SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO TOCANTINS/CAMETÁ
FACULDADE DE MATEMÁTICA

INGRID CRISTINA LEÃO DANTAS

A IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA PARA O ESTUDO DOS BURACOS NEGROS

Limoeiro do Ajuru/PA
2023

INGRID CRISTINA LEÃO DANTAS

A IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA PARA O ESTUDO DOS BURACOS NEGROS

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito básico para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Renato Ferreira Cunha

Limoeiro do Ajuru/PA
2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, minha égide, o motivo por eu ter chegado até aqui. Agradeço também a minha família, principalmente minha mãe que sempre esteve me apoiando em toda a minha vida e não me deixou desistir, fazendo tudo o que podia por mim. Agradeço ao meu marido, meu parceiro de vida, que também me ajudou e esteve do meu lado nos momentos mais difíceis. Amo todos vocês! Agradeço a Universidade Federal do Pará e a Faculdade de Matemática por todo o conhecimento repassado. Agradeço a todos meus professores pela paciência e dedicação nesses quatro anos, em especial meu orientador, professor José Renato. Nunca esquecerei todos esses anos de aprendizado e espero voltar em breve.

Uma é a glória do sol, e outra a glória da lua, e outra a glória das estrelas; porque uma estrela difere em glória de outra estrela.

I Coríntios 15:41

Resumo

Quando se fala em Buracos Negros, geralmente vem à cabeça a imagem de um "vazio" no meio do espaço que suga tudo que existe ao seu redor, algumas pessoas até criam teorias sobre viagem no espaço-tempo. Tendo em vista que muito do conhecimento que temos atualmente sobre buracos negros, apesar de ainda não se conhecer muito sobre eles, é graças a matemática. O presente trabalho trata sobre a importância da matemática no estudo dos buracos negros, a fim de mostrar como seu envolvimento foi vital para que se pudesse saber o que se sabe hoje sobre eles. Para tanto, foi necessário mostrar sua participação desde a teorização no século XX, até o registro em imagem obtido nos últimos anos, maior prova que se tem de sua existência até agora. Assim, foi realizada uma pesquisa bibliográfica de natureza qualitativa, em que os dados foram coletados por meio de pesquisa em livros, artigos e outros trabalhos publicados sobre o tema para validar sua confiabilidade. Diante disso, verificou-se que a matemática esteve presente em todos os processos envolvendo esses objetos, em que foi possível concluir que se não fosse a matemática, talvez nem sequer teria conhecimento de sua existência.

Palavras-chave: buracos negros; matemática no estudo dos buracos negros; equação de Schwarzschild; algoritmo CHIRP

Abstract

When we talk about Black Holes, the image of a "void" in the middle of space that sucks everything around it usually comes to mind, some people even create theories about space-time travel. Bearing in mind that all the knowledge we currently have about black holes, despite not knowing much about them, is thanks to mathematics. The present work deals with the importance of mathematics in the study of black holes, in order to show how its involvement was vital so that what is known today about them could be known. Therefore, it was necessary to show its participation since theorization in the 20th century, until the image registration obtained in recent years, the greatest proof we have of its existence so far. Thus, a qualitative bibliographic research was carried out, where data were collected through research in books, articles and other works published on the subject to validate its reliability. In view of this, it was verified that mathematics was present in all processes involving these objects, where it was possible to conclude that if it were not for mathematics, we would not even know of their existence.

Keywords: black holes; mathematics in the study of black holes; Schwarzschild equation; CHIRP algorithm

INTRODUÇÃO

Há eras a humanidade se questiona sobre a origem do Universo. Perguntas como “de onde viemos? Para onde iremos?” têm sido o objeto de empenho das mentes mais brilhantes da história da humanidade. Talvez nunca se venha obter essas respostas, mas é inegável que tentar respondê-las fez com que a humanidade avançasse cientificamente de maneira notável. Conseguiu-se descobrir coisas além da mais fértil imaginação e chegar a lugares que antes eram tratados em ficção científica. Quanto mais avanços se fazem, mais desafios vão surgindo e, sem dúvida, um dos maiores desafios para os cientistas atuais é o misterioso buraco negro, que será o objeto dessa pesquisa.

A matemática foi essencial para moldar todo o conhecimento que há atualmente acerca dos buracos negros, mas infelizmente não existem muitos trabalhos publicados que destacam a matemática como ferramenta essencial para o estudo deles. Devido a essa problemática, essa pesquisa se justifica mediante o interesse em mostrar o quão importante foi o envolvimento da matemática para a história dos buracos negros.

Assim sendo, o presente estudo teve como objetivo mostrar parte do papel da matemática na história dos buracos negros, para que, com isso, se possa entender sua contribuição para o estudo desses objetos celestes tão misteriosos. De forma mais específica, buscou-se expor como a matemática esteve presente desde o início, com a teorização, até os dias atuais, com a obtenção de fotos de buracos negros.

REFERENCIAL TEÓRICO

Nota-se que tanto a matemática como astronomia são ciências que foram de extrema importância para o desenvolvimento da civilização (SOSTISSO et al., [s.d.]). Conforme Baidyanath (2010 apud SALDANHA et al., [s.d.]), estando a matemática envolvida no avanço e surgimento de outras ciências, pode-se dizer que matemática e astronomia estão altamente relacionadas, já que a astronomia precisa das leis matemáticas para demonstrações práticas.

Algumas das mais importantes contribuições dessa união se dá no estudo dos Buracos Negros, desde a Teoria da Relatividade Geral, onde nasceu a idéia de Buraco Negro (MATSAS, 2004) até recentemente quando finalmente conseguiu-se registrar dois desses corpos: o buraco negro no centro da galáxia elíptica Messier 87, localizado no aglomerado de Virgem (AKIYAMA et al., 2019) e o buraco negro supermassivo Sargittarius A*, presente no centro da Via Láctea (BOEN, 2013).

Buraco Negro é um objeto astronômico resultado de um colapso gravitacional de estrelas massivas em que nada, nem mesmo a luz, pode escapar de dentro dele, graças a sua intensa atração gravitacional. O Horizonte de eventos é uma fronteira que delimita onde a velocidade de escape supera a da luz, que é o limite da velocidade no vácuo. Existem várias classes de buracos negros, sendo duas principais: os estelares, que possuem massa de três a dezenas de vezes a do Sol, e os supermassivos que habitam os núcleos de grandes galáxias e podem ter a massa de 100.00 bilhões de vezes a massa solar (GARNER, 2020). Como a gravidade puxa toda a luz, eles não são visíveis, mas podem ser detectados com ferramentas especiais devido a maneira com que afetam a matéria ao seu redor (WILD, 2018).

A Teoria da Relatividade Geral de Einstein, publicada em 1915, previa que algumas estrelas, no fim de sua vida, acabariam por esgotar seu combustível químico e seriam incapazes de se sustentar sobre sua própria gravidade, então encolheriam e se tornariam cada vez mais densas, até virarem um ponto que sinaliza até mesmo o fim do tempo (HAWKING, 2016).

Os buracos negros foram previstos em 1916 como uma solução da equação da Teoria da Relatividade Geral de Einstein. Ele não acreditava que esses poderiam existir pois, para ele, a matéria tinha um limite para se comprimir, opinião que era compartilhada por quase toda a comunidade científica da época

(HAWKING, 2016). Para ele, as estrelas acabariam por entrar em um estágio final e ficando lá. Entretanto, nem todos compartilhavam do mesmo pensamento, principalmente John Wheeler, que discordava veemente da opinião dos demais e dizia em seus trabalhos que algumas estrelas acabariam entrando em colapso, também previu alguns resultados desses colapsos, como os buracos negros (HAWKING, 2016).

Muitos nomes marcaram a história dos buracos negros e a matemática esteve essencialmente envolvida. O fato de a Teoria da Relatividade Geral ser uma teoria da gravitação escrita geometricamente (SOARES, 2019), pode-se perceber que tanto a métrica de Schwarchild como a de Minkowski, que serão vistas a seguir, estão ricas em geometria. A de Minkowski envolve tensor métrico, coordenadas cartesianas (ANDRADE, 2022) e até mesmo o teorema de Pitágoras (DI BEO, 2023), a de Schwarchild, sendo a métrica para espaço-tempo curvo, abrange pontos como curvatura, geodésicas e geometria da esfera (SUZANA, 2019). Nas equações de entropia e temperatura de buracos negros de Hawking o uso da análise dimensional foi imprescindível, além da geometria da esfera (FILHO, 2008). Quanto ao limite de Chadrasekhar, são necessários conhecimentos básicos em cálculo (EVANGELISTA, 2018).

A ideia de um objeto como esse pelo espaço parecia tão absurda que nem mesmo Einstein, autor da teoria que os previa, acreditava que eles fossem possíveis. Foi então que, em 1915, o físico alemão Karl Schwarzschild, nas trincheiras da Primeira Guerra, surpreende toda a comunidade científica da época (SAA, 2016) trazendo uma solução para as equações de campo de Einstein (MATSAS, 2004). Schwarzschild foi o responsável por ter desenvolvido a primeira solução para estas equações (HERDEIRO, [s.d.]). Chamada de métrica de Schwarzschild, ela descreve o campo gravitacional ao redor de corpos simetricamente esféricos e despreza qualquer rotação de massa. Ela pode ser expressa como (MENDES, 2019):

$$ds = -c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

Onde G simboliza a constante de Newton, c a velocidade da luz e M a massa do objeto que causa a deformação (HAWKING, 2016). As coordenadas esféricas

θ e ϕ são dadas como elemento de linha no espaço euclidiano da seguinte maneira:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2$$

A coordenada r determina o “raio” da esfera. Quando $r \to \infty$, o que significa que está longe do centro de atração, a métrica de Schwarzschild tende à de Minkowski:

$$ds = -c^2 \, dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2$$

Porque o espaço-tempo possui curvatura nula, é plano (MENDES, 2019). O espaço euclidiano, também chamado de espaço-tempo plano, possui a característica de ser geometricamente plano, obedecendo os postulados da geometria euclidiana (SOARES, 2019). Também se obtém esse resultado com $M \to 0$ (MENDES, 2019). Há também uma constante r_s chamada de raio de Schwarzschild, que é determinada por:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Segundo a métrica de Schwarzschild, se houver um corpo esférico com determinado raio R, a solução vale para um corpo com $r > R$, sendo R o raio limite da métrica para um corpo. Se $R < r_s$, ela descreverá um buraco negro (FRANCHI et al., [s.d.]).

Não muito depois, o astrônomo indiano Subrahmanyah Chandrasekhar se perguntou qual deveria ser o tamanho de uma estrela para que ela não conseguisse mais se sustentar contra a própria gravidade quando seu combustível chegasse ao fim (HAWKING, 1988). Quando estrelas que possuem menos de 10$M_\odot$ ($M_\odot$ sendo a massa do sol) esgotam seu combustível nuclear, ejetam uma nebulosa planetária até restar o núcleo, que será uma anã branca (SARAIVA, [s.d.]). Chandrasekhar calculou que estrelas frias que possuíam massa maior que cerca de $1{,}5M_\odot$ não seriam capazes de se sustentar. Chamado de limite de Chandrasekhar, se uma estrela for menor que esse limite, ela pode se estabilizar e se tornar uma anã-branca (FRANCHI, et al [s.d.]).

O limite de Chandrasekhar é definido por:

$$M_{ch} = \frac{\omega_3^0 \sqrt{3\pi}}{2} \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(\mu_e m_H)^{2}}{'}$$

Tem-se $\hbar$ como a constante de Planck reduzida, G é a constante de gravitação, c a velocidade da luz, m_H a massa do átomo de hidrogênio, μ_e é a massa média do elétron e $\omega_3^0 \approx 2{,}018236$ é a constante matemática da equação de Lane-Emden, (FRANCHI, et al [s.d.]). Substituindo as constantes por seus valores numéricos na métrica, usando $\hbar = 1{,}0546 \times 10^{-27}$ erg s^{-1}, $G = 6{,}6726 \times 10^{-8}\ cm^3 g^{-1} s^{-2}$, $m_H = 1{,}6733 \times 10^{-24} g$ e $\mu_e = 2{,}0$, pode-se obter a massa máxima possível para uma anã branca (EVANGELISTA, 2018):

$$M_{ch} \approx 1{,}43 M_{\odot}$$

O físico soviético Lev Landau deduziu outro estágio final para estrelas com massa até duas vezes a do Sol, só que menores. Essas estrelas foram chamadas de estrelas de nêutrons, pois são resultado da repulsão causada pelo princípio da exclusão de nêutrons e prótons, não elétrons. (HAWKING, 2015).

Entretanto, muitos se perguntavam na época o que aconteceria se alguma estrela ultrapassasse esses determinados limites (HAWKING, 2017). Em 1939, o químico Richard Tolman escreveu um trabalho em que usava a Relatividade Geral para descrever a termodinâmica, o que motivou Robert Oppenheimer a rever os resultados de Landau usando essa descrição. Então escreveu diversos artigos com alguns colaboradores. Um com Robert Serber que corrigia cálculos de Landau, outro com G. M. Volkoff em que ele estendeu os cálculos de Landau, em que encontrou as possibilidades para que estrelas de nêutrons se estabilizassem (ALMEIDA, 2021). Em seu trabalho com Hartland Snyder deduziu que estrelas que possuíssem massa que excedessem às estrelas de nêutrons não iriam se sustentar de dentro para fora por causa de sua pressão interna e iriam se contrair em um ponto cuja densidade seria infinita. Esse ponto é chamado de singularidade. (HAWKING, 2017). O artigo de Oppenheimer e

Snyder foi publicado no mesmo dia em que as tropas da Alemanha nazista invadiram a Polônia e deram início a Segunda Guerra Mundial. A maioria dos cientistas se voltou para projetos militares, inclusive Oppenheimer que encabeçou o Projeto Manhattan, que desenvolveu a bomba atômica (ALMEIDA, 2020). O colapso gravitacional ficou esquecido, pelo menos até o início dos anos 60 com o avanço da tecnologia de observação e a descoberta de quasares. Em 1963, o astrônomo Maarten Schmidt captou um desvio para o vermelho de um objeto fraco na direção da fonte de ondas de rádio 3C273 e percebeu que o desvio era muito grande para ter sido causado por um campo gravitacional porque, se fosse, o objeto deveria ter muita massa e estar perto a ponto de interferir nas órbitas dos planetas do sistema solar. Isso indicava que o desvio tinha sido causado pela expansão do universo, o que implicava que o objeto estava muito longe, além de que deveria ser demasiadamente brilhante para ser visto de tão distante, o que significava que emitia quantidades muito altas de energia. Chegou-se à conclusão de que a única forma de produzir essa quantidade de energia seria através de um colapso gravitacional, não apenas de uma estrela, mas de todo o centro de uma galáxia. Muitos objetos como esses foram descobertos, mas ainda não implicavam na existência de buracos negros, devido a sua distância e dificuldade de observação (HAWKING, 2015).

Em 1970, uma descoberta matemática poderia ajudar a compreender os acontecimentos nos horizontes de eventos dos buracos negros. De acordo com essa descoberta, a área do horizonte de eventos aumenta quando a matéria passa por ele (HAWKING, 2017). Essa propriedade indica uma analogia entre o conceito de entropia da segunda lei da termodinâmica e a área do horizonte de eventos de um buraco negro.

A segunda lei da termodinâmica postula que a entropia (desordem) de um sistema isolado poderia aumentar ou se manter a mesma. Caso dois desses sistemas se juntem, a entropia combinada de ambos seria maior que a soma das anteriores (STRATHERN, apud. SILVA, 2020). Uma das pessoas a estudar esse fenômeno foi Stephen Hawking.

A lei das áreas afirma que um buraco negro que se formou por fusão teria a área maior que a soma da área dos buracos negros que se fundiram, já que a área e a entropia de um buraco negro são proporcionais (LIMA, 2022):

$$S = \frac{Akc^3}{4G\hbar}$$

Onde S é a entropia; A a área do horizonte de eventos; $\hbar$ é a constante de Planck; G a constante gravitacional de Newton; c a velocidade da luz e k a constante de Boltzmann (HAWKING, 2016). Ainda nos anos 70, Hawking estudava como reagiria a matéria ao se aproximar de um buraco negro, conforme a mecânica quântica. Ele percebeu que um buraco negro emitiria partículas continuamente. Ele, assim como todos os cientistas da época, acreditava que nada poderia sair de um buraco negro (HAWKING, 2017), o que o convenceu foi que as partículas que saíam possuíam registros térmicos precisos. Os cálculos de Hawking sugeriam que um buraco negro criava e emitia partículas como um corpo quente comum (SILVA, 2020) e que sua temperatura dependia apenas de sua massa (HAWKING, 2016). Esse efeito ficou conhecido como Radiação Hawking (LIMA, 2022). Assim, baseado no buraco negro de Schwarzschild, Hawking criou sua mais famosa equação (SILVA, 2020):

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi kGM}$$

Onde T é a temperatura do buraco negro; $\hbar$ é a constante de Planck; G a constante gravitacional de Newton; c a velocidade da luz e k a constante de Boltzmann, e M a massa do buraco negro (HAWKING, 2016)..

Muitos estudos sobre buracos negros foram feitos, mas apenas recentemente, em 2019, se obteve pela primeira vez a imagem de um deles. O Event Horizon Telescope (EHT) é um projeto internacional com a colaboração de mais de 200 cientistas que faz imagens do horizonte de eventos de um buraco negro (Wall, 2019), deu a primeira imagem de um deles. O EHT usou um método que permite registrar objetos que estão longe de nós, denominada como very Long Baseline Interferometry (VLBI). A imagem do buraco negro M87 só foi possível graças ao algoritmo CHIRP (Reconstrução Contínua de Imagem de Alta Resolução Usando Patch Priors), criado por Katherine Bouman e sua equipe (SALDANHA et al., [s.d.]). Segundo Bouman (2016), esse algoritmo permite comparar as imagens obtidas e selecionar a mais apropriada. Para que isso aconteça, ele agrupa essas imagens e seleciona as que podem ou não ser buracos negros, depois manda para uma base de dados que foi desenvolvida pelos cientistas (WALL, 2019). Além disso, esse mesmo algoritmo pode ser aplicado para outros buracos negros e galáxias, tendo como exemplo a Via Láctea, que possui em seu centro o Buraco negro supermassivo Sargittarius A*, que também teve sua imagem revelada em maio de 2022 pelo EHT (EHT, 2022).

Não se pode falar em astronomia sem citar a matemática. Tudo o que foi desenvolvido sobre buracos negros no decorrer do tempo teve participação direta da matemática para que pudesse ser provado, por mais absurdo que parecesse. Se não fosse a grande habilidade matemática dos cientistas envolvidos no estudo de buracos negros, talvez essas ideias continuassem sendo absurdas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa desenvolvida observou que a matemática sempre esteve presente em toda a história dos buracos negros, desde sua teorização no início do século XX, até obtenção da imagem de dois deles recentemente.

Os objetivos do estudo foram alcançados, visto que foi possível mostrar parte do papel da matemática no estudo dos buracos negros. Sendo assim, a problemática foi resolvida, pois deu-se o devido destaque à matemática e se constatou que sua contribuição foi essencial para a construção de todo o conhecimento que temos atualmente acerca desses fascinantes objetos

Observou-se que a matemática foi responsável pela ideia de buracos negros, por meio das equações da Teoria da Relatividade Geral, pela evidência de sua existência graças a solução das equações de campo de Einstein, já que eram motivo de grande descrença para a comunidade científica da época. E graças a dedicação dos cientistas para saber o quão grande uma estrela deveria ser para se tornar um buraco negro, objetos como estrelas de nêutrons e anãs brancas foram descobertos.

Recentemente, a matemática também foi responsável pela maior prova da existência de buracos negros através do algoritmo CHIRP, que nos deu a imagem do buraco negro no centro da galáxia Messier 87 e do buraco negro no centro da nossa Via Láctea: O Sagittarius A*.

Todo o estudo sobre buracos negros ajudou a entender como a gravidade pode se comportar em circunstâncias bem diferentes das que se conhecem na

Terra, como em objetos de densidades colossais, além de nos mostrar que existem lugares no Universo que estão além de qualquer conhecimento que a humanidade alcançou até o momento.

Espera-se que, com os dados obtidos, esse estudo possa cooperar com informações para pesquisas futuras sobre esse tema.

Talvez nunca se venha encontrar uma aplicação desses estudos na vida humana, mas tentar compreender o Universo e sua origem vai além de algo tão passageiro como a vida na Terra.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

AKIYAMA, K. et al. **First M87 Event Horizon Telescope Results.** IV. Imaging the Central Super-massive Black Hole. The Astrophysical Journal, v. 875, n. 1, p. L4, 10 abr. 2019

ALMEIDA, Carla Rodrigues. **Buracos Negros: Mais de Cem Anos de História.** Caderno de Astronomia, vol. 2, n. 1, p. 93-105, fev. 2021.

ALMEIDA, Carla Rodrigues. **A Pré-história dos Buracos Negros.** Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 42, p. 1-6, 2020.

ANDRADE, Anderson da Silva. **Solução da equação de campo de Einstein:** métrica de Schwarchild. Instituto Federal Sertão Pernambucano, Faculdade de Matemática, Serra Talhada, 2022.

ASTRONOMERS reveal first image of the black hole at the heart o four galaxy. Event Horizon telescope, 12 mai 2022. Disponível em: https://eventhorizontelescope.org/blog/astronomers-reveal-first-image-black-hole-heart-our-galaxy#
Acesso em: 24 mar. 2023

BOEN, Brooke. **Supermassive Black Hole Sagittarius A*,** NASA, 29 ago 2013. Disponível em:
https://www.nasa.gov/mission_pages/chandra/multimedia/black-hole-SagittariusA.html
Acesso em: 06 mar. 2023

DI BEO, Luca. Por que essa métrica descreve o espaço-tempo plano? YouTube, fev. 2023. Disponível em: https://youtube.com/watch?v=lzNQRnfC1k&si=Ndf-lmumc17ZVesl Acesso em: 12 mai. 2023

EVANGELISTA, Edgard de F. D. **Dedução do Limite de Chandrasekhar: Uma Abordagem Didática dos Trabalhos Originais do Autor.** Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 41, n. 2, 2018.

FRANCHI, Cláudia M. G. G., REIS, Renato G. dos; NETO, Manoel F. Borges. **Breve História dos Buracos Negros**, revista científica UNILAGO, 2014.

FILHO, Jenner Barretto Bastos; DE ARAÚJO, Roberto Moreira Xavier. **A entropia de Hawking para buracos negros: um exercício de análise dimensional a partir de um texto de divulgação.** Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 29, 18 mar 2008.

GARNER, Rob. **What Are Black Holes?** NASA, 8 set 2020. Disponível em: https://www.nasa.gov/vision/universe/starsgalaxies/black_hole_description.html Acesso em: 06 mar. 2023

HAWKING, Stephen. **Buracos Negros**: **Palestras da BBC Reith Lectures**, Tradução: Cássio de Arantes Leite. 1 ed., Rio de Janeiro, Intrínseca, 2017.

HAWKING, Stephen. **O Universo Numa Casca de Noz**, Tradução: Cássio de Arantes Leite. 1 ed., Rio de Janeiro, Intrínseca, 2016.

HAWKING, Stephen. **Uma Breve História do Tempo**, Tradução: Cássio de Arantes Leite. 1 ed., Rio de Janeiro, Intrínseca, 2015.

HERDEIRO, Carlos A. R., **Um Prêmio Nobel Para Buracos Negros.** Departamento de Matemática e CIDMA, Universidade Aveiro, artigo geral, v. 43, n. 3/4.

Katherine L. Bouman, Michael D. Johnson, Daniel Zoran, Vincent L. Fish, Sheperd S. Doeleman, William T. Freeman; Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2016, pp. 913-922)

LIMA, Camila Cezar de. **Evaporação dos buracos negros: uma revisão das contribuições da radiação Hawking para o modelo clássico**. Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP), Diadema, 2022.

MATSAS, George E. A., **Buracos Negros no Cosmos,** Revista USP, São Paulo, n. 61, p. 88-93, agosto 2004.

MENDES, Raissa F. P. **A solução de Schwarzschild.** Introdução a Relatividade e ao seu Ensino**,** [s.l.], p. 1-4, fevereiro 2019.

SALDANHA, Isabela Fernandes, et. al., **Modelos Matemáticos na Busca por Buracos Negros: a Perspectiva da Aplicação do Algoritmo CHIRP,** In: AUGUSTI, Rodinei et. al., Educação e Ensino de Ciências Matemáticas: Pesquisa, Aplicação e Novas Tendências, v. 1, Editora Científica, p. 54-69, 2022

SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira. Etapas Evolutivas das Estrelas. [s.l], [s.d.]. Acesso em: 25 ago 2023.
Disponível em: https://www.if.ufrgs.br/oei/stars/wd/wd_evol.htm

SILVA, Jeremias Fontinele da. **A contribuição de Stephen Hawking**. Centro Universitário Internacional (UNINTER), [s.l.], 2022.

SOARES, Domingos. **De Schwarchild a Newton.** Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 42, 2019

SOARES, Domingos. O espaço-tempo Einsteniano**.** [s.d], 2019. Acesso em: 14 ago 2023.
Disponível em: http//lilith.fisica.ufmg.br/~dsoares/extn/adou/19/adou14.htm

SOSTISSO, A.; GONÇALVES DE FARIAS, A.; CRISTINA DE OLIVEIRA, M. **A Matemática no Ensino da Astronomia**. Pontifica Universidade Católica do rio grande do Sul, Faculdade de Matemática [s.l.], [s.d.].

SUZANA, Luiz Henrique. **A geometria do espaço-tempo de Schwarchild**. Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Florianópolis, 2019.

WALL, Mike. Eureka! Scientists Photograph a Black Hole for the 1st Time. [S. l.], 10 abr 2019. Disponível em:
https://www.space.com/first-black-hole-photo-by-event-horizon-telescope.html
Acesso em: 06 mar. 2023

WILD, Flint. What Is a Black Hole? NASA, 21 ago 2018. Disponívem em:
https://www.nasa.gov/audience/forstudents/k-4/stories/nasa-knows/what-is-a-black-hole-k4.html
Acesso em: 22 mar 2023