



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Luciano Santana Begot

**Tópicos elementares de equações diferenciais ordinárias e aplicações:**  
*uma abordagem com o Python*

Dezembro - 2022

Belém - PA



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Luciano Santana Begot

**Tópicos elementares de equações diferenciais ordinárias e aplicações:**  
*uma abordagem com o Python*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado Plano em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz.

Coorientadora: Profa. Mrs. Juliana Gomes Ferreira de Souza

Dezembro - 2022

Belém - PA

# CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

Luciano Santana Begot

**Tópicos elementares de equações diferenciais ordinárias e aplicações:**

*uma abordagem com o Python*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado Plano em Matemática, julgado pela seguinte banca examinadora:

---

Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz - Orientadora

Faculdade de Matemática, UFPA

---

Profa. Ms. Juliana Gomes Ferreira de Souza -Coorientadora

Universidade de Campinas, UNICAMP

---

Profa. Dra. Joelma Morbach

Faculdade de Matemática, UFPA

---

Prof. Ms. Edilson dos Passos Neri Junior

Faculdade de Matemática, UFPA

DATA DA AVALIAÇÃO: 14/12/2022.

CONCEITO:

# Dedicatória

*Dedico este trabalho à minha família, em especial minha mãe Fabiani, meu pai Guilherme e aos meus irmãos Lorena e Lucas.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a meus pais, que mesmo nos momentos mais difíceis sempre estiveram ao meu lado.

Agradeço também a meus irmãos e à toda minha família, por serem importantes companheiros.

Agradeço imensamente minha professora e orientadora Cristina Vaz, que acima de tudo sempre foi uma amiga que me motivou e acreditou em mim, sempre servindo de inspiração.

Agradeço a todos os meus amigos, pois sempre serviram como uma luz nos tempos difíceis.

Agradeço a todos os professores da Faculdade de Matemática da UFPA, pois pavimentaram meu caminho para chegar até aqui.

Por fim, a todos que participaram desta minha caminhada, quero que saibam que sem vocês eu não seria quem sou hoje. Todos têm minha eterna gratidão.

# Resumo

Neste trabalho faremos um estudo introdutório, teórico e numérico, de problemas de de valor inicial e problemas de contorno governados por equações diferenciais ordinárias. Apresentaremos os principais resultados teóricos necessários, essencialmente o Teorema de ponto fixo de Banach, para a demonstração de dois teoremas clássicos sobre existências e unicidade de solução, conhecidos como *Teorema de Picard* e *Teorema de Cauchy-Peano* e aplicaremos estes teoremas na resolução teórica do modelo do oscilador harmônico e do pêndulo simples. Em seguida, analisaremos, no contexto do cálculo numérico, os principais métodos numéricos, para resolução de problemas que envolvam equações diferenciais ordinárias para resolvermos alguns problemas, em particular o problema do pêndulo simples. Para problemas de valor inicial, usaremos método de Euler (explícito, implícito e aperfeiçoado) e método de Range-Kutta e para problemas de contorno, o método das diferenças finitas. Para implementação computacional dos métodos usamos a linguagem Python.

**Palavras-chave:** Teorema do ponto fixo de Banach; Equações diferenciais ordinárias; Pêndulo simples; Métodos numéricos; Python

# Lista de ilustrações

Figura 1 – A mola em posição de equilíbrio . . . . .	35
Figura 2 – A mola estendida além da posição de equilíbrio. . . . .	35
Figura 3 – Oscilador linear . . . . .	38
Figura 4 – Modelo do pêndulo simples . . . . .	39
Figura 5 – Pêndulo simples com variação dos valores iniciais . . . . .	43
Figura 6 – Interpretação gráfica do método de Euler explícito . . . . .	47
Figura 7 – Aplicação do método de Euler explícito . . . . .	49
Figura 8 – Aplicação do método de Euler implícito . . . . .	54
Figura 9 – Aplicação do método de Runge-Kutta . . . . .	58
Figura 10 – Aplicação do método de Euler aperfeiçoado . . . . .	59
Figura 11 – Aplicação do método de Runge-Kutta clássico . . . . .	63
Figura 12 – Solução numérica do pêndulo simples . . . . .	68
Figura 13 – Solução numérica do pêndulo simples . . . . .	69
Figura 14 – Método das diferenças finitas . . . . .	70
Figura 15 – Aplicação do método das diferenças finitas . . . . .	75

# Lista de tabelas

Tabela 1	–	.....	50
Tabela 2	–	.....	64
Tabela 3	–	.....	66

# Sumário

<b>Introdução</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>1 Existência e unicidade de solução</b> . . . . .	<b>13</b>
1.1 Espaços Métricos . . . . .	13
1.1.1 Espaços normados . . . . .	14
1.1.2 Convergência em espaços métricos . . . . .	15
1.2 O espaço das funções contínuas . . . . .	16
1.2.1 Teorema do ponto fixo de Banach . . . . .	22
1.3 Existência e unicidade de solução . . . . .	25
1.3.1 Teorema de Picard . . . . .	31
1.3.2 Teorema de Cauchy-Peano . . . . .	32
1.4 Aplicações: oscilador harmônico linear e o pêndulo não linear . . . . .	35
1.4.1 O oscilador harmônico . . . . .	35
1.4.2 Pêndulo Simples . . . . .	39
<b>2 Métodos numéricos</b> . . . . .	<b>44</b>
2.1 Conceitos preliminares . . . . .	44
2.1.1 Estimativas do erro . . . . .	45
2.2 Métodos de Euler . . . . .	46
2.2.1 Método Explícito de Euler . . . . .	46
2.2.2 Análise de erro no método de Euler explícito . . . . .	50
2.2.3 Método de Euler implícito . . . . .	51
2.3 Métodos de Runge-Kutta . . . . .	54
2.3.1 Métodos de Runge-Kutta de dois estágios . . . . .	55
2.3.2 Generalização dos métodos de Runge-Kutta . . . . .	59
2.3.3 Método de Runge-Kutta clássico . . . . .	61
2.4 Solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias . . . . .	64
2.4.1 Solução numérica do pêndulo simples . . . . .	66
2.5 Problemas de contorno: Método das diferenças finitas . . . . .	69
<b>Considerações Finais</b> . . . . .	<b>76</b>
<b>Referências</b> . . . . .	<b>77</b>

---

**Apêndice** . . . . . **78**

# Introdução

O objetivo principal deste trabalho é realizar um estudo introdutório sobre soluções de problemas de valor inicial e problemas de contorno governados por equações diferenciais ordinárias. Para isto, adotamos uma abordagem qualitativa e quantitativa com a finalidade de responder perguntas sobre existência e unicidade de solução e como calcular numericamente a solução. Apresentaremos os principais resultados teóricos necessários para a demonstração de dois teoremas clássicos sobre existências e unicidade de solução, conhecidos como *Teorema de Picard* e *Teorema de Cauchy-Peano*. O resultado fundamental para a prova destes dois teoremas o *Teorema de ponto fixo de Banach*. Depois, aplicamos estes resultados teóricos no modelo do oscilador harmônico e do pêndulo simples. Vale destacar que o modelo do pêndulo simples (caso não linear) é pouco explorado tanto teórica como numericamente. Em seguida, analisaremos, no contexto do cálculo numérico, os principais métodos numéricos para resolução de problemas que envolvam equações diferenciais ordinárias e resolveremos alguns problemas, em particular o problema do pêndulo simples.

Para implementarmos os algoritmos numéricos estudados usaremos a linguagem Python. O Python é uma linguagem de programação, criada em 1991 pelo matemático holandês Guido van Rossum, de alto nível, modular, multiplataforma e orientada a objetos. É uma linguagem de sintaxe relativamente simples e de fácil compreensão, que nos últimos anos tem chamado a atenção entre profissionais que não são necessariamente programadores, como engenheiros, matemáticos, cientistas de dados, pesquisadores, entre outros. Uma das grandes vantagens do Python é possuir uma vasta biblioteca de programas, ser totalmente gratuito e de código aberto, ser multiplataformas e portátil (funcionar em vários sistemas operacionais).

No capítulo 1 apresentamos os principais resultados sobre espaços métricos, necessários para provarmos o *Teorema de ponto fixo de Banach*. Em seguida, aplicamos este teorema para provarmos resultados de existência e unicidade de solução para problemas de valor inicial de 1ª ordem conhecidos como *Teorema de Picard* e *Teorema de Cauchy-Peano*. Posteriormente, aplicaremos o *Teorema de Picard* no modelo do oscilador harmônico e do pêndulo simples.

No capítulo 2, tratamos de alguns métodos clássicos para obtenção de solução

numérica para problemas de valor inicial governados por equações diferenciais ordinárias de 1<sup>a</sup> ordem. Em particular, o método de Euler explícito e implícito e os métodos de Kange-Kutta. Além disso, introduzimos o métodos das diferenças finitas para resolução de problemas de contorno governados por equações diferenciais ordinárias.

Não é nosso objetivo fazer uma análise detalhada dos métodos estudados, mas apresentar uma introdução, no contexto do cálculo numérico, que possibilite obtermos a solução numérica de alguns problemas, especialmente o modelo do pêndulo simples e, conseqüentemente, implementarmos os algoritmos com a linguagem Python.

Finalmente, nas considerações finais, faremos alguns comentários finais e apontaremos algumas direções para aprofundamentos no assunto investigado.

Além dos capítulos, o trabalho contém um apêndice com os principais comandos da linguagem Python que foram usados na implementação dos métodos.

# 1 Existência e unicidade de solução

O objetivo principal deste capítulo é provar existência e unicidade de solução para problemas de valor inicial de 1<sup>a</sup> ordem.

Segundo Doering (2007) [4], a ideia central das provas destes teoremas fica mais clara quando expressamos os conceitos principais na linguagem dos espaços métricos. Assim, apresentaremos as definições e resultados principais sobre espaços métricos que permitirão provar o **Teorema do ponto fixo** para contrações em espaços métricos completos, que é o resultado fundamental para provarmos existência e unicidade de solução para problemas de valor inicial de 1<sup>a</sup> ordem.

## 1.1 Espaços Métricos

**Definição 1.1.** *Seja  $M$  um conjunto qualquer. Uma métrica em  $M$  é uma função  $d: M \times M \rightarrow [0, +\infty)$  que satisfaz as seguintes propriedades:*

$$(M_1) \quad d(x, y) > 0, \quad x, y \in M, \quad x \neq y;$$

$$(M_2) \quad d(x, x) = 0, \quad x \in M;$$

$$(M_3) \quad d(x, y) = d(y, x), \quad x, y \in M;$$

$$(M_4) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in M.$$

O par ordenado  $(M, d)$  é chamado **espaço métrico**.

Em geral, por abuso de linguagem, nos referimos ao espaço métrico  $(M, d)$  simplesmente por  $M$ . Portanto, quando dizemos “seja  $M$  um espaço métrico” existe sempre uma métrica implicitamente definida em  $M$ .

No que segue apresentaremos alguns exemplos de espaços métricos, para mais detalhes consulte [7].

**Exemplo 1.1** (O espaço  $\mathbb{R}^n$ ). *O espaço  $\mathbb{R}^n$  é formado por todas as  $n$ -uplas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  com cada  $x_i \in \mathbb{R}$ . Existem três métricas importantes em  $\mathbb{R}^n$ : para  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e*

$(y_1, y_2, \dots, y_n)$  pontos de  $\mathbb{R}^n$ , definimos

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|; \quad (1.1)$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}; \quad (1.2)$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}. \quad (1.3)$$

A métrica  $d_2$  é chamada euclidiana por inspirar-se na fórmula da distância entre pontos da reta.

**Exemplo 1.2** (O espaço das funções contínuas). *Sejam  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado, um e  $C([a, b])$  o espaço de todas as funções contínuas  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Para  $f, g \in C([a, b])$  definimos as seguintes métricas:*

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in [a, b]\}; \quad (1.4)$$

$$d(f, g) = \left( \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.5)$$

Observe que as métricas dadas em (1.4) e (1.5) estão bem definidas, pois as funções  $f$  e  $g$  são contínuas e limitadas.

### 1.1.1 Espaços normados

**Definição 1.2.** *Seja  $X$  um espaço vetorial; Uma norma em  $X$  é uma função  $\|\cdot\|: M \rightarrow [0, +\infty)$  que satisfaz as seguintes propriedades:*

$$(N_1) \quad \|x\| > 0, \quad x \in M,$$

$$(N_2) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(N_3) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad x \in M; \lambda \in \mathbb{R}$$

O par ordenado  $(X, \|\cdot\|)$  é chamado **espaço normado**.

Note que  $d(x, y) = \|x - y\|$  é uma métrica em  $M$ . Logo, um espaço normado é um espaço métrico com a métrica proveniente da norma. Portanto podemos definir os conceitos introduzidos para os espaços métricos são válidos nos espaços normados.

**Exemplo 1.3.** *Temos que  $\|x\| = \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2}$  determina uma norma em  $\mathbb{R}^2$  e  $\|x\| = \|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{2x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2}$  determina uma norma em  $\mathbb{R}^3$ .*

### 1.1.2 Convergência em espaços métricos

**Definição 1.3** (Convergência). *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Dizemos que a sequência  $(x_n)$  de elementos de  $M$  converge para  $x \in M$  se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0; n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon. \quad (1.6)$$

Usaremos uma das seguintes notações:  $x_n \rightarrow x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ou  $\lim x_n = x$  para indicar a convergência (1.6).

Note que  $(d(x_n, x))$  é uma seqüência numérica e, logo, o limite (1.6) é um limite numérico, ou seja, convergência em espaços métricos nada mais é do que convergência numérica. Além disso, o conceito de convergência em espaços métricos depende da escolha da **métrica**.

**Definição 1.4** (Sequência de Cauchy). *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico. Uma sequência  $(x_n)$  de elementos de  $M$  é chamada seqüência de Cauchy se*

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0; n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

**Definição 1.5** (Espaço métrico completo). *O espaço métrico  $(M, d)$  é um completo se, e somente se toda sequência de Cauchy de elementos de  $M$  converge para um elemento de  $M$ .*

Podemos definir convergência e sequência de Cauchy em espaços vetoriais normados de modo análogo aos espaços métrico usando a métrica dada pela norma. Um espaço normado completo é chamado **espaço de Banach**.

**Teorema 1.1.** *Sejam  $(M, d)$  espaço métrico. Toda sequência convergente de  $M$  é uma sequência de Cauchy.*

*Demonstração.* Seja  $(x_n)$  uma sequência de  $M$  tal que  $\lim x_n = x$ . Assim,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0; n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Então, pela desigualdade triangular e para  $m > n$  tem-se

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \epsilon$$

Portanto,  $(x_n)$  é sequência de Cauchy. □

Note que, existem sequências divergentes que são sequências de Cauchy. Por exemplo, a sequência  $x_n = \frac{1}{n}$  é uma sequência de Cauchy que não converge em  $X = (0, 1]$ .

### Exemplos

**Exemplo 1.4.** O conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  é um espaço métrico completo com a métrica  $d(x, y) = |x - y|$ .

**Exemplo 1.5.** O conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  com a métrica  $d(x, y) = |x - y|$  não é um espaço completo.

**Exemplo 1.6.** O espaço  $\mathbb{R}^n$  com a métrica euclidiana é um espaço completo.

## 1.2 O espaço das funções contínuas

Nesta seção, analisaremos com mais detalhes as propriedades métricas do espaço das funções contínuas por ser este o espaço métrico de solução dos problemas que trataremos no trabalho.

**Definição 1.6** (Convergência pontual). Considere  $A \subset \mathbb{R}$  e  $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$  o conjunto de todas as funções definidas em  $A$  com valores em  $\mathbb{R}$ . Sejam  $x_0 \in A$  e  $(f_n)$  uma seqüência de funções de  $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ .

Dizemos que  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  converge pontualmente em  $x_0$  se a seqüência  $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$  é uma seqüência convergente em  $\mathbb{R}$ .

Se  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  converge pontualmente para cada  $x$  de  $A$  dizemos que  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  converge pontualmente em  $A$ .

Note que, se  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  converge pontualmente em  $A$ , então, pela unicidade do limite, temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  e  $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ , ou seja, para cada  $x \in A$  e todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  (que depende de  $\epsilon$  e  $x$ ) tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon. \quad (1.7)$$

Usaremos a notação  $f_n \xrightarrow{p} f$  em  $A$ , para indicarmos a convergência pontual de  $(f_n)$  em  $A$ .

**Exemplo 1.7.** Seja  $f_n(x) = x^n$  para  $x \in [0, 1]$ . Então a seqüência  $(f_k)_{k=1}^{\infty}$  converge pontualmente para  $f$  em  $[0, 1]$  com

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases} \quad (1.8)$$

**Exemplo 1.8.** Seja  $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$  para  $x \in [0, +\infty)$ . Então, para  $x > 0$  tem-se

$$0 < f_n(x) \leq \frac{x}{nx} = \frac{1}{n}.$$

Logo,  $f_n(x) \xrightarrow{p} 0$  para  $x > 0$ . Por outro lado,  $f_n(0) = 0, \forall n$ , e logo,  $f_n(0) \xrightarrow{p} 0$ . Portanto,  $f_n(x) \xrightarrow{p} 0$  em  $[0, +\infty)$ .

Observe que, para a seqüência do Exemplo 1.7, não existe nenhum  $n_0$  tal que (1.7) é válida simultaneamente para **todo**  $x \in [0, 1]$ . De fato, se tal  $n_0$  existisse, teríamos, por exemplo,

$$n \geq n_0 \Rightarrow x^n < \frac{1}{2}$$

para **todo**  $x \in [0, 1)$ . Isto implicaria que  $x^{n_0} < \frac{1}{2}$  para  $x \in [0, 1)$ . Fazendo  $x \rightarrow 1^-$  obteríamos a contradição  $1 \leq \frac{1}{2}$ . Logo,  $n_0$  depende de  $x$  e  $\epsilon$ .

Para a seqüência do Exemplo 1.8 temos uma situação diferente. Como  $0 < f_n(x) \leq \frac{1}{n}$  temos que, dado  $\epsilon > 0$

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - 0| < \epsilon$$

é válida simultaneamente para **todo**  $x$  em  $[0, +\infty)$  desde que  $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ . Logo,  $n_0$  depende somente de  $\epsilon$ .

Se, para dado  $\epsilon > 0$  é possível encontrarmos um  $n_0$  tal que (1.7) vale para **todo**  $x \in A$  dizemos que a seqüência  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  **converge uniformemente** para  $f$  e, assim temos a seguinte definição:

**Definição 1.7** (Convergência uniforme). Dizemos que  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  de  $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$  **converge uniformemente** para  $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$  em  $A$  se para todo  $\epsilon > 0$  se existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  (que depende de  $\epsilon$ ) tal que

$$\forall x \in A, n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon. \quad (1.9)$$

Usaremos a notação  $f_n \rightarrow f$  para indicarmos a convergência uniforme de  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ .

Observe que se  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  converge uniformemente para  $f$  então  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  converge pontualmente para  $f$ .

**Exemplo 1.9.** A seqüência dada no Exemplo 1.8 converge uniformemente. Logo, converge pontualmente.

**Exemplo 1.10.** A seqüência dada no Exemplo 1.7 não converge uniformemente para  $f$  dada em (1.8).

## Métrica uniforme

No que segue, mostraremos a relação entre a convergência uniforme e a métrica (norma) “uniforme” no espaço das funções limitadas.

**Definição 1.8.** Dizemos que a função  $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$  é **limitada** em  $A$  se existe uma constante  $C > 0$  tal que  $|f(x)| \leq C$  para todo  $x \in A$ .

Para funções limitadas em  $A$  existe  $\sup\{|f(x)|; x \in A\}$  e podemos definir a seguinte norma:

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)|; x \in A\}, \quad (1.10)$$

Note que, para  $\epsilon > 0$  tem-se

$$\|f\|_{\infty} \leq \epsilon \Leftrightarrow |f(x)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in A. \quad (1.11)$$

**Proposição 1.1.** Uma seqüência  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  de funções limitadas em  $A$  converge uniformemente em  $A$  para  $f$  se, e somente se,  $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Se  $(f_n)$  converge uniformemente em  $A$  para  $f$  temos que, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0$  tal que  $n > n_0$  implica  $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$  para todo  $x \in A$ , logo  $\epsilon$  é cota superior do conjunto  $\{|f_n(x) - f(x)|; x \in A; n > n_0\}$ . Portanto,

$$n > n_0 \Rightarrow \sup\{|f_n(x) - f(x)|; x \in A\} < \epsilon,$$

ou seja,  $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$  então, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0$  tal que  $n > n_0$  implica  $\|f_n - f\|_{\infty} \leq \epsilon$ . Mas, por (1.11) temos que  $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$  sempre que  $n > n_0$  e para todo  $x \in A$ . Portanto,  $(f_n)$  converge uniformemente em  $A$  para  $f$ .  $\square$

O próximo resultado é chamado **Crítério de Cauchy** para convergência uniforme.

**Teorema 1.2.** Sejam  $f_n \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ .  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $A$  se, e somente se, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0$  tal que  $n, m \geq n_0$  implica  $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$  para todo  $x \in A$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Como  $(f_n)$  converge uniformemente em  $A$  para  $f$  temos que, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0$  tal que  $n > n_0$  implica  $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon/2$  para todo  $x \in A$ . Então, para  $n, m \geq n_0$  temos que  $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$ .

( $\Leftarrow$ ) Se dado  $\epsilon > 0$  podemos encontrar  $n_0$  tal que  $n, m \geq n_0$  implica  $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon/2$  para todo  $x \in A$  temos que  $(f_n(x))$  é uma seqüência de Cauchy para cada  $x \in A$ . Como  $\mathbb{R}$  é completo temos que  $(f_n(x))$  converge para cada  $x \in A$ , ou seja,  $f_n \xrightarrow{p} f$ . Então, dado  $\epsilon > 0$ , para cada  $x \in A$  existe  $n_1$  tal que  $n > n_1$  implica  $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon/2$ . Sejam  $n_2 = \min(n_0, n_1)$  e  $m \geq n_2$  então  $n \geq n_2$  implica  $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$ . Como vale para cada  $x \in A$ , encontramos um  $n_2$  tal que  $n \geq n_2$  implica  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  para todo  $x \in A$ . Logo,  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $A$ .  $\square$

Considere  $\mathbb{C}(A, \mathbb{R})$  o espaço das funções  $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$  que são **contínuas**.  $\mathbb{C}(A, \mathbb{R})$  é um espaço vetorial com as operações de soma de funções e multiplicação de uma função por um escalar. Seja  $\mathbb{C}_b(A, \mathbb{R})$  o subespaço de  $\mathbb{C}(A, \mathbb{R})$  formado pelas funções **limitadas**. Então,  $\mathbb{C}_b(A, \mathbb{R})$  é um espaço normado munido da norma uniforme (1.10).

O próximo resultado garante que o limite da convergência uniforme de funções contínuas é uma função contínua:

**Teorema 1.3.** *Seja  $(f_n)$  uma seqüência de  $\mathbb{C}(A, \mathbb{R})$  tal que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $A$ . Então,  $f$  é contínua.*

*Demonstração.* Como  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  converge uniformemente em  $A$  para  $f$  temos que, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $k_0$  tal que  $n > n_0$  implica  $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon/3$  para todo  $x \in A$ , em particular, para  $x_0 \in A$ . Como  $f_n$  são contínuas em  $x_0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|x - x_0| < \delta$  implica  $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \epsilon/3$ . Então,  $|x - x_0| < \delta$  implica

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon.$$

Como  $x_0$  é arbitrário temos que  $f$  é contínua em cada ponto de  $A$   $\square$

Lembre que convergência no espaço  $\mathbb{C}_b(A, \mathbb{R})$  significa que  $f_n \rightarrow f$  em  $\mathbb{C}_b(A, \mathbb{R})$  se, e somente se,  $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ . A proposição (1.1) mostra a relação entre a convergência em  $\mathbb{C}_b(A, \mathbb{R})$  com a norma uniforme e a convergência uniforme e pode se reescrita como segue:

**Teorema 1.4.** *Seja  $(f_n)$  uma seqüência em  $\mathbb{C}(A, \mathbb{R})$ .*

*$f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $A$  se, e somente se,  $f_n \rightarrow f$  em  $\mathbb{C}_b(A, \mathbb{R})$  (isto é,  $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ ).*

*Demonstração.* Como  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $A$  temos, pelo Teorema 1.2, que  $(f_n)$  é uma sequência de Cauchy e logo,  $|f(x)| < \|f_n\|_\infty + 1$  para  $n$  suficientemente grande, portanto  $f$  é limitada. Pelo Teorema 1.3,  $f$  é contínua. Portanto,  $f \in \mathbb{C}_b(A, \mathbb{R})$ . Além disso,  $(f_n)$  converge em  $\mathbb{C}_b(A, \mathbb{R})$ , pela Proposição 1.1.  $\square$

Podemos reecreer o resultado do Teorema 1.4 dizendo que o espaço  $\mathbb{C}_b(A, \mathbb{R})$  é um espaço métrico (normado) completo, ou seja,

**Teorema 1.5.** *O espaço  $\mathbb{C}_b(A, \mathbb{R})$  com a norma uniforme é um espaço de Banach.*

Note que, pelo Teorema 1.5 o espaço  $C([a, b])$  é um espaço métrico completo com a métrica uniforme.

O resultado do Teorema 1.5 pode ser generalizado para espaços métricos mais gerais.

## Continuidade em espaços métricos

**Definição 1.9** (Continuidade). *Sejam  $(M_1, d_1)$  e  $(M_2, d_2)$  dois espaços métricos. Uma função  $f: M_1 \rightarrow M_2$  é contínua em  $x_0$  se, e somente se*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

**Exemplo 1.11** (Isometria). *Uma isometria é uma função  $f: M_1 \rightarrow M_2$  que preserva distâncias, isto é,  $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$ ,  $\forall x, y \in M_1$ . Uma isometria é contínua.*

*De fato, para qualquer  $\epsilon > 0$ , tomando  $\delta = \epsilon$  temos que  $d_1(x, p) < \delta$  implica  $d_2(f(x), f(p)) = d_1(x, p) < \epsilon$ .*

**Exemplo 1.12** (Similaridade). *Dizemos que  $f: M_1 \rightarrow M_2$  é uma similaridade se existe uma constante  $c > 0$  tal que  $d_2(f(x), f(y)) = c d_1(x, y)$ ,  $\forall x, y \in M_1$ .*

*Por exemplo, translações, rotações e reflexões são similaridades. Uma similaridade é função contínua.*

**Exemplo 1.13.** *Dizemos que  $f: M_1 \rightarrow M_2$  é lipschitziana se existe uma constante  $\lambda > 0$ , chamada constante de Lipschitz de  $f$ , tal que*

$$d_2(f(x), f(y)) \leq \lambda d_1(x, y) \quad \forall x, y \in M_1.$$

*Uma função lipschitziana é contínua (uniformemente). De fato, basta tomar  $\delta = \frac{\epsilon}{\lambda}$*

**Exemplo 1.14** (Contração). Dizemos que  $f: M_1 \rightarrow M_2$  é uma contração se existe uma constante  $0 \leq c < 1$  tal que  $d_2(f(x), f(y)) \leq c d_1(x, y)$ ,  $\forall x, y \in M_1$ . Uma contração é uma função contínua.

**Proposição 1.2.** Sejam  $(M_1, d_1)$  e  $(M_2, d_2)$  dois espaços métricos. Uma função  $f: M_1 \rightarrow M_2$  é contínua em um ponto  $x_0 \in M_1$  se, e somente se, para qualquer sequência  $(x_n)$  em  $M_1$ , tem-se:

$$x_n \xrightarrow{d_1} x_0 \implies f_n(x) \xrightarrow{d_2} f(x_0). \quad (1.12)$$

Considere os espaços métricos  $(M_1, d_1)$  e  $(M_2, d_2)$  e  $\mathbb{B}(M_1, M_2)$  espaço das funções contínuas e limitadas com a métrica

$$d(f, g) = \sup_{x \in M_1} d_2(f(x), g(x)) \quad (1.13)$$

**Teorema 1.6.** Se  $M_2$  é um espaço métrico completo então  $\mathbb{B}(M_1, M_2)$  é um espaço métrico completo.

*Demonstração.* Seja  $(f_n)$  uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{B}(M_1, M_2)$ . Então

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n, m > n_0 \implies d(f_n, f_m) = \sup_{x \in M_1} d_2(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon, \forall x \in M_1.$$

Logo,

$$n, m > n_0 \implies d_2(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon, \forall x \in M_1. \quad (1.14)$$

Agora, fixando  $x = x_0$  temos que a sequência  $(f_n(x_0))$  é uma sequência de Cauchy em  $M_2$ . Como  $M_2$  é completo obtemos  $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) \in M_2$  para cada  $x_0 \in M_1$ . Assim, para cada  $x \in M_1$  temos a função  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

Fixando  $n$ , usando a continuidade da métrica e fazendo  $m \rightarrow \infty$  na desigualdade (1.14) obtemos

$$d_2(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon, \forall n, m > n_0, \forall x \in M_1. \quad (1.15)$$

Portanto  $(f_n(x))$  converge uniformemente para  $f(x)$  e pelo teorema da convergência uniforme para funções contínua e limitadas (veja [2, p.293]) temos que  $f \in \mathbb{B}(M_1, M_2)$ . Além disso, pela desigualdade (1.15) temos  $d(f, f_n) \leq \epsilon$ ,  $\forall n > n_0$  portanto  $f_n \rightarrow f$  em  $\mathbb{B}(M_1, M_2)$ .  $\square$

O espaço métrico completo  $C_b(M_1, M_2)$  será utilizado para mostrar a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais. Para isto, vamos precisar do seguinte resultado de compacidade cuja prova pode ser encontrada em []

**Teorema 1.7** (Teorema de Arzelá - Ascoli). *Seja  $(x_n)$  uma seqüência de caminhos contínuos  $x_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Suponha que existam constantes  $K_1, K_2 > 0$  tais que, para cada  $n \in \mathbb{N}$  e quaisquer  $s, t \in [a, b]$  tem-se*

$$|x_n(s) - x_n(t)| \leq K_1 |s - t| \quad \text{e} \quad |x_n(t)| \leq K_2.$$

*Então, existe um subsequência de  $(x_n)$  que é de Cauchy em  $C([a, b], \mathbb{R}^n)$  e portanto, uniformemente convergente para um certo caminho contínuo  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

### 1.2.1 Teorema do ponto fixo de Banach

Nesta seção enunciaremos e provaremos o Teorema de ponto fixo para espaços métricos.

**Definição 1.10.** *Sejam  $M$  um espaço métrico e uma aplicação  $T : M \rightarrow M$ . As aplicações iteradas de  $T$  são as compostas*

$$T^1 = T, \quad T^2 = T \circ T^1 = T \circ T, \quad T^3 = T^2 \circ T^1 = T \circ T \circ T \dots$$

*e assim sucessivamente. Podemos definir as iteradas de  $T$  considerando o seguinte processo recursivo:*

$$\begin{aligned} T^0 &= id|_M, \\ T^{n+1} &= T \circ T^n \end{aligned}$$

*para  $n \in \mathbb{R}$ . Além disso, podemos definir as iteradas do ponto  $x$  do seguinte modo: para  $x_0 = x$ ,  $x = T^0(x)$ ,  $x_1 = T(x) = T^1(x)$ ,  $x_2 = T(T(x)) = T^2(x)$  e assim sucessivamente. Deste modo, temos o seguinte processo recursivo:*

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

*para  $x_0 = x$  e  $n \in \mathbb{R}$ .*

**Definição 1.11.** *Sejam  $M$  um espaço métrico e uma aplicação  $T : M \rightarrow M$ . Dizemos que um ponto  $x_0 \in M$  é um **ponto fixo** de uma aplicação  $T$  se  $T(x_0) = x_0$ .*

**Definição 1.12.** *Chamamos um ponto  $x_0 \in M$  de **ponto atrator** se  $x_0$  é limite das sucessivas iteradas  $(x_n)$  de qualquer ponto  $x \in M$ . Ou seja,  $\lim x_n = x_0$ .*

**Proposição 1.3.** *Pontos atratores de aplicações contínuas são necessariamente pontos fixos. De fato, como  $T$  é contínua temos que*

$$T(x_0) = T(\lim x_n) = \lim T(x_n) = \lim x_{n+1} = x_0$$

**Lema 1.1.** *Sejam  $M$  um espaço métrico e uma aplicação  $T : M \rightarrow M$ . Se  $T$  é uma contração (logo, contínua) então as sucessivas iteradas  $(x_n)$  de qualquer ponto  $x \in M$  é uma sequência de Cauchy.*

*Demonstração.* Considere  $x_{n+1} = T(x_n)$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Queremos mostrar que a sequência  $(x_n)$  das sucessivas iteradas de  $x$  é uma sequência de Cauchy. Como  $T$  é uma contração tem-se  $d(T(y), T(z)) \leq cd(y, z)$  com  $0 < c \leq 1$ . Logo, para  $y$  e  $z$  os pontos da sequência de iteradas de  $x$  obtemos

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq cd(x_n, x_{n-1}) \\ &= cd(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \leq c^2d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\dots \\ &= c^{n-1}d(Tx_1, Tx_0) \leq c^nd(x_1, x_0) \end{aligned}$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $0 < c \leq 1$  temos que a série geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} c^n$  converge. Assim,  $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_1, x_0)$  converge, o que implica que sequência  $(x_n)$  das sucessivas iteradas de  $x$  é uma sequência de Cauchy.  $\square$

**Teorema 1.8** (Teorema do ponto fixo de Banach). *Sejam  $M$  um espaço métrico completo e uma aplicação  $T : M \rightarrow M$ . Se  $T$  é uma contração então tem um único ponto fixo, que é necessariamente um atrator*

*Demonstração.* Seja  $x \in M$  um ponto qualquer de  $M$ . Considere  $x_{n+1} = T(x_n)$  para  $x \in M$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

Pelo Lema 1.1, sabemos que a sequência  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy e, logo, converge em  $M$  pois  $M$  é completo. Seja  $a \in M$  o limite de  $(x_n)$ . Como  $T$  é contínua (pois é uma contração), então  $a$  é um ponto fixo de  $T$ . Para mostrar que este ponto fixo é único para cada  $x \in M$ , supondo que existe dois pontos fixos distintos  $a, b \in M$  de  $T$ . Então,  $T(a) = a$  e  $T(b) = b$ . Além disso, como  $T$  é uma contração obtemos

$$0 \leq d(a, b) = d(T(a), T(b)) \leq cd(a, b),$$

o que implica  $(1 - \lambda)d(a, b) \leq 0$ . Como  $1 - \lambda > 0$ , resulta  $d(a, b) = 0$  e, portanto,  $a = b$ .

Note que  $\lim x_n = a$  significa de  $a$  é um ponto atrator.  $\square$

Este teorema significa, basicamente, que se  $T : M \rightarrow M$  é uma contração de um espaço métrico completo, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x)$$

é o único ponto fixo de  $T$ , independentemente do particular ponto  $x \in M$  escolhido. Por ser atrator, é particularmente simples encontrar esse ponto fixo da contração, pelo menos do ponto de vista teórico: basta iterar a partir de um ponto conveniente qualquer, como mostra o seguinte corolário:

**Corolário 1.1.** *Sejam  $M$  um espaço métrico completo e uma aplicação  $T : M \rightarrow M$ . Suponha que exista uma iterada qualquer de  $T$  que é uma contração. Então, existe um único ponto fixo atrator de  $T$ , ou seja, um único ponto  $a \in M$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = a,$$

para qualquer  $x \in M$ .

*Demonstração.* Suponha que a iterada  $T^k$  seja uma contração em  $M$ , para algum inteiro  $k \geq 1$  fixado e seja  $a$  o único ponto fixo de  $T^k$  dado pelo Teorema do ponto fixo de Banach 1.8. Para simplificar, escrevemos  $F = T^k$ . Assim, temos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F^m(y) = a \tag{1.16}$$

para cada ponto  $y \in M$ , já que  $a$  é ponto fixo atrator de  $F$ .

Queremos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = a \tag{1.17}$$

para qualquer ponto  $x \in M$ .

Se  $b \in M$  é um ponto fixo de  $T$  então  $b$  claramente também é ponto fixo da iterada  $F$ . Como essa iterada possui um único ponto fixo, decorre que  $T$  possui no máximo um ponto fixo. Reciprocamente, o ponto fixo  $a = F(a)$  da iterada  $F$  também é ponto fixo de  $T$ , pois

$$F(T(a)) = T^k(T(a)) = T^{k+1}(a) = T(T^k(a)) = T(F(a)) = T(a),$$

ou seja,  $T(a)$  é um ponto fixo de  $F$ , mas  $F$  tem um único ponto fixo, logo,  $T(a) = a$ . Portanto,  $a$  é o único ponto fixo de  $T$ . Resta mostrar que  $a$  é um ponto fixo atrator de  $T$ , ou seja, que vale (1.17).

Para isto, dado  $n \in \mathbb{N}$ , podemos sempre escrever  $n = mk + r$ , com  $0 \leq r < k$  sendo o resto da divisão de  $n$  por  $k$ . Em particular,

$$T^n(a) = T^{mk+r}(a) = (T^k)^m(T^r(a)) = F^m(T^r(a)).$$

Como  $a$  é ponto fixo atrator de  $F$ , cada uma dessas iteradas  $T^r(a)$  tem o mesmo limite  $a$  quando iterada por  $F$ , ou seja (usando (1.16)), temos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T^{mk+r}(a) = \lim_{m \rightarrow \infty} (T^k)^m(T^r(a)) = \lim_{m \rightarrow \infty} F^m(T^r(a)) = a.$$

Assim, dado  $\epsilon > 0$ , para cada  $0 \leq r < k$  inteiro podemos escolher um inteiro  $N_r \geq 1$  tal que

$$d(F^m(T^r(a)), a) < \epsilon$$

para cada  $m \geq N_r$ . Sejam  $N_k = \max\{N_0, N_1, \dots, N_{k-1}\}$  e  $N = kN_k$ . Se  $n \in \mathbb{N}$  satisfaz  $n \geq N$ , então obtemos  $\frac{n}{k} \geq \frac{N}{k} = N_k$ , de modo que podemos tomar  $n = mk + r$ , com  $m \geq N_k$  e  $0 \leq r < k$ . Assim,

$$d(T^n(a), a) = d(T^{mk+r}(a), a) = d(F^m(T^r(a)), a) < \epsilon,$$

o que prova (1.17). □

### 1.3 Existência e unicidade de solução

Nesta seção, enunciaremos e provaremos o resultado clássico de existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial de 1ª ordem. Especialmente, queremos resolver o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.18)$$

com  $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função dada.

**Observação 1.1.** Quando não causar confusão, usaremos também a notação  $x'$  para representar a derivada  $\frac{dx}{dt}$ .

**Definição 1.13.** A solução de uma equação  $x' = f(t, x)$  em  $U$  é um caminho  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  que é derivável no intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , cujo gráfico está inteiramente contido em  $U$  e cuja velocidade é determinada por  $f$ . Ou seja, dizemos que a função derivável  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é solução de  $x' = f(t, x)$

se  $(t, x(t)) \in U$  e  $x'(t) = f(t, x(t))$  para cada  $t \in I$ . Além disso, para  $(t_0, x_0) \in U$  fixo, se a solução  $x(t)$  satisfaz a condição inicial  $x(t_0) = x_0$  com  $t_0 \in I$  dizemos que  $x(t)$  é uma solução do problema de valor inicial (1.18).

**Exemplo 1.15.** Para  $n = 1$  e  $f(t, x) = \frac{g(t)}{h(x)}$  obtemos todos as soluções da EDO

$$x' = f(t, x) = \frac{g(t)}{h(x)}.$$

De fato, sejam  $G(t)$   $H(x)$  as primitivas de  $g(t)$  e  $h(x)$ , respectivamente então, pela regra da cadeia, temos que

$$H(x) = \int h(x) dx = \int h(x(t)) x'(t) dt = \int g(t) dt = G(t) + C.$$

Aplicando o teorema da função implícita obtemos  $x(t) = H^{-1}[G(t) + C]$ .

Note que, se a EDO é autônoma, ou seja,  $x' = f(x)$  em  $\mathbb{R}$  então  $g(t) = 1$  e  $h(x) = 1/f(x)$ .

## Problema integral associado

Para resolvermos o problema de valor inicial (1.18) vamos proceder do seguinte modo: obter um problema integral associado ao problema diferencial (1.18) que são equivalentes, ou seja,  $x(t)$  resolver problema integral se, e somente se, é solução do problema diferencial.

Inicialmente supomos que o aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  contém a faixa vertical  $I \times \mathbb{R}^n$ , para algum intervalo (não vazio)  $I$  em  $\mathbb{R}$ . Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua e fixemos um ponto  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$  qualquer.

Se  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um caminho derivável solução do problema 1.18. Então, podemos integrar  $x' = f(t, x)$  em  $I$  e obter

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (1.19)$$

Logo, se  $x(t)$  é solução do problema (1.18) então satisfaz a equação integral (1.19). Reciprocamente, se  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um caminho derivável solução do problema integral (1.19) então usando o Teorema fundamental do Cálculo obtemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = f(t, x(t)).$$

Logo, os problemas (1.18) e (1.19) são equivalentes.

Assim, usaremos o contexto dos espaços métricos para resolvermos o problema integral (1.19), definindo um operador  $\mathcal{L}$  que satisfaz as hipóteses do Teorema de ponto fixo de Banach, ou seja, tem um único ponto fixo que é a solução do nosso problema.

Considere o seguinte operador para cada  $t \in I$  e qualquer caminho contínuo  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$\mathcal{L}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (1.20)$$

Observe que os pontos fixo de  $\mathcal{L}(x)$  são soluções do problema (1.19). De fato,  $\mathcal{L}(x)(t) = x(t)$  implica

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Procuraremos obter uma solução (um ponto fixo de  $\mathcal{L}$ ) usando as aproximações sucessivas (as iteradas de  $\mathcal{L}$ ). Vejamos um exemplo simples.

**Exemplo 1.16.** Queremos obter a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' &= ax \\ x(0) &= k \end{cases}$$

Para isto, usaremos as iteradas de  $\mathcal{L}$ . Aqui temos  $f(t, x) = ax$  e  $t_0 = 0$  e tomamos qualquer caminho para iniciar a iteração. Começando, para simplificar, com o caminho constante  $x(t) = k = x_0$  para obter

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x)(t) &= k + \int_0^t ax(s) ds = k + \int_0^t ak ds = k[1 + at], \\ \mathcal{L}^2(x)(t) &= k + \int_0^t ak[1 + as] ds = k \left[ 1 + at + \frac{1}{2} a^2 t^2 \right], \\ \mathcal{L}^3(x)(t) &= k + \int_0^t ak \left[ 1 + as + \frac{1}{2} a^2 s^2 \right] ds = k \left[ 1 + at + \frac{1}{2} a^2 t^2 + \frac{1}{3!} a^3 t^3 \right] \end{aligned}$$

e, por indução, para todo  $m \geq 0$ , obtemos

$$\mathcal{L}^m(x)(t) = k \left[ 1 + at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \dots + \frac{1}{m!} a^m t^m \right].$$

Como a expressão acima entre colchetes converge para  $e^{at}$ , concluímos que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{L}^m(x)(t) = ke^{at} = x_0 e^{at}$$

e a solução é dada por  $x(t) = ke^{at}$ .

Para aplicarmos o Teorema do ponto fixo de Banach devemos considerar o espaço métrico completo que buscaremos a solução. Neste caso, usamos o espaço  $M = C(I, \mathbb{R}^n)$  dos caminhos contínuos de  $I$  em  $\mathbb{R}^n$  que é um espaço métrico completo com a métrica uniforme

$$d(f, g) = \sup_{t \in I} |f(t) - g(t)|.$$

Além disso, mais considerar a função  $f(t, x)$  mais regular: uma função Lipschitz na variável  $x$ .

**Definição 1.14.** Uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é lipschitziana na variável espacial em  $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  ou, simplesmente, lipschitziana em  $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , se existe  $K > 0$  tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$$

para quaisquer dois pontos  $(t, x), (t, y) \in U$  de mesma primeira coordenada  $t$ . Nesse caso, dizemos que  $K$  é uma constante de Lipschitz e que  $f(t, x)$  satisfaz uma condição de Lipschitz.

Primeiro, provaremos o seguinte lema auxiliar:

**Lema 1.2.** Se  $K > 0$  é uma constante de Lipschitz de  $f$  em  $I \times \mathbb{R}^n$ , então

$$|\mathcal{L}^m(u)(t) - \mathcal{L}^m(v)(t)| \leq \frac{K^m}{m!} |t - t_0|^m d(u, v)$$

para quaisquer  $u, v \in \mathcal{F}$ ,  $m \geq 0$  e  $t \in I$ .

*Demonstração.* A afirmação do Lema é evidente para  $m = 0$ , pela definição da métrica do supremo.

Para  $m=1$ : dadas duas funções  $u(t), v(t)$  em  $C(I, \mathbb{R}^n)$ , temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u)(t) - \mathcal{L}(v)(t) &= \left( x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right) - \left( x_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds \right) \\ &= \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) ds \end{aligned}$$

e portanto, para cada  $t \in I$ ,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(u)(t) - \mathcal{L}(v)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \right| \\ &\leq K \left| \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds \right| \\ &\leq K d(u, v) \left| \int_{t_0}^t ds \right| \leq K d(u, v) |t - t_0| \end{aligned} \quad (*)$$

com  $K > 0$  uma constante de Lipschitz. Isso prova o lema para  $m = 1$ .

Agora, supomos que o lema válido para  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja:

$$|\mathcal{L}^n(u)(t) - \mathcal{L}^n(v)(t)| \leq \frac{K^n}{n!} |t - t_0|^n d(u, v)$$

Analisando a validade do lema para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}^{n+1}(u)(t) - \mathcal{L}^{n+1}(v)(t)| &= |\mathcal{L}(\mathcal{L}^n(u))(t) - \mathcal{L}(\mathcal{L}^n(v))(t)| \\ &\leq K \left| \int_{t_0}^t |\mathcal{L}^n(u)(s) - \mathcal{L}^n(v)(s)| ds \right| \\ &\leq K \left| \int_{t_0}^t \left( \frac{K^n}{n!} |s - t_0|^n d(u, v) \right) ds \right| \\ &\leq \frac{K^{n+1}}{n!} d(u, v) \left| \int_{t_0}^t |s - t_0|^n ds \right| \leq \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1} d(u, v) \quad (**) \end{aligned}$$

De (\*) e (\*\*), o princípio da indução nos garante que o Lema é válido para todo  $m \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Agora, provaremos o resultado principal do capítulo: existência e unicidade de solução do problema de valor inicial (1.18)

**Teorema 1.9.** *Sejam  $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  um aberto,  $[a, b] \times \mathbb{R}^n \subseteq U$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua. Se  $f$  é lipschitziana em  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$  com constante de lipschitz  $K > 0$  então, para quaisquer  $t_0 \in [a, b]$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , existe uma única solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*Demonstração.* Tomamos  $I = [a, b]$  e  $l = b - a$ . Queremos aplicar o Lema 1.2. Para isto, lembrando que crescimento fatorial é  *muito* maior do que o exponencial podemos mostrar que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(Kl)^m}{m!} = 0$$

e, portanto, podemos escolher um  $m_0$  suficientemente grande tal que,

$$m > m_0 \Rightarrow \frac{(Kl)^m}{m!} = \eta < 1$$

Para cada  $t \in I$  temos  $|t - t_0| \leq l = b - a$  daí:

$$\frac{K^m}{m!} |t - t_0|^m \leq \frac{(Kl)^m}{m!} = \eta < 1$$

Assim, para  $m > m_0$  e pelo Lema 1.2 temos

$$d(\mathcal{L}^m(u), \mathcal{L}^m(v)) \leq \eta d(u, v)$$

ou seja,  $\mathcal{L}^m : C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$  é uma contração. Pelo Teorema do ponto fixo de Banach, segue que  $\mathcal{L}$  possui um único ponto fixo  $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$ .  $\square$

Assim, o único ponto fixo da contração  $\mathcal{L}$  obtido na demonstração do teorema anterior é necessariamente atrator, de modo que a solução  $x(t)$  do problema de valor inicial pode ser obtida através do limite das iteradas  $\mathcal{L}^m(y)$  de *qualquer* caminho  $y \in \mathcal{F}$ . Essa técnica de obtenção de soluções é denominada **método das sucessivas aproximações**.

Vamos aplicar o Teorema 1.9 no caso linear de (1.18):

**Teorema 1.10.** *Considere  $M(n)$  o espaço das matrizes  $n \times n$  e  $A : I \rightarrow M(n)$  e  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Se  $A(t)$  são caminhos contínuos no intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , então, para quaisquer  $t_0 \in I$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , o problema de valor inicial linear*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= A(t)x + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

*Demonstração.* Seja  $[a, b] \subseteq I$ . A aplicação  $f(t, x) = A(t)x + b(t)$  é contínua em  $I \times \mathbb{R}^n$ . Pela linearidade tem-se  $f(t, x) - f(t, y) = A(t)(x - y)$ , e logo, para cada  $t \in [a, b]$ :

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |A(t)(x - y)| \leq K|x - y|$$

com  $K = \sup\{|A(t)|, a \leq t \leq b\} < \infty$ . Portanto, pelo Teorema 1.9 temos que existe uma única solução em  $x(t)$  do problema linear definida em  $[a, b]$ .

Agora, para estender a solução para  $I$ , fixamos  $t_0 \in I$  e tomemos quaisquer  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Considere uma sequência crescente de intervalos compactos  $[a_m, b_m]$  tais que  $a_m \leq t_0 \leq b_m$  e  $I = \bigcup [a_m, b_m]$ . Dado  $m \in \mathbb{N}$ , tomamos a única solução  $x_m(t)$  em  $[a_m, b_m]$  tal que  $x_m(t_0) = x_0$ . Definindo  $x(t) = x_m(t)$ , se  $t \in [a_m, b_m]$ . Por unicidade, o caminho  $x(t)$  está bem definido em todo o intervalo  $I$ .  $\square$

No caso particular em que  $A(t) = A$  e  $b(t) = 0$  em  $I = \mathbb{R}$ , temos que  $f(t, x) = Ax$  é de classe  $C^\infty$  e, portanto garantimos a existência e a unicidade de soluções para o problema linear homogêneas de coeficientes constantes, dada no seguinte teorema:

**Teorema 1.11.** *Se  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  é uma matriz real, então para cada ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , existe uma única solução do seguinte problema linear homogêneas a coeficientes constantes definida em toda a reta  $\mathbb{R}$ .*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= Ax \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

### 1.3.1 Teorema de Picard

Note que, para o resultado dado no Teorema 1.9 temos que  $f$  é lipschitziana na faixa  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ . No que segue, trataremos que resolver o problema de valor inicial localmente.

Considere  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação contínua no aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Dado um ponto qualquer  $(t_0, x_0) \in U$ , escolhamos constantes  $a, b > 0$  tais que

$$R_{a,b} = I_a \times B_b \subseteq U$$

com  $I_a = [t_0 - a, t_0 + a] \subseteq \mathbb{R}$  e  $B_b = \overline{B}(x_0, b) \subseteq \mathbb{R}^n$  bolas fechadas centradas em  $t_0$  e  $x_0$  de raios  $a$  e  $b$ , respectivamente.

Para garantir que o gráfico de uma solução esteja dentro de  $U$ , basta exigir que esteja contido no retângulo  $R_{a,b}$ . Por isso passamos a considerar o espaço  $C(I_a, B_b)$  dos caminhos contínuos de  $I_a$  em  $B_b$  que é completo na métrica uniforme. Além disso, para cada caminho contínuo  $x : I_a \rightarrow B_b$  consideramos o operador integral

$$\mathcal{L}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Primeiro, devemos garantir que a imagem de  $\mathcal{L}(x)$  é um elemento de  $C(I_a, B_b)$ , isto é,  $\mathcal{L}(x) \in C(I_a, B_b)$ . Para isso, temos que garantir que  $f$  é limitada em  $R_{a,b}$ , ou seja, existe uma constante  $M > 0$  tal que

$$|f(t, x)| \leq M, \quad \text{para cada } (t, x) \in R_{a,b}. \quad (1.21)$$

Mas,  $f$  é contínua no retângulo  $R_{a,b}$  (compacto) e logo, limitada (pelo teorema de Weirstrass).

Assim, dado um caminho  $u \in C(I_a, B_b)$  tem-se

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(u)(t) - x_0| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds - x_0 \right| = \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, u(s))| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t M ds \right| = M|t - t_0|. \end{aligned}$$

Logo,  $\mathcal{L}(u)(t) \in B_b$  se  $t$  estiver próximo de  $t_0$ , o que significa  $M|t - t_0| \leq b$ .

Agora, estamos em condições que escolher adequadamente os raios das bolas contidas em  $R_{a,b}$ . Para isto, considere

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

Observe que  $\alpha$  só depende de  $a$ ,  $b$  e  $M$  sendo que  $a$  e  $b$  dependem da posição relativa de  $(t_0, x_0)$  em  $U$ , e  $M$  depende de  $a$ ,  $b$  e de  $f$ . Agora, fixamos algum intervalo  $I$  tal que

$$t_0 \in I \subseteq [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subseteq I_a$$

e considere o espaço  $C(I, B_b)$  dos caminhos contínuos de  $I$  em  $B_b \subseteq \mathbb{R}^n$ , que é um espaço métrico completo na métrica uniforme. Portanto, o operador integral está bem definido, ou seja, para  $x \in C(I, B_b)$  tem-se  $\mathcal{L} : C(I, B_b) \rightarrow C(I, B_b)$ .

Se  $f$  é Lipschitz em  $I_a \times B_b$ , o problema de valor inicial tem solução única local, o que resumimos no seguinte teorema, conhecido como Teorema de Picard:

**Teorema 1.12** (Teorema de Picard). *Seja  $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  um aberto,  $(t_0, x_0) \in U$  e  $a > 0, b > 0$  tais que  $R_{a,b} = I_a \times B_b \subseteq U$ . Seja  $f : R_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua em  $R_{a,b}$ . Se  $f(t, x)$  é lipschitziana no retângulo  $R_{a,b}$  então existe uma única solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

*definida no intervalo  $I$  tal que  $t_0 \in I \subseteq [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subseteq I_a$  e  $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ , com  $M > 0$  a constante dada (1.21).*

### 1.3.2 Teorema de Cauchy-Peano

É interessante observar que, mesmo na ausência da condição de Lipschitz, o método das aproximações sucessivas pode ainda convergir. Por exemplo, considerando  $c f(t, x) = 3x^{2/3}, x(0) = 0$ , que não é lipschitziana na vizinhança da origem, é possível mostrar que as iteradas de  $\mathcal{L}$  ainda convergem. No entanto, agora o limite das iteradas depende de  $x_0$ : tomando  $x_0(t) = 0$  evidentemente obtemos a solução nula mas obtemos a outra solução  $x(t) = t^3$  com a escolha  $x_0(t) = t$ .

Em geral, apenas com a continuidade de  $f$  e na ausência da condição de Lipschitz, perdemos a unicidade da solução, pois perdemos a garantia de convergência das iteradas de  $\mathcal{L}$ , já que não podemos assegurar que alguma potência de  $\mathcal{L}$  seja uma contração.

Existem exemplos de aplicações em que a sequência de iteradas não convergem, pois possuem duas subsequências convergindo para limites distintos, nenhum dos quais é uma solução de  $x' = f(t, x)$ . Contudo, podemos garantir a existência de soluções supondo apenas a continuidade de  $f$ .

O seguinte teorema, conhecido como Teorema Peano ou Teorema de Cauchy-Peano garante a existência local de solução do nosso problema de valor inicial para  $f$  contínua. Para provarmos este resultado precisamos de um resultado de compacidade conhecido como Teorema de Arzelá-Ascoli.

**Teorema 1.13** (Teorema de Cauchy-Peano). *Sejam  $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  um aberto,  $(t_0, x_0) \in U$  e  $a > 0, b > 0$  tais que  $R_{a,b} = I_a \times B_b \subseteq U$ . Se  $f : R_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação contínua em  $R_{a,b}$ . Então, existe uma solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

definida no intervalo fechado  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  com  $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$  e  $M > 0$  a constante dada (1.21).

*Demonstração.* Sem perda de generalidade podemos considerar  $t_0 = 0$ . A ideia da demonstração é construir uma sequência de funções uniformemente limitadas e equicontínuas em  $[0, \alpha]$  e mostrar que o limite da subsequência convergente é solução do problema de valor inicial. Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos

$$x_n(t) = \begin{cases} x_0 & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{\alpha}{n}, \\ x_0 + \int_0^{t-\alpha/n} f(s, x_n(s)) ds & \text{se } \frac{\alpha}{n} < t \leq \alpha. \end{cases}$$

Primeiro, mostraremos que

$$d(x_n(t) - x_0) = \|x_n(t) - x_0\| \leq b$$

para todo  $t \in [0, \alpha]$ . Como, em  $\left[0, \frac{\alpha}{n}\right]$ , temos que  $x_n(t) = x_0$  e a afirmação é trivialmente satisfeita.

Suponha que, a afirmação vale em  $\left[0, \frac{k\alpha}{n}\right]$  com  $0 \leq k < n$ . Queremos provar que vale em  $\left[\frac{k\alpha}{n}, \frac{(k+1)\alpha}{n}\right]$ . De fato,

$$\begin{aligned} \|x_n(t) - x_0\| &= \left\| \int_0^{t-\alpha/n} f(s, x_n(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_0^{t-\alpha/n} \|f(s, x_n(s))\| ds \\ &\leq M \left| t - \frac{\alpha}{n} \right| \leq M\alpha \leq b \end{aligned}$$

Consequentemente, temos que

$$\|x_n(t)\| = \|x_n(t) - x_0 + x_0\| \leq \|x_n(t) - x_0\| + \|x_0\| \leq b + \|x_0\|,$$

o que implica que a sequência  $(x_n(t))$  é uniformemente limitada em  $[0, \alpha]$ .

Agora, para concluirmos a prova mostraremos que a sequência  $(x_n(t))$  é equicontínua em  $[0, \alpha]$ . De fato, para todo  $t, s \in [0, \alpha]$  temos que

$$\|x_n(t) - x_n(s)\| = \begin{cases} 0 & \text{se } t, s \in \left[0, \frac{\alpha}{n}\right], \\ \left\| \int_0^{s-\alpha/n} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \right\| & \text{se } t \in \left[0, \frac{\alpha}{n}\right]; s \in \left(\frac{\alpha}{n}, \alpha\right), \\ \left\| \int_0^{t-\alpha/n} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \right\| & \text{se } s \in \left[0, \frac{\alpha}{n}\right]; t \in \left(\frac{\alpha}{n}, \alpha\right), \\ \left\| \int_{t-\alpha/n}^{s-\alpha/n} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \right\| & \text{se } t, s \in \left(\frac{\alpha}{n}, \alpha\right). \end{cases}$$

Em todos os casos temos que

$$\|x_n(t) - x_n(s)\| \leq M|t - s|.$$

Portanto,  $(x_n(t))$  é uma sequência equicontínua em  $[0, \alpha]$ . Assim, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli 1.7 existe uma subsequência  $(x_j(t))$  de  $(x_n(t))$  que converge uniformemente para uma função contínua  $x(t)$  em  $[0, \alpha]$ , ou seja,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j(t) = x(t). \tag{1.22}$$

Vamos provar que  $x(t)$  é a solução do problema de valor inicial. De fato, seja  $t \in [0, \alpha]$  fixo e  $j$  suficientemente grande tal que  $\frac{\alpha}{j} < t$ . Então, pela definição da sequência  $(x_n(t))$  temos que

$$x_j(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x_j(s)) ds - \int_{t-\alpha/j}^t f(s, x_j(s)) ds. \tag{1.23}$$

Observe que:

**(i)** como  $(x_j(t))$  converge uniformemente para  $x(t)$  em  $[0, \alpha]$  e  $f(t, x)$  é uma função contínua em  $R_{a,b}$  então  $f(t, x_j(t))$  converge uniformemente para  $f(t, x(t))$  em  $[0, \alpha]$ , e logo,

$$\int_0^t f(s, x_j(s)) ds \rightarrow \int_0^t f(s, x(s)) ds$$

**(ii)**  $\left\| \int_{t-\alpha/j}^t f(s, x_j(s)) ds \right\| \leq \int_{t-\alpha/j}^t \|f(s, x_j(s))\| ds \leq M \frac{\alpha}{j} \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ .

Usando os resultados **(i)** e **(ii)** podemos passar o limite na equação (1.23), ou seja,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j(t) = x_0 + \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^t f(s, x_j(s)) ds - \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{t-\alpha/j}^t f(s, x_j(s)) ds$$

e obter

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds.$$

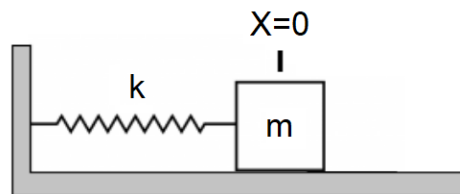
Portanto,  $x(t)$  é solução do problema de valor inicial e a prova está concluída.  $\square$

## 1.4 Aplicações: oscilador harmônico linear e o pêndulo não linear

Nesta seção, aplicaremos o resultados de existência e unicidade para resolver dois problemas de valor inicial: o oscilador harmônico e o pêndulo. Primeiro, faremos a modelagem dos problemas e depois mostraremos existência e unicidade de solução.

### 1.4.1 O oscilador harmônico

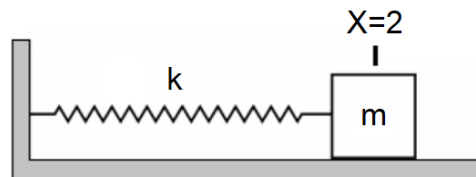
Figura 1 – A mola em posição de equilíbrio



Fonte: Elaboração Própria.

Considere uma mola de massa desprezível à qual é presa, em uma ponta, uma partícula de massa  $m > 0$ . Vamos supor que a outra ponta da mola esteja presa a uma parede e que a partícula só possa ser deslocada, sem gerar atrito, ao longo de uma reta, dotada de um sistema de coordenadas em que a posição natural de equilíbrio da partícula é dada pela origem 0, como na figura 1.

Figura 2 – A mola estendida além da posição de equilíbrio.



Fonte: Elaboração Própria.

A mola não exerce força alguma quando a partícula está na posição de equilíbrio. No entanto, com um deslocamento da sua posição de equilíbrio, como na figura 2, observa-se experimentalmente que a partícula sofre o efeito de uma força restauradora através da reação da mola; segundo a Lei de Hooke, essa força é de intensidade proporcional ao deslocamento e atua no sentido oposto ao do deslocamento. Esse fato é naturalmente observado apenas para deslocamentos pequenos, pois a mola pode até romper-se no caso de um deslocamento muito grande, para longe da posição de equilíbrio.

Supomos que o deslocamento da partícula não gera atrito. No entanto, devido à viscosidade do meio em que ocorre o movimento, a partícula pode sofrer o efeito de uma força de atrito do meio. Observa-se experimentalmente que, para deslocamentos pequenos, essa força de atrito é de intensidade proporcional à velocidade e atua no sentido oposto ao do movimento.

Além disso, devemos considerar a existência de alguma força externa atuando no sistema mola-partícula, por exemplo, vibrações da parede na qual a mola está presa, ou, se a partícula for metálica, algum campo magnético. Uma tal força pode ser independente da posição e velocidade da partícula, mas depende do instante de tempo.

Assim, permitindo apenas pequenos deslocamentos, e supondo que  $x(t)$  descreva a posição da partícula sujeita a todas essas forças, resulta que  $x'(t)$  e  $x''(t)$  dão a velocidade e a aceleração da partícula e, portanto, pela Segunda Lei de Newton, a trajetória  $x(t)$  da partícula nesse sistema mecânico satisfaz:

$$mx''(t) = -kx(t) - \eta x'(t) + F_e(t).$$

Na equação acima, o campo de forças que age na partícula é dado pelos componentes anteriormente descritos: a reação da mola  $-kx$ , em que  $k > 0$  é a constante de elasticidade da mola, o amortecimento do meio  $-\eta x'$ , com  $\eta \geq 0$  o coeficiente de atrito, e a força externa  $F_e(t)$ .

Assim, as soluções dessa equação diferencial linear de segunda ordem nos fornece as equações do movimento da partícula. Dados quaisquer valores iniciais  $x(t_0)$  e  $x'(t_0)$  em  $\mathbb{R}$ , as soluções dessa equação diferencial estarão determinadas de maneira única, como será visto adiante. É bastante intuitivo que necessitemos dessas duas condições iniciais para conhecer a evolução temporal da partícula no extremo da mola, pois não basta saber de onde ela é largada num certo instante, precisamos também saber a velocidade inicial com que é lançada.

Para simplificar a escrita, denotaremos  $\omega = \sqrt{k/m} > 0$ ,  $a = \eta/2m \geq 0$  e  $h = F_e/m$ , de modo que podemos reescrever a equação do movimento nesse sistema como

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = h(t) \quad (1.24)$$

Inicialmente, consideramos o atrito e a força externa desprezíveis. Nesse caso, a equação que descreve o problema unidimensional associado à mola simples é dada por:

$$x'' + \omega^2 x = 0 \quad (1.25)$$

este sistema mecânico é conhecido como oscilador harmônico simples.

A amplitude de um movimento desse sistema harmônico simples é dada pelo deslocamento máximo  $|x(t)|$ , que ocorre no instante em que a velocidade for nula. O período de uma solução é o tempo  $T$  necessário para uma oscilação completa, ou seja,  $\omega T = 2\pi$ , portanto

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

é o mesmo para todas as soluções. Outra propriedade compartilhada por todas as soluções é a frequência, que é o número de ciclos por unidade de tempo, dada por

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

A equação acima mostra que a frequência aumenta se a rigidez  $k$  da mola for aumentada ou se a massa  $m$  da partícula for diminuída.

Para nossa análise, não é interessante tratarmos este problema na forma de uma equação de segunda ordem. Assim, por termos duas condições iniciais, podemos transformá-lo num sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Para isso, introduzimos a variável  $v = x'$ , com  $x$  denotando a posição e  $v$  a velocidade. Assim podemos acompanhar através de  $x(t)$ ,  $v(t)$ , não só a posição da partícula na extremidade da mola, mas também, simultaneamente sua velocidade.

Nesse contexto, a equação de segunda ordem  $x'' + \omega^2 x = 0$  equivale ao sistema linear

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\omega^2 x(t) \end{cases}$$

ou seja, à equação vetorial

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Assim, considerando

$$u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

e tomando  $x(t_0) = x_0$  e  $v(t_0) = v_0$  podemos escrever (1.26) na forma de (1.18), isto é:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u) \\ u(t_0) = (x_0, v_0) \end{cases} \quad (1.27)$$

com  $f(t, u) = f(t, x, v) = (x, -\omega^2 v)$ .

**Teorema 1.14.** *O problema de de valor inicial (1.27) possui solução e esta é única.*

*Demonstração.* Considerando

$$\begin{aligned} f(t, x_2, v_2) - f(t, x_1, v_1) &= (x_2 - x_1, \omega^2(v_2 - v_1)) \\ \Rightarrow |f(t, x_2, v_2) - f(t, x_1, v_1)| &\leq (\omega + 1)^2 |(x_2, v_2) - (x_1, v_1)| \end{aligned}$$

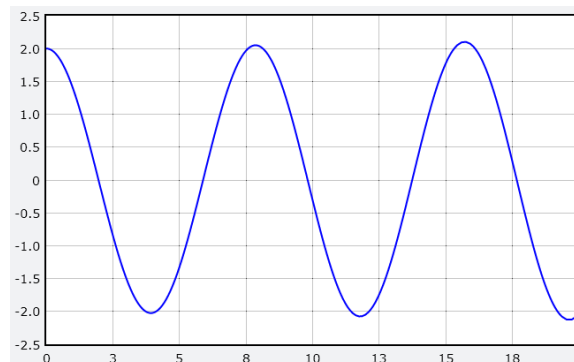
ou seja,  $f(t, u)$  é lipschitziana. Isso, somado ao fato de que  $f$  é contínua no  $\mathbb{R}^3$ , nos permite afirmar, pelo teorema de Picard, que (1.26) possui solução e esta é única.  $\square$

Podemos encontrar esta solução analiticamente, que é dada por:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\omega t) + v_0 \frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega t) \\ v(t) = -x_0 \omega \text{sen}(\omega t) + y_0 \cos(\omega t) \end{cases} \quad (1.28)$$

O gráfico abaixo, gerado com Python, ilustra a posição da partícula em função do tempo para o caso em que  $x_0 = 2$ ,  $v_0 = 0$  e  $\omega = 0,8$ :

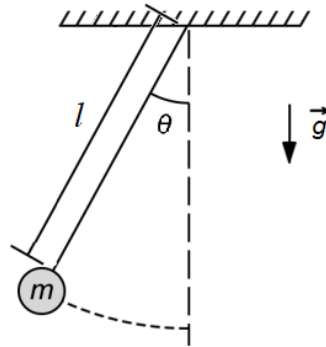
Figura 3 – Oscilador linear



Fonte: Elaboração Própria.

## 1.4.2 Pêndulo Simples

Figura 4 – Modelo do pêndulo simples



Fonte: Elaboração Própria.

Analisaremos agora o modelo de um pêndulo num plano coordenado sob a ação da força da gravidade, como mostra a figura 4. Uma partícula de massa  $m > 0$  está fixada na ponta da haste rígida de tamanho  $l > 0$  e massa desprezível, enquanto a outra ponta está fixada em um "teto", que consideraremos a origem do plano. As possíveis posições dessa partícula estão sobre a circunferência de centro  $(0,0)$  e raio  $l$ . Para saber o que acontece com esse pêndulo sujeito à ação da gravidade, basta saber a posição  $(x_1(t), x_2(t))$  da partícula, pois o outro extremo da haste está fixo na origem.

Em função da simetria circular deste problema, é conveniente descrever a posição da partícula com coordenadas polares, isto é, em função da sua posição angular  $\theta$  e da distância  $r$  até a origem. Lembrando que essa mudança de coordenadas é dada por  $(x_1, x_2) = r(\cos(\theta), \sin(\theta))$ . Como  $r(t) = l$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , o problema se torna na verdade um problema unidimensional na variável angular  $\theta$ . A posição do pêndulo em repouso, no extremo inferior da circunferência, é considerada, por conveniência, como sendo a posição  $\theta = 0$  do pêndulo.

Levando em conta, além da ação da gravidade, também alguma força de atrito, a Segunda Lei de Newton garante que o sistema mecânico dado por esse pêndulo simples é descrito pela equação

$$ml\theta'' + k\theta' + mg \sin \theta = 0$$

com  $g > 0$  denotando a constante de gravitação e  $k \geq 0$  um coeficiente de atrito. Observe, antes de mais nada, que essa equação não é linear.

Vamos considerar aqui o caso de atrito desprezível, ou seja, nulo. A equação que

descreve o problema unidimensional associado ao pêndulo sem atrito é, simplesmente,

$$ml\theta'' + mg \operatorname{sen} \theta = 0 \Rightarrow \theta'' = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta \quad (1.29)$$

Como fizemos no sistema massa mola, introduziremos uma variável para transformar esta equação de segunda ordem em um sistema de equações de primeira ordem. Assim, chamamos de velocidade angular a  $\omega = \theta'$ .

Isto nos retorna o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \theta'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta(t) \end{cases} \quad (1.30)$$

Mais uma vez, se tomarmos as condições iniciais  $\theta(t_0) = \theta_0$  e  $\omega(t_0) = \omega_0$ , teremos um problema de valor inicial da forma (1.18), com

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} \\ \begin{cases} u'(t) &= f(t, u) \\ u(t_0) &= (\theta_0, \omega_0) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.31)$$

No que segue, vamos provar a existência e unicidade de solução em (1.31).

**Proposição 1.4.** *O problema de valor inicial (1.31) tem uma única solução.*

*Demonstração.* Queremos aplicar o Teorema 1.9 (teorema de Picard global). Para isto, sejam  $x_0 = (\theta_0, \omega_0) \in \mathbb{R}^2$  e  $[a, b]$  um intervalo qualquer tal que  $t_0 \in [a, b]$ . Vamos provar que a função  $f(t, u) = \left(\omega, -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta\right)$ . De fato, para  $u(t) = \left(\omega_1, -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta_1\right)$  e  $v(t) = \left(\omega_2, -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta_2\right)$  tem-se

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| = |\omega_2 - \omega_1| + \frac{g}{l} \left| \operatorname{sen} \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \right|.$$

Mas, pelo Teorema do Valor Médio  $|\operatorname{sen}(\theta_2) - \operatorname{sen}(\theta_1)| \leq |\theta_2 - \theta_1|$  e, logo,

$$\begin{aligned} \|f(t, u) - f(t, v)\| &= |\omega_2 - \omega_1| + \frac{g}{l} \left| \theta_2 - \theta_1 \right| \\ &\leq \max\left(\frac{g}{l} + 1\right) \left\{ |\omega_2 - \omega_1| + |\theta_2 - \theta_1| \right\} \\ &\leq \max\left(\frac{g}{l} + 1\right) \|u - v\|. \end{aligned}$$

Considerando  $K = \max\left(\frac{g}{l} + 1\right) > 0$  temos que a função  $f(t, u)$  é lipschitziana em  $[a, b] \times \mathbb{R}^2$  e pelo Teorema 1.9 o problema de valor inicial (1.31) tem uma única solução  $u(t)$ . □

No que segue, calcularemos a solução explícita do problema (1.31). Para isto, usando  $p = \sqrt{\frac{g}{l}}$  reescrevemos a equação (1.29) como

$$\theta'' + p^2 \sin \theta = 0 \quad (1.32)$$

E vamos considerar as seguintes condições iniciais  $\theta(0) = \theta_0$  e  $\theta'(0) = 0$ . Reescrevemos (1.32) da seguinte maneira:

$$\left( \frac{1}{2} (\theta')^2 - p^2 \cos \theta \right) = 0$$

e usando as condições iniciais, obtemos por integração:

$$(\theta')^2 = 2p^2 (\cos \theta - \cos \theta_0).$$

Utilizando  $\cos \theta = 1 - 2\sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$  temos que

$$(\theta')^2 = 4p^2 \left[ \sin^2 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (1.33)$$

Tomando  $y = \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)$  e  $k = \sin^2 \left( \frac{\theta_0}{2} \right)$ , com as condições iniciais dadas, temos  $y(0) = \sqrt{k}$ . Agora, derivando a expressão de  $y$  tem-se

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \theta' \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.34)$$

Em seguida,

$$(y')^2 = \frac{1}{4} \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) (\theta')^2 = \frac{1}{4} \left[ 1 - \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \theta'^2 = \frac{1}{4} (1 - y^2) \theta'^2 \quad (1.35)$$

Combinando (1.33) e (1.35), obtemos:

$$\frac{4}{1 - y^2} (y')^2 = 4p^2 (k - y^2) \Rightarrow (y')^2 = p^2 k \left( 1 - \frac{y^2}{k} \right) (1 - y^2) \quad (1.36)$$

Agora, vamos considerar seguintes mudança de variáveis:

$$\tau = pt, z = \frac{y}{\sqrt{k}} \quad (1.37)$$

Assim, temos a seguinte equação:

$$\left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 = (1 - z^2)(1 - kz^2) \quad (1.38)$$

com  $0 < k < 1$ ,  $z(0) = 1$  e  $\frac{dz}{d\tau}(0) = 0$

A equação (1.38) é uma equação de variáveis separáveis, que é resolvida de modo usual:

$$\tau = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k\xi^2)}} - \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k\xi^2)}}. \quad (1.39)$$

Deste modo, escrevemos  $\tau$  em função de  $z$  e  $k$  da seguinte forma:

$$\tau(z) = K(k) - F(\arcsenz, k) \Rightarrow F(\arcsenz, k) = K(k) - \tau(z). \quad (1.40)$$

Portanto,

$$K(k) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k\xi^2)}}, \quad (1.41)$$

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k\xi^2)}}, \quad (1.42)$$

$$z = \text{sen}\phi.$$

Assim, seguindo Beléndez (2007) podemos escrever a equação (1.40) em termos da função elíptica de Jacobi  $sn(u, m)$ .

$$z = sn(K(k) - \tau, k) \quad (1.43)$$

Voltando às variáveis originais obtemos:

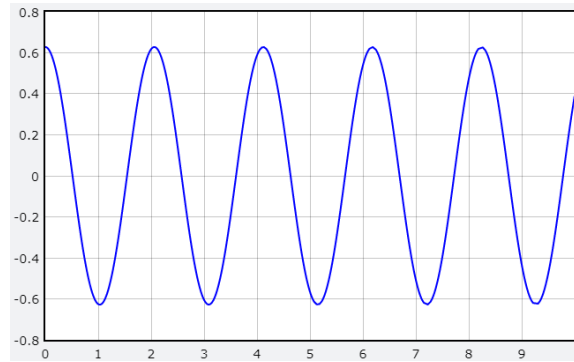
$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \text{sen}\frac{\theta_0}{2} sn\left[K\left(\text{sen}^2\frac{\theta_0}{2}\right) - pt, \text{sen}^2\frac{\theta_0}{2}\right] \quad (1.44)$$

Explicitando  $\theta$  em função de  $t$ :

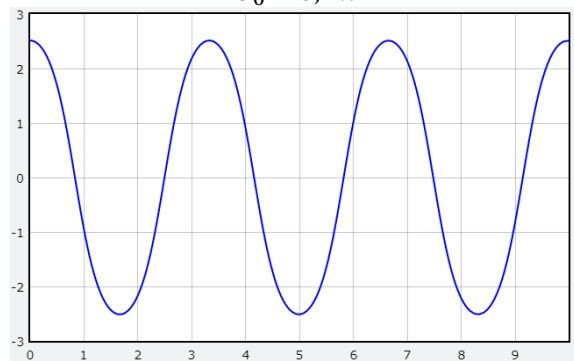
$$\theta(t) = 2\arcsen\left[\text{sen}\frac{\theta_0}{2} sn\left(K\left(\text{sen}^2\frac{\theta_0}{2}\right) - pt, \text{sen}^2\frac{\theta_0}{2}\right)\right] \quad (1.45)$$

Representamos esta solução graficamente, utilizando o Python, para  $g = 9,8m/s^2$  e  $l = 1m$ . Também utilizamos três valores diferentes para  $\theta_0$ .

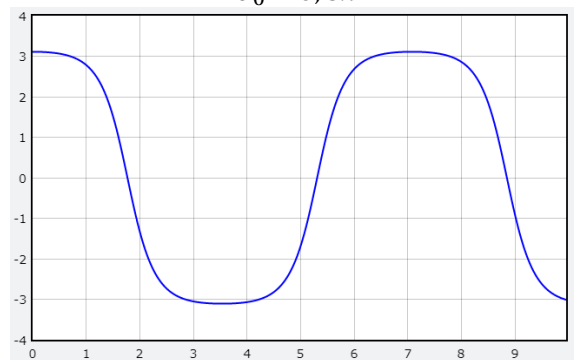
Figura 5 – Pêndulo simples com variação dos valores iniciais



$$\theta_0 = 0,2\pi$$



$$\theta_0 = 0,8\pi$$



$$\theta_0 = 0,99\pi$$

Fonte: Elaboração Própria.

Notamos que apesar da não linearidade do problema, este possui solução praticamente harmônica para certos valores de  $\theta_0$ .

## 2 Métodos numéricos

Neste capítulo, trataremos de alguns métodos clássicos para obtenção de solução numérica para problemas de valor inicial governados por equações diferenciais ordinárias de 1<sup>a</sup> ordem. Em particular, o método de Euler explícito e implícito e os métodos de Kange-Kutta.

Não é nosso objetivo fazer uma análise detalhada dos métodos, mas apresentar uma introdução no contexto do Cálculo numérico e programar os algoritmos com a linguagem Python.

Vamos considerar o problema de valor inicial de primeira ordem da forma:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_1) = y_1 \end{cases} \quad (2.1)$$

com  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Em muitas situações, não é possível obter uma solução analítica de uma equação diferencial ordinária explicitamente, isto motiva a busca por soluções aproximadas.

Segundo Gilat e Subramanian (2008), a solução numérica de um problema de valor inicial da forma (2.1) é formada por um conjunto de pontos discretos que representam a solução  $y(x)$  de forma aproximada. Por exemplo, o domínio pode ser dividido em  $n$  subintervalos de mesmo comprimento definidos por  $n + 1$  valores da variável independente entre  $x_1 = a$  e  $x_{n+1} = b$ . A solução consiste em valores da variável dependente determinados para cada valor da variável independente. A solução é então formada por um conjunto de pontos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$  que definem uma solução aproximada da função  $y(x)$ .

### 2.1 Conceitos preliminares

**Definição 2.1.** *Chama-se método numérico o procedimento empregado no cálculo de uma estimativa para a solução associada a um conjunto de pontos discretos. O processo de solução é incremental, o que significa que ele é determinado em passos. Ele começa no ponto no qual o valor inicial é fornecido. Em seguida, usando a solução conhecida no primeiro ponto, determina-se uma solução em um segundo ponto próximo. Depois, obtém-se uma solução em um terceiro ponto, e assim por diante.*

Há procedimentos que envolvem uma abordagem de passo simples e outros que consideram uma abordagem multipasso.

**Definição 2.2.** Na abordagem de passo simples, a solução no ponto seguinte,  $x_{i+1}$ , é calculada a partir da solução conhecida no ponto atual,  $x_i$ .

**Definição 2.3.** Na abordagem multipasso, a solução  $x_{i+1}$  é calculada a partir das soluções conhecidas em vários pontos anteriores. A ideia é que o valor da função em vários pontos anteriores possa fornecer uma melhor estimativa para a tendência da solução.

Existem dois tipos de métodos: explícito e implícito, que podem ser usados no cálculo da solução em cada passo. A diferença entre esses métodos está no procedimento usado na solução.

**Definição 2.4.** Métodos explícitos são aqueles que usam uma fórmula explícita para calcular o valor da variável dependente no próximo valor da variável independente. Em uma fórmula explícita, o lado direito da equação tem apenas grandezas conhecidas. Em outras palavras, o próximo valor desconhecido da variável dependente,  $y_{i+1}$ , é calculado a partir de uma expressão na forma:

$$y_{i+1} = F(x_i, x_{i+1}, y_i)$$

com  $x_i, y_i, x_{i+1}$  sendo grandezas conhecidas.

**Definição 2.5.** Chamamos de métodos implícitos aqueles cuja a equação usada para calcular  $y_{i+1}$  a partir dos valores conhecidos  $x_i, y_i, x_{i+1}$  tem a forma:

$$y_{i+1} = F(x_1, y_i, x_{i+1}, y_{i+1})$$

Aqui, a incógnita  $y_{i+1}$  aparece em ambos os lados da equação. No geral, o lado direito da equação acima é não-linear, e a equação deve ser resolvida numericamente.

Métodos implícitos são mais precisos que métodos explícitos, mas requerem um maior esforço computacional em cada passo de iteração.

### 2.1.1 Estimativas do erro

Dois tipos de erro ocorrem quando problemas de valor inicial são resolvidos numericamente: erros de arredondamento e erros de truncamento.

**Definição 2.6.** Chamamos de *erros de arredondamento* os erros causados pelo procedimento usado por computadores para realizar os cálculos.

**Definição 2.7.** Chamamos de *erros de truncamento* os erros causados pela natureza aproximada do método empregado na solução numérica.

Como a solução numérica de uma equação diferencial é calculada em incrementos, pode-se dividir o erro de truncamento em duas partes. Uma delas, chamada erro de truncamento local, está associada à aplicação do método numérico em um único passo. A segunda parte, que se chama erro de truncamento propagado, ou acumulado, é causada pelo acúmulo dos erros de truncamento locais gerados nos passos anteriores. Juntas, as duas partes formam o erro de truncamento global ou total da solução.

## 2.2 Métodos de Euler

O método de Euler é a mais simples técnica de solução de um problema de valor inicial de primeira ordem da forma (2.1). O método pode ser formulado de forma explícita ou implícita.

### 2.2.1 Método Explícito de Euler

**Definição 2.8.** O *método explícito de Euler*, também chamado de *método de Euler progressivo*, é uma técnica numérica de passo simples usada na solução de problemas de valor inicial de primeira ordem.

O método calcula a solução numérica utilizando as seguintes equações:  $x_{i+1} = x_i + h$  e

$$y_{i+1} = y_i + s \cdot h \quad (2.2)$$

com  $h$  sendo a distância entre os pontos  $x_i$ , chamado de passo, e a inclinação  $s$  é uma constante que estima o valor de  $y'(x_i)$  no intervalo de  $x_i$  a  $x_{i+1}$ . Este método calcula a inclinação a partir da própria equação diferencial, ou seja,

$$\text{Inclinação} = y'(x_i) = f(x_i, y_i).$$

O método de Euler assume que, em uma pequena distância  $h$  na vizinhança de  $(x_i, y_i)$ , a função  $y(x)$  tem uma inclinação constante e igual à inclinação em  $(x_i, y_i)$ . A partir dessa

hipótese, o próximo ponto da solução numérica é calculado usando  $x_{i+1} = x_i + h$  e  $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$ .

Podemos obter as expressões do método de Euler considerando a expansão em série de Taylor da função  $y(x)$  do seguinte modo:

Supondo que a solução de (2.1) possui todas as derivadas contínuas no intervalo  $[a, b]$  que contém os pontos discretos  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ , pela série de Taylor de  $y(x)$  em torno de  $x_i$  tem-se:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} (x - x_i)^k$$

Tomando  $x = x_i + h$ , denotado por  $x_{i+1}$ , temos  $h = x_{i+1} - x_i$  e portanto:

$$y(x_{i+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} h^k$$

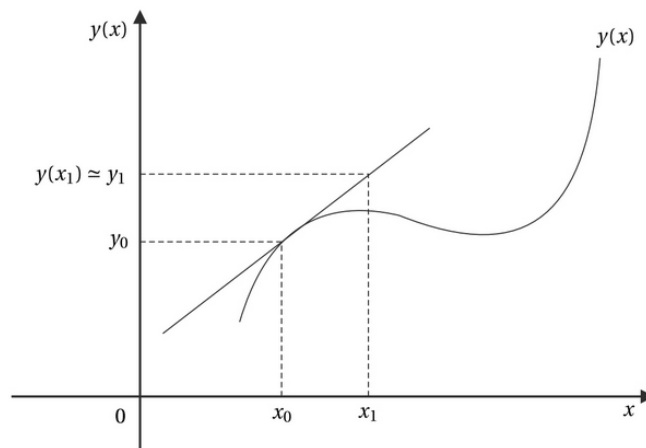
Se truncarmos esta série no  $p$ -ésimo termo, temos:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + y''(x_i)\frac{h^2}{2!} + \dots + y^{(p)}(x_i)\frac{h^p}{p!}$$

Portanto, o método de Euler é obtido truncando a série de Taylor em  $p = 1$ .

O método de Euler explícito é ilustrado na seguinte Figura 6:

Figura 6 – Interpretação gráfica do método de Euler explícito



Fonte: Elaboração Própria.

**Algoritmo 1** (Método de Euler). *Dado o problema de valor inicial (2.2). O método de Euler explícito com passo  $h$  consiste em aplicarmos a fórmula iterativa*

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n), \quad n \geq 0. \quad (2.3)$$

para calcularmos aproximações sucessivas  $y_1, y_2, y_3, \dots$ , dos valores  $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \dots$  da solução analítica  $y(x)$  nos pontos  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , respectivamente.

No que segue apresentamos pseudocódigo do Algoritmo 1:

```

1 Dados: a, b, y0, N, f(x,y), y(x)
2 h = (b-a)/N
3 x(0) = a
4 y(0) = y0
5 Para i=0, 1, 2, .... N -1
6 x(i+1) = a + i*h
7 end loop
8 Para i=0, 1, 2, .... N -1
9 y(i+1) = y(i) + h*f(x(i), y(i))
10 end loop
11 erro(i) = |y(x(i)) - y(i)|
12 end for
13 Desenhe y(x_1) e y_i
14 end loop

```

**Exemplo 2.1.** Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(x) = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

com solução exata dada por  $y(x) = 2e^x - x - 1$ . Aplique o método de Euler para aproximar a solução do problema no intervalo  $[0, 1]$

**Solução:** Para aproximar a solução método de Euler implementaremos o algoritmo 1 usando a linguagem de programação Python:

```

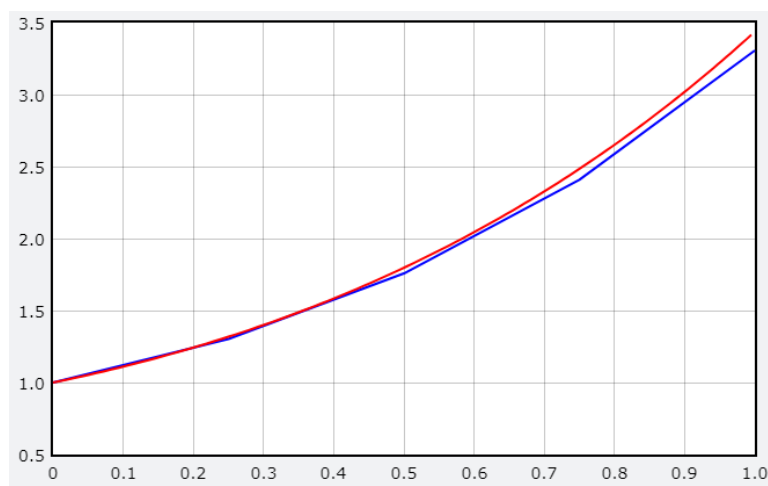
1 # importamos os pacotes necessarios
2 import numpy as np
3 from vpython import *
4 # determinamos os parametros de cor da curva a ser plotada
5 f1=gcurve(color=color.blue)
6 f2=gcurve(color=color.red)
7 h = 0.05 #passo

```

```
8 x0 = 0.0
9 xn = 1
10 # criamos a lista com os pontos xi
11 X = np.arange(x0, xn+h, h)
12 # lista com y0, a ser preenchida pelos yi
13 Y = [1]
14 # entramos com f(x,y) e a solucao analitica y(x)
15 f = lambda x,y: x + y
16 y = lambda x : 2* np.exp(x) - x - 1
17 # Calculamos os yi e preenchemos a lista
18 for n in range(len(X)-1):
19     Y.append(Y[n] + f(X[n],Y[n])*h ) #Y[-1] ultimo yi calculado
20 # Calculamos os y(xi) da solucao analitica e preenchemos a lista
21 Yr = y(X)
22 # plota
23 for n in range(len(X)-1):
24     f1.plot(X[n], Y[n])
25     f2.plot(X[n], Yr[n])
```

Na figura abaixo temos a solução exata (gráfico em azul) e da solução aproximada (gráfico em vermelho):

Figura 7 – Aplicação do método de Euler explícito



Fonte: Elaboração Própria.

Na tabela abaixo apresentamos os resultados numéricos:

Tabela 1

$x_i$	$y_i$	$y(x_i)$	$ y(x_i) - y_i $
0.0	1.0	1.0	0.0
0.25	1.302	1.318	0.016
0.5	1.758	1,797	0.039
0.75	2.408	2.484	0.076
1.0	3.307	3.437	0.130

## 2.2.2 Análise de erro no método de Euler explícito

O método de Euler explícito consiste em truncar, a cada ponto  $x_i$ , a série de Taylor para a solução do problema de valor inicial em 1ª ordem. Pelo Teorema de Taylor, conhecendo a solução no ponto  $x_i$ , podemos expandir a solução em torno deste ponto:

$$y(x) = y(x_i) + (x - x_i)y'(x_i) + \frac{1}{2}(x - x_i)^2 y''(\xi)$$

com  $\xi \in (x_i, x)$ . O valor da solução  $y(x)$  calculada no ponto  $x_{i+1}$  é dado pela série anterior calculada em  $x = x_{i+1}$ :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_i)$$

com  $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ . Essa última equação permite que estimemos o *erro local*  $\epsilon_{i+1} := |y(x_{i+1}) - y_{i+1}|$  com  $y_{i+1}$  a solução aproximada calculada pelo método de Euler.

Assim, podemos escrever:

$$\epsilon_{i+1} = \epsilon_i + h(f(x_i, y(x_i)) - f(x_i, y_i)) + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_i) \quad (2.4)$$

Para continuar a análise, deveremos considerar algumas hipóteses sobre a solução exata  $y(x)$  e da função  $f(x, y)$ .

Primeiro, vamos supor que a solução seja uma função  $y(x)$  de classe  $C^2(a, b)$  com  $2^a$  derivada limitada em  $[a, b]$ , ou seja, existe um a constante  $M > 0$  tal que  $|y''(x)| \leq M$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Segundo, que a função  $f(x, y)$  seja uma função lipschitz no segundo argumento para todo  $x \in [a, b]$  com constante de lipschitz  $K > 0$ . Portanto, tomando o valor absoluto na equação (2.4) obtemos

$$|\epsilon_{i+1}| \leq |\epsilon_i| + hK|y(x_i) - y_i| + \frac{1}{2}h^2 M,$$

Fazendo  $|y(x_i) - y_i| = |\epsilon_i|$  temos

$$|\epsilon_{i+1}| \leq (1 + hL)|\epsilon_i| + \frac{1}{2}h^2M. \quad (2.5)$$

Usando a condição inicial,  $y(x_0) = y_0$  temos que  $\epsilon_0 = 0$  e usando (2.5) obtemos

$$\begin{aligned} |\epsilon_1| &\leq \frac{1}{2}h^2M \\ |\epsilon_2| &\leq (1 + hK)|\epsilon_1| + \frac{1}{2}h^2M \leq (1 + hK)\frac{1}{2}h^2M + \frac{1}{2}h^2M \\ |\epsilon_3| &\leq (1 + hK)|\epsilon_2| + \frac{1}{2}h^2M \leq (1 + hK)^2\frac{1}{2}h^2M + (1 + hK)\frac{1}{2}h^2M + \frac{1}{2}h^2M. \end{aligned}$$

Deste modo, podemos provar por indução a seguinte estimativa do erro:

$$|\epsilon_n| \leq \frac{1}{2}h^2M \sum_{j=0}^{n-1} (1 + hK)^j. \quad (2.6)$$

Como  $\sum_{j=0}^{n-1} (1 + hL)^j$  é uma série geométrica temos que  $\sum_{j=0}^{n-1} (1 + hL)^j = \frac{(1 + hK)^n - 1}{hK}$  e a estimativa (2.6) torna-se

$$|\epsilon_n| \leq hM \frac{(1 + hK)^n - 1}{2K},$$

Considerando que  $(1 + x)^n \leq e^{nx}$ ,  $\forall n$  e  $\forall x > 0$ , obtemos

$$|\epsilon_n| \leq h \frac{M}{2K} (e^{Knh} - 1) = h \frac{M}{2K} (e^{K(b-a)} - 1) = Ch. \quad (2.7)$$

Na última igualdade usamos que  $h = \frac{(b-a)}{n}$ .

A estimativa do erro (2.7) diz que o erro é da ordem de  $h$ . Além disso, temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\epsilon_n| \leq \lim_{h \rightarrow 0} Ch = 0.$$

Portanto, desconsiderando os erros de arredondamento, a solução aproximação construída pelo método de Euler converge para a solução do problema de valor inicial para  $h$  suficientemente pequeno.

### 2.2.3 Método de Euler implícito

O método de Euler implícito é obtido através de procedimento análogo ao do explícito, mas neste caso aproximamos  $f$  em  $[x_1, x_2]$  pela função constante  $f(x, y) \approx f(x_2, y_2)$ . Repetindo o processo para  $x_3, x_4, \dots, x_n$ , obtemos:

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

com  $x_{i+1} = x_i + h$ .

Aqui a incógnita  $y_{i+1}$  aparece em ambos os lados da equação. Assim, dependendo da forma que  $f(x, y)$  depende de  $y$ , não é fácil ou mesmo possível isolar o termo  $y_{i+1}$  de forma explícita. Em geral, obtemos uma equação não linear da incógnita  $y_{i+1}$ , que deve ser resolvida numericamente. A análise dos erros de truncamento e global é similar a do método de Euler explícito.

**Algoritmo 2** (Método de Euler implícito). *Dado o problema de valor inicial (2.2). O método de Euler explícito com passo  $h$  consiste em aplicarmos a fórmula iterativa*

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1}, y_{i+1}). \quad (2.8)$$

*para calcularmos aproximações sucessivas  $y_1, y_2, y_3, \dots$ , dos valores  $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \dots$  da solução analítica  $y(x)$  nos pontos  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , respectivamente.*

No que segue apresentamos pseudocódigo do Algoritmo 1:

```

1 Dados: a, b, y0, N, f(x,y), y(x)
2 h = (b-a)/N
3 x(0) = a
4 y(0) = y0
5 Para i=0, 1, 2, ..., N -1
6 x(i+1) = a + i*h
7 end loop
8 Para i=0, 1, 2, ..., N -1
9 Solve y(i+1) = y(i) + h*f(x(i+1), y(i+1))
10 end loop
11 erro(i) = |y(x(i)) - y(i)|
12 end for
13 Desenhe y(x_1) e y_i
14 end loop

```

**Exemplo 2.2.** *Um componente químico apresenta um decaimento temporal quando exposto ao ar. Esse decaimento ocorre em uma taxa proporcional à sua concentração. Simultaneamente, o componente é produzido por outro processo. A equação diferencial que descreve a concentração instantânea do componente é:*

$$\frac{dn}{dt} = -8n + 10n_1(1 - e^{-3t})$$

com  $n(t)$  sendo a concentração instantânea e  $n_1 = 2000$  é concentração inicial em  $t = 0$ . Resolva a equação diferencial para obter a concentração em função do tempo de  $t = 0$  a  $t = 0,5s$  usando o método implícito de Euler. Adote um passo de integração de  $h = 0,001$  e trace um gráfico de  $n$  versus tempo.

Notamos que  $f(t, n) = -8n + 10n_1(1 - e^{-3t})$  é lipschitziana já que

$$f(t, n_2) - f(t, n_1) = -8(n_2 - n_1) \Rightarrow |f(t, n_2) - f(t, n_1)| \leq 8|n_2 - n_1|$$

Portanto, como  $f$  é contínua em  $U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $U = \{t, n \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq t \leq 0.5, 0 \leq n \leq 2000\}$  o Teorema de Picard nos garante que o problema de valor inicial dado possui solução  $n(t)$  única.

Assim, pelo método implícito de Euler, em cada passo teremos que obter  $n_{i+1}$  a partir de

$$n_{i+1} = n_i + [-8n_{i+1} + 10 \cdot 2000 \cdot (1 - e^{-3t_{i+1}})]h$$

com  $n_{i+1}$  sendo uma incógnita. Esta equação não pode ser resolvida explicitamente, portanto utilizamos o Python para aplicar o método e resolver a equação numericamente:

```

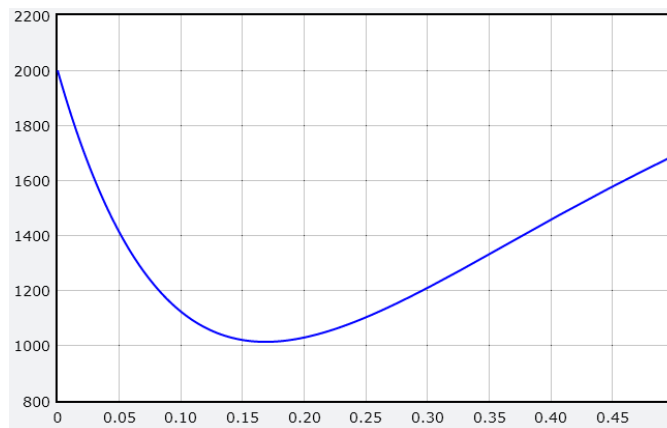
1 import numpy as np
2 from vpython import *
3 f1=gcurve(color=color.blue)
4 h = 0.001 #passo
5 x0 = 0.0
6 xn = 0.5
7 # criamos a lista com os pontos xi
8 X = np.arange(x0, xn+h, h)
9 # lista com y0, a ser preenchida pelos yi
10 Y = [2000]
11 # entramos com f(x,y)
12 f = lambda x,y: -8 * y + 10*2000* (1-np.exp(-3*x))
13 # Calculamos os yi e preenchemos a lista
14 for n in range(len(X)-1):
15     y = Y[n]
16     yn = 0
17     left = yn
18     right = y + f(X[n+1], yn)*h

```

```
19 while left<=right:
20     left = yn
21     right = y + f(X[n+1], yn)*h
22     yn = yn + 0.1
23     Y.append(yn) #Y[-1] ultimo yi calculado
24 # plota
25 for n in range(len(X)-1):
26     f1.plot(X[n], Y[n])
```

Na figura abaixo temos a solução aproximada:

Figura 8 – Aplicação do método de Euler implícito



Fonte: Elaboração Própria.

## 2.3 Métodos de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta compõem uma família de técnicas numéricas explícitas de passo simples usadas na solução de problemas de valor inicial de primeira ordem. Como nos métodos anteriores, em um subintervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ , com  $h = x_{i+1} - x_i$ , o valor de  $y_i$  é calculado usando-se

$$y_{i+1} = y_i + s \cdot h$$

com a inclinação  $s$  da reta tangente à curva no ponto aproximado. Os métodos de Runge-Kutta são classificados de acordo com o número de estágios empregados no cálculo da estimativa do valor da inclinação de (2.2).

### 2.3.1 Métodos de Runge-Kutta de dois estágios

Para um problema de valor inicial da forma (2.1), os métodos de Runge-Kutta de segunda ordem podem ser obtidos a partir de uma expansão em série de Taylor. No intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ , com  $h = x_{i+1} - x_i$  e o valor de  $y_i$  conhecido, o valor de  $y_{i+1}$  pode ser aproximado a partir da seguinte expansão:

$$y_{i+1} = y_i + y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i)h^2 + O(h^3) \quad (2.9)$$

com  $O(h^3)$  sendo um resíduo. A derivada  $y'(x_i)$  corresponde ao lado direito da equação em (2.1), assim  $y'(x_i) = f(x_i, y_i)$ .

O termo  $y''(x_i)$  pode ser aproximado pelas diferenças finitas:

$$y''(x_i) \approx \frac{y'(x_i + \bar{h}) - y'(x_i)}{\bar{h}} = \frac{f(x_i + \bar{h}, y(x_i + \bar{h})) - f(x_i, y_i)}{\bar{h}}$$

O termo  $y(x_i + \bar{h})$  pode ser aproximado por:

$$y(x_i + \bar{h}) \approx y_i + \bar{h}y'(x_i) = y_i + \bar{h}f(x_i, y_i)$$

Assim, a aproximação para a segunda derivada de  $y$  em  $x_i$  assume a forma:

$$y''(x_i) \approx \frac{f(x_i + \bar{h}, y_i + \bar{h}f(x_i, y_i)) - f(x_i, y_i)}{\bar{h}}$$

Supondo que o passo  $\bar{h}$  é dado por  $\bar{h} = \lambda h$  então a aproximação  $y_{i+1}$ , dada pela série de Taylor truncada, é da forma:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h^2 \left( \frac{f(x_i + \lambda h, y_i + \lambda hf(x_i, y_i))}{\lambda h} - \frac{f(x_i, y_i)}{\lambda h} \right) \\ &= y_i + h \left( \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) f(x_i, y_i) + \frac{1}{2\lambda} f(x_i + \lambda h, y_i + \lambda hf(x_i, y_i)) \right). \end{aligned}$$

Portanto,  $y_{i+1} = y_i + h(b_1 k_1 + b_2 k_2)$ , com

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 - \frac{1}{2\lambda}, & b_2 &= 1 - b_1, \\ k_1 &= f(x_i, y_i), & k_2 &= f(x_i + \lambda h, y_i + \lambda h k_1). \end{aligned}$$

Estas equações definem os métodos de Runge Kutta de segunda ordem com o valor de  $y_{i+1}$  sendo calculado utilizando dois pontos:  $(x_i, y_i)$  e  $(x_i + \lambda h, y_i + \lambda h k_1)$ .

Para  $\lambda = 1$ , o método é conhecido como **Método de Euler aperfeiçoado**. Para  $\lambda = \frac{2}{3}$  é conhecido como **método de Heun**.

No que segue apresentamos o pseudocódigo do Método de Range-Kutta:

```

1 Start
2 Define f(x,y)
3 Ler h
4 Ler x0
5 Ler xn
6 Ler lambda = K
7 b1 = 1 - 1/2K
8 b2 = 1 - b1
9 Set i=0
10 Loop
11     k1 = f(x0, y0)
12     k2 = f(x0+ L*h, y0 + L*h*k1)
13     yn = y0 + h * (b1*k1 + b2*k2)
14     x0 = x0 + h
15     y0 = yn
16     i = i + 1
17 While i < (xn-x0)/h
18 Exibir yn como resultado
19 Stop

```

**Exemplo 2.3.** *Seja o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = x^2 + y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Resolveremos este problema pelos métodos de Euler aperfeiçoado e Heun que são métodos de Runge-Kutta de segunda ordem com  $\lambda = 1$  e  $\lambda = \frac{2}{3}$ , respectivamente.

Primeiro, notamos que  $f(x, y) = x^2 + y$  e

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = y_2 - y_1 \Rightarrow |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq |y_2 - y_1|.$$

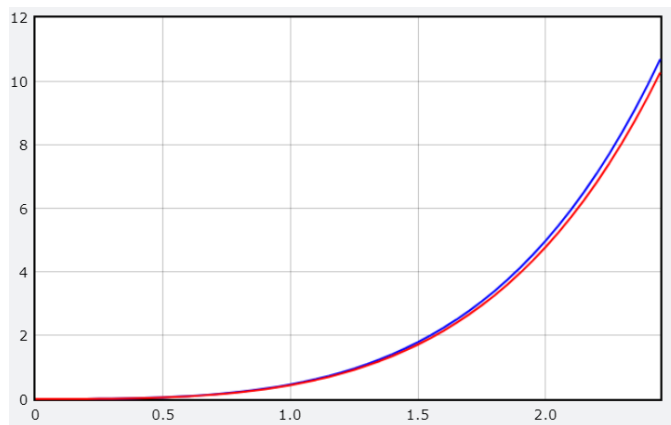
Portanto,  $f(x, y)$  é lipschitziana e contínua em  $\mathbb{R}^2$ , o Teorema de Picard nos garante que o problema de valor tem uma única solução  $y(x)$ .

Assim, implementaremos o algoritmo do método de Heun com a linguagem Python com  $h = 0.05$ .

```
1 import numpy as np
2 from vpython import *
3 f1=gcurve(color=color.blue)
4 f2=gcurve(color=color.red)
5 h = 0.05 #passo
6 l = 2/3 # Valor de Lambda
7 b1 = 1 - 1/(2*l)
8 b2 = 1-b1
9 x0 = 0.0
10 xn = 2.5
11 # criamos a lista com os pontos xi
12 X = np.arange(x0, xn+h, h)
13 # lista com y0, a ser preenchida pelos yi
14 Y = [0]
15 # entramos com f(x,y)
16 f = lambda x,y: x**2 + y
17 # Calculamos os yi e preenchemos a lista
18 for n in range(len(X)-1):
19     k1 = f(X[n],Y[n])
20     k2 = f(X[n]+h, Y[n] + h*k1)
21     Y.append(Y[n] + h*(b1 * k1 + b2 * k2) ) #Y[-1] ultimo yi
        calculado
22 # plota
23 g = lambda x: -x**2 -2*x +2* np.exp(x) -2 #criamos a funcao da
        solucao analitica
24 Y2 = []
25 for n in range(len(X)-1):
26     Y2.append(g(X[n]))
27 for n in range(len(X)-1):
28     f1.plot(X[n], Y[n])
29     f2.plot(X[n], Y2[n])
```

Na Figura 9 comparemos a solução aproximada (gráfico em azul) com a solução exata  $y(x) = -x^2 - 2x + 2e^x - 2$  (gráfico em vermelho).

Figura 9 – Aplicação do método de Runge-Kutta



Fonte: Elaboração Própria.

No que segue, apresentamos a implementação com o Python do método aperfeiçoado de Euler:

```

1 import numpy as np
2 from vpython import *
3 f1=gcurve(color=color.blue)
4 f2=gcurve(color=color.red)
5 h = 0.05 #passo
6 l = 1 # Valor de Lambda
7 b1 = 1 - 1/(2*1)
8 b2 = 1-b1
9 x0 = 0.0
10 xn = 2.5
11 # criamos a lista com os pontos xi
12 X = np.arange(x0, xn+h, h)
13 # lista com y0, a ser preenchida pelos yi
14 Y = [0]
15 # entramos com f(x,y)
16 f = lambda x,y: x**2 + y
17 # Calculamos os yi e preenchemos a lista
18 for n in range(len(X)-1):
19     k1 = f(X[n],Y[n])
20     k2 = f(X[n]+h, Y[n] + h*k1)

```

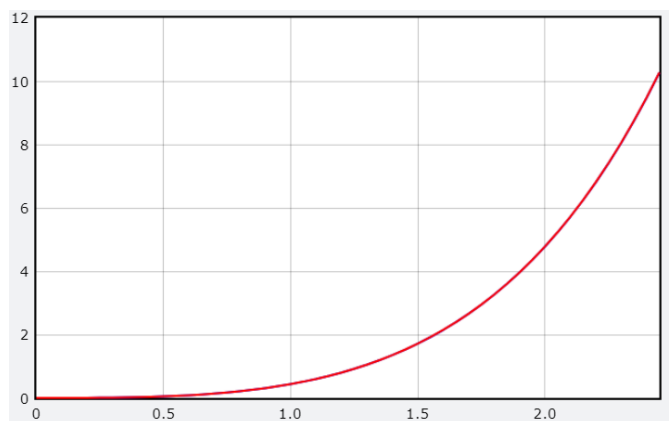
```

21     Y.append(Y[n] + h*(b1 * k1 + b2 * k2) ) #Y[-1] ultimo yi
      calculado
22 # plota
23 g = lambda x: -x**2 -2*x +2* np.exp(x) -2 #criamos a funcao da
      solucao analitica
24 Y2 = []
25 for n in range(len(X)-1):
26     Y2.append(g(X[n]))
27 for n in range(len(X)-1):
28     f1.plot(X[n], Y[n])
29     f2.plot(X[n], Y2[n])

```

Na Figura abaixo, comparemos a solução aproximada (gráfico em azul) com a solução exata  $y(x) = -x^2 - 2x + 2e^x - 2$  (gráfico em vermelho).

Figura 10 – Aplicação do método de Euler aperfeiçoado



Fonte: Elaboração Própria.

Observe que na Figura 10, os gráficos da solução numérica e exata estão praticamente sobrepostos, o que indica um erro pequeno. Compararemos mais a frente as soluções numéricas obtidas por estes dois métodos e pelo método de Runge-Kutta clássico, analisando o erro cometido em cada um.

### 2.3.2 Generalização dos métodos de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta consistem na combinação das estimativas de derivadas com diversos passos de modo que a equação recursiva resultante possua os mesmos termos

que a série de Taylor da solução até uma determinada ordem.

A generalização dos métodos de Runge-Kutta de  $n$  estágios é dada pelas seguintes expressões:

$$y_{i+1} = y_i + h \left( \sum_{j=1}^n b_j k_j \right) \quad (2.10)$$

com os termos  $k_j$  são definidos pelas seguintes equações recursivas,

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad k_j = f \left( x_i + c_j h, y_i + h \sum_{l=1}^{j-1} a_{j,l} k_l \right)$$

para  $i = 2, 3, \dots, n$ . O ponto  $x_0$  corresponde à condição inicial  $y(x_0) = y_0$ . Os parâmetros  $a_{j,l}$ ,  $c_j$  e  $b_j$  devem ser determinados de modo que a aproximação seja a mais exata possível.

Para determinar estes parâmetros, vamos considerar a função  $g(x_i, y_i, h)$ , definida pela soma de todos os termos  $k_j(x_i, y_i, h)$  no lado direito da expressão (2.10):

$$y_{i+1} = y_i + h g(x_i, y_i, h).$$

Dessa forma, os parâmetros são escolhidos de modo que a série de Taylor em  $h$  para a solução em  $x = x_{i+1}$ ,  $y(x_{i+1}) = y(x_i + h)$  seja igual à série de Taylor em  $h$  para o lado direito da equação acima até um grau máximo  $p$ , assim:

$$\sum_{m=0}^p \frac{1}{m!} y^{(m)}(x_i) h^m = y_i + h \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m g}{\partial h^m}(x_i, y_i, 0) h^m.$$

O caso  $p = 0$  nos retorna a igualdade  $y(x_i) = y_i$ . Nos demais casos, a exigência de que a expressão acima seja válida para um  $h \geq 0$  qualquer, implica as seguintes equações para  $m = 1, 2, \dots, p$ :

$$y^{(m)}(x_i) = m \frac{d^{m-1}}{dh^{m-1}} \left( \sum_{j=1}^n b_j f \left( x_i + c_j h, y_i + h \sum_{l=1}^{j-1} a_{j,l} k_l \right) \right) \Big|_{h=0} \quad (2.11)$$

Vamos analisar as situações em que temos  $p = 1$  e  $p = 2$ . Para um método Runge-Kutta de estágio único, temos:

$$y_{i+1} = y_i + b_1 h f(x_i, y_i)$$

Nesse caso, para (2.11) com  $p = 1$  temos:

$$y'(x_i) = b_1 f(x_i, y_i)$$

Sabemos que  $y'(x_i) = f(x_i, y_i)$ , portanto concluímos que  $b_1 = 1$ . Desta forma, o método de Runge-Kutta de um estágio é idêntico ao método de Euler explícito.

Para um método de Runge-Kutta de dois estágios, temos

$$y_{i+1} = y_i + h(b_1 f(x_i, y_i) + b_2 f(x_i + c_2 h, y_i + h a_{2,1} f(x_i, y_i)))$$

A equação (2.11) com  $p = 1$  nos dá

$$y'(x_i) = (b_1 + b_2) f(x_i, y_i) \Rightarrow b_1 + b_2 = 1$$

Já para  $p = 2$ :

$$y''(x_i) = 2 \left( b_2 c_2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + b_2 a_{2,1} f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i) \right).$$

Derivando  $y'(x) = f(x, y)$  obtemos

$$y''(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)$$

Portanto,  $2b_2 c_2 = 1$  e  $2b_2 a_{2,1} = 1$ . Estas equações devem ser satisfeitas simultaneamente. Não é difícil verificar que tanto o método de Heun quanto o Método de Euler aperfeiçoado as satisfazem. Como temos 4 incógnitas e três equações, existe uma quantidade infinita de valores possíveis para estes parâmetros.

### 2.3.3 Método de Runge-Kutta clássico

O método de Runge-Kutta clássico é um método de quatro estágios descrito pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3) \end{aligned}$$

No que segue apresentaremos o pseudocódigo do método de Range-Kutta classico:

```

1 Start
2 Define f(x, y)
3 Ler h
4 Ler x0
5 Ler xn

```

```

6 Set i=0
7 Loop
8     k1 = h * f(x0, y0)
9     k2 = h * f(x0+h/2, y0+k1/2)
10    k3 = h * f(x0+h/2, y0+k2/2)
11    k4 = h * f(x0+h, y0+k3)
12    k = (k1+2*k2+2*k3+k4)/6
13    yn = y0 + k
14    i = i + 1
15    x0 = x0 + h
16    y0 = yn
17    While i < (xn-x0)/h
18 Exibir yn como resultado
19 Stop

```

**Exemplo 2.4.** Vamos resolver o problema de valor inicial do Exemplo 2.3 pelo método de Runge-Kutta clássico com passo  $h = 0.05$ .

```

1 import numpy as np
2 from vpython import *
3 f1=gcurve(color=color.blue)
4 f2=gcurve(color=color.red)
5 h = 0.05 #passo
6 l = 2/3 # Valor de Lambda
7 b1 = 1 - 1/(2*1)
8 b2 = 1-b1
9 x0 = 0.0
10 xn = 2.5
11 # criamos a lista com os pontos xi
12 X = np.arange(x0, xn+h, h)
13 # lista com y0, a ser preenchida pelos yi
14 Y = [0]
15 # entramos com f(x,y)
16 f = lambda x,y: x**2 + y
17 # Calculamos os yi e preenchemos a lista

```

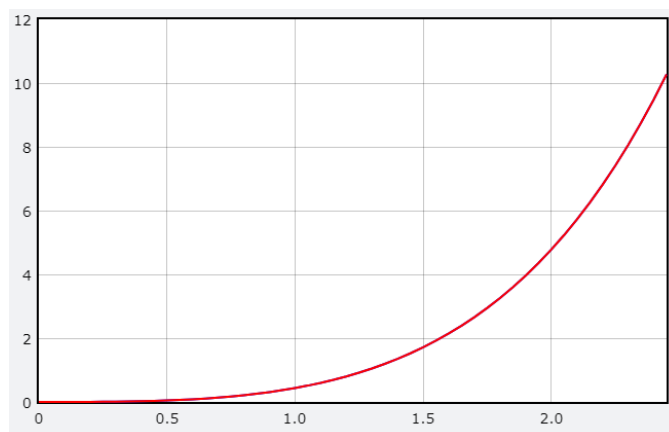
```

18 for n in range(len(X)-1):
19     k1 = f(X[n],Y[n])
20     k2 = f(X[n]+ 0.5* h, Y[n] + 0.5* h*k1)
21     k3 = f(X[n]+ 0.5* h, Y[n] + 0.5* h*k2)
22     k4 = f(X[n] + h ,Y[n] + h*k3)
23     Y.append(Y[n] + (h/6)*(k1 + 2 * k2+ 2 * k3 + k4) ) #Y[-1]
        ultimo yi calculado
24 # plota
25 g = lambda x: -x**2 -2*x +2* np.exp(x) -2 #criamos a funcao da
        solucao analitica
26 Y2 = []
27 for n in range(len(X)-1):
28     Y2.append(g(X[n]))
29 for n in range(len(X)-1):
30     f1.plot(X[n], Y[n])
31     f2.plot(X[n], Y2[n])

```

No seguinte gráfico, comparamos as soluções exata e aproximada:

Figura 11 – Aplicação do método de Runge-Kutta clássico



Fonte: Elaboração Própria.

A tabela a seguir compara os valores estimados de  $y(x_i)$  para os métodos de Heun, Euler aperfeiçoado e Runge-Kutta clássico com o valor da solução exata nos pontos  $x_i$  :

Tabela 2

$x_i$	Heun - $y_i$	Euler aperfeiçoado- $y_i$	Runge-Kutta clássico- $y_i$	$y(x_i)$
0.1	0.00050955	0.00038133	0.00034184	0.00034184
0.2	0.00342595	0.00287932	0.00280552	0.00280552
0.3	0.01113421	0.00981903	0.00971762	0.00971762
0.4	0.02627320	0.02376993	0.02364940	0.02364940
0.5	0.05176267	0.04757161	0.04744254	0.04744254
0.6	0.09083316	0.08436218	0.08423760	0.08423760
0.7	0.14705907	0.13760965	0.13750540	0.13750541
0.8	0.22439526	0.21114661	0.21108183	0.21108186
0.9	0.32721755	0.30920856	0.30920619	0.30920622
1.0	0.46036751	0.43647624	0.43656360	0.43656366

## 2.4 Solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias

Nas últimas sessões, estudamos métodos para resolver problemas de valor inicial. Sempre consideramos problemas envolvendo equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, isto é, da forma (2.1).

Estes métodos podem ser estendidos para resolver numericamente problemas de valor inicial envolvendo sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem da forma:

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

com  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Neste caso, o problema (2.12) é um sistema é dado por:

$$\begin{cases} y_1'(x) &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2'(x) &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_3'(x) &= f_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots & \\ y_n'(x) &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(x_0) &= y_0^1 \\ y_2(x_0) &= y_0^2 \\ y_3(x_0) &= y_0^3 \\ \dots & \\ y_n(x_0) &= y_0^n \end{cases}$$

**Exemplo 2.5.** Considere o problema de resolver pelo método de Euler o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= -y_1(x) \\ y_1(x_0) &= 1 \\ y_2(x_0) &= 0 \end{cases}$$

Para aplicar o método de Euler escrevemos:

$$y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_{1_{i+1}} \\ y_{2_{i+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1_i} \\ y_{2_i} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} y_{2_i} \\ -y_{1_i} \end{bmatrix}$$

Equivalentemente,

$$y_{1_{i+1}} = y_{1_i} + h(y_{2_i})$$

$$y_{2_{i+1}} = y_{2_i} + h(-y_{1_i})$$

$$y_{1_1} = 1$$

$$y_{2_1} = 0$$

Para analisarmos a existência da solução deste sistema devemos verificar se  $f(x, y)$  é lipschitziana. Seja  $u \in \mathbb{R}^2$ ,  $u = (u_1, u_2)$  e  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $v = (v_1, v_2)$ . Assim, temos

$$f(x, y) = f(x, y_1, y_2) = \begin{bmatrix} y_2(x) \\ -y_1(x) \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|f(x, u) - f(x, v)\| &= \sqrt{(u_2 - v_2)^2 + (-u_1 + v_1)^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2} = \|u - v\| \end{aligned}$$

Logo,  $f(x, y)$  é lipschitziana e contínua em  $\mathbb{R}^2$  e pelo teorema de Picard o problema tem uma única solução.

Usaremos a seguinte implementação com o Python para resolver o problema:

```

1 import numpy as np
2 from vpython import *
3 h = 0.001 #passo
4 x0 = 0.0
5 xn = 1
6 # criamos a lista com os pontos xi
7 X = np.arange(x0, xn+h, h)
8 # matriz com yn0, a ser preenchida pelos yn
9 Y = np.array([[1,0]])
10 # entramos com fn(x,y)
11 f1 = lambda x,y: y
12 f2 = lambda x,y: -x
13 # Calculamos os yni e preenchemos a lista
14 for n in range(len(X)-1):
15     a =h * f1(Y[n][0],Y[n][1])
16     a = Y[n][0] + a
17     b =h * f2(Y[n][0],Y[n][1])
18     b = Y[n][1] + b
19     c = np.array([[a,b]])
20     Y = np.append(Y,c,axis=0)

```

A tabela a seguir resume os resultados obtidos:

Tabela 3

h		$x_1 = 0,2$	$x_2 = 0,4$	$x_3 = 0,6$	$x_4 = 0,8$	$x_5 = 1$
$10^{-2}$	$y_1$	0.98104841	0.92291007	0.82782654	0.69951818	0.54303863
	$y_2$	-0.19886155	-0.39018561	-0.5663223	-0.72021247	-0.84567056
$10^{-3}$	$y_1$	0.9801646	0.92124528	0.82558337	0.69698564	0.54057281
	$y_2$	-0.19868913	-0.38949611	-0.56481173	-0.7176429	-0.84189165
$10^{-4}$	$y_1$	0.98007638	0.92107942	0.82536038	0.69673458	0.54032932
	$y_2$	-0.19867132	-0.38942613	-0.56465941	-0.71738478	-0.84151306

### 2.4.1 Solução numérica do pêndulo simples

Como visto anteriormente, o pêndulo simples é descrito por um problema de valor inicial dado por um sistema de equações diferenciais. Assim, podemos resolver este problema numericamente.

**Exemplo 2.6.** Considere o pêndulo simples descrito por

$$\begin{cases} \theta'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -\frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta(t) \end{cases}$$

em uma situação em que este é solto de uma posição angular de  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$  com uma velocidade  $\omega = 0.0 \operatorname{rad/s}$ , tendo comprimento do fio  $l = 1,5 \operatorname{m}$  e gravidade  $g = 9,8 \operatorname{m/s}^2$ .

Como visto anteriormente, isto equivale ao seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u) \\ u(t_0) = (\theta_0, \omega_0) \end{cases}$$

Sabemos que este possui um única solução, a qual podemos resolver numericamente usando a seguinte implementação com o Python:

```

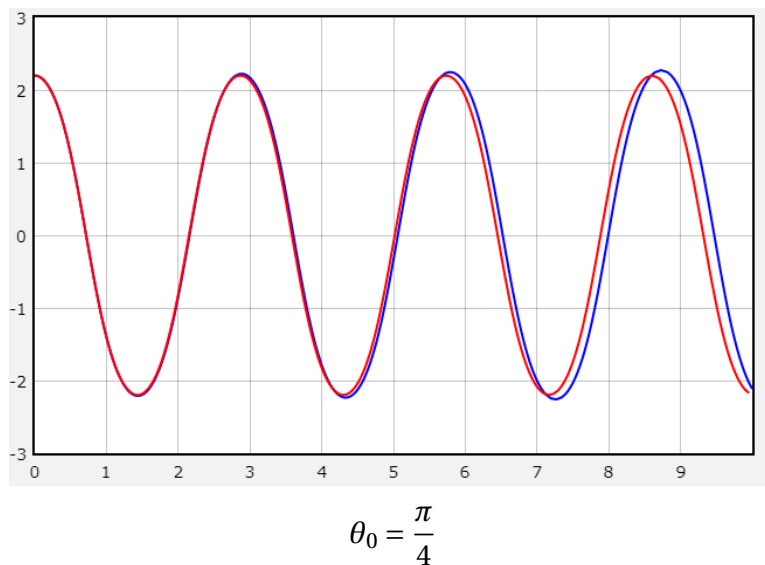
1 import numpy as np
2 from vpython import *
3 ff1=gcurve(color=color.blue)
4 ff2=gcurve(color=color.red)
5 h = 0.001 #passo
6 pi = np.pi
7 x0 = 0
8 xn = 16
9 g = 9.8
10 l=1.5
11 # criamos a lista com os pontos xi
12 X = np.arange(x0, xn+h, h)
13 # matriz com yn0, a ser preenchida pelos yn
14 Y = np.array([[pi/4,0]])
15 print(Y)
16 # entramos com fn(x,y)
17 f1 = lambda x,y: y
18 f2 = lambda x,y: ((-g/l)) * np.sin(x)
19 # Calculamos os yni e preenchemos a lista
20 for n in range(len(X)-1):
21     a =h * f1(Y[n][0],Y[n][1])

```

```
22 a = Y[n][0] + a
23 b =h * f2(Y[n][0],Y[n][1])
24 b = Y[n][1] + b
25 c = np.array([[a,b]])
26 Y = np.append(Y,c,axis=0)
27 # plota
28 for n in range(len(X)-1):
29     ff1.plot(X[n], Y[n][0])
```

Na figura 12 apresentamos a solução aproximada (gráfico em azul) e a solução exata (gráfico em vermelho) dada pela expressão (1.45):

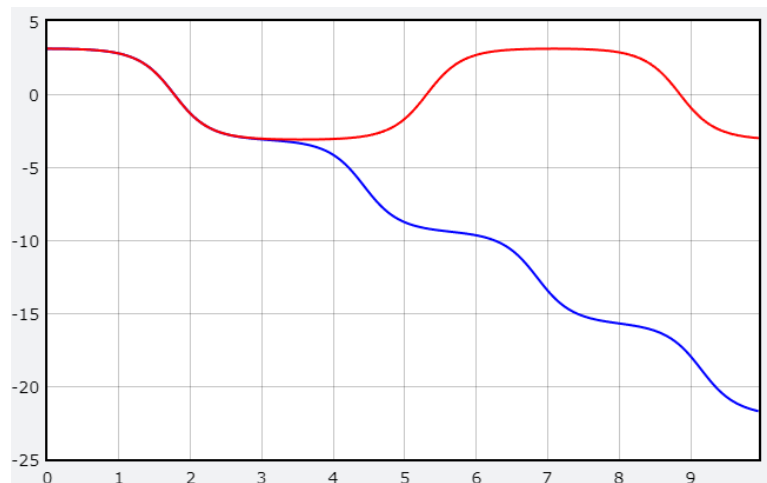
Figura 12 – Solução numérica do pêndulo simples



Fonte: Elaboração Própria.

É interessante notar que para valores de  $\theta_0$  muito próximos de  $\pi$ , o método de Euler não é eficiente para aproximar a solução exata, como mostra o seguinte resultado:

Figura 13 – Solução numérica do pêndulo simples



$$\theta_0 = 0.99\pi$$

Fonte: Elaboração Própria.

## 2.5 Problemas de contorno: Método das diferenças finitas

Neste capítulo, nos aplicaremos a abordagem das autoras Ruggiero e Lopes (2000) para analisar problemas de contorno da forma:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ a_1 y(a) + b_1 y'(a) = \gamma_1 \\ a_2 y(b) + b_2 y'(b) = \gamma_2 \end{cases}$$

com  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $a_1, a_2, b_1, b_2, \gamma_1$  e  $\gamma_2$  constantes reais conhecidas, de modo que nem  $a_1$  e  $b_1$ , nem  $a_2$  e  $b_2$  sejam nulas ao mesmo tempo.

Se  $f(x, y, y') \equiv 0, \gamma_1 = \gamma_2 = 0$  o problema é dito homogêneo e é óbvio que  $y(x) = 0$  é solução, neste caso.

Para as aproximações deste capítulo, precisamos do seguinte conceito:

**Definição 2.9.** Dizemos que  $g(h)$  é  $O(h^P)$ , se existe uma constante  $C > 0$  tal que  $|g(h)| \leq C|h^P|$ .

O método das diferenças finitas consiste em transformar o problema de resolver uma equação diferencial num problema de resolver um sistema de equações, por diferenças finitas.

Faremos  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$  e dividiremos o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  partes iguais de comprimento  $h = \frac{b-a}{n}$ , cada. Assim,

$$x_k = x_0 + kh, k = 0, 1, \dots, (n-1) \quad \text{e} \quad y_k \approx y(x_k) = y(x_0 + kh), k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

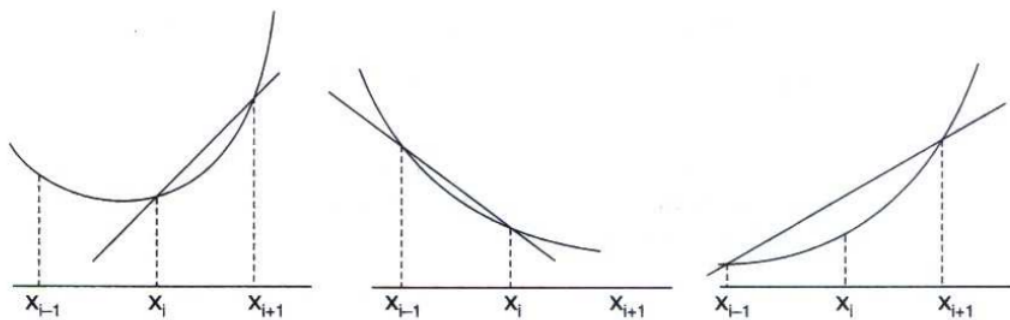
Se  $f(x, y, y')$  for linear em  $y$  e  $y'$  o sistema a ser resolvido será linear. Se  $f(x, y, y')$  for não linear, teremos um sistema não linear de equações algébricas.

As aproximações mais usadas para a primeira derivada no ponto  $x_i$  são:

- a)  $y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$ , diferença avançada;
- b)  $y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$ , diferença atrasada;
- c)  $y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$ , diferença centrada.

A figura a seguir ilustra estas aproximações:

Figura 14 – Método das diferenças finitas



Fonte: Elaboração Própria.

Ao utilizarmos (a), (b) ou (c), estaremos cometendo um erro ao aproximar  $y'(x_i)$ . Supondo  $y(x)$  com tantas derivadas quanto necessárias, utilizaremos a fórmula de Taylor de  $y(x)$  em torno de  $y(x)$  em torno de  $x_i$  para medir o erro local cometido.

Sabemos que existe  $\xi_i$  entre  $x$  e  $x_i$  tal que

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \dots + \frac{y^{(k)}(x_i)}{k!}(x - x_i)^k + \frac{y^{(k+1)}(\xi_i)}{(k+1)!}(x - x_i)^{k+1} \quad (2.13)$$

Assim, para  $k = 1$ ,

$$y(x) = y(x_i) + (x - x_i)y'(x_i) + \frac{1}{2}(x - x_i)^2 y''(\xi_i)$$

e, no ponto  $x = x_{i+1} = x_i + h$ , temos  $\xi_{i+1}$  entre  $x_i$  e  $x_{i+1}$  de modo que:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(\xi_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)^2.$$

Assim,

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = y'(x_i)h + \frac{h^2}{2}y''(\xi_{i+1})$$

Então,

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} + \frac{h}{2}y''(\xi_{i+1}).$$

Aproximando os valores exatos  $y(x_{i+1})$  e  $y(x_i)$  por estimativas  $y_{i+1}$  e  $y_i$ , a serem obtidas, temos:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Se  $y''(x)$  for limitada em  $[a, b]$ , ou seja, se existe  $M > 0$  tal que  $|y''(x)| \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ , então a expressão anterior para aproximar  $y'(x_i)$  é  $O(h)$  pois

$$|g(h)| = \left| y'(x_i) - \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \right| = \left| \frac{y''(\xi_{i+1})}{2}h \right| \leq \frac{M}{2}|h|$$

Agora, tomamos  $k = 2$ , então (2.13) se torna:

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2}(x - x_i)^2 + \frac{y'''(\xi_i)}{3!}(x - x_i)^3$$

Se  $x = x_{i+1}$ ,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2}h^2 + \frac{y'''(\xi_{i+1})}{3!}h^3 \quad (2.14)$$

Se  $x = x_{i-1}$ ,

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2}h^2 - \frac{y'''(\xi_{i-1})}{3!}h^3 \quad (2.15)$$

Fazendo (2.14) - (2.15), temos:

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) = 2y'(x_i)h + \frac{h^3}{6} [y'''(\xi_{i+1}) + y'''(\xi_{i-1})]$$

Então,

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{12} [y'''(\xi_{i+1}) + y'''(\xi_{i-1})]$$

Portanto,

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

Esta aproximação é  $O(h^2)$ , supondo  $y'''(x)$  limitada em  $[a, b]$ .

Analogamente, podemos provar que a fórmula b) é  $O(h)$ .

Com isso, concluímos que o erro na fórmula centrada é da ordem de  $h^2$  e, como  $h < 1$ , esta fórmula é mais precisa que as outras duas. Por esta razão, ela é mais utilizada.

Utilizando novamente a série de Taylor, deduziremos a aproximação para a segunda derivada e para o seu erro. Para tal, usaremos (2.13) com  $k = 3$  nos pontos  $x_{i+1}$  e  $x_{i-1}$ , respectivamente:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi_{i+1}) \quad (2.16)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi_{i-1}) \quad (2.17)$$

E, somando as equações (2.16) e (2.17):

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + y''(x_i)h^2 + \frac{h^4}{24} [y^{(4)}(\xi_{i+1}) + y^{(4)}(\xi_{i-1})]$$

Assim, temos a expressão

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

que é  $O(h^4)$ , se  $y^{(4)}$  for limitada em  $[a, b]$ .

**Exemplo 2.7.** Vamos resolver o seguinte problema de valor de contorno linear:

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x \\ y(0) = 0 \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

Tomando  $n$  fixo, o espaçamento  $h$  será  $\frac{1}{n}$  e o intervalo  $[a, b]$  será dividido em  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = h, \dots, x_j = jh, \dots, x_{n-1} = (n-1)h$  e  $x_n = 1$ . Como conhecemos  $y(0) = y(x_0)$  e  $y(n) = y(x_n)$ , teremos como incógnitas  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  e assim, para cada  $i = 1, \dots, (n-1)$  usaremos as aproximações:

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

pois ambas são aproximações de  $O(h^2)$ .

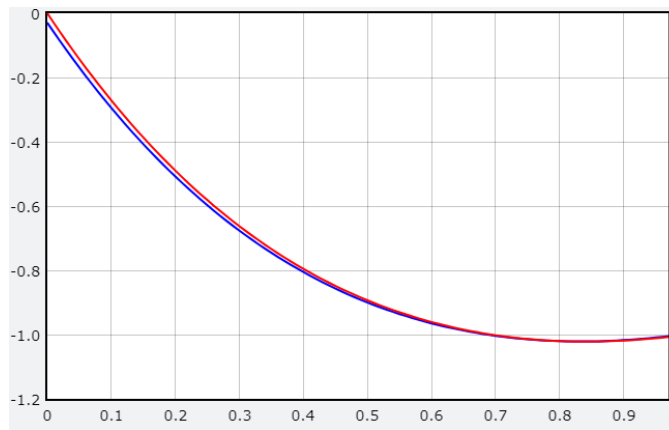
Para cada  $i$ , a equação discretizada fica:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h} + y_i = x_i$$



```
1 import numpy as np
2 from vpython import *
3 f1=gcurve(color=color.blue)
4 f2=gcurve(color=color.red)
5 a = 0
6 b = 1
7 n = 100 #Numero de intervalos
8 h = (b-a) / n
9 di = (h**2 -2)
10 ci = (1+h)
11 ai = (1-h)
12 # Matriz A
13 A = np.zeros((n-1, n-1))
14 A[n-2,n-2] = di
15 for i in range(0, n-2):
16     A[i+1, i] = ai
17     A[i, i] = di
18     A[i, i+1] = ci
19 # Matriz B
20 B = np.zeros(n-1)
21 for i in range(1, n-2):
22     B[i] = i* h**3
23 B[n-2] = (n-1)*(h**3) + h +1
24 #Resolvemos o sistema linear
25 Y = np.linalg.solve(A, B)
26 X = np.arange(a, b, h)
27 Y = list(Y)
28 # plota
29 f = lambda x: 2 * np.exp(-x)*(1-x) + x -2
30 k = [f(i) for i in X]
31 for n in range(len(Y)-1):
32     f1.plot(X[n], X[n])
33     f2.plot(X[n], k[n])
```

Figura 15 – Aplicação do método das diferenças finitas



Fonte: Elaboração Própria.

# Considerações Finais

Neste trabalho de conclusão de curso foi realizado um estudo teórico e numérico sobre resolução de problemas governados por equações diferenciais. A abordagem teórica envolveu um estudo sobre espaços métricos e a demonstração do Teorema de ponto fixo de Banach e sua aplicação na resolução de problemas de valor inicial de 1<sup>a</sup> ordem. Este estudo fundamentou a abordagem numérica de tais problemas, particularmente dos problemas do oscilador harmônico e do pêndulo simples. Destacamos que foi realizado um estudo detalhado, embora introdutório, que permitiu aplicarmos os métodos numéricos de forma eficaz e segura, especialmente para o caso do pêndulo simples. No caso da obtenção da solução exata do pêndulo simples não realizamos um estudo mais aprofundado da solução, o que impossibilitou uma análise mais apurada dos resultados numéricos obtidos. Porém, destacamos que, mesmo preliminar, é algo ainda pouco explorado na literatura.

A abordagem numérica envolveu o estudo dos métodos numéricos clássicos para resolução de problemas de valor inicial governados por equações diferenciais tais como: método de Euler (explícito, implícito e aperfeiçoado) e o método e Range-Kutta. Além disso, tratamos também do método clássico para resolução de problemas de contorno governados por equações diferenciais, o método das diferenças finitas. Destacamos que a análise realizada foi bastante introdutória, centrada na implementação dos métodos com a linguagem Python. Não fizemos nenhum estudo teórico sobre a convergência dos métodos, nem sobre a análise de erro.

Do nosso ponto de vista, o grande diferencial do trabalho é tratar os aspectos teóricos, numéricos e computacionais dos problemas, em especial de um problemas não linear importante e clássico: o pêndulo simples. Deste modo, a pesquisa pode avançar para o estudo mais detalhado deste modelo e também no aprofundamento da análise numérica dos métodos, especialmente o métodos das diferenças finitas. Além disso, para o problemas de valor de contorno, poderíamos investigar a aplicação do método dos elementos finitos.

# Referências

- [1] ATKINSON, Kendall; HAN, Weimin. **Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework**. Nova York: Springer-Verlag New York, Inc, 2001.
- [2] Bartle, R.G. e Sherbert, D.R, **Introduction to Real Analysis**, John Wiley, 1982.
- [3] BELÉNDEZ, A. et al. **Exact solution for the nonlinear pendulum**. Revista Brasileira de Ensino de Física, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S1806-11172007000400024>>. Acesso em 30/11/2022.
- [4] DOERING, Claus Ivo; e LOPES, Artur O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2007.
- [5] FIGUEIREDO, Djairo. **Equações diferenciais aplicadas**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1997.
- [6] GILAT, Amos; SUBRAMANIAN, Vish **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas: Uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. Porto Alegre : Bookman, 2008.
- [7] Lima, E. L., **Espaço Métricos**, Projeto Euclides, IMPA, 1983.
- [8] LUTZ, Mark. **Programming Python**. Sebastopol, Califórnia: O'Reilly Media, Inc., 2010.
- [9] RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson Universidades, 2000.
- [10] SCHERER, D.; DUBOIS, P.; SHERWOOD, B. **VPython: 3D Interactive Scientific Graphics for Students**. Warner Hall: Carnegie Mellon University. 2000.

# Apêndice

Listaremos aqui os principais comandos utilizados ao longo do trabalho, afim de facilitar o entendimento do leitor que queira interpretar os códigos expostos.

- **if:** Provavelmente o mais conhecido comando de loop, no python este funciona de maneira análoga a outras linguagens. Pode haver zero ou mais partes **elif**, e a parte **else** é opcional. A palavra-chave 'elif' é uma abreviação para 'else if', e é útil para evitar indentação excessiva.
- **for:** O comando for em Python é um pouco diferente do que costuma ser em C ou Pascal. Ao invés de sempre iterar sobre uma progressão aritmética de números (como no Pascal), ou permitir ao usuário definir o passo de iteração e a condição de parada (como C), o comando for do Python itera sobre os itens de qualquer sequência, na ordem que aparecem na sequência.
- **range():** Itera sobre sequências numéricas, gerando progressões aritméticas. O ponto de parada fornecido nunca é incluído na lista; range(10) gera uma lista com 10 valores, exatamente os índices válidos para uma sequência de comprimento 10. É possível iniciar o intervalo com outro número, ou alterar a razão da progressão (inclusive com passo negativo).
- **Geração de listas:** Uma lista em python pode ser gerada simplesmente utilizando colchetes. Um comando do tipo **a = [1,2,3]**, gera uma lista de nome a com os elementos 1, 2 e 3.
- **append():** Adiciona um elemento ao fim de uma lista.
- **import:** Uma das funções mais importantes do Python, já que nos permite importar comandos de bibliotecas prontas. Este comando nos permite importar uma biblioteca inteira, incorporando-a à biblioteca básica de comandos, nos permite importar comandos específicos, caso não haja interesse nos outros comandos e também permite a adição de comandos de uma certa biblioteca ao nosso código sob um dado prefixo. Por exemplo, todos os nossos códigos começam com **import numpy as np**, o que importa a biblioteca numpy sob o prefixo np. Assim, todo comando da biblioteca numpy pode ser

chamado utilizando este prefixo, como por exemplo **np.sqrt()**. Quando importamos uma biblioteca inteira sem um prefixo, como fazemos com o `vpython`, utilizamos **from vpython import \***.

- **Biblioteca numpy:** É a biblioteca mais utilizada do Python, sendo fundamental para computação numérica. Permite manipular matrizes multidimensionais, possui diversas funções de álgebra linear e estatística.
- **np.arange():** Análoga à função `range()`, mas retorna uma matriz ao invés de uma lista.
- **np.linspace():** Cria uma matriz com valores espaçados igualmente e com um dado número de intervalos.
- **np.linalg.solve():** Resolve um sistema de equações lineares, dados na forma matricial.
- **Biblioteca Vpython:** Permite a criação de gráficos e animações em 2D e 3D.
- **plot():** Cria um gráfico 2D, associando pontos de uma lista aos pontos de outra.