



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**MARILENA DOS SANTOS BARROS**

**SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BESSEL DE PRIMEIRA  
E SEGUNDA ESPÉCIES**

SALINÓPOLIS – PA

2024

**MARILENA DOS SANTOS BARROS**

**SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BESSEL DE PRIMEIRA  
E SEGUNDA ESPÉCIES**

Trabalho de Curso apresentado para obtenção de grau de licenciado em matemática, Faculdade de Matemática, Campus Universitário de Salinópolis, Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Cledson S. L. Gonçalves

SALINÓPOLIS – PA

2024

**MARILENA DOS SANTOS BARROS**


**SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BESSEL DE PRIMEIRA  
E SEGUNDA ESPÉCIES**

Trabalho de Curso apresentado para obtenção de grau de licenciado em matemática, Faculdade de Matemática, Campus Universitário de Salinópolis, Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Cledson S. L. Gonçalves


Data de Aprovação: 08 de março de 2024 .

**BANCA EXAMINADORA**

Documento assinado digitalmente  
 **CLEDSON SANTANA LOPES GONCALVES**  
Data: 01/04/2024 12:29:52-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---


**Prof. Dr. Cledson Santana Lopes Gonçalves (Orientador)**

Documento assinado digitalmente  
 **AMILCAR MONTALBAN SAYAGO**  
Data: 01/04/2024 21:16:58-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

**Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago**

**(Membro Interno/Campus Salinópolis/UFGPA)**

Documento assinado digitalmente  
 **RAFAEL LIMA DE MORAES**  
Data: 01/04/2024 21:47:12-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

**Técnico Mestre Rafael Lima de Moraes**

**(Membro Interno/Campus Salinópolis/UFGPA)**

Dedico este trabalho a minha família, pois é graças a eles que estou aqui, realizando um sonho.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter permitido eu chegar até aqui com saúde, depois dos anos turbulentos de pandemia e muitas perdas, mas estou aqui realizando um sonho.

Aos meus pais Helena e Otaciél, minha irmã Cláudia e seu esposo Wallace, minha sobrinha Laura, meu esposo Ronaldo e meu filho Vicente que estiveram ao meu lado, me incentivaram nos momentos mais difíceis, e principalmente ao meu filho que compreendeu a minha ausência durante a realização deste trabalho.

As minhas amigas Ana Tereza e Gizandra, pelo apoio incondicional, pela amizade demonstrada ao longo desse período e pelos longos dias estudando, agradecer ao meu amigo Pe. Aginaldo Ramos, que não está mais entre nós, mas foi uma peça fundamental na minha vida e que me ajudou muito durante o curso, agradecer a minha amiga de trabalho e de vida Maria Elcira, que sempre me incentivou a estudar e ter um nível superior, entendia minhas ausências no trabalho e me ouvia nos momentos difíceis.

Ao meu professor Cledson, por ter sido meu orientador, por todos os ensinamentos, pela dedicação, conselhos e paciência que me permitiram estar aqui hoje, sendo uma peça fundamental no meu processo de formação e conclusão do curso.

Aos professores da faculdade e principalmente ao professor Amílcar Montalban que me ensinou muito durante o curso de matemática básica, minha eterna gratidão.

## RESUMO

Neste trabalho estudaremos a Equação Diferencial de Bessel e sua resolução através do método de Frobenius obtendo, assim, as soluções das Funções de Bessel de Primeira e Segunda Espécie. A motivação do objeto de estudo deste trabalho surgiu porque a Equação Diferencial Ordinária de Bessel é umas das mais importantes Equações Diferenciais Ordinárias em estudos avançados de matemática aplicada à Física e a Engenharia. Este estudo foi desenvolvida em sequência de caráter bibliográfico, foram utilizados como fonte de pesquisa livros de Ensino Superior sobre Equações Diferenciáveis com Aplicação em Modelagem, artigos científicos e trabalhos acadêmicos para a complementação bibliográfica. Inicialmente, relembramos alguns conceitos considerados pré-requisitos ao tema do trabalho, logo em sequência foram abordados diversos tópicos importantes sobre o método de séries de potência, que é uma ferramenta fundamental para obter a solução de uma equação diferencial. Na sequência, fundamentado no conteúdo exposto nos capítulos iniciais, foi resolvida a Equação Diferencial de Bessel e, assim, obtido as Funções de Primeira e Segunda Espécie e na parte final foi mostrado uma aplicação que se encontra em [11]. Finalmente, o presente trabalho tem como contribuição a apresentação de material didático complementar ao estudo de Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem e servindo de suporte para o desenvolvimento do conhecimento à cerca das Funções de Bessel.

**Palavras-Chaves:** Equação Diferencial; Funções de Bessel; Séries de Potência.

## ABSTRACT

In this work we will study the Bessel Differential Equation and its resolution using the Frobenius method, thus obtaining the solutions of the First and Second Kind of Bessel Functions. The motivation for the study object of this work arose because Bessel's Ordinary Differential Equation is one of the most important Ordinary Differential Equations in advanced studies of mathematics applied to Physics and Engineering. This study was developed in a bibliographical sequence, higher education books on Differentiable Equations with Application in Modeling, scientific articles and academic works were used as a research source for bibliographical complementation. Initially, we recalled some concepts considered prerequisites to the topic of the work, then several important topics were covered about the power series method, which is a fundamental tool for obtaining the solution of a differential equation. Subsequently, based on the content exposed in the initial chapters, the Bessel Differential Equation was solved and, thus, the First and Second Species Functions were obtained and in the final part an application that can be found in [11] was shown. Finally, the present work contributes to the presentation of teaching material that complements the study of Ordinary Second Order Differential Equations and serves as support for the development of knowledge about Bessel Functions.

Keywords: Differential Equation; Bessel functions; Power Series.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 01: Função de Bessel em $J_0, J_1$ e $J_2$ .....	54
Figura 02: Função de Bessel de segunda espécie em $Y_0, Y_1, Y_2$ e $Y_3$ .....	63
Figura 03: Modos da Membrana.....	74

## LISTA DE ABREVIACOES

<b>ED's</b>	Equaoes Diferenciais
<b>ED</b>	Equaao Diferencial
<b>EDO's</b>	Equaoes Diferenciais Ordinarias
<b>LI</b>	Linearmente Independente
<b>LD</b>	Linearmente Dependente
<b>sen</b>	Seno
<b>cos</b>	Cosseno
<b>lim</b>	Limite
<b>ln</b>	Logaritmo natural

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD**  
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará**  
**Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

B277s Barros, Marilena dos Santos.  
Soluções da equação de Bessel de primeira e segunda espécies /  
Marilena dos Santos Barros. — 2024.  
81 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. Cledson Santana Lopes Gonçalves  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade  
Federal do Pará, Campus Universitário de Salinópolis, Curso de  
Licenciatura em Matemática, Salinópolis, 2024.

1. Equação Diferencial. 2. Funções de Bessel. 3. Séries de  
Potência. I. Título.

CDD 515.352

---

## SUMÁRIO

<b>Introdução</b> .....	<b>12</b>
<b>1 Pré-requisitos</b> .....	<b>14</b>
1.1 Pontos Singulares Regulares e Irregulares .....	14
1.2 Dependência Linear e Independência Linear .....	17
1.3 Wronskiano .....	18
<b>2 Séries de Potências</b> .....	<b>22</b>
2.1 Séries de potência .....	22
2.2 Séries de Taylor e de Maclaurin .....	32
2.3 Propriedades das séries de potências .....	33
2.4 Método de Fröbenius .....	40
2.5 Teorema de Fuchs .....	47
<b>3 Equação de Bessel e Soluções</b> .....	<b>49</b>
3.1 Equação de Bessel .....	49
3.2 Solução para Equação de Bessel .....	49
3.3 Funções de Bessel de Primeira Espécie .....	49
3.3.1 Solução para Equação de Bessel de ordem zero .....	56
3.3.2 Solução da Equação de Bessel de ordem meio .....	60
3.3.3 Solução da Equação de Bessel de ordem três .....	61
3.4 Funções de Bessel de Segunda Espécie .....	62
3.5 Propriedades das Funções de Bessel.....	64
3.6 Vibrações livres de uma Membrana Circular .....	68
<b>4 Considerações Finais</b> .....	<b>75</b>
<b>Referências</b> .....	<b>76</b>

# Introdução

Na Física, muitos problemas são resolvidos utilizando uma formulação matemática que conduz a equações diferenciais (ED's) [1]. Essa é sem dúvida uma das maiores motivações para pesquisar/desenvolver métodos que possam resolver uma ED, obtendo soluções que possam descrever como um fenômeno se comporta, por exemplo em função de uma coordenada temporal. Neste contexto, o desenvolvimento da Física aconteceu paralelamente ao estudo das EDO's, que era utilizada como ferramenta matemática das equações de movimento da mecânica newtoniana, das equações de onda da física ondulatória e do eletromagnetismo e, mais tarde, na formulação da mecânica quântica ondulatória e da relatividade.

Um tipo especial de Equação Diferencial, que surge na solução de uma série de problemas em Física, Engenharia é a Equação de Bessel [2], sendo uma das mais importantes equações da Matemática Aplicada. Ao resolvê-la, por meio de séries de potência, foram obtidas uma nova categoria de funções que receberam o nome de funções de Bessel. As Funções de Bessel formaram uma classe das chamadas funções especiais, que foi desenvolvida sistematicamente por volta de 1817, pelo astrônomo alemão Friedrich Wilhelm Bessel, durante uma investigação para encontrar soluções de uma das equações do movimento planetário de Kepler [3].

Depois que Bessel publicou suas descobertas, outros cientistas mostraram que as funções apareciam em descrições matemáticas de fenômenos físicos, incluindo o fluxo de calor ou eletricidade em um cilindro sólido, a propagação de ondas eletromagnéticas ao longo de fios, a difração da luz, os movimentos dos fluidos e as deformações de corpos elásticos. Um desses investigadores, Lord Rayleigh, também mostrou que as funções de Bessel poderiam ser utilizadas num contexto mais amplo, mostrando que elas surgem na solução da equação de Laplace, quando esta é formulada em coordenadas cilíndricas (em vez de cartesianas ou esféricas) [4].

Desta forma, as funções de Bessel se tornaram uma ferramenta indispensável em Matemática Aplicada, Física e Engenharia, sendo de grande importância seu estudo, tanto para fins acadêmicos, quanto para pesquisa nas resoluções de problemas reais. Portanto, o propósito deste trabalho é explorar os tópicos essenciais relacionados a Equação de Bessel e suas Funções, uma vez que surge com grande frequência, em engenharia e/ou Física e Matemática. Especificamente, mostraremos as soluções dessa EDO, que são as funções de Bessel de 1ª e 2ª espécies  $J_\nu$  e  $Y_\nu$ , respectivamente, bem com as relações de recorrências, propriedades e ortogonalidade. Além disso, será mostrada uma aplicação que surgiu do interesse de se conhecer onde é utilizada a teoria aprendida.

Este trabalho foi elaborado com base em pesquisas feitas em bancos de dados acadêmicos de artigos científicos, livros e recursos online relevantes que pudessem contribuir com fundamentos teóricos e aplicações nessa área. A importância desta metodologia, segundo Motta Roth et al. [5], reside no fato de que a investigação intensa e aprofundada de textos científicos pode gerar diversas contribuições para identificar o que foi feito, o que poderá ser melhorado e possíveis contribuições para aprofundamento do tema ora pesquisado. Ainda, segundo Stumpf [6] a pesquisa bibliográfica é um conjunto de conhecimentos para identificar, selecionar, localizar e obter documentos de interesse para a realização de trabalhos acadêmicos e de pesquisa, bem como técnicas de leitura e transcrição de dados que permitem recuperá-los quando necessário.

Devemos mencionar que o assunto foi tratado de forma didática, procurando atender aos fins acadêmicos para os quais este trabalho foi proposto. De forma clara, pretende-se acrescentar conhecimento para aqueles que vierem a ler este trabalho de conclusão de curso, servindo de contribuição para o desenvolvimento do conhecimento à cerca das Equações de Bessel e suas aplicações.

Finalmente, para uma melhor compreensão do trabalho, ele está dividido em introdução no qual apresentamos os objetivos e metodologia do trabalho, no capítulo 1 apresentaremos algumas definições e Teoremas que servirão de base para o nosso estudo. No capítulo 2 mostraremos uma breve revisão sobre o método de séries de potência para as resoluções de EDO's, bem como algumas particularidades sobre tal método. Já no capítulo 3, resolveremos a equação de Bessel de índice  $\nu$  e mostraremos as suas soluções, que são as funções de Bessel de primeira e segunda espécie. Na parte final do capítulo 3, será feita uma aplicação que envolve o estudo das vibrações de uma membrana que pode ser vista em [11]. E por fim, será apresentada as considerações finais no último capítulo.

# Capítulo 1

## Pré-requisitos

Neste capítulo será explorado alguns tópicos que serão importantes para resolver e obter as funções de Bessel neste trabalho. Nomeadamente serão discutidos conceitos sobre Pontos Singulares Regulares e Irregulares, Dependência e Independência Linear das funções e o Wronskiano.

### 1.1 Pontos Singulares Regulares e Irregulares

Para definir o que é um ponto singular, vamos considerar a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem dada por:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (1.1)$$

dividindo a equação (1.1) por  $a_2(x) \neq 0$ , podemos escrever:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1.2)$$

onde  $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$  e  $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$  são funções reais contínuas (e conhecidas obtidas da divisão dos coeficientes da equação por  $a_2(x)$  em um certo intervalo real  $I = [a, b]$  para todo  $x \in I$ ).

**Definição 1.1.** Dizemos que  $x_0$  é um ponto ordinário, ou não singular, da EDO (1.2) se, nesse ponto,  $P(x)$  e  $Q(x)$  ou suas extensões contínuas são funções analíticas. Um ponto que não é ordinário é dito um ponto singular, ou uma singularidade, da EDO. No caso em que  $a_2(x)$ ,  $a_1(x)$  e  $a_0(x)$  são polinômios sem fator comum,  $x = x_0$  (real ou imaginário) é um ponto ordinário se  $a_2(x_0) \neq 0$  e singular se  $a_2(x_0) = 0$ .

#### Exemplo 1.1.

- A equação  $(x^2 - 1)y'' + y' + y = 0$  possui pontos singulares em  $x = \pm 1$ , pois quando substituimos esses valores na EDO, obtemos o coeficiente  $a_2(x) = 0$ ;
- A equação de Cauchy-Euler, dada por  $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ , em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes, tem um ponto singular em  $x = 0$ . Todos os outros pontos são ordinários.

**Definição 1.2.** Os pontos singulares, em  $x = x_0$ , da Equação (1.2), podem ser classificados em regulares e irregulares de acordo com os critérios a seguir:

- a) Um ponto é singular regular (ou singularidade regular) se  $(x - x_0)P(x)$  e  $(x - x_0)^2Q(x)$  são analíticas em  $x_0$ ;
- b) Um ponto singular que não é regular será chamado de ponto singular irregular.

De acordo com a referência [1], no caso em que os coeficientes da Equação (1.2) são polinômios sem fatores comum, as condições apropriadas para distinguir a singularidade são:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)P(x) \quad (1.3)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2Q(x) \quad (1.4)$$

serem finitos. Isso nos diz que a singularidade em  $P(x)$  não pode ser pior do que  $(x - x_0)^{-1}$  e que a singularidade em  $Q(x)$  não pode ser pior do que  $(x - x_0)^{-2}$ . Para equações com coeficientes mais gerais do que polinômios,  $x_0$  é um ponto singular regular da Equação (1.2) se ambas as funções

$$(x - x_0)P(x) \quad (1.5)$$

e

$$(x - x_0)^2Q(x) \quad (1.6)$$

tiverem séries de Taylor convergentes em torno de  $x_0$ , ou seja, se as funções nas Equações (1.5) e (1.6) forem analíticas em  $x = x_0$ .

**Exemplo 1.2.**

Determine os pontos singulares da EDO (1.7) e verifique se são regulares ou irregulares.

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \quad (1.7)$$

Inicialmente, vamos dividir a equação (1.7) pelo termo  $(1 - x^2)$ , pois assim poderemos escrevê-la no formato da equação (1.2) e obter  $P(x)$  e  $Q(x)$ . Desta forma, temos:

$$P(x) = \frac{-2x}{(1 - x^2)} \quad (1.8)$$

$$Q(x) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(1 - x^2)}$$

observe que  $x = 1$  e  $x = -1$  são os pontos singulares. Agora utilizaremos as equações (1.3) e (1.4) para saber se são pontos singulares regular ou irregular. Então, para  $x = 1$  tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[ (x-1) \left( \frac{-2x}{1-x^2} \right) \right] = 1 \quad (1.9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[ (x-1)^2 \left( \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2} \right) \right] = 0$$

como esses limites são finitos, o ponto  $x = 1$  é um ponto singular regular. De maneira análoga pode ser verificado que o ponto  $x = -1$  também é um ponto singular regular da EDO (1.7).

### Exemplo 1.3.

Determine os pontos singulares da EDO (1.10) e verifique se são regulares ou irregulares.

$$2x(x-2)^2 y'' - 3xy' + (x-2)y = 0 \quad (1.10)$$

De forma análoga, dividindo a EDO (1.10) por  $2x(x-2)^2$ , obtemos:

$$P(x) = \frac{3x}{2x(x-2)^2} = \frac{3}{2(x-2)^2} \quad (1.11)$$

$$Q(x) = \frac{(x-2)}{2x(x-2)^2} = \frac{1}{2x(x-2)}$$

observe que os pontos  $x = 0$  e  $x = 2$  são os pontos singulares da equação dada. Agora, testaremos  $P(x)$  e  $Q(x)$  em cada ponto para saber se é regular ou irregular. Inicialmente, fazendo para o ponto  $x = 0$ , temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ (x) \left( \frac{3}{2(x-2)^2} \right) \right] = 0 \quad (1.12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ (x)^2 \frac{1}{2x(x-2)} \right] = 0$$

como esses limites são finitos o ponto  $x = 0$  é dito singular regular. Agora testando para  $x = 2$ , têm-se:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[ (x-2) \left( \frac{3}{2(x-2)^2} \right) \right] = \neq \quad (1.13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[ (x-2)^2 \frac{1}{2x(x-2)} \right] = 0$$

como um dos limites da equação (1.13) não existe, significa que o ponto em  $x = 2$  é singular irregular.

## 1.2 Dependência Linear e Independência Linear

As noções de independência e dependência linear são fundamentais para o estudo das EDs, uma vez que a solução geral pode ser formada por uma combinação linear de funções Linearmente Independentes. Assim, é necessário saber a diferença entre tais conceitos, que são dadas pelas seguintes definições:

**Definição 1.3.** Dizemos que um conjunto de funções  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  são Linearmente Dependente (LD) em um intervalo  $I$  se existirem constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  não todas nulas, tais que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \quad (1.14)$$

para todo  $x$  no intervalo  $I$ .

**Definição 1.4.** Dizemos que um conjunto de funções  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  são Linearmente Independente (LI) em um intervalo  $I$  se ele não é linearmente dependente no intervalo.

É fácil compreender essas definições para o caso de duas funções  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$ . Se as funções são LD em um intervalo  $I$ , então existem constantes  $c_1$  e  $c_2$ , que não são ambas nulas, tais que para todo  $x$  em  $I$ , temos:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \quad (1.15)$$

portanto, se consideramos que  $c_1 \neq 0$ , segue-se que

$$f_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} f_2(x) \quad (1.16)$$

isto é, se duas funções são LD, então uma é simplesmente uma constante múltipla da outra. Reciprocamente, se  $f_1(x) = c_2 f_2(x)$  para alguma constante  $c$ , então temos, por exemplo:

$$(-1)f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \quad (1.17)$$

para todo  $x$  em  $I$ . Logo, as funções  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  são LD, pois pelo menos uma das constantes (a saber  $c_1 = -1$ ) não é nula. Desta forma, duas funções  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  serão LI quando nenhuma delas é múltipla da outra em um intervalo  $I$ .

### Exemplo 1.4.

- a) Sejam  $f(x) = \sin(x) \cos(x)$  e  $g(x) = \sin(2x)$ . Como  $g(x) = \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ , existe pelo menos uma constante  $c$  diferente de zero, de modo que podemos escrever  $g(x) = 2f(x)$ . Logo, as funções  $g(x)$  e  $f(x)$  são LD;
- b) Sejam  $f(x) = \sin(x)$  e  $g(x) = \cos(x)$ . Observe que não existe nenhuma constante  $c$  diferente de zero, que possa satisfazer a igualdade  $g(x) = cf(x)$ . Logo, as funções  $g(x)$  e  $f(x)$  são LI.

### 1.3 Wronskiano

Em matemática, Wronskiano é uma função aplicada especialmente no estudo de ED's. O nome dessa função é uma homenagem ao matemático polonês Josef Wronski. O Wronskiano é utilizado para determinar se um conjunto de funções diferenciáveis são LD ou LI, em um dado intervalo e sua definição será dada a seguir.

**Definição 1.5.** O Wronskiano de um conjunto de funções  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  é dado pelo determinante

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (1.18)$$

**Teorema 1.1.** Se o Wronskiano de um conjunto de funções for não-nulo (solução não trivial) para algum intervalo  $I$ , então esse conjunto de funções é LD neste intervalo. Se o Wronskiano é identicamente nulo (solução trivial) e se cada função do conjunto for solução da mesma equação diferencial, então esse conjunto de funções é LI.

*Demonstração.* A prova do Teorema 1.1 é por contradição no caso em que  $n = 2$ . Suponha que  $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) \neq 0$  para um  $x_0$  no intervalo  $I$  e que  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  sejam LD no intervalo. O fato das funções serem LD nos diz que existem  $c_1$  e  $c_2$ , não ambas nulas, para as quais

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \quad (1.19)$$

para todo  $x$  em  $I$ . Derivando essa equação (1.19), obtemos:

$$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0 \quad (1.20)$$

Das equações (1.19) e (1.20) podemos escrever um sistema de equações lineares, isto é:

$$\begin{cases} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

Em notação matricial esse sistema (1.21) pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

mas a dependência de  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  implica que (1.21) possui uma solução não trivial para cada  $x$  no intervalo  $I$ . Logo,

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.23)$$

para todo  $x$  no intervalo. Isso contradiz a suposição de que  $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) \neq 0$ . Portanto, concluímos que  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  são LI.

**Corolário 1.1.** *Se  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  possuem pelo menos  $n - 1$  derivadas e são LD em  $I$ , então  $W(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = 0$  para todo  $(x)$  no intervalo.*

**Exemplo 1.5.**

- a) As funções  $f_1(x) = e^{2x}$  e  $f_2(x) = e^{-x}$  são LI. De fato, o determinante do Wronskiano dessas duas funções é diferente de zero, isto é,

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -3e^{-x}e^{2x} \neq 0$$

- b) As funções  $f_1(x) = \sin^2(x)$  e  $f_2(x) = 1 - \cos(2x)$  são LD. De fato, o determinante do Wronskiano dessas duas funções é igual a zero, isto é,

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2(x) & 1 - \cos(2x) \\ 2 \sin(x) \cos(x) & -2 \sin(2x) \end{vmatrix} = 0$$

No capítulo 2 será abordado o método por séries de potência para resolver EDO homogênea de segunda ordem. Entretanto, a partir do Wronskiano, mostraremos um método para obter uma

segunda solução LI, pois em alguns casos da substituição em séries de potência encontramos somente uma solução [7]. Desta forma, vamos inicialmente considerar a EDO (1.2), cujas soluções  $y_1$  e  $y_2$  são LI. Então, por definição, o Wronskiano é:

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

diferenciando a equação (1.24) e usando a EDO (1.2), temos:

$$\begin{aligned} W' &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2' - y_1' y_2'' \\ W' &= y_1 [-P(x) y_2' - Q(x) y_2] - y_2 [-P(x) y_1' - Q(x) y_1] \\ W' &= -P(x) [y_1 y_2' - y_2 y_1'] \end{aligned} \quad (1.25)$$

note que o termo entre colchetes da última linha na expressão (1.25) é exatamente o Wronskiano. Assim, podemos escrever:

$$W' = -P(x)W \quad (1.26)$$

no caso em que  $P(x) = 0$ , isto é,

$$y'' + Q(x)y = 0 \quad (1.27)$$

o Wronskiano será constante, ou seja,

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \text{constante} \quad (1.28)$$

para o caso geral, agora iremos admitir que temos uma solução da equação (1.2) por substituição de série. Passaremos a desenvolver uma segunda solução, independente, para o qual  $W \neq 0$ . Reescrevendo a equação (1.26), usando a notação de Leibniz para derivada e separando as variáveis, tem-se:

$$\frac{dW}{W} = -P(x)dx \quad (1.29)$$

integrando a variável  $x$  de  $a$  até  $x$ , para obter

$$\ln \frac{W(x)}{W(a)} = - \int_a^x P(x_1) dx_1 \quad (1.30)$$

ou ainda,

$$W(x) = W(a) \exp \left[ - \int_a^x P(x_1) dx_1 \right] \quad (1.31)$$

mas,

$$W(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = y_1^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{y_2}{y_1} \right) \quad (1.32)$$

combinando as equações (1.31) e (1.32), temos

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{W(a) \exp \left[ - \int_a^x P(x_1) dx_1 \right]}{y_1^2} \quad (1.33)$$

finalmente, integrando a equação (1.33) de  $x_2 = b$  e  $x_2 = x$ , tem-se

$$y_2 = y_1(x) W(a) \int_b^x \frac{\exp \left[ - \int_a^{x_2} P(x_1) dx_1 \right]}{[y_1(x_2)]^2} dx_2 \quad (1.34)$$

aqui,  $a$  e  $b$  são constantes arbitrárias e o termo  $y_1(x) \frac{y_2(b)}{y_1(b)}$  foi descartado, pois não adicionava nada de novo. Uma vez que  $W(a)$ , o Wronskiano avaliado em  $x = a$ , é uma constante e nossas soluções para a equação diferencial homogênea sempre contêm um fator normalizador desconhecido, faremos  $W(a) = 1$  e escreveremos:

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{\exp \left[ - \int_a^{x_2} P(x_1) dx_1 \right]}{[y_1(x_2)]^2} dx_2 \quad (1.35)$$

se  $P(x) = 0$ , a equação (1.35) se reduz a

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{dx_2}{[y_1(x_2)]^2} \quad (1.36)$$

isso significa, que usando a equação (1.36) ou (1.35), podemos tomar uma solução conhecida e, por integração, gerar uma segunda solução linearmente independente. Este resultado será utilizado no capítulo 3 para encontrar as Funções de Bessel de segunda espécie.

# Capítulo 2

## Série de Potências

Neste capítulo será feita uma breve revisão sobre o método de séries de potências para a resolução de EDO, bem como algumas particularidades relativa a este método. Usamos como referências Thomas (2012) [8], Leithold e Dennis Zill (1994) [9], Boyce e Diprima [1], Geraldo Ávila [10] para a elaboração do texto que será apresentado aqui neste capítulo. Nosso objetivo não será aprofundarmos neste tema, restringiremos apenas as definições e teoremas mais relevantes que darão embasamento ao foco principal de nosso trabalho.

### 2.1 Série de Potências

Quando se avança no estudo das soluções de equações diferenciais, fica evidente que apenas trabalhar com soluções elementares é insuficiente para se obter soluções das EDO's. Isto é, soluções elementares constituem um universo pequeno demais para expressar com elas as soluções de todas as EDO's importantes nas aplicações em Matemática, física ou Engenharia. Assim, uma alternativa é utilizar o chamado método de séries de potência, que consiste em procurar as soluções de uma EDO expressas como soma de uma série de potências. Tal método se baseia na hipótese de que as soluções procuradas são analíticas pelo menos em alguma vizinhança de um ponto  $x_0$  onde são dadas as condições de contorno. Isto significa que estas funções possuem derivadas de todas as ordens neste ponto e, portanto, podem ser expressas como uma série de potências.

**Definição 2.1.** *Uma série de potências é representada da seguinte forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (2.1)$$

onde  $x$  é uma variável e  $c_n$  são constantes. De modo geral, uma série de potências em  $x = x_0$  é dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots \quad (2.2)$$

A equação (2.2) é chamada de séries de potências de  $(x - x_0)$ , centrada em  $x_0$ . Note que, se  $x$  for um determinado número, a série de potências tornar-se-á uma série infinita de termos constantes, que

podemos testar a convergência ou divergência. Assim, uma série de potências pode convergir ou não para alguns valores de  $x$ . Vamos considerar  $c_n = 1$  na equação (2.1) para todo  $n$ , logo podemos escrever:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (2.3)$$

que é convergente quando  $-1 < x < 1$  e divergente para  $|x| \geq 1$ . Os teoremas (2.1) e (2.2), enunciados a seguir estabelecem as condições para que uma série de potências seja convergente ou divergente, respectivamente. Após, outros teoremas importantes para o estudo de séries serão enunciados também.

**Teorema 2.1** (Teorema de convergência para série de potências). *Se a série de potências dada pela equação (2.1) for convergente para  $x = x_1$  ( $x \neq 0$ ), então ela será absolutamente convergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x| < |x_1|$ .*

*Demonstração.* A prova deste teorema é feita pelo teste da comparação com a série dada, comparada a uma série geométrica convergente (Leithold, 1994, p. 716). Então, se  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$  for convergente, significa que  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_1^n = 0$ . Assim, existe um inteiro  $N > 0$  tal que  $n \geq N$ , então  $|c_n x_1^n| < 1$ . Agora, se  $x$  for qualquer número tal que  $|x| < |x_1|$ , então  $n \geq N$ . Desta forma,

$$|c_n x^n| = \left| c_n x_1^n \left( \frac{x^n}{x_1^n} \right) \right| \quad (2.4)$$

$$|c_n x^n| = |c_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \quad (2.5)$$

$$|c_n x^n| < \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \quad (2.6)$$

assim, a série

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \quad (2.7)$$

é convergente, porque é uma série geométrica com  $r = \frac{x}{x_1} < 1$  (pois  $|x| < |x_1|$ ). Compare a série  $\sum_{n=N}^{\infty} |c_n x^n|$ , onde  $|x| < |x_1|$ , com a série  $\sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$ . De  $|c_n x^n| < \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$  e do teste da comparação

$\sum_{n=N}^{\infty} |c_n x^n|$  é convergente para  $|x| < |x_1|$ . Assim sendo, a série de potências dada é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x| < |x_1|$ . ■

### Exemplo 2.1.

Encontre os valores de  $x$  para os quais a série de potências dada pela equação (2.8) seja convergente.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (2.8)$$

Para resolver esse problema vamos fazer,

$$U_n = \frac{x^n}{n!} \quad (2.9)$$

e

$$U_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (2.10)$$

Assim, aplicando o teste da razão (o teste da razão pode ser visto na referência Leithold, 1994, p. 734), temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} n!}{(n+1)! x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \quad (2.11)$$

portanto, a série de potências dada é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$ .

**Teorema 2.2** (Teorema de divergência para série de potências). *Se a série de potência  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  for divergente para  $|x| = |x_2|$  ela será divergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x| > |x_2|$ .*

*Demonstração.* Suponha que a série de potências seja convergente para algum número  $x$  para o qual  $|x| > |x_2|$ . Então, pelo Teorema 2.1, a série deve convergir para  $x = x_2$ . Mas isso contradiz a hipótese. Logo, a série de potências dada é divergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x| > |x_2|$ . ■

### Exemplo 2.2

Encontre os valores de  $x$  para os quais a série de potências dada pela equação (2.12) é divergente.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \quad (2.12)$$

Para resolver esse problema vamos fazer,

$$U_n = n! x^n \quad (2.13)$$

e

$$U_{n+1} = (n+1)! x^{n+1} \quad (2.14)$$

assim, aplicando o teste da razão, obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(n+1)x| = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ +\infty, & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

logo, a série de potências é divergente para todos os valores de  $x$ , exceto 0.

**Teorema 2.3** (Raio da convergência de uma série de potências). *A convergência da série de potência  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  pode ser descrita por um dos três casos a seguir:*

- (i) a série converge somente para  $x = 0$ ;
- (ii) a série é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$ ;
- (iii) existe um número  $R > 0$  tal que a série é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x| < R$  e é divergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x| > R$ .

*Demonstração.* A demonstração será feita para cada proposição acima.

- Se  $x$  for substituído por zero na série de potências dada, temos  $c_0 + 0 + \dots$ , que obviamente é convergente. Assim, toda série de potências da forma  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  é convergente quando  $x = 0$ , se esse for o único valor de  $x$  para o qual a série converge, então a afirmação (i) é válida;

- Suponha que a série dada seja convergente para  $x = x_1$ , onde  $x_1 \neq 0$ . Segue, então, do Teorema 2.1 que a série é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$  para os quais  $|x| < |x_1|$ . Além disso, se não existir valor de  $x$  para o qual a série seja divergente, então ela é absolutamente convergente para todos os valores de  $x$ . Assim, a afirmação (ii) é válida;

- Se a série for convergente para  $x = x_1$ , com  $x_1 \neq 0$ , e divergente para  $x = x_2$ , onde  $|x_2| > |x_1|$ , então do Teorema 2.2, segue que a série é divergente para todos os valores de  $x$  tais que  $|x| > |x_2|$ . Logo,  $x_2$  é limitante superior para o conjunto de valores de  $|x|$  para os quais a série é absolutamente

convergente. Então pelo axioma do completamento, que nos diz que todo conjunto não-vazio de números reais que tenha limite inferior, possui um limitante inferior máximo. Da mesma forma, todo conjunto não-vazio de números reais que tenha limitante superior possui um limite superior mínimo. Assim esse conjunto de números tem um limitante superior mínimo, que é o número  $R$  da afirmação (iii). Isso completa a demonstração de que uma e somente uma das três afirmações é válida. ■

Ao conjunto de todos os valores de  $x$  para os quais uma dada série de potências é convergente, chamamos de intervalo de convergência da série de potências. O número  $R$  da afirmação (iii) do Teorema 2.3 é denominado Raio de convergência da série de potências.

### Exemplo 2.3.

Encontre os valores de  $x$  para os quais a série de potências dada pela equação (2.16) é divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n \quad (2.16)$$

Inicialmente, vamos expandir essa série, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n = (x-2) + \dots + k(x-2)^k + (k+1)(x-2)^{k+1} + \dots \quad (2.17)$$

Aplicando o teste da razão, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(x-2)^{n+1}}{n(x-2)^n} \right| = |x-2| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = |x-2| \quad (2.18)$$

Assim, a série dada será absolutamente convergente se  $|x-2| < 1$  ou, seja, resolvendo esse modulo podemos obtemos  $-1 < x-2 < 1$ , ou ainda,  $1 < x < 3$ . Quando  $x = 1$  a série será  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ , que é divergente, pois o  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n \neq 0$ . Assim, o intervalo de convergência será  $(1,3)$  e a série de potência define uma função cujo domínio é o intervalo  $(1,3)$ .

**Proposição 2.1.** *Se  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  for uma série de potência com raio de convergência  $R > 0$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$  também terá  $R$  como raio de convergência.*

*Demonstração.* Seja  $x$  qualquer número no intervalo aberto  $(-R, R)$ . Então, o  $|x| < R$ . Seleccionamos o  $x_1$  tal que  $|x| < |x_1| < R$ . Como  $|x| < R$ , então a série  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  é convergente. Logo, o

$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_1^n = 0$  e, assim, existirá um número  $N > 0$ , tal que  $n > N$ , então  $|c_n x_1^n| < 1$ . Seja  $M$  o maior dos números  $|c_1 x_1|, |c_2 x_1^2|, |c_3 x_1^3|, \dots, |c_N x_1^N|, 1$ . Então,  $|c_n x_1^n| \leq M$ , para todo  $n$  inteiro positivo. Desta forma,

$$|nc_n x^{n-1}| = \left| nc_n \frac{x^{n-1}}{x_1^n} \right| = n \frac{|c_n x_1^n|}{|x_1|} \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1}$$

logo, podemos escrever a seguinte desigualdade

$$|nc_n x^{n-1}| \leq n \frac{M}{|x_1|} \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1} \quad (2.19)$$

aplicando o teste da razão em

$$\frac{M}{|x_1|} \sum_{n=1}^{\infty} n \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1} \quad (2.20)$$

obtemos,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)|x|^n |x_1|^{n-1}}{|x_1|^n n|x|^{n-1}} \right| = \left| \frac{x}{x_1} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1. \quad (2.21)$$

Sendo assim, a série (2.20) é absolutamente convergente. Logo, da equação (2.19) e do teste da comparação segue que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$  também é absolutamente convergente. Como  $x$  é qualquer número em  $(-R, R)$ , segue que se o raio de convergência da série  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  for  $R'$ , então  $R' \geq R$ . Agora precisamos mostrar que  $R'$  não pode ser maior do que  $R$ . Para isso vamos mostrar por contradição. Para isto, vamos supor  $R' > R$  e  $x_2$  um número tal que  $R < |x_2| < R'$ , como  $|x_2| > R$  segue que  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_2^n$  é divergente. Como  $|x_2| < R'$ , segue que  $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x_2^{n-1}$  é absolutamente convergente. Além disso,

$$|x_2| \sum_{n=1}^{\infty} |nc_n x_2^{n-1}| = \sum_{n=1}^{\infty} |nc_n x_2^n|$$

e assim,  $\sum_{n=1}^{\infty} |nc_n x_2^n|$  será convergente. Se  $n$  for qualquer inteiro positivo,

$$|c_n x_2^n| \leq n |c_n x_2^n| = |nc_n x_2^n|.$$

Das equações acima e do teste da comparação, segue que  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_2^n|$  é convergente. Logo a série  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x_2^n|$  é convergente, o que contradiz o resultado. Assim, a hipótese de que  $R' > R$  é falsa. Portanto,  $R'$  não pode ser maior do que  $R$ , e como foi mostrado que  $R' \geq R$  segue que  $R' = R$ , o que prova o Teorema. ■

**Exemplo 2.4.**

Verifique o raio de convergência para a série dada pela equação (2.22).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \cdots \quad (2.22)$$

Para resolver este problema vamos determinar o raio de convergência aplicando o teste da razão, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2(x^{n+2})}{(x-2)^2(x^{n+1})} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 4n + 4} \right) = |x|$$

logo, a série de potência é convergente quando  $|x| < 1$ , assim o raio de convergência é  $R = 1$ . Agora verificando para a série de potências obtida da série dada com derivação termo a termo é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots + \frac{x^k}{(k+1)} + \cdots$$

aplicando o teste da razão,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{(n+2)x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| = |x|$$

que converge para  $|x| < 1$ , assim seu raio de convergência é  $R' = 1$ . Como  $R = R'$ , está provado o Teorema.

**Proposição 2.2.** *Se o raio de convergência da série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  for  $R > 0$ , então a série  $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$  também terá  $R$  como raio de convergência.*

*Demonstração.* Se aplicarmos o Teorema precedente a série  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$  obteremos o resultado desejado. ■

**Teorema 2.4** (Teorema da derivação termo a termo). *Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  uma série de potências cujo raio de convergência é  $R > 0$ . Então, se  $f$  for definida por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (2.23)$$

*então,  $f'(x)$  existirá para todo  $x$  dentro do intervalo aberto  $(-R, R)$ , sendo dada por*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}. \quad (2.24)$$

*Demonstração.* Se  $x$  e  $a$  são dois números distintos no intervalo aberto  $(-R, R)$ . A fórmula de Taylor, com  $n = 1$  é

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(\xi)}{2!} (x - a)^2 \quad (2.25)$$

da equação (2.25), com  $f(x) = x^n$ , segue que para todo  $n$  inteiro positivo

$$x^n = a^n + n a^{n-1} (x - a) + \frac{1}{2} n(n-1) (\xi_n)^{n-2} (x - a)^2 \quad (2.26)$$

onde  $(\xi_n)$  está entre  $a$  e  $x$  para todo  $n$  inteiro positivo. Assim,

$$f(x) - f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n \quad (2.27)$$

$$f(x) - f(a) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n - c_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n a^n \quad (2.28)$$

$$f(x) - f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x^n - a^n) \quad (2.29)$$

dividindo a equação (2.29) por  $x - a$  (pois  $x \neq a$ ) e usando (2.26), obtemos:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{x - a} \sum_{n=1}^{\infty} c_n [n a^{n-1} (x - a) + \frac{1}{2} n(n-1) (\xi_n)^{n-2} (x - a)^2] \quad (2.30)$$

assim,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n a^{n-1} + \frac{1}{2} (x - a) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (\xi_n)^{n-2} \quad (2.31)$$

como  $a$  está em  $(-R, R)$ , concluímos do teorema que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$  é absolutamente convergente. Como ambos,  $a$  e  $x$  estão em  $(-R, R)$ , existe um número  $K > 0$  tal que  $|a| < K < R$  e  $|x| < K < R$ . Segue do Teorema que  $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n K^{n-2}$  é absolutamente convergente. Então, com

$$|n(n-1) c_n (\xi_n)^{n-2}| < |n(n-1) c_n K^{n-2}| \quad (2.32)$$

Para cada  $\xi_n$ , podemos concluir do teste da comparação que  $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(\xi_n)^{n-2}$  é absolutamente convergente. De modo que podemos escrever,

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n a^{n-1} \right| = \left| \frac{1}{2}(x - a) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(\xi_n)^{n-2} \right| \quad (2.33)$$

entretanto, se  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  for absolutamente convergente, então

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} U_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |U_n|. \quad (2.34)$$

Aplicando esse resultado na equação (2.33)

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n a^{n-1} \right| = \left| \frac{1}{2}|x - a| \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|c_n| |\xi_n|^{n-2} \right| \quad (2.35)$$

obtemos,

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n a^{n-1} \right| = \left| \frac{1}{2}|x - a| \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|c_n| K^{n-2} \right| \quad (2.36)$$

onde  $0 < K < R$ . Como a série do segundo membro é absolutamente convergente, o limite do segundo membro, quando  $x$  tende a  $a$ , é zero. Então, do Teorema do confronto de limites temos,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n a^{n-1} \Leftrightarrow f'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n a^{n-1}$$

e como pode ser qualquer número no intervalo aberto  $(-R, R)$ , o teorema está provado. ■

### Exemplo 2.5.

Encontre a série para  $f'(x)$  e  $f''(x)$ , com  $-1 < x < 1$ , se

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^k + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Para resolver este problema, vamos derivar a série a direita termo a termo, ou seja,

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + xk^{k-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$f''(x) = \frac{1}{(1-x)^3} = 2 + 6x + \dots + k(k-1)x^{k-2} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

**Teorema 2.5** (Teorema da integração termo a termo). *Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  uma série de potência cujo raio de convergência é  $R > 0$ . Então, se  $f$  for definida por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (2.37)$$

*$f$  será integrável em todo subintervalo fechado de  $(-R, R)$ . Assim, a integral de  $f$ , será calculada integrando termo a termo a série, isto é, se  $x$  está em  $(-R, R)$ , temos*

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} \quad (2.38)$$

*além disso, o raio de convergência da série resultante é  $R$ .*

*Demonstração.* Seja  $g$  a função definida por

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} \quad (2.39)$$

como os termos da série de potências, que representa  $f(x)$ , são as derivadas dos termos da série de potências que representa  $g(x)$ , as duas séries têm o mesmo raio de convergência pelo Teorema 2.4 e pelo Teorema 2.5  $g'(x) = f(x)$  para todo  $x$  em  $(-R, R)$ . Assim, segue que  $f'(x) = g''(x)$ , para todo  $x$  em  $(-R, R)$ . Como  $f$  é diferenciável em  $(-R, R)$ , é contínua neste intervalo, conseqüentemente,  $f$  é contínua em todo subintervalo fechado de  $(-R, R)$ . Do Segundo Teorema fundamental do cálculo (este Teorema pode ser visto na referência [9], p. 347) concluímos que se  $x$  está em  $(-R, R)$ , então

$$\int_0^x f(t) dt = g(x) - g(0) = g(x) \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

■

**Exemplo 2.6.**

Ache uma representação em série de potências de  $\int_0^x e^{-t^2} dt$ .

Inicialmente, vamos escrever o integrando em uma expansão de série, isto é,

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} + \dots,$$

para todos os valores de  $t$ . Aplicando o Teorema da integração, integrando termo a termo, obtemos

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} dt$$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \dots$$

este resultado, representa a integral da série de potências para todos os valores de  $x$ .

**2.2 Séries de Taylor e de Maclaurin**

A expansão em séries de Taylor é uma forma de representar uma função  $f$  qualquer na forma de uma série de potências. A expansão é feita através da representação da função em um ponto  $x$  qualquer com base no valor da função em outro ponto  $a$  e das derivadas de ordem  $n$  da função no ponto  $a$ .

**Definição 2.2.** *Seja  $f$  uma função com derivadas de todas as ordens em algum intervalo contendo  $a$  como um ponto interior. Então, a série de Taylor gerada por  $f$  em  $x = a$  é dada por*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (2.40)$$

quando  $a = 0$ , este desenvolvimento recebe o nome de série de Maclaurin de  $f$ , sendo dada por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (2.41)$$

Vale destacar que se todos os termos da série forem considerados, esta expansão não representa uma aproximação, mas sim o valor exato da função. Na maioria dos casos, a expansão é feita nas

vizinhanças do ponto  $a$ , de modo que  $(x - a)$  é relativamente pequeno. Por isso, os termos de alta ordem (derivadas com ordem maior que 2) costumam ser muito pequenos, de modo que a expansão pode ser truncada após alguns termos.

### 2.3 Propriedades das séries de potências

Uma das principais vantagens da utilização de séries de potência é que elas são facilmente manipuláveis. Assim, algumas propriedades e teoremas úteis, para o nosso estudo, das séries de potência serão enunciados a seguir.

**Teorema 2.6** *Toda série de potências  $\sum a_n x^n$ , com raio de convergência  $r > 0$  ( $r$  podendo ser infinito), converge uniformemente em todo intervalo  $[-c, c]$ , onde  $0 < c < r$ .*

*Demonstração.* Fixado  $c < r$ , seja  $x_0$  um número compreendido entre  $c$  e  $r$ . Como a série converge absolutamente em  $x_0$ , existe um  $M$  tal que  $|a_n x_0^n|$  é limitado por uma constante  $M$ . Assim, sendo  $|x| \leq c$ ,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{c}{x_0} \right|^n$$

isso mostra que a série é dominada pela série numérica convergente  $\sum M \left| \frac{c}{x_0} \right|^n$ . Portanto, pelo teste da comparação, a série  $\sum a_n x^n$  converge uniformemente em  $|x| \leq c$ . ■

**Observação:** Note que o Teorema 2.6 garante a convergência uniforme em qualquer intervalo  $|x| \leq c$  contido no intervalo  $|x| < r$ , mas não garante nada em  $|x| < r$ .

#### Exemplo 2.7.

Considere a série geométrica

$$\sum x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1 - x},$$

cujo raio de convergência é  $r = 1$ . Mas a convergência não é uniforme em todo intervalo  $|x| < 1$ . De fato, colocando

$$S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (2.42)$$

temos

$$\left| S_n(x) \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}$$

é claro que, dado um  $\epsilon > 0$ , não existe  $N$  tal que  $n > N$  esta última expressão seja menos que  $\epsilon$  para todo  $x$  em  $(-1,1)$ , basta pensar numa sequência  $x_n$  tendendo a 1, com  $|x_n|^{n+1}$  mantendo-se maior ou igual a um número  $c$  tal que  $0 < c < 1$ .

**Teorema 2.7** (Teorema da Unicidade de série de potências). *Se uma função  $f$  admite desenvolvimento num ponto  $x_0$ , esse desenvolvimento é único.*

*Demonstração.* Considere que  $f$  tenha dois desenvolvimentos numa vizinhança da origem,  $|x| < r$

$$f(x) = \sum a_n x^n = \sum b_n x^n$$

Essas séries podem ser derivadas repetidamente, termo a termo, na referida vizinhança, em particular, em  $x = 0$ , donde que  $a_n = b_n$  para todo  $n$ , o que prova o teorema. ■

**Observação:** Se  $\sum a_n (x - x_0)^n = \sum b_n (x - x_0)^n$ , para todo  $x$  em algum intervalo centrado em  $x_0$ , então  $a_n = b_n$  para todo  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Em particular, se  $\sum a_n (x - x_0)^n = 0$  para todo  $x$ , então  $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .

### Exemplo 2.8.

A função  $e^x$  tem desenvolvimento de Maclaurin dado por

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \quad (2.43)$$

onde  $R_n(x) = \frac{e^{c+1} x^{n+1}}{(n+1)!}$  e  $c$  é um número compreendido entre zero e  $x$ . Então,

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{x+1} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (2.44)$$

desenvolvimento este válido para todo  $x$  real.

**Teorema 2.8** (Teorema da Existência de Soluções por Séries de Potências).

*Considere a equação*

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (2.45)$$

*em que  $a_2(x)$ ,  $a_1(x)$  e  $a_0(x)$  são polinômios sem fatores comuns. Se  $a_2(0) \neq 0$ , então a equação tem solução geral em série de potências*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n \right) + a_1 \left( x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n \right) \quad (2.46)$$

são soluções fundamentais da equação que convergem (pelo menos) para  $|x| < r$ , sendo  $r$  o raio do maior círculo no plano complexo com centro na origem tal que  $a_2(z) \neq 0$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$  com  $|z| < r$ .

*Demonstração.* Vamos dividir a equação (2.45) por  $a_2(x)$  e reescrevê-la na forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (2.47)$$

Considerando  $a_2(x_0) \neq 0$ , as funções  $P(x)$  e  $Q(x)$  serão analíticas, logo podem ser escritas em série de potência de  $x$ , ou seja,

$$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n \quad (2.48)$$

$$Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n \quad (2.49)$$

que convergem para  $|x| < r$ , sendo  $r$  o raio do maior círculo no plano complexo com centro na origem tal que  $P(z) \neq 0$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$  com  $|z| < r$ . Suponhamos, que a solução da equação possa ser escrita em série de potências de  $x$  como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.50)$$

vamos mostrar que os coeficientes satisfazem uma relação de recorrência de tal forma que a série converge para  $|x| < r$ . As derivadas  $y'(x)$  e  $y''(x)$ , são representadas em série de potências como

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad (2.51)$$

e

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \quad (2.52)$$

substituindo as equações (2.48) a (2.52) na equação (2.47) obtemos:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^k + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 \\
& \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n,k=0}^{\infty} P_n (k+1)a_{k+1}x^{n+k} + \sum_{n,k=0}^{\infty} Q_n a_k x^{n+k} = 0 \\
& \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^n [P_{n-k}(k+1)a_{k+1} + Q_{n-k}a_k] \right] x^n = 0 \quad (2.53)
\end{aligned}$$

a equação (2.53) representa uma série nula, o que implica que todos os coeficientes são iguais a zero. Assim,

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = - \sum_{k=0}^n [P_{n-k}(k+1)a_{k+1} + Q_{n-k}a_k] \quad (2.54)$$

essa equação (2.54) é chamada de relação de recorrência. Por outro lado, da convergência das séries de  $P(x)$  e  $Q(x)$ , segue-se que existe um  $M > 0$  tal que  $|P_n|t^n < M$  e  $|Q_n|t^n < M$ , para  $0 < t < r$  e  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Usando este fato, temos a equação

$$\begin{aligned}
(n+1)(n+2)|a_{n+2}| & \leq \frac{M}{t^n} \sum_{k=0}^n [(k+1)|a_{k+1}| + |a_k|]t^k \\
& \leq \frac{M}{t^n} \sum_{k=0}^n [(k+1)|a_{k+1}| + |a_k|]t^k + M|a_{n+1}|t. \quad (2.55)
\end{aligned}$$

Vamos considerar a série  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ , com coeficientes definidos por  $A_0 = |a_0|$  e  $A_1 = |a_1|$ , assim

$$(n+1)(n+2)|a_{n+2}| \leq \frac{M}{t^n} \sum_{k=0}^n [(k+1)A_{k+1} + A_k]t^k + MA_{n+1}t \quad (2.56)$$

por indução, temos que  $|a_n| \leq A_n$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . De fato, para  $n = 0$ , temos

$$\begin{aligned}
2|a_2| & \leq M[|a_1| + |a_0|] + M|a_1|t \\
& \Rightarrow 2|a_2| \leq M[A_1 + A_0] + MA_1t = 2A_2 \\
& \Rightarrow |a_2| = A_2 \quad (2.57)
\end{aligned}$$

Suponha que a desigualdade vale para todo  $n < k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , assim  $a_{k-2} \leq |A_{k-2}|$  e  $a_{k-1} \leq |A_{k-1}|$ . Mostraremos que vale para  $k$ . Portanto, fazendo  $n = k - 2$ , temos

$$(k-1)k|a_k| \leq \frac{M}{t^{k-2}} \sum_{i=0}^{k-2} [(k+1)|a_{k+1}| + a_k]t^k + M|a_{k-1}|t \quad (2.58)$$

a soma do lado direito da equação (2.58) vai até  $k-2$ , e pela hipótese de indução, temos

$$(k-1)k|a_k| \leq \frac{M}{t^{k-2}} \sum_{i=0}^{k-2} [(k+1)|A_{k+1}| + A_k]t^k + M|A_{k-1}|t = (k-1)kA_k \quad (2.59)$$

Logo  $|a_k| \leq A_k$ .

Vamos mostrar a série  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$  é convergente para  $|x| < r$ , o que implica que a série de  $y(x)$  também é convergente. Usando a equação para  $n-1$ , temos que

$$(n+1)nA_{n+1} = \frac{M}{t^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)A_{k+1} + A_k]t^k + MA_n t \quad (2.60)$$

e

$$n(n-1)A_n = \frac{M}{t^{n-2}} \sum_{k=0}^{n-2} [(k+1)A_{k+1} + A_k]t^k + MA_{n-1}t \quad (2.61)$$

Assim,

$$(n+1)nA_{n+1} = \frac{1}{t} \left\{ \frac{M}{t^{n-2}} \sum_{k=0}^{n-2} [(k+1)A_{k+1} + A_k]t^k + M[nA_n + A_{n-1}]t \right\} + MA_n t$$

$$(n+1)nA_{n+1} = \frac{1}{t} \{n(n-1)A_n - MA_{n-1}t + M[nA_n + A_{n-1}]t\} + MA_n t$$

$$(n+1)nA_{n+1} = \frac{A_n}{t} [n(n-1) + Mnt + Mt^2]$$

Aplicando o teste da razão, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}x^{n+1}}{A_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(n-1) + Mnt + Mt^2}{t(n+1)n} \frac{x^{n+1}}{x^n} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}x^{n+1}}{A_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) + Mnt + Mt^2}{t(n+1)n} |x| = \frac{|x|}{t}, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Assim, a série  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ , converge  $|x| < t$ , para todo  $t < r$ . Consequentemente, a série converge para  $|x| < r$ . Como  $|a_n| \leq A_n$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , então, também, converge para  $|x| < r$  a série

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Agora fazendo  $n = 0$ , obtemos  $a_2$  como combinação linear de  $a_0$  e  $a_1$ . Substituindo-se esse resultado para  $n = 1$  obtemos também  $a_3$  como combinação linear de  $a_0$  e  $a_1$ . Continuando desta forma, obtemos  $a_n = b_n a_0 + c_n a_1$ , quando  $n = 2, 3, \dots$ . Portanto,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n \right) + a_1 \left( x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n \right)$$

**Exemplo 2.9.**

Resolva a equação diferencial abaixo usando o método de séries de potências.

$$y'' - xy' - y = 0 \quad (2.62)$$

Pelo Teorema 2.8 que acabamos de ver, esta equação diferencial tem uma solução em série de potências válidas para todo  $x \in \mathbb{R}$ , pois  $a_2(z) = 1 \neq 0$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$  com  $|z| < r$ . Assim temos,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (2.63)$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad (2.64)$$

e

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \quad (2.65)$$

Substituindo as equações (2.63) a (2.65) em (2.62) obteremos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad (2.66)$$

Como  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ , então da equação (2.66) torna-se,

$$2a_2 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2) a_{n+2} - n a_n x^n - a_n] x^n = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.67)$$

Como esta é a série nula, então os seus coeficientes têm que ser iguais a zero, ou seja,

$$\begin{cases} 2a_2 - a_0 = 0 \\ (n+1)(n+2) a_{n+2} - n a_n - a_n = 0, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.68)$$

De onde obtemos a fórmula de recorrência

$$a_2 = \frac{1}{2}a_0$$

$$a_{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)(n+2)}a_n = \frac{1}{n+2}a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.69)$$

Usando a fórmula de recorrência  $a_{n+2} = \frac{1}{n+2}a_n$  a partir do  $a_0$  podemos obter o  $a_2$ , e a partir do  $a_2$  podemos obter o  $a_4$ , e assim por diante, ou seja,

$$a_4 = \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{4 \cdot 2}a_0; \quad (2.70)$$

$$a_6 = \frac{1}{6}a_4 = \frac{1}{6 \cdot 4 \cdot 2}a_0, \dots \quad (2.71)$$

Assim, os coeficientes de índice par (múltiplos de 2) são dados por

$$a_{2k} = \frac{1}{2k}a_{2k-2} = \frac{1}{2k(2k-2)}a_{2k-4} = \frac{1}{2k(2k-2)\dots 2}a_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.72)$$

Usando a fórmula de recorrência  $a_{n+2} = \frac{1}{n+2}a_n$  a partir do  $a_1$  podemos obter o  $a_3$ , e a partir do  $a_3$  podemos obter o  $a_5$ , e assim por diante, ou seja,

$$a_3 = \frac{1}{3}a_1; \quad (2.73)$$

$$a_5 = \frac{1}{5}a_3 = \frac{1}{5 \cdot 3}a_1, \dots \quad (2.74)$$

Assim, os coeficientes de índice ímpar (múltiplos de 2 mais 1) são dados por

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}a_{2k-1} = \frac{1}{(2k+1)(2k-1)}a_{2k-3}$$

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}a_{2k-1} = \frac{1}{(2k+1)(2k-1)\dots 3}a_1, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.75)$$

Agora separando a série  $y(x)$  em duas séries, uma que só contém termos de potência par e outra que só contém termos de potência ímpar e substituindo os valores dos coeficientes  $a_{2k}$  e  $a_{2k+1}$  encontrados acima, obtemos

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} \quad (2.76)$$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \quad (2.77)$$

onde,

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k-2) \dots 2} x^{2k} \quad (2.78)$$

e

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k-1) \dots 3} x^{2k+1} \quad (2.79)$$

convergem para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

## 2.4 Método de Fröbenius

Como foi visto na seção precedente, podemos resolver uma equação diferencial de segunda ordem linear da forma em série de potências sem grandes problemas em torno de um ponto ordinário. Porém, se  $x = x_0$  for um ponto singular, nem sempre é possível encontrar uma solução em série de potências. Mas, podemos tentar achar uma solução na forma  $y(x) = x^r \sum a_n x^n$ , onde  $r$  é uma constante a ser determinada. Dessa forma, para resolver uma equação diferencial em torno de uma singularidade regular, aplicaremos o seguinte Teorema:

**Teorema 2.9** (Teorema de Fröbenius). *Se  $x = 0$  for ponto singular regular da equação diferencial, então a equação possui pelo menos uma solução da forma*

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.80)$$

onde  $r$  e  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) são constantes a ser determinadas. Essa solução é válida no intervalo  $0 < x < R$  para algum número real  $R$ .

Não demonstraremos esse Teorema, deixaremos a cargo do leitor ver em [11]. Note que quando dizemos “pelo menos” no Teorema significa que, em contraste com o Teorema da Existência, não podemos garantir duas soluções na forma indicada. O método de Fröbenius consiste em identificar uma singularidade regular em torno de  $x$ , substituir  $y(x)$  dado na equação diferencial e determinar o expoente  $r$  e os coeficientes  $a_n$ . Para fazermos esse cálculo, iremos proceder da mesma forma como foi feito no Teorema 2.8. A série infinita

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \quad (2.81)$$

com a primeira derivada e segunda derivadas, respectivamente

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1} \quad (2.82)$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n-1)(r+n) a_n x^{r+n-2}$$

sendo substituídas na equação. Os termos de potências semelhantes de  $x$  são agrupados e igualados a zero. Quando isso é feito para  $x^n$ , a equação resultante é uma fórmula de recorrência. Uma equação quadrática em  $r$ , denominada equação indicial, ela surge quando o coeficiente de  $x^n$  é igualado a zero e  $a_0$  é deixado arbitrário. O método de Fröbenius sempre dá uma solução geral que possui a forma  $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias e  $y_2(x)$  é uma segunda solução que é linearmente independente de  $y_1(x)$ . O método para obter essa segunda solução depende da relação existente entre duas raízes da equação indicial. A natureza das raízes indiciais normalmente correspondem a três casos, quando utilizamos o método de Fröbenius. Para exemplificar vamos supor que  $r_1 \geq r_2$  e analisar os três casos abaixo.

**Caso 1:** Se  $r_1 \neq r_2$  e  $r_1 - r_2 \neq k \in \mathbb{Z}$ . Se  $r_1$  e  $r_2$  são raízes distintas, e não diferem por um inteiro, então existem duas soluções linearmente independentes para a equação (2.45) na forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r_1+n}, \quad a_0 \neq 0$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{r_2+n}, \quad b_0 \neq 0 \quad (2.83)$$

onde  $y_2(x)$  é obtido de maneira idêntica à determinação de  $y_1(x)$  pelo método de Fröbenius, utilizando  $r_2$  em lugar de  $r_1$ .

### Exemplo 2.10.

Resolva a equação diferencial  $2xy'' + y' + y = 0$ , utilizando o método de Fröbenius.

*Solução:*

Dividindo a equação por  $2x$ , obtemos

$$y'' + \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{2x}y = 0 \quad (2.84)$$

O ponto  $x = 0$  é ponto singular. Agora testamos  $P(x)$  e  $Q(x)$  no ponto  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ (x) \left( \frac{1}{2x} \right) \right] = \frac{1}{2} \quad (2.85)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ (x)^2 \left( \frac{1}{2x} \right) \right] = 0$$

Como esses limites são finitos, o ponto  $x = 0$  é um ponto singular regular. Buscamos solução na forma,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \quad (2.86)$$

as derivadas serão,

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n-1} \quad (2.87)$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2} \quad (2.88)$$

Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2(r+n)(r+n-1) + (r+n)]a_n x^{r+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = 0 \quad (2.89)$$

Façamos  $r+n-1 = m+r$  e  $n-1 = m$ , isso resulta em

$$[2(r-1)r+r]a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r+1)(1+2(n+r))a_{n+1} + a_n]x^{r+n} = 0 \quad (2.90)$$

Fazendo o  $a_0 \neq 0$ , temos  $2r^2 - r = 0$ , donde  $r = 0$  e  $r = \frac{1}{2}$ , as raízes diferem por um número não-inteiro. Assim, cada uma das raízes leva uma solução. A relação de recorrência é

$$a_n = \frac{(-1)}{(n+r)(1+2(n-1+r))} a_{n-1} \quad (2.91)$$

Para  $r = \frac{1}{2}$  e  $r = 0$ , respectivamente, teremos

$$a_n = \frac{(-1)}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(1 + 2\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)} a_{n-1} \quad (2.92)$$

$$b_n = \frac{(-1)}{n(1 + 2(n - 1))} b_{n-1}$$

Finalmente a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + b_0 y_2(x) \quad (2.93)$$

Note que,  $a_0$  e  $b_0$  fazem papel de constantes arbitrárias da solução geral. As soluções LI são

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \left[ 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{30} - \frac{x^3}{360} + \frac{x^4}{22680} - \dots \right] \quad (2.94)$$

$$y_2(x) = 1 - x + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{90} + \frac{x^4}{2520} - \dots \quad (2.95)$$

**Caso 2:** Se  $r_1 = r_2$ . Caso as raízes indiciais forem iguais, há sempre duas soluções linearmente independentes na forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r_1+n}, \quad a_0 \neq 0 \quad (2.96)$$

$$y_2(x) = y_1(x) \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{r_2+n}, \quad b_0 \neq 0 \quad (2.97)$$

### Exemplo 2.11.

Resolva a equação diferencial  $xy'' + y' - 4y = 0$ , utilizando o método de Fröbenius.

*Solução:*

Dividindo a equação por  $x$ , obtemos

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{4}{x}y = 0 \quad (2.98)$$

O ponto  $x = 0$  é ponto singular. Agora testamos  $P(x)$  e  $Q(x)$  no ponto  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ (x) \left( \frac{1}{x} \right) \right] = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (x)^2 \left( \frac{-4}{x} \right) \right] = 0 \quad (2.99)$$

Como esses limites são finitos, o ponto  $x = 0$  é um ponto singular regular. Buscamos solução na forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n-2}$$

Substituindo  $y(x)$ ,  $y'(x)$  e  $y''(x)$  na equação diferencial, temos

$$x \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = 0 \quad (2.100)$$

Após uns procedimentos, obtemos:

$$x^r \left[ r^2 a_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(k+r+1)^2 a_{k+1} - 4a_k] x^k \right] = 0 \quad (2.101)$$

Fazendo o  $a_0 \neq 0$ , temos que  $r^2 = 0$ , e as raízes indiciais são iguais  $r_1 = r_2 = 0$ . A relação de recorrência é

$$a_{k+1} = \frac{4a_k}{(k+1)^2}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.102)$$

O resultado é

$$y_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n a_0}{(n!)^2} x^n, \quad |x| < \infty. \quad (2.103)$$

Para obter a solução linearmente independente, fazamos o  $a_0 = 1$  e encontramos uma segunda solução na forma

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{\exp\left[-\int_a^{x_2} P(x_1) dx_1\right]}{[y_1(x_2)]^2} dx_2 \quad (2.104)$$

Que também é solução da equação (2.45), sempre quando  $y_1(x)$  for uma solução conhecida. Dessa forma, temos

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{\exp\left[-\int_a^{x_2} P(x_1) dx_1\right]}{[y_1(x_2)]^2} dx_2 \quad (2.105)$$

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{\exp \left[ - \int_a^{x_2} \frac{1}{x} dx_1 \right]}{\left[ 1 + 4x + 4x^2 + \frac{16}{9}x^3 + \dots \right]^2} dx_2$$

Resolvendo, a integral obtemos:

$$y_2(x) = y_1(x) \left[ \ln(x) - 8x + 20x^2 - \frac{1472}{9}x^3 + \dots \right] \quad (2.106)$$

Logo, no intervalo de  $(0, \infty)$  a solução geral para a equação

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 \left[ y_1(x) \ln(x) + y_1(x) \left( -8x + 20x^2 - \frac{1472}{9}x^3 + \dots \right) \right], \quad (2.107)$$

Com  $y_1(x)$  já definido.

**Caso 3:** Se  $r_1 - r_2 = N$ , em que  $N$  um inteiro positivo, então existe duas soluções linearmente independentes na forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r_1+n}, \quad a_0 \neq 0 \quad (2.108)$$

$$y_2(x) = y_1(x) \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{r_2+n}, \quad b_0 \neq 0 \quad (2.109)$$

onde  $k$  é uma constante fixa a determinar.

### Exemplo 2.12.

Resolva a equação diferencial  $xy'' + 3y' - y = 0$ , utilizando o método de Fröbenius.

*Solução.*

De forma análoga, é possível mostrar que o ponto  $x = 0$  é um ponto singular regular. Assim, buscaremos a solução na forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \quad (2.110)$$

onde as derivadas são dadas por

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1} \quad (2.111)$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2} \quad (2.112)$$

Substituindo na equação diferencial e fazendo algumas simplificações obteremos

$$[r(r+2)]a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(r+n+2)(r+n)a_n - a_{n-1}]x^{n+r-1} = 0 \quad (2.113)$$

Fazendo o  $a_0 \neq 0$ , temos a equação indicial dada por  $r(r+2) = 0$ , e as raízes indiciais  $r_1 = 0$  e  $r_2 = -2$ . Como

$$(r+n+2)(r+n)a_n - a_{n-1} = 0, \quad n \geq 0 \quad (2.114)$$

Segue-se que, quando  $r_1 = 0$  na equação acima, obtemos

$$n(n+2)a_n - a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1}}{n(n+2)}, \quad n \geq 1$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{a_0}{1 \cdot 3} = \frac{2a_0}{3!}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2 \cdot 4} = \frac{2a_0}{2! \cdot 4!}$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{a_1}{3 \cdot 5} = \frac{2a_0}{3! \cdot 5!}$$

⋮

$$\Rightarrow a_n = \frac{2a_0}{(n+2)!n!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.115)$$

Logo, a solução em série é

$$y_1(x) = a_0 x^0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+2)!n!} x^n \right] \quad (2.116)$$

Agora veremos o caso da raiz indicial  $r_2 = -2$ , obtemos

$$n(n-2)a_n - a_{n-1} = 0, \quad n \geq 1$$

Daí, podemos determinar sucessivamente os coeficientes  $a_n$ ,

$$a_1 = -a_0$$

$$0 = a_1 = -a_0$$

Note que  $a_0 = 0$ , o que é contrária à nossa hipótese para a série, dessa forma a solução encontrada é simplesmente múltiplo da solução para  $r_1 = 0$  (essa solução pode ser vista em [12]). Portanto encontramos somente uma solução em série.

Agora iremos buscar uma segunda solução na forma

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{\exp\left[-\int_a^{x_2} P(x_1) dx_1\right]}{[y_1(x_2)]^2} dx_2 \quad (2.117)$$

Que também é solução da equação ..., sempre quando  $y_1(x)$  for uma solução conhecida. Dessa forma, resolvendo a integral temos:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{\exp\left[-\int_a^{x_2} P(x_1) dx_1\right]}{[y_1(x_2)]^2} dx_2 \\ y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{\exp\left[-\int_a^{x_2} \frac{3}{x} dx_1\right]}{\left[1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{360}x^3 + \dots\right]^2} dx_2 \\ y_2(x) &= y_1(x) \left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x} + \frac{1}{4} \ln(x) - \frac{19}{270}x + \dots\right] \end{aligned} \quad (2.118)$$

Logo, no intervalo de  $(0, \infty)$  a solução geral para a equação é

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 \left[ \frac{1}{4} y_1(x) \ln(x) + y_1(x) \left( -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x} - \frac{19}{270}x + \dots \right) \right], \quad (2.119)$$

Com  $y_1(x)$  já definido.

### 3.5 Teorema de Fuchs

Com relação ao Teorema de Fuchs[7], é afirmado que sempre podemos obter ao menos uma solução de série de potências, contando que esteja expandindo em torno de um ponto ordinário ou, na pior das hipóteses, um ponto singular regular. Ao tentar obter uma expansão em torno de uma singularidade irregular esse método pode falhar. Em resumo, temos que, pelo Teorema de Fuchs, para obter uma ou duas soluções distintas depende das raízes da equação indicial. Dessa forma:

1. Se as duas raízes da equação indicial forem iguais, podemos obter só uma solução por esse método de substituição de série;
2. Se a diferença entre as duas raízes for um número não-inteiro, podem ser obtidas duas soluções linearmente independentes;
3. Se a diferença entre as duas raízes for um número inteiro, a maior das duas resultará em uma solução, a menor raiz pode ou não dar uma solução, isso depende de como se comporta os coeficientes.

A demonstração do Teorema de Fuchs não é algo elementar, e pode ser vista em [8]. De fato, ao resolvermos o exemplo 2.10., em que as raízes indiciais são  $r_1 = 0$  e  $r_2 = \frac{1}{2}$ , obtemos duas soluções linearmente independentes para o caso 1 do método de Fröbenius. Já no exemplo 2.11., em que as raízes indiciais são iguais  $r_1 = r_2 = 0$ , obtemos apenas uma solução para o caso 2. E para o exemplo 2.12., em que  $r_1 = 0$  e  $r_2 = -2$  a diferença entre  $r_1$  e  $r_2$  é igual a um número inteiro, a maior das raízes indiciais nos levou a somente uma solução.

# Capítulo 3

## Equação de Bessel e Soluções

Neste capítulo, resolveremos a equação de Bessel, via método de Fröbenius, de índice  $\nu$  e mostraremos as suas soluções, que são as funções de Bessel de Primeira e Segunda espécie, bem como suas propriedades.

### 3.1 Equação de Bessel

A equação diferencial

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

onde  $\nu$  é uma constante dada, esta é uma das mais importantes equações da matemática aplicada, conhecida como equação de Bessel e surgindo em problemas que envolve coordenadas cilíndricas [7]. O parâmetro  $\nu$  é muito frequentemente um número inteiro, mas, por vezes isso não acontece. Aqui estudaremos, inicialmente, o caso em que  $\nu \geq 0$ , ou seja, será considerado um número arbitrário não-negativo.

### 3.2 Solução para Equação de Bessel

Para resolver a equação de Bessel (3.1) lançaremos mão da teoria sobre séries de potência apresentada no capítulo 2. Isto é, procuramos soluções na forma de série infinita em torno de  $x = 0$ , observando que a origem é um ponto singular regular da equação de Bessel, logo poderemos aplicar o método de Fröbenius para resolver tal equação.

Inicialmente, vamos dividir a equação (3.1) por  $x^2$ , de modo a obter,

$$y'' + \frac{x}{x^2} y' - \left( \frac{x^2 - \nu^2}{x^2} \right) y = 0. \quad (3.2)$$

O ponto  $x = 0$  é ponto singular. Agora testamos  $P(x)$  e  $Q(x)$  no ponto  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ (x) \left( \frac{1}{x} \right) \right] = 1 \quad (3.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ (x)^2 \left( \frac{x^2 - v^2}{x^2} \right) \right] = -v^2 \quad (3.4)$$

como esses limites são finitos, o ponto  $x = 0$  é um ponto singular regular da equação. Segundo [12], podemos aplicar o Teorema de Fröbenius e, sendo  $x_0 = 0$  um ponto singular regular, então, existe pelo menos uma solução do tipo:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad a_n \neq 0 \quad (3.5)$$

derivando a equação (3.5) duas vezes, temos

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \quad (3.6)$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} \quad (3.7)$$

substituindo as equações (3.5) à (3.7) na equação (3.1), resulta em

$$\begin{aligned} x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} + (x^2 - v^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) + (n+r)] a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} v^2 a_n x^{n+r} &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)^2 - v^2] a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)^2 - v^2] a_n x^{n+r} + \sum_{p=2}^{\infty} a_{p-2} x^{p+r} &= 0 \end{aligned}$$

assim,

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)^2 - v^2] a_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0 \quad (3.8)$$

agora desenvolveremos os dois primeiros termos da equação (3.9)

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)^2 - v^2] a_n x^{n+r} \quad (3.9)$$

quando  $n = 0$  e  $n = 1$ , temos:

$$(r^2 - v^2)a_0 x^r + [(1+r)^2 - v^2]a_1 x^{1+r} + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(n+r)^2 - v^2]a_n + a_{n-2}\}x^{n+r} = 0 \quad (3.10)$$

assim a equação (3.10) pode ser desmembrada em três igualdades,

$$(r^2 - v^2)a_0 = 0 \Rightarrow r^2 - v^2 = 0 \Rightarrow r = \pm v, \quad a_0 \neq 0 \quad (3.11)$$

$$[(1 \pm v)^2 - v^2]a_1 = 0 \Rightarrow (1 \pm 2v + v^2 - v^2)a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \quad (3.12)$$

$$[(n+v)^2 - v^2]a_n + a_{n-2} = 0 \Rightarrow a_n = \frac{(-1)}{n(n+2v)} a_{n-2} \quad (3.13)$$

As equações (3.11) e (3.13) são chamadas, respectivamente, equação indicial e equação de recorrência.

Vamos analisar agora as raízes da equação indicial. Assim, dependendo do valor de  $v$  (real não negativo), teremos distintas soluções para o sistema fundamental de soluções da equação (3.2), recaindo nos seguintes casos:

**Caso 1:** Se  $v \neq 0$  e  $2v \notin \mathbb{Z}$ , com  $r_1 - r_2 = v - (-v) = 2v$ , as soluções são:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+v} \quad (3.14)$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-v} \quad (3.15)$$

**Caso 2:** Se  $v = 0$ , com  $r_1 = r_2$ , as soluções são:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+v} \quad (3.16)$$

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{\exp[-\int_a^{x_2} P(x_1) dx_1]}{[y_1(x_2)]^2} dx_2 \quad (3.17)$$

**Caso 3:** Se  $v \neq 0$  e  $2v \in \mathbb{Z}$ , com  $r_1 - r_2 = v - (-v) = 2v$ , as soluções são:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+v} \quad (3.18)$$

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{\exp[-\int_a^{x_2} P(x_1) dx_1]}{[y_1(x_2)]^2} dx_2 \quad (3.19)$$

note que, em qualquer um dos casos, sempre teremos uma solução do tipo

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+v} \quad (3.20)$$

a partir desta solução, que corresponde a  $r = r_1 = +v$ , deduziremos as Funções de Bessel de primeira espécie, de ordem  $v$ , que denotaremos por  $J_v$ .

### 3.3 Função de Bessel de Primeira Espécie

Para encontrar as Funções de Bessel de Primeira espécie vamos considerar as relações de recorrência abaixo:

$$a_1 = 0 \quad (3.21)$$

$$a_n = \frac{(-1)}{n(n+2v)} a_{n-2}$$

das relações (3.21), concluímos que na solução representada pela equação (3.20), temos que todos os coeficientes com índice ímpar serão nulos, isto é  $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$ . E assim, ela se reduzirá a:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n+v} \quad (3.22)$$

onde, de  $a_n = \frac{(-1)}{n(n+2v)} a_{n-2}$ , podemos escrever

$$a_{2n} = \frac{(-1)}{2n(2n+2v)} a_{2n-2} \Rightarrow a_{2n} = \frac{(-1)}{2^n n(n+v)} a_{2n-2} \quad (3.23)$$

desta forma, temos:

Para  $n = 1$

$$a_2 = \frac{(-1)}{2^2 \cdot 1(1+v)} a_0 \quad (3.24)$$

Para  $n = 2$

$$a_4 = \frac{(-1)}{2^2 \cdot 2(2+v)} a_2 \Rightarrow a_4 = \frac{(-1)^2}{2^4 \cdot 2! (1+v)(2+v)} a_0 \quad (3.25)$$

Para  $n = 3$

$$a_6 = \frac{(-1)}{2^2 \cdot 3(3+v)} a_4 \Rightarrow a_6 = \frac{(-1)^3}{2^6 \cdot 3! (1+v)(2+v)(3+v)} a_0 \quad (3.26)$$

⋮

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (1+v)(2+v) \dots (n+v)} a_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.27)$$

Note que, ao substituirmos  $a_{2n}$  em nossa solução, temos um  $a_0$  arbitrário que pode ser definido por

$$a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(1+v)} \quad (3.28)$$

utilizando repetidas vezes a identidade da Função Gama  $\Gamma(n+1) = n\Gamma n$ , obtemos:

$$(n+v) \dots (1+v)\Gamma(1+v) = (n+v) \dots (2+v)\Gamma(2+v) = \Gamma(n+v+1)$$

logo,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (1+v)(2+v) \dots (n+v)} \frac{1}{2^v \Gamma(1+v)} \Rightarrow a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n! 2^{2n+v} \Gamma(n+v+1)} \quad (3.29)$$

Portanto, a solução  $y_1(x)$  será escrita como

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+v}}{n! 2^{2n+v} \Gamma(n+v+1)} \quad (3.30)$$

onde, se  $v \geq 0$ , a série converge pelo menos no intervalo  $[0, \infty)$ .

A equação (3.30) representa a chamada Função de Bessel de Primeira Espécie de índice  $v$  e denotada por  $J_v(x)$ . Assim,

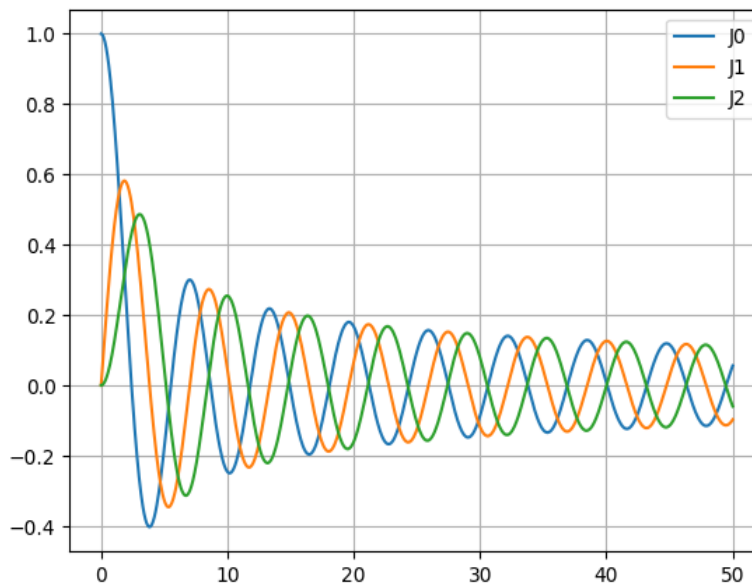
$$y_1(x) = J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \quad (3.31)$$

De forma análoga, ao que foi feito para obter  $y_1(x)$ , podemos obter  $y_2(x)$ , para o expoente  $r = -\nu$ , que será denotado por  $J_{-\nu}(x)$ . Logo,

$$y_2(x) = J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} \quad (3.32)$$

As funções  $J_\nu$  e  $J_{-\nu}$  são chamadas de Funções de Bessel de Primeira Espécie de ordem  $\nu$  e  $-\nu$ , respectivamente. Estas funções constituem um par linearmente independentes se o seu Wronskiano for diferente de zero. Note que, quando  $\nu$  for um inteiro  $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$  são soluções linearmente dependentes, então não serve para solução geral. Apresentamos o gráfico da Função de Bessel para  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  e  $J_2(x)$ .

Figura 1– Função de Bessel em  $J_0, J_1$  e  $J_2$



Fonte: O autor em colab.research.google.com

Na Figura 1, podemos observar que as funções possuem um número infinito de raízes, e quanto maior o índice, maior o valor da menor raiz positiva. Outro ponto a destacar é que tais funções oscilam, mas não são periódicas, exceto no limite quando  $x \rightarrow \infty$ . Além disso, a amplitude da Função de Bessel não é constante, ela decresce assintoticamente com  $x^{-1/2}$ . De  $J_\nu$  e  $J_{-\nu}$ , com  $\nu \notin \mathbb{Z}$ , temos um par de soluções para equação de Bessel. Dessa forma, a linearidade pode ser verificada calculando o Wronskiano (seção 1.3), para um  $\nu$  real. Então, se

$$\left\{ \begin{array}{l} J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v} \\ J'_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+v) x^{2n+v-1}}{n! \Gamma(n+v+1) 2^{2n+v}} \\ J_{-v}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-v} \\ J'_{-v}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-v) x^{2k-v-1}}{k! \Gamma(k-v+1) 2^{2k-v}} \end{array} \right. \quad (3.33)$$

O Wronskiano será dado por,

$$W(J_v, J_{-v}) = \begin{vmatrix} J_v & J_{-v} \\ J'_v & J'_{-v} \end{vmatrix}$$

resolvendo,

$$\begin{aligned} W(J_v, J_{-v}) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v} \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-v) x^{2k-v-1}}{k! \Gamma(k-v+1) 2^{2k-v}} \right) \\ &\quad - \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+v) x^{2n+v-1}}{n! \Gamma(n+v+1) 2^{2n+v}} \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-v} \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

fazendo,

$$\frac{c}{x} = \sum_{n=0, k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k} (2n+v) x^{2(n+k)-1} 2(n-k-v)}{n! k! 2^{2(n+k)} \Gamma(n+v+1) \Gamma(k-v+1)} \quad (3.35)$$

quando  $r = 0$  e  $k = 0$  temos  $c = c_0$ , logo

$$c = \frac{-2v}{\Gamma(v+1)\Gamma(-v+1)} = \frac{-2}{\Gamma(v)\Gamma(-v+1)} \quad (3.36)$$

usando a relação de Função gama  $\Gamma(v)\Gamma(-v+1) = \frac{\pi}{\sin(v\pi)}$ , podemos escrever o resultado do

Wronskiano, como sendo

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = \frac{-2\sin(\nu\pi)}{(\pi x)} \quad (3.37)$$

Portanto, as funções  $J_\nu$  e  $J_{-\nu}$  são linearmente independentes, logo a solução geral pode ser dada por

$$y(x) = a_1 J_\nu(x) + a_2 J_{-\nu}(x) \quad (3.38)$$

Vale lembrar que ao escrevermos a solução geral para a Equação Diferencial de Bessel, temos que lembrar dos três casos para  $\nu$  [9].

Agora vamos considerar alguns casos particulares do parâmetro  $\nu$ , o que implicará em algumas simplificações da EDO de Bessel. Desta forma, iremos resolver a equação diferencial para  $\nu = 0$ ;  $\nu = 1/2$  e  $\nu = 3$ , respectivamente.

### 3.3.1 Solução para Equação de Bessel de ordem zero

Neste caso, onde  $\nu = 0$ , a equação diferencial fica reduzida a

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0 \quad (3.39)$$

esta equação (3.39) já foi dividida por  $x^2$  para fazer o teste do ponto singular regular. Isto é, como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ (x) \left( \frac{1}{x} \right) \right] = 1 \quad (3.40)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(x)^2(1)] = 0$$

são limites finitos, o ponto  $x = 0$  é um ponto singular regular da equação. Logo, podemos buscar uma solução para a EDO na forma,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad a_n \neq 0 \quad (3.41)$$

calculando as derivadas de (3.41) e substituindo da equação (3.39), obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) + (n+r)]a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) + (n+r)]a_n x^{n+r} + \sum_{p=2}^{\infty} a_{p-2} x^{p+r} = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) + (n+r)]a_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Agora desenvolveremos os dois primeiros termos de:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) + (n+r)]a_n x^{n+r}$$

ou seja, quando  $n = 0$  e  $n = 1$ , temos:

$$\begin{aligned} &[r(r-1) + r]a_0 x^r + [(1+r)r + (1+r)]a_1 x^{r+1} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \{[(n+r)(n+r-1) + (n+r)]a_n + a_{n-2}\}x^{n+r} = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

De modo análogo, ao desmembrar a equação (3.43), obteremos as três igualdades

$$[r(r-1) + r]a_0 = 0 \Rightarrow r^2 = 0 \Rightarrow r = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad (3.44)$$

$$[(1+r)r + (1+r)]a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \quad (3.45)$$

$$[(n+r)(n+r-1) + (n+r)]a_n + a_{n-2} = 0 \Rightarrow a_n = \frac{(-1)}{(n+r)^2} a_{n-2} \quad (3.46)$$

Como já observamos, as raízes  $r_1 = r_2 = 0$ , logo temos o caso 2 de raízes iguais, logo as soluções são

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+v} \quad (3.47)$$

e

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{\exp[-\int_a^{x_2} P(x_1) dx_1]}{[y_1(x_2)]^2} dx_2 \quad (3.48)$$

consideremos as relações de recorrência

$$a_1 = 0 \quad (3.49)$$

$$a_n = \frac{(-1)}{(n+r)^2} a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

das equações (3.49), concluímos que na solução  $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , temos que todos os coeficientes com índice ímpar serão nulos, isto é  $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$ . E, assim, esta solução se reduz a

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} \quad (3.50)$$

onde, de  $a_n = \frac{(-1)}{(n+r)^2} a_{n-2}$ , podemos escrever

$$a_{2n} = \frac{(-1)}{(2n+r)^2} a_{2n-2}, \quad n \geq 2 \quad (3.51)$$

Para determinar  $y_1(x)$ , faremos  $r = 0$ , dessa forma a equação se reduz

$$a_{2n} = \frac{(-1)}{(2n)^2} a_{2n-2} \quad (3.52)$$

então, podemos escrever

Para  $n = 1$ :

$$a_2 = \frac{(-1)}{2^2} a_0$$

Para  $n = 2$ :

$$a_4 = \frac{(-1)}{4^2} a_2 \Rightarrow a_4 = \frac{(-1)^2}{4^2 2^2} a_0$$

Para  $n = 3$ :

$$a_6 = \frac{(-1)}{6^2} a_4 \Rightarrow a_6 = \frac{(-1)^3}{(2 \cdot 3)^2 2^6} a_0$$

⋮

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} a_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.53)$$

Portanto, usando a equação (3.53), podemos escrever a primeira solução como sendo

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} \Rightarrow y_1(x) = a_0 \left[ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} \right] \quad (3.54)$$

O termo entre colchetes é denotado de função de Bessel de primeira espécie de ordem zero, representado por:

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \quad (3.55)$$

Logo, a primeira solução  $y_1(x)$  será da seguinte forma:

$$y_1(x) = a_0 J_0(x) \quad (3.56)$$

Agora devemos encontrar o  $y_2(x)$ . Pelo Teorema de Fröbenius, para o caso 2 (seção 2.4), a segunda solução tem a forma

$$y_2(x) = y_1(x) \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_1}, \quad b_0 \neq 0 \quad (3.57)$$

Note que

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \dots \quad (3.58)$$

Utilizando a equação (3.57) e (3.58), temos

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{\exp\left[-\int_a^{x_2} P(x_1) dx_1\right]}{[y_1(x_2)]^2} dx_2 \\ \Rightarrow y_2(x) &= J_0(x) \int \frac{1}{x} \left[1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{32} + \dots\right] dx_2 \\ \Rightarrow y_2(x) &= J_0(x) \left[\ln(x) + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \dots\right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

A segunda solução da Equação de Bessel em geral é determinada como combinação linear de  $J_0$  e  $y_2$ . Ela é conhecida como Função de Bessel de Segunda espécie de ordem zero, e é denotada por  $Y_0$ . Podemos definir essa Função como sendo [11]

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} [y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)] \quad (3.60)$$

Aqui,  $\gamma$  é uma constante conhecida de Euler-Máscheroni, ela é definida pela equação

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n) \cong 0,5772$$

Assim, substituindo na equação (3.60) tem-se

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[ \left( \gamma - \ln \frac{x}{2} \right) J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} \right], \quad x > 0 \quad (3.61)$$

E, portanto, a solução geral da equação de Bessel de ordem zero para  $x > 0$  será

$$y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x) \quad (3.62)$$

### 3.3.2 Solução da Equação de Bessel de ordem meio

Neste caso, onde  $\nu = \frac{1}{2}$ , a equação diferencial fica reduzida a

$$x^2 y'' + x y' + \left( x^2 - \frac{1}{4} \right) y = 0 \quad (3.63)$$

A solução desta equação (3.63) é obtida de forma similar ao que foi feito no início desta seção. Assim, usando o resultado (3.31), obtemos como solução a Função de Bessel da forma

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma\left(n + \frac{1}{2} + 1\right)} \left( \frac{x}{2} \right)^{2n + \frac{1}{2}} \quad (3.64)$$

Sabendo que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ , e utilizando repetidas vezes a identidade  $\Gamma(n+1) = n\Gamma n$ , podemos escrever:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2} + 1\right) &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \dots \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{1}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2} \dots \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

Isto é,

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{(2n+1)(2n-1) \dots 3 \cdot 1}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} \quad (3.66)$$

Também, note que

$$n! \cdot 1.3.5 \dots (2n+1)2^n = 2.4.6 \dots (2n)1.3.5 \dots (2n+1) = (2n+1)! \quad (3.67)$$

Logo, usando (3.66) e (3.67),  $J_{\frac{1}{2}}(x)$  será dada por

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{n! 1.3.5 \dots (2n+1)} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}} \quad (3.68)$$

ou ainda,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad (3.69)$$

De modo análogo, para o caso em que  $v = -\frac{1}{2}$ , a Função de Bessel de primeira espécie será dada por:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \quad (3.70)$$

Portanto, para  $v = \frac{1}{2}$ , as funções de Bessel  $J_{\frac{1}{2}}(x)$  e  $J_{-\frac{1}{2}}(x)$  se expressam em termos de funções elementares e são duas soluções linearmente independentes da Equação de Bessel de índice  $\frac{1}{2}$ . A solução geral é

$$y(x) = c_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + c_2 J_{-\frac{1}{2}}(x) \quad (3.71)$$

### 3.3.3 Solução da Equação de Bessel de ordem três

Neste caso, onde  $v = 3$ , a equação diferencial fica reduzida a

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 9)y = 0 \quad (3.72)$$

a solução desta equação (3.72) é obtida de forma similar ao que foi feito no início desta seção. Assim, usando o resultado (3.31), obtemos a solução que estamos interessados. Entretanto, aqui iremos mostrar que  $J_{-3}(x) = -J_3(x)$ . Assim, inicialmente tomemos  $J_{-3}(x)$ :

$$J_{-3}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-3+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-3} \quad (3.73)$$

Note que

$$\frac{1}{\Gamma(-2)} = \frac{1}{\Gamma(-1)} = \frac{1}{\Gamma(0)} = 0$$

Desta forma, observa-se que os três primeiros termos da série são nulos, e o somatório em (3.73) pode ser começado em  $k = 3$ , ou seja,

$$J_{-3}(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-3} \quad (3.74)$$

Tomando  $k = r + 3$ , obtemos, portanto que

$$J_{-3}(x) = \sum_{r=3}^{\infty} \frac{(-1)^{r+3}}{(r+3)! r!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+3} = - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(r+3)! r!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+3} = -J_3(x) \quad (3.75)$$

Em resumo, com os resultados dos exemplos para  $\nu = 0$ ,  $\nu = \frac{1}{2}$  e  $\nu = 3$ , observamos o seguinte:

- ✓ Se  $\nu$  for igual a zero, então  $J_\nu(x)$  tem somente uma solução linearmente independente da equação de Bessel de índice  $\nu$ , e precisamos encontrar uma segunda solução linearmente independente;
- ✓ Se  $\nu$  for um número não-inteiro, então  $J_\nu(x)$  e  $J_{-\nu}(x)$  são duas soluções linearmente independentes da equação de Bessel de índice  $\nu$ ;
- ✓ Se  $\nu = m = 0, 1, 2, 3, \dots$  então  $J_\nu(x)$  e  $J_{-\nu}(x)$  são linearmente dependentes, sendo múltiplas uma da outra. De tal forma, que

$$J_{-m}(x) = (-1)J_m(x) \quad (3.76)$$

assim, precisando encontrar uma segunda solução linearmente independente.

### 3.4 Funções de Bessel de Segunda Espécie

Até aqui, foi mostrado que a Equação de Bessel tem duas soluções independentes. Isto é, para valores não-inteiros de  $\nu$  já foi encontrada duas soluções, denominadas de  $J_\nu(x)$  e  $J_{-\nu}(x)$  (valores inteiros de  $\nu$  são frequentemente denotados por  $m$ ), usando o método de séries de potência. Entretanto, quando  $\nu$  é inteiro, a equação (3.76) é satisfeita e, neste caso, temos só uma solução independente. Portanto, é necessário encontrar uma segunda solução que satisfaça a EDO de Bessel.

Inicialmente, podemos encontrar uma segunda solução usando o resultado exposto no final da seção 1.3 Isto é, podemos supor uma solução da forma

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{\exp\left[-\int_a^{x_2} P(x_1) dx_1\right]}{[y_1(x_2)]^2} dx_2$$

ou ainda, como abordagem alternativa, tomamos a combinação linear particular de  $J_\nu(x)$  e  $J_{-\nu}(x)$  na forma de [7]:

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (3.77)$$

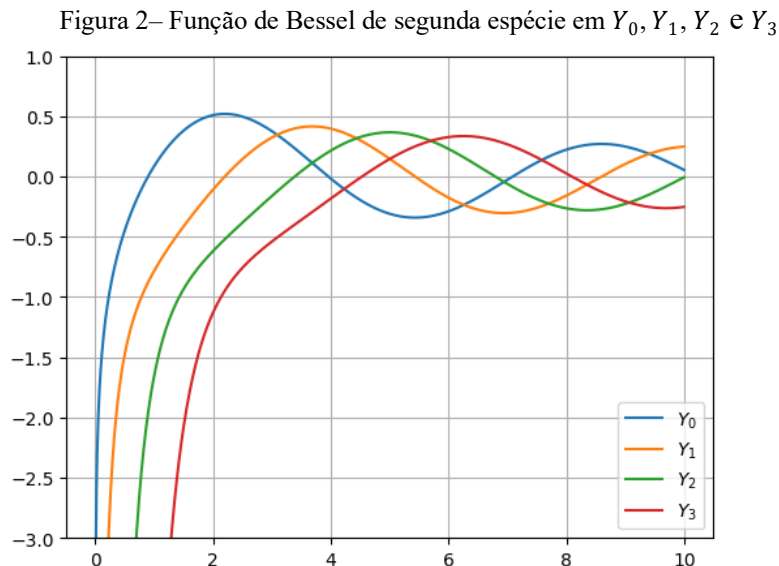
Assim,  $Y_\nu(x)$  claramente satisfaz a Equação de Bessel para  $\nu$  não inteiro, que pode ser expresso em termos de senos e cossenos, pois é uma combinação linear de  $J_\nu(x)$  e  $J_{-\nu}(x)$ , que são soluções linearmente independentes. Contudo, quando  $\nu \rightarrow m$ ,  $m$  é inteiro, a equação (3.77) tem uma forma indeterminada  $0/0$ . No entanto, pode ser mostrado pela regra de L'Hospital que  $\lim_{\nu \rightarrow m} Y_\nu(x)$  existe, ou seja, é possível provar que quando  $\nu \rightarrow m$  número inteiro, o seguinte limite está bem definido

$$Y_m(x) = \lim_{\nu \rightarrow m} Y_\nu(x) \quad (3.78)$$

Portanto, para  $m$  inteiro  $Y_m(x)$  e  $J_m(x)$  são soluções linearmente independentes para  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$ . Desta forma, para qualquer valor de  $\nu$  a solução geral da equação de Bessel em  $(0, \infty)$  pode ser escrito como

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x) \quad (3.79)$$

onde,  $Y_\nu(x)$  é chamada de Funções de Bessel de segunda espécie. Abaixo, apresentamos o gráfico da Função de Bessel de segunda espécie ou Função de Neumann quando  $Y_0(x)$ ,  $Y_1(x)$ ,  $Y_2(x)$  e  $Y_3(x)$ .



Fonte: O autor em colab.research.google.com

A segunda solução usualmente divergirá por causa do fator logarítmico e das potências negativas de  $x$  na série [7]. Por essa razão, chamamos  $y_2$  de irregular e  $y_1$  que converge na origem é

chamada de regular. Outra forma de escrever a equação de Bessel é trocando o  $x$  por  $\lambda x$  e usando a regra da cadeia, assim tem-se

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - v^2)y = 0 \quad (3.80)$$

que é conhecida como Equação de Bessel paramétrica [9]. Vale destacar que,  $\lambda$  um parâmetro, que surge com frequência quando o método da separação de variáveis é utilizado para a resolução das equações diferenciais parciais fundamentais da física. As soluções desta equação (3.80) são obtidas a partir das soluções da equação  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$ . Assim, a solução geral dela é dada por:

$$y(\lambda x) = c_1 J_v(\lambda x) + c_2 Y_v(\lambda x) \quad (3.81)$$

### 3.5 Propriedades das Funções de Bessel

As fórmulas de recorrência das funções de Bessel são relações entre funções de Bessel de ordens diferentes, tais relações são extremamente úteis, possibilitando, por exemplo, que se expresse uma dada função em termos de funções de Bessel de ordem mais baixa; prestam-se também à redução de certas integrais que ocorrem na normalização das funções de Bessel. Desta forma, nesta seção abordaremos as mais importantes para o nosso estudo.

Da série de Fröbenius  $J_\nu(x)$ , temos que

$$J_\nu(x) = x^\nu f(x), \quad (3.82)$$

em que  $f(x)$  é uma função analítica, que não se anula na origem. Portanto, temos que  $J_\nu(x) = 0$ , exceto se  $\nu = 0$  implica em  $J_0(0) = 1$ . Calculando a derivada de  $f(x)$ , obtemos:

$$f'(x) = \left( \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k-1)! \Gamma(k+\nu+1) 2^{2k+\nu}} x^{2k-1} \quad (3.83)$$

este resultado poderá ser relacionado com  $J_{\nu+1}(x)$ , para isso vamos substituir  $k$  por  $k+1$  e verifique que

$$f'(x) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}, \quad (3.84)$$

o que leva a deduzir que

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}, \quad \nu \geq 0 \quad (3.85)$$

Semelhantemente não é difícil de verificar

$$\frac{d}{dx} [x^v J_v(x)] = x^v J_{v-1}(x), \quad v \geq 1 \quad (3.86)$$

combinando as relações (3.85) e (3.86), chegaremos as seguintes as fórmulas de recorrência:

$$J_{v+1}(x) + J_{v-1}(x) = \frac{2v}{x} J_v(x) \quad (3.87)$$

$$J_{v+1}(x) - J_{v-1}(x) = -2 \frac{d}{dx} J_v(x), \quad v \geq 1 \quad (3.88)$$

Isso nos diz que outras relações de recorrência, incluindo a fórmula de diferenciação e as operações de elevar e baixar ordem podem ser deduzidas para as funções de Bessel. A relação

$$\frac{J_{v+1}(x)}{x^v} = -\frac{d}{dx} \left[ \frac{J_v(x)}{x^v} \right], \quad v \geq 0 \quad (3.89)$$

nos permite deduzir uma fórmula que exprime  $J_m(x)$  em função de  $J_0(x)$ , dividindo a equação (3.89) por  $x$ , obtemos

$$\frac{J_{v+1}(x)}{x^{v+1}} = \left( -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \left[ \frac{J_v(x)}{x^v} \right], \quad (3.90)$$

que mostra que devemos fazer com  $\frac{J_v(x)}{x^v}$  a fim de obter uma razão semelhante de ordem imediatamente superior, ou seja  $\frac{J_{v+1}(x)}{x^{v+1}}$ , iniciando  $v = 0$  e aplicando a regra  $m$  vezes, obtemos

$$\frac{J_m(x)}{x^m} = \left( -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m [J_0(x)] \quad (3.91)$$

ou

$$J_m(x) = x^m \left( -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m [J_0(x)] \quad (3.92)$$

que significa que o operador diferencial  $\left( -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)$  deve ser aplicado  $m$  vezes a  $J_0(x)$ , e o resultado multiplicado por  $x^m$  para obtermos  $J_m(x)$ .

Outra propriedade importante para o estudo das Funções de Bessel é a ortogonalidade dessas funções. Assim, para discutir essa propriedade utilizaremos a separação da Equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas [13]. Por simplicidade suponha que  $\varphi(r, \theta, z)$  independe de  $z$ . Então, a equação  $\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0$  separa-se em

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} - \lambda_2\Theta = 0 \quad (3.93)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dR}{dr}\right) + \left(k^2r + \frac{\lambda^2}{r}\right)R = 0 \quad (3.94)$$

A equação (3.93) é uma EDO homogênea de segunda ordem incompleta e de fácil resolução. Ela possui duas soluções independentes do tipo senos e cossenos, que podem formar uma combinação linear gerando a solução geral da equação. Por outro lado, na equação (3.94), na maioria dos casos,  $\lambda^2 = -m(m = 0,1,2,3, \dots)$ , de maneira que  $R(r)$  satisfaz

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dR}{dr}\right) + \left(k^2r + \frac{m^2}{r}\right)R = 0 \quad (3.95)$$

Se as condições de contorno forem impostas sobre  $R(r)$ , então esta equação tornar-se-á uma equação de autovalor  $k^2$  (já supusemos  $m^2$  já determinado). Esta é uma equação do tipo Sturm-Liouville. Algumas das condições físicas mais comuns exigirão que:

- a) Para  $r = 0$ ,  $R(r)$  seja finita;
- b) Para  $r = a$ ,  $R(r)$  deve satisfazer:

$$R(a) = 0, \text{ Dirichlet}$$

$$\left.\frac{dR}{dr}\right|_{r=a} = 0, \text{ Neumann}$$

$$AR + B\left.\frac{dR}{dr}\right|_{r=a} = 0, \text{ condições de contorno intermediárias.}$$

Em termos de função de Bessel, as condições de contorno Dirichlet e Neumann implicam somente a solução  $J_m(kr)$  será admissível, pois  $N_m(kr)$  não será finita quando  $r = 0$ , dessa forma o parâmetro  $k$  deve ser obtido de

$$\begin{aligned} J_m(ka) &= 0, & kJ'_m(ka) &= 0 \\ AJ_m(ka) + BkJ'_m(ka) &= 0. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Todas as funções de Bessel de primeira espécie têm caráter oscilatório e possuem uma quantidade infinita de raízes, onde as raízes não-triviais de  $J_m(x)$  são representadas por  $\alpha_{mn}$  ( $n = 1,2,3, \dots$ ). Assim, os valores de  $k$  para as condições Dirichlet são,

$$k_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a}; \quad (m = 0,1,2, \dots, n = 1,2,3, \dots). \quad (3.97)$$

Para obter condições de Neumann, devemos resolver a equação ( $k \neq 0$ )

$$\left. \frac{d}{dx} J_m(x) \right|_{x=ka} = 0 \quad (3.98)$$

Representando-as por  $\beta_{mn}$ , obtemos

$$k_{mn} = \frac{\beta_{mn}}{a} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.99)$$

As raízes  $J_m$  e  $J'_m$  são tabeladas. Já as raízes de contorno intermediário para a equação  $AJ_m(ka) + BkJ'_m(ka) = 0$  não estão tabeladas, pois temos  $A$  e  $B$  arbitrários, mas podem ser calculados se necessário. Desta forma, em todos os três casos considerados, obtemos um conjunto infinito de funções características mutuamente ortogonais dadas por

$$R_k(r) = J_m(k_{mn}r), \quad (3.100)$$

E esperamos ser capazes de desenvolver um função razoavelmente bem-comportada  $f(r)$  por meio de série

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_m(k_{mn}r), \quad (3.101)$$

Chamada de série Fourier-Bessel de ordem  $m$ . Para obter os coeficientes  $a_n$ , podemos multiplicar ambos os lados por  $rJ_m(k_{mn}r)$  e integrar com relação a  $r$  de 0 a  $a$ , por ortogonalidade

$$\int_0^a f(r) r J_m(k_{mn}r) dr = a_{n'} \int_0^a r [J_m(k_{mn}r)]^2 dr \quad (3.102)$$

De modo que os  $a_{n'}$  serão dados por

$$a_{n'} = \frac{\int_0^a f(r) r J_m(k_{mn}r) dr}{\int_0^a r [J_m(k_{mn}r)]^2 dr} \quad (3.103)$$

Agora é conveniente calcular a integral de normalização abaixo:

$$N_{n'} = \int_0^a r [J_m(k_{mn}r)]^2 dr \quad (3.104)$$

Considerando a equação (4.86), substituindo  $R(r)$  por  $J_m(kr)$  e escrevendo duas vezes, uma com  $k = k_{mn}$ , de maneira que  $J_m(k_{mn}r)$  satisfaça as condições de contorno, e a segunda vez para  $k$  arbitrário, de maneira que  $J_m(kr)$  não necessita satisfazer as condições de contorno, temos:

$$\frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} J_m(k_{mn}r) \right] - \frac{m^2}{r} J_m(k_{mn}r) = -k_{mn}^2 r J_m(k_{mn}r), \quad (3.105)$$

$$\frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} J_m(kr) \right] - \frac{m^2}{r} J_m(kr) = -k_{mn}^2 r J_m(kr) \quad (3.106)$$

Agora multiplicamos as equações acima por  $J_m(kr)$  e  $J_m(k_{mn}r)$ , respectivamente, subtraindo e integrando-as sobre  $(0, a)$ , e fazendo a integral por partes do lado esquerdo obtemos,

$$r J_m(kr) \frac{d}{dr} J_m(k_{mn}r) - r J_m(k_{mn}r) \frac{d}{dr} J_m(kr) \Big|_0^a = (k^2 - k_{mn}^2) \int_0^a r J_m(k_{mn}r) J_m(kr) dr \quad (3.107)$$

Suponha agora que as condições de contorno são Dirichlet, dessa forma, essa relação se reduz a

$$a J_m(ka) k_{mn} J'_m(k_{mn}a) = (k^2 - k_{mn}^2) \int_0^a r J_m(k_{mn}r) J_m(kr) dr \quad (3.108)$$

Esta equação (4.99) é válida para todo  $k$ . Vamos diferenciar ela com relação a  $k$  e, assim, obter,

$$a a J'_m(ka) k_{mn} J'_m(k_{mn}a) = 2k \int_0^a r J_m(k_{mn}r) J_m(kr) dr + (k^2 - k_{mn}^2) \int_0^a r J_m(k_{mn}r) r J'_m(kr) dr$$

Façamos agora  $k \rightarrow k_{mn}$ , o último termo se anula, logo

$$\int_0^a r [J_m(k_{mn}r)]^2 dr = \frac{a^2}{2} [J'_m(k_{mn}a)]^2 \quad (3.109)$$

que é a integral de normalização desejada para as condições Dirichlet. Note que, a partir das relações de recorrência vista nas propriedades das funções de Bessel, segue-se também que

$$\frac{dJ_v(x)}{dx} = J_{v-1}(x) - \frac{v}{x} J_v(x), \quad v \geq 1 \quad (3.110)$$

$$\frac{dJ_v(x)}{dx} = -J_{v+1}(x) + \frac{v}{x} J_v(x), \quad v \geq 1 \quad (3.111)$$

Por conseguinte, se  $\alpha$  é uma raiz de  $J_v(x)$  teremos,

$$\frac{dJ_v(\alpha)}{dx} = J_{v-1}(\alpha) = -J_{v+1}(\alpha) \quad (3.112)$$

De maneira que a integral de normalização pode ser escrita como

$$\int_0^a r [J_m(k_{mn}r)]^2 dr = \frac{a^2}{2} [J'_{m+1}(k_{mn}a)]^2 \quad (3.113)$$

onde  $k_{mn}$  é a raiz de  $J_m(ka) = 0$ .

### 3.6 Vibrações livres de uma Membrana Circular

Inicialmente, vamos aplicar as equações de Bessel para estudar as vibrações de uma membrana, ou seja, iremos descrever o movimento de cada ponto de uma membrana usando a equação de Bessel [1, 11]. Para tal, considere uma equação de onda em duas dimensões, que descreve as vibrações da membrana, em coordenadas cartesianas.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.114)$$

em coordenadas cilíndricas a equação (3.114) pode ser escrita como

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3.115)$$

Essa equação é válida para uma membrana em qualquer formato. A fim de simplificar nossos estudos, vamos considerar uma membrana circular, que pode ser descrita utilizando sistema de coordenadas polares. Desta forma, a equação pode ser escrita como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.116)$$

Além disso, consideremos uma membrana fixada na fronteira, de modo que  $u = (r, \theta; t)$  satisfaça a condição de contorno de Dirichlet:

$$u(a, \theta; t) = 0 \quad (3.117)$$

onde  $a$  é o raio da membrana. As condições iniciais consistem nas especificações dos deslocamentos (transversais) e velocidade  $t = 0$ , ou seja,

$$u(r, \theta; 0) = u_0(r, \theta) \quad e \quad u_t(r, \theta; 0) = v_0(r, \theta) \quad (3.118)$$

Para resolver a equação (3.116) podemos utilizar o método de separação de variáveis definindo uma função  $u(r, \theta; t)$ , dada por  $u = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ . Assim, podemos escrever

$$\frac{\Theta T}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{RT}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} - \frac{R\Theta}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2} = 0 \quad (3.119)$$

Dividiremos a equação (3.119) por  $u = R\Theta T$  e, então será possível separar as variáveis, ou seja,

$$\frac{1}{Rr} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} - \frac{1}{Tc^2} \frac{d^2 T}{dt^2} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} &= k^2 c^2 = -\omega^2 \\ \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} &= -m^2 \\ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} + \left( k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R &= 0\end{aligned}\tag{3.120}$$

Em vez de usar funções trigonométricas reais e considerando  $\omega = kc$  (que pode ser positivo ou negativo), podemos representar  $T(t)$  na forma da equação (3.121), que incorpora tanto uma função seno como cosseno.

$$T_\omega(t) = e^{-i\omega t}\tag{3.121}$$

A terceira equação de (3.120) tem a solução dada pela equação (3.122), levando em consideração a condição de periodicidade.

$$\Theta_m = A_m \cos(m\theta) + B_m \sin(m\theta)\tag{3.122}$$

A quarta equação de (3.120), chamada de parte radial da função da membrana é descrita pela equação de Bessel. Para obtermos a solução desta equação radial devemos utilizar os métodos desenvolvidos na seção das soluções para equações de Bessel de primeira e segunda espécie. Portanto, a solução geral é descrita como

$$R(r) = c_1 J_m(kr) + c_2 Y_m(kr)\tag{3.123}$$

Como as funções de Neumann não são finitas em  $x = 0$ , elas devem ser rejeitadas (escolhendo  $c_2 = 0$ ). A condição de contorno  $r = a$  requer que

$$J_m(ka) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)\tag{3.124}$$

Esta equação determina os autovalores de  $k$  do problema. Em termos de zeros da Função de Bessel, temos

$$J_{mn}(ka) = \frac{\alpha_{mn}}{a} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots)\tag{3.125}$$

Agora podemos escrever a solução completa do nosso problema na forma de uma série dupla. Como a solução deve ser real, os coeficientes  $e^{i\omega t}$  e  $e^{-i\omega t}$  devem ser os complexos conjugados um do outro, e temos

$$\begin{aligned}
u(r, \theta; t) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m \left( \frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) [A_{mn} e^{i\omega_{mn}t} + \bar{A}_{mn} e^{-i\omega_{mn}t}] \cos(m\theta) \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m \left( \frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) [B_{mn} e^{i\omega_{mn}t} + \bar{B}_{mn} e^{-i\omega_{mn}t}] \sin(m\theta)
\end{aligned} \tag{3.126}$$

onde  $\omega_{mn} = \frac{\alpha_{mn}c}{a}$ . Os coeficientes  $A$  e  $B$  decorrem agora das condições iniciais, ou seja, se  $t = 0$ , então

$$\begin{aligned}
u_0(r, \theta) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m \left( \frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) [A_{mn} + \bar{A}_{mn}] \cos(m\theta) \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m \left( \frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) [B_{mn} + \bar{B}_{mn}] \sin(m\theta)
\end{aligned} \tag{3.127}$$

Esta expressão é uma série de Fourier-Bessel em  $r$ , bem como uma série de Fourier em  $\theta$ . Para determinar  $A_{m'n'}$ , multiplicamos ambos os lados por

$$r J_{m'} \left( \frac{\alpha_{m'n'}}{a} r \right) \cos(m'\theta) \tag{3.128}$$

e integra sobre  $r$  de 0 a  $a$ , e sobre  $\theta$  de 0 a  $2\pi$ . Devido a ortogonalidade das funções trigonométricas, apenas os termos de cosseno com  $m = m'$  sobreviverão no lado direito, com constante de normalização

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(m'\theta) d\theta = \begin{cases} \pi, & \text{se } m' \neq 0 \\ 2\pi, & \text{se } m = 0 \end{cases} \tag{3.129}$$

Além disso, devido à ortogonalidade das funções de Bessel, apenas os termos  $n = n'$  sobreviverão no lado direito com a constante de normalização

$$\int_0^a r \left[ J_{m'} \left( \frac{\alpha_{m'n'}}{a} r \right) \right]^2 dr = \frac{a^2}{2} [J_{m'+1}(\alpha_{m'n'})]^2 \tag{3.130}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \cos(m'\theta) u_0(r, \theta) d\theta \\
& = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m \left( \frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) [A_{mn} + \bar{A}_{mn}] \int_0^{2\pi} \cos(m'\theta) \cos(m\theta) d\theta \\
& = \pi \sum_{n=1}^{\infty} J_{m'} \left( \frac{\alpha_{m'n}}{a} r \right) [A_{m'n} + \bar{A}_{m'n}]
\end{aligned} \tag{3.131}$$

Conseqüentemente, obtemos a expressão

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \int_0^{2\pi} \cos(m'\theta) u_0(r, \theta) \cdot r J_{m'}\left(\frac{\alpha_{m'n}}{a} r\right) dr d\theta \\
& \pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a r J_{m'}\left(\frac{\alpha_{m'n}}{a} r\right) J_{m'}\left(\frac{\alpha_{m'n}}{a} r\right) dr [A_{m'n} + \bar{A}_{m'n}] \\
& \frac{\pi a^2}{2} J_{m'+1}^2(\alpha_{m'n'}) [A_{m'n'} + \bar{A}_{m'n'}] \quad \text{se } m \neq 0
\end{aligned}$$

Agora derivando em relação a  $t$ , temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r\right) i\omega_{mn} [A_{mn} e^{i\omega_{mn}t} - \bar{A}_{mn} e^{-i\omega_{mn}t}] \cos(m\theta) \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r\right) i\omega_{mn} [B_{mn} e^{i\omega_{mn}t} - \bar{B}_{mn} e^{-i\omega_{mn}t}] \sin(m\theta)
\end{aligned} \tag{3.133}$$

Quando  $t = 0$  obtemos

$$\begin{aligned}
v_0(r, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r\right) i\omega_{mn} [A_{mn} - \bar{A}_{mn}] \cos(m\theta) \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r\right) i\omega_{mn} [B_{mn} - \bar{B}_{mn}] \sin(m\theta)
\end{aligned} \tag{3.134}$$

Então,

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \int_0^{2\pi} \cos(m'\theta) v_0(r, \theta) d\theta \\
& \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r\right) i\omega_{mn} [A_{mn} - \bar{A}_{mn}] \int_0^{2\pi} \cos(m'\theta) \cos(m\theta) d\theta \\
& \pi \sum_{n=1}^{\infty} J_{m'}\left(\frac{\alpha_{m'n}}{a} r\right) i\omega_{m'n} [A_{m'n} - \bar{A}_{m'n}]
\end{aligned} \tag{3.135}$$

Logo,

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \cos(m'\theta) v_0(r, \theta) \cdot r J_{m'}\left(\frac{\alpha_{m'n}}{a} r\right) dr d\theta \tag{3.136}$$

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a r J_{m'}\left(\frac{\alpha_{m'n}}{a} r\right) J_{m'}\left(\frac{\alpha_{m'n}}{a} r\right) dr i\omega_{mn} [A_{m'n} - \bar{A}_{m'n}]$$

$$\frac{\pi a^2}{2} J_{m'+1}^2(\alpha_{m'n}) i\omega_{mn} [A_{m'n} + \bar{A}_{m'n}]$$

Comparando  $u_0$  e  $v_0$ , temos

$$u_0 = \frac{\pi a^2}{2} J_{m+1}^2(\alpha_{mn}) [A_{mn} + \bar{A}_{mn}] =$$

$$\Rightarrow u_0 = \int_0^a \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) u_0(r, \theta) \cdot r J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r\right) dr d\theta \quad (3.137)$$

$$v_0 = \frac{\pi a^2}{2} J_{m+1}^2(\alpha_{mn}) i\omega_{mn} [A_{mn} + \bar{A}_{mn}]$$

$$\Rightarrow v_0 = \int_0^a \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) v_0(r, \theta) \cdot r J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r\right) dr d\theta \quad (3.138)$$

Assim,

$$v_0 = \frac{\pi a^2}{2} J_{m+1}^2(\alpha_{mn}) [A_{mn} + \bar{A}_{mn}] =$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{-i}{\omega_{mn}} \int_0^a \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) v_0(r, \theta) \cdot r J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r\right) dr d\theta \quad (3.139)$$

Agora os coeficientes  $A_{mn}$  podem ser calculados e expressos pelas fórmulas

$$A_{mn} = \frac{1}{\pi a^2 [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[ u_0(r, \theta) \frac{-i}{\omega_{mn}} v_0(r, \theta) \right] \cos(m\theta) \cdot r J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r\right) dr d\theta \quad (m \neq 0)$$

$$A_{0n} = \frac{1}{\pi a^2 [J_1(\alpha_{0n})]^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[ u_0(r, \theta) \frac{-i}{\omega_{0n}} v_0(r, \theta) \right] r J_0\left(\frac{\alpha_{0n}}{a} r\right) dr d\theta \quad (m = 0) \quad (3.140)$$

Analogamente encontramos os coeficientes de  $B_{mn}$ , basta substituir o  $\cos(m\theta)$  por  $\sin(m\theta)$  na fórmula de  $A_{mn}$ .

$$B_{mn} = \frac{1}{\pi a^2 [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[ u_0(r, \theta) \frac{-i}{\omega_{mn}} v_0(r, \theta) \right] \sin(m\theta) \cdot r J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} r\right) dr d\theta \quad (m \neq 0)$$

$$(3.141)$$

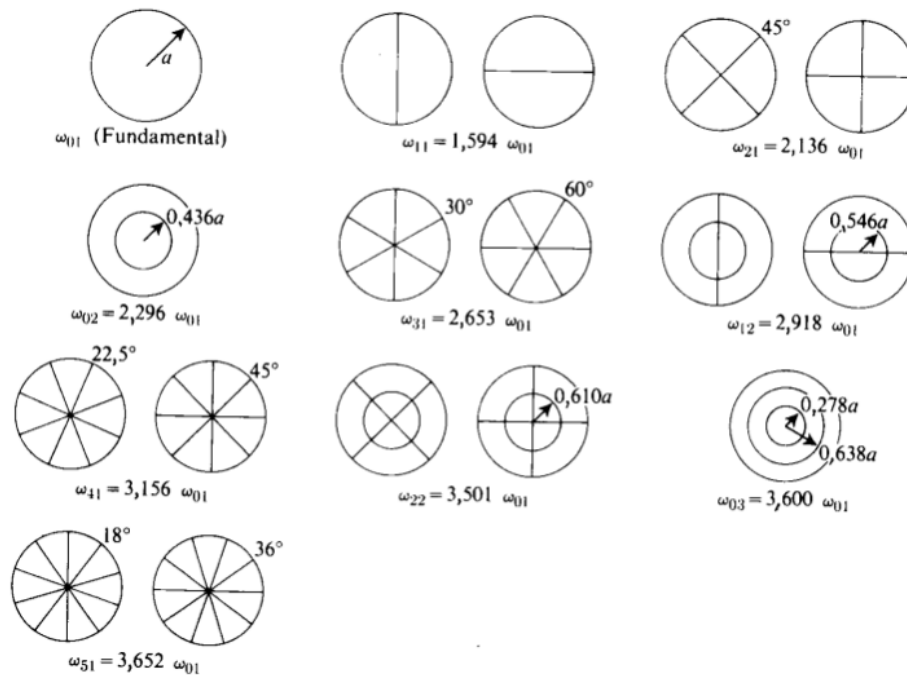
$$B_{0n} = 0$$

As frequências  $\omega_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a} c$  com ( $m = 0,1,2,3, \dots, n = 1,2,3, \dots$ ) são frequências naturais da membrana e cada termo da série dupla representa um modo natural de vibração [11]. Os modos correspondentes de cada frequência são em termos do  $\cos(m\theta)$  e  $\sin(m\theta)$  exibindo uma dupla degeneração, mas quando  $m = 0$ , representam modos de simetria radial, que são não degenerados. Os modos naturais possuem seus padrões característicos de linhas nodais, e suas frequências são dadas em termos da frequência fundamental  $\omega_{01} \cong 2.40 \left(\frac{c}{a}\right)$ , conforme mostrado na Figura 3. Assim, com os modos naturais de vibração podemos analisar o movimento arbitrário da membrana. Suponhamos que, a distribuição inicial dos deslocamentos e das velocidades possuem simetria radial  $u_0 = u_0(r)$  e  $v_0 = v_0(r)$ . Segue que, das fórmulas  $A_{mn}$  e  $B_{mn}$  que somente os termos de  $m = 0$  estarão presentes na solução.

$$u \cong J_m \left( \frac{\alpha_{mn}}{a} r \right) [A_{mn} \cos(m\theta) + B_{mn} \sin(m\theta)] \quad (3.142)$$

Em geral, um modo dado estará ausente da série dupla para  $u(r, \theta; t)$  desde que as distribuições iniciais  $u_0(r, \theta)$  e  $v_0(r, \theta)$  sejam ortogonais ao modo correspondente. Desta forma, os modos que não estarão presentes no estado de movimento inicial não serão excitados em nenhum instante posterior, pois são independentes entre si, no sentido de que não há troca de energia entre modos individuais.

Figura 3 – Modos da Membrana



Fonte: Butkov, 1968.

# Considerações Finais

O presente trabalho buscou mostrar um estudo sobre a forma de se obter as soluções da equação de Bessel, ou seja, as funções de primeira e segunda espécies. Para atingir esse objetivo foi feito uma revisão sobre o método de série de potência, mostrando que esse método de solução é bastante versátil e pode ser utilizado para obter a solução de praticamente qualquer EDO linear, de qualquer ordem. Durante essa parte inicial, contemplamos conceitos tais como Dependência e Independência Linear, ponto singular regular e irregular, como calcular o Wronskiano, quais as condições para que uma série seja convergente e divergente, o que é o raio de convergência, os teoremas da existência e unicidade de uma série. Tudo isso foi importante para que, ao abordar as Funções de Bessel, pudéssemos fazer de forma detalhada, mostrando as principais características e propriedades de tais funções.

No estudo das Funções de Bessel, mostramos que tais funções não possuem um caráter periódico, exceto no limite quando  $x \rightarrow \infty$ . Foi mostrado, também, que a equação de Bessel tem duas soluções independentes, ou seja, para valores do parâmetro  $\nu$  não inteiro encontramos duas soluções que foram denotadas por  $J_\nu(x)$  e  $J_{-\nu}(x)$  e a solução geral, era uma combinação entre ambas, já que elas eram linearmente independentes (prova feita através do Wronskiano), tal solução foi chamada de Função de Bessel de primeira espécie. Porém, quando o parâmetro  $\nu$  é um inteiro, foi provado que só teríamos uma solução independente, sendo necessário procurar uma segunda solução e, então, foi utilizado a Função de Neumann para tal, gerando assim a Função de Bessel de segunda espécie.

Portanto, este trabalho é uma contribuição para matemática e áreas a fins, pois ele exemplificou como é importante o método de soluções por séries de potências para solucionar equações diferenciais e, principalmente, os principais "atalhos" para obter as Funções de Bessel de primeira e segunda espécie. Com isso, acredita-se que este trabalho de curso sirva como fonte de pesquisa para estudantes da Matemática e, também, de Física.

# Referências

- [1] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- [2] VASCONCELOS, A. C. D. **A origem das funções de Bessel com algumas aplicações em problemas estruturais**. Boletim Técnico do Departamento de Engenharia Estrutural e Fundações da EPUSP (BT/PEF-9006), 1990.
- [3] NASCIMENTO, Paulo & Peixoto, Rafael. **Equações Diferenciais de Bessel e a Corrente Oscilante**. Revista Eletrônica de Ciências Exatas e tecnológicas, vol. 1, 2ed, 2021.
- [4] DOS SANTOS SIMÕES, Luciana. **Contexto Histórico da Equação e Função de Bessel**. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação)-Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2017.
- [5] MOTTA-ROTH, D.; HENDGES, G. R. **Produção textual na universidade São Paulo: Parábola**. Editorial, 2010.
- [6] STUMPF, I. R. C. **Pesquisa bibliográfica**. In: DUARTE, J.; BARROS, A. Métodos e técnicas de pesquisa em Comunicação. São Paulo: Atlas, 2011. pp. 269-279.
- [7] ARFKEN, George; WEBER, Hans Hermann. **Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física**. Elsevier, 2007.
- [8] THOMAS, G. et al. **Cálculo**—volume 2 São Paulo. 2012.
- [9] LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**—vol. II. Editora Harbra, 1994.
- [10] ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura**. Editora Blucher, 2006.
- [11] BUTKOV, Eugene. **Física matemática**. Livros Técnicos e Científicos, 1988.
- [12] ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. Volume 01. 3ª Edição. 2001.
- [13] DOS SANTOS PEIXOTO, Rafael Martins; DO NASCIMENTO, Paulo Henrique Ribeiro. **Equações Diferenciais de Bessel e a Corrente Oscilante**. **Revista Eletrônica de Ciências Exatas e Tecnológicas**, n. 2, 2021.

## ANEXO

**Equações Diferenciais de Bessel e a Corrente Oscilante**

Para Nascimento e Peixoto [13], a modelagem de muitos problemas do cotidiano é feita através das ED's. Com isso, a determinação e interpretação da solução do problema da corrente oscilante foi discutido de maneira fácil e relativo a entendimento, utilizando a equação de Bessel que modela o problema da corrente pesada oscilante.

Considera-se a corrente flexível, isto é, sem rigidez a flexão, representada na figura, suspensa pela extremidade superior. A corrente possui massa  $\rho$  (por unidade de comprimento). Sendo  $L$  o comprimento total, e o peso da corrente é  $\rho \cdot g \cdot L$ . O ponto  $A$  da corrente está caracterizado pelo comprimento  $s$  de corrente, contado a partir de  $O$ , escolhido como origem dos eixos  $x, y$ . Distantes  $ds$  de  $A$  está o ponto  $B$  da corrente. A força de tração  $T$  em  $A$  vale  $T = \rho g(L - s)$ , como a corrente não resiste à flexão esta força só pode ser tangente à corrente em uma posição deformada.  $T$  forma com o eixo vertical  $Ox$  o ângulo  $\psi$  e, portanto, possui as componentes

$$T_x = T \cos(\psi)$$

$$T_y = T \sin(\psi)$$

a variação de  $Y$  quando se passa de  $A$  para  $B$  é:

$$dT_y \frac{\partial T_y}{\partial s} ds = \frac{\partial}{\partial s} [T \sin(\psi)] ds = \frac{\partial}{\partial s} \left[ T \frac{\partial y}{\partial s} \right] ds$$

como a componente horizontal  $T_y$  é a única força que provoca a oscilação da massa  $\rho ds$ , temos:

$$\rho ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = dT_y$$

$$dT_y = \frac{\partial}{\partial s} \left[ T \frac{\partial y}{\partial s} \right] ds = \frac{\partial}{\partial s} \left[ \rho g(L - s) \frac{\partial y}{\partial s} \right] ds$$

e a equação que rege o movimento oscilatório é

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left[ \rho g(L - s) \frac{\partial y}{\partial s} \right]$$

o movimento oscilatório é caracterizado por uma função periódica  $\sin(\omega t + \alpha)$  ou  $\cos(\omega t + \alpha)$  modificada por um fator  $u(s)$ , em que  $\omega$  é a velocidade angular descrita no movimento e  $\alpha_0$  é a constante de fase.

$$y(t) = u(s) \cos(\omega t + \alpha_0)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y'(t) = -u(s)\omega \sin(\omega t + \alpha_0)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = y''(t) = -u(s)\omega^2 \sin(\omega t + \alpha_0)$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{du}{ds} \cos(\omega t + \alpha_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ \rho g (L - s) \frac{\partial y}{\partial s} \right] = \frac{\partial}{\partial s} \left[ \rho g \cos(\omega t + \alpha_0) (L - s) \frac{du}{ds} \right] = \rho g \cos(\omega t + \alpha_0) \left[ (L - s) \frac{d^2 u}{ds^2} - \frac{du}{ds} \right]$$

substituindo na equação acima resulta

$$(L - s) \frac{d^2 u}{ds^2} - \frac{du}{ds} + \frac{\omega^2}{g} u = 0$$

que é a equação diferencial que resolve o problema. Fazendo uma mudança de variável para conduzir esta equação a uma equação de Bessel, temos

$$z = (L - s)$$

$$u(s) = \phi(z)$$

$$\frac{\omega^2}{g} = k^2$$

o que resulta

$$z^2 \frac{d^2 \phi}{dz^2} + z \frac{d\phi}{dz} + k^2 z \phi = 0$$

temos que a equação acima ainda não está na forma padrão de Bessel, sendo necessário uma mudança nas variáveis dependentes e independentes.

Fazendo as mudanças necessárias, temos:  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 2k$  e  $\nu = 0$ . A equação toma a forma

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dp}{dt} + \left( 1 - \frac{\nu^2}{t^2} \right) p = 0$$

Cuja a solução, para  $t > 0$ , é dada por:

$$p(t) = c_1 J_0(t) + c_2 Y_0(t)$$

substituindo os valores das constantes  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 2k$  e  $\nu = 0$  obtidos e, em seguida os de  $p$  e  $t$  na equação acima, temos

$$\phi(z) = c_1 J_0(2k\sqrt{z}) + c_2 Y_0(2k\sqrt{z})$$

logo

$$u(s) = c_1 J_0(2k\sqrt{L-s}) + c_2 Y_0(2k\sqrt{L-s})$$

Em que  $0 < s < L$ .

Observa-se que para pequenas oscilações  $y$  deve ser pequeno na extremidade de ( $s = L$  ou  $z = 0$ ). Como  $Y_0 \rightarrow \infty$ , vamos considerar  $c_2 = 0$ . A solução a ser considerada é

$$u(s) = c_1 J_0(2k\sqrt{L-s}), 0 < s < L.$$

No ponto de suspensão  $O$  deve-se ter  $y = 0$  e, portanto,  $u = 0$  para  $s = 0$  ou ( $z = L$ ), obtendo

$$u(z) = c_1 J_0(2k\sqrt{z})$$

$$u(L) = c_1 J_0(2k\sqrt{L}) = 0$$

Como não queremos a solução trivial, consideremos  $c_1 \neq 0$  e  $2k\sqrt{L}$  deve ser um zero de  $J_0$ . Os primeiros zeros de  $J_0$  são os seguintes:

Tabela 1 – Zeros das Funções de Bessel

Número de zeros	$J_0(x)$
1	2,4048
2	5,5201
3	8,6537
4	11,7915
5	14,9309

Portanto, para cada raiz de  $J_0$ , resulta em um valor para  $k = \frac{\omega}{\sqrt{g}} = \frac{2\pi f}{\sqrt{g}}$  em que velocidade angular  $\omega = 2\pi f$  e  $f$  é a frequência da oscilação da corrente  $\ell$ . Deste modo, a frequência própria fundamental de oscilação da corrente é

$$2 \frac{2\pi f}{\sqrt{g}} \sqrt{L} = 2,405$$

$$\Rightarrow f = 2,405 \frac{\sqrt{g}}{4\pi\sqrt{L}}$$

O período  $T$  de oscilação vale

$$T = \frac{4\pi}{2,405} \sqrt{\frac{L}{g}}$$

a oscilação de uma corrente pesada independe da densidade  $\rho$  do material da corrente, isso ocorre porque não existe peso anexado em sua extremidade. o período de oscilação natural vale 83,1 % do período de uma massa qualquer suspensa por fio inextensível  $L$ .

Tabela 2 – Período de oscilação de cada raiz de  $J_0(x)$

Número de zeros	$J_0(x)$	$T$
1	2,4048	$\frac{4\pi}{2,405} \sqrt{\frac{L}{g}}$
2	5,5201	$\frac{4\pi}{5,5201} \sqrt{\frac{L}{g}}$
3	8,6537	$\frac{4\pi}{8,6537} \sqrt{\frac{L}{g}}$
4	11,7915	$\frac{4\pi}{11,7915} \sqrt{\frac{L}{g}}$
5	14,9309	$\frac{4\pi}{14,9309} \sqrt{\frac{L}{g}}$

Observamos que com os valores da tabela 2, com o avançar do tempo teremos períodos cada vez menores. Desta forma, a corrente irá parar.