $d(a, b) = 0$ e, portanto $a = b$. \square

Segue abaixo uma consequência imediata da aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Corolário 2.1. *Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação sobre o espaço métrico $M = (M, d)$. Se f^m é uma contração para algum inteiro positivo m , então, f tem um único ponto fixo.*

Demonstração. Por hipótese, para algum inteiro $m > 0$, f^m é uma contração sobre M , logo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, f^m tem um único ponto fixo, isto

é, existe um único $x \in M$ tal que $f^m(x) = x$. Então,

$$f^m(f(x)) = f(f^m(x)) = f(x),$$

o que implica dizer que $f(x)$ é ponto fixo de f^m . No entanto, pela unicidade do ponto fixo, $f(x) = x$ e, portanto, x é ponto fixo de f . Por fim, como todo ponto fixo de f também é ponto fixo de f^m , que é único, então f tem um único ponto fixo. \square

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio do estudo introdutório de espaços métricos, tivemos a oportunidade de ter contato com conceitos mais abstratos e gerais da Matemática Pura, além de rever algumas definições e resultados já vistos em disciplinas de Cálculo e de Análise, como, por exemplo, funções contínuas, limites de sequências e supremo. O curso de espaços métricos não faz parte da grade curricular de um curso de graduação em Matemática, por isso, foi bastante interessante e desafiador estudarmos assuntos mais aprofundados da área de Análise.

Vimos que o Teorema do Ponto Fixo de Banach garante a existência e a unicidade de pontos fixos em funções contínuas aplicadas em espaços métricos, desde que o espaço métrico seja completo e a função seja uma contração. O teorema em questão é de grande relevância na área da Análise Matemática, na qual possibilita resolver problemas mais complexos.

Por fim, acreditamos que este trabalho pode colaborar para a formação acadêmica dos estudantes de matemática que desejam seguir com os estudos em uma pós-graduação na área de Análise, uma vez que os resultados apresentados se encontram de forma acessível e de fácil compreensão. No decorrer desse trabalho, foram identificadas algumas possibilidades de continuidade das pesquisas como, por exemplo, mostrar as aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach em outras áreas do conhecimento.

REFERÊNCIAS

- [1] BERNI, Jean Cerqueira. **Espaços Métricos**. São Paulo, 2021. Apostila. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~jeanb/EM2021.pdf>. Acesso em: 03 de janeiro 2023.
- [2] DUARTE, Isabella Silva. **Espaços Métricos e o Teorema do Ponto Fixo de Banach**. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.
- [3] ENDO, Daniela Hiromi Cavamura. **Espaços Métricos: uma introdução**. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.
- [4] FIGUEIREDO, Djairo Guedes. **Análise I**. 2. ed. Rio de Janeiro: LCT, 2011.
- [5] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise: vol. 1**. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA (Coleção Projeto Euclides), 2019.
- [6] LIMA, Loandson Félix Dantas Barros. **O Teorema do Ponto Fixo de Banach e o Método das Aproximações Sucessivas**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Cuité, PB, 2018.
- [7] LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA (Coleção Projeto Euclides), 2020.
- [8] TRINDADE, Ana Karoline dos Santos. **O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações**. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2019.