UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE BRAGANÇA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

THALIA DE ALENCAR DA COSTA

APLICAÇÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO GEOGEBRA

CAPANEMA-PA
2023

THALIA DE ALENCAR DA COSTA

APLICAÇÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

Orientador: Prof. MSc. Nelson Ned Nascimento Lacerda.

CAPANEMA-PA
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A368a Alencar, Thalia.
Aplicações de Análise Combinatória no GeoGebra / Thalia Alencar. — 2023.
38 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Me. Nelson Ned
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Capanema, Curso de Matemática, Capanema, 2023.

1. Análise combinatória. 2. História de Combinatória. 3. GeoGebra. I. Título.

CDD 511.6

THALIA DE ALENCAR DA COSTA

APLICAÇÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

Capanema, 21 de junho de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Nelson Ned Nascimento Lacerda

Prof. MSc. Nelson Ned Nascimento Lacerda
Orientador - UFPA

Prof. Dra. Maria Augusta Raposo de Barros Brito
Examinadora Interno / UFPA – Campus Bragança

Luciana N. Rufino

Profa Espec. Luciana Nascimento Rufino
Examinadora Externo – SEDUC/PA

Aos meus pais: Paulo Sergio e Ruth que, com apoio e incentivo irrestritos, me ajudaram a chegar até aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus que me deu capacidade e forças para concluir este trabalho.

A minha família que sempre torceu por mim.

A minha irmã Daniela, que sempre me apoiou nos meus sonhos e projetos.

A minha irmã Karina.

Ao Prof Nelson Lacerda, meu orientador, que conduziu o trabalho com paciência e dedicação.

Dedico este trabalho às minhas queridas avós: Maria Madalena (in memoriam) e Juscelina (in memoriam) que sempre me incentivaram a estudar.

“Não desista nas primeiras tentativas, a persistência é amiga da conquista.”

Bill Gates

RESUMO

Este trabalho apresenta uma revisão bibliográfica sobre Análise Combinatória; que é a área da matemática que analisa estruturas e relações discretas. Seus métodos são aplicados no cálculo de probabilidades, em problemas de transporte, na programação de horários e planejamento de produção, nas áreas de estatísticas e da teoria da informação. Além de apresentar os conceitos; também mostra o uso software Geogebra no auxilio de resolução de problema, com o intuito de facilitar apresentação visual e facilitar nas dificuldades na análise e interpretação do problema.

Palavra-Chave: Análise Combinatória. História de Combinatória. Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Análise Combinatória é a parte da Matemática que estuda métodos e técnicas que permitem resolver problemas que envolvam a contagem. Muito utilizada nos estudos sobre probabilidade, ela faz análise das possibilidades e das combinações possíveis entre um conjunto de elementos.

Para Morgado (2006), é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas, a qual aparece na maioria das vezes dois tipos de problemas. O primeiro seria demonstrar a existência de um subconjunto de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas restrições, tendo em vista o segundo problema seria contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem condições dadas.

Seus métodos são atualmente aplicados no cálculo de probabilidades, em problemas de transporte, na programação de horários e planejamento de produção, nas áreas de estatísticas e da teoria da informação.

Este trabalho tem o objetivo de mostrar os conceitos de Análise Combinatória e usar o software Geogebra para resolução de exemplos, uma maneira de visualizar a solução e usar tecnologias para contribuir com o ensino de matemática.

Portanto, para atingir este objetivo, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre Análise Combinatória, enfatizando os principais conceitos; após este momento, utilizou-se uma lista com cinco problemas, cada um apresentando os objetivos a serem atingidos. Tais problemas foram resolvidos com o auxílio do Geogebra, alguns dos problemas escolhidos fazem a relação entre Geometria e Combinatória no intuito de facilitar a manipulação com o software e assim foi possível explorar as várias ferramentas oferecidas pelo Geogebra como: Planilha, Cálculo Simbólico (CAS), além das construções de figuras e diagramas na janela de visualização, construídos por uma sequência de passos, que proporcionam um melhor entendimento dos conceitos matemáticos.

Dessa forma, este trabalho está distribuído nos seguintes capítulos: capítulo 1 aborda aspectos históricos da Análise Combinatória; no capítulo 2 Conceitos e definições de análise combinatória; no capítulo 3 Uso do Geogebra na análise combinatória; capítulo 4 Considerações Finais.

1 ASPECTOS HISTÓRICOS

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que estuda métodos e técnicas que permitem resolver problemas que envolvam a contagem. Muito utilizada nos estudos sobre probabilidade, ela faz análise das possibilidades e das combinações possíveis entre um conjunto de elementos.

Os jogos de azar, sempre encantam o ser humano, pelo fato de ter a possibilidade de ganhar mais dinheiro lançando sua sorte em dados, moedas, roletas, baralho entre outras coisas. A parte elementar da Teoria da Probabilidade teria início nos jogos de azar, pois o homem na maioria das vezes procura maneiras seguras de apostar em um jogo de azar, porém, possuindo a probabilidade o seu favor, tendo em vista isso não é de se espantar que muito cedo problemas relativos a jogos de cartas e de dados tenham atraídos a atenção de pessoas com a mente mais especulativa, a fim de obter lucro por meios de tais jogos de azar.

A análise combinatória tomou forma a partir do século XVII, partindo do francês Blaise Pascal e sendo complementada por Fermat, Leibliz e Wallis. Surgiu mediante a necessidade de entender e calcular as probabilidades existentes nos chamados “jogos de azar”, tais como lançamentos de dados, jogos de cartas e outros. Para isso, os matemáticos formalizaram princípio, denominado **princípio multiplicativo** ou **princípio fundamental da contagem**:

> Se uma decisão $\mathbf{D_1}$ pode ser tomada de m modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão $\mathbf{D_2}$pode ser tomada de n modos, então o número de maneiras distintas de se tomar consecutivamente as decisões $\mathbf{D_1}$e $\mathbf{D_2}$é igual a $m \cdot n$.

Em resumo, no princípio fundamental da contagem, multiplica-se o número de opções entre as escolhas que lhe são apresentadas.

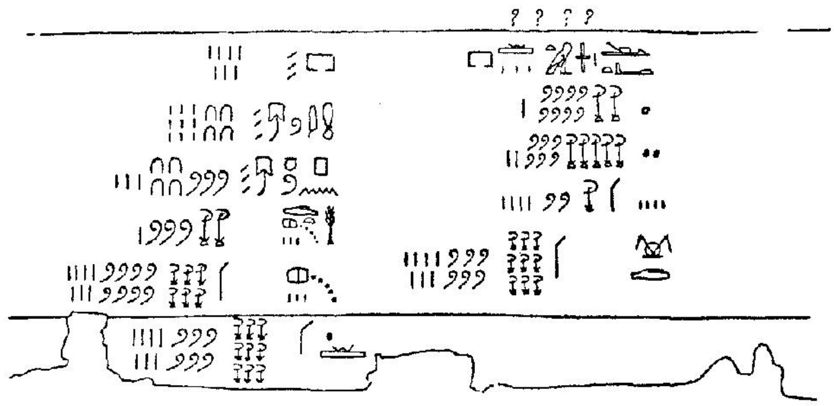
Mas os problemas de contagem já foram estudados em civilizações antigas como podemos mostrar nas seções a seguir.

1.1 O Problema de Contagem Egípcio

Em Fernadez (2021), mostra que, no Egito antigo os princípios de contagem estavam presentes na maneira de raciocinar dos aprendizes. Naquela época, os egípcios trabalhavam os problemas do papiro de Rhind. O problema 79 é apresentado do seguinte modo, conforme a figura 1:

Figura 1- Problema nº 79 do Papiro de Rhind

Problème N° 79.



« *Un inventaire d'une maisonnée* (?).

1	2801	7	maisons
2	5602	49	chats
4	11204	343	souris
Total	19607	2301 (sic)	épeautre
		16807	*hekat*
		Total	19607 »

Fonte: Fernadez(2021)

Há um casario com 7 casas, 7 gatos, 7 ratos, 7 espigas(de trigo ou malte), 7 sementes[1]. Qual é a soma de todas as coisas enumeradas?

O problema 79do papiro de Rhind nos remete as técnicas de contagem, assunto tratado no estudo de análise combinatória. O problema envolve conceitos, a princípio, básicos, de adição e multiplicação - pilares do ensino de combinatória.

1.2 Arranjos com repetição na China Antiga

Em Biggs (1979), mostra um na literatura chinesa existe um livro de adivinhação, por volta de um milênio a.C., chamado I Ching, nele há um sistema simbólico de dois símbolos apenas um traço cheio e outro segmentado. Os chineses criaram uma lista de outros símbolos chamados de trigramas e desses oito trigramas obtiveram 64 hexagramas. Veja figura 2.

[1]Embora, a palavra seja hekat, que designa uma unidade de volume, muito superior, carece de sentido neste contexto.

Figura 2 - Os 64 hexagramas do I Ching, distribuídos de acordo com as possíveis combinações oriundas de seus trigamas.

Trigrama superior → inferior ↓	☰ qián Céu	☳ zhèn Trovão	☵ kǎn Água	☶ gèn Montanha	☷ kūn Terra	☴ xùn Vento	☲ lí Fogo	☱ duì Lago
☰ qián Céu	1	34	5	26	11	09	14	43
☳ zhèn Trovão	25	51	3	27	24	42	21	17
☵ kǎn Água	6	40	29	4	7	59	64	47
☶ gèn Montanha	33	62	39	52	15	53	56	31
☷ kūn Terra	12	16	8	23	2	20	35	45
☴ xùn Vento	44	32	48	18	46	57	50	28
☲ lí Fogo	13	55	63	22	36	37	30	49
☱ duì Lago	10	54	60	41	19	61	38	58

Fonte: Riemma(2015)

Cada trigrama é composta por três traços possíveis tomados entre os dois traços iniciais, o primeiro traço pode ser escolhido de duas formas possíveis, o segundo também de duas formas possíveis, assim como o terceiro traço.

Logo, pelo princípio multiplicativo conclui-se a existência de oito trigramas ao todo. Essa mesma lógica está presente na construção dos hexagramas de duas formas: os símbolos formados por seis traços escolhidos entre os dois traços iniciais totalizando 2^6 64 possibilidades, por outro lado cada hexagrama também pode ser construído pelo arranjo de duas trigramas, então pelo princípio multiplicativo nota-se que existem 8vezes 8 hexagramas igual a 64hexagramas.

Não é possível dizer que os chineses tenham utilizado o princípio multiplicativo para saber com antecedência quantas trigramas e hexagramas serão possíveis construir, mas o fato é que eles listaram todos os casos e de fato foi pela listagem dos casos que os problemas combinatórios foram resolvidos inicialmente, mas sem uma fórmula matemática este método tem alcance limitado. O problema chinês é do tipo arranjo com repetição. Temos *n* símbolos e queremos saber a quantidade de arranjos de *R* símbolos que podemos obter deles, em cada posição temos *n* escolhas possíveis então ao todo temos *n* elevado a *R* arranjos possíveis.

1.3 Índia Antiga: o problema dos sabores

De acordo com Biggs (1979),na Índia surgiu pela primeira vez onde se sabe um problema de combinação de coisas distintas sem levar em conta a ordem que é tomada um problema de combinação simples, o problema pertence a um tratado do século VI a.C o Tratado Médico de Sushruta pede-se o número total de combinações possíveis entre: doce, ácido,salino, pungente, adstringente e amargo, para confeccionar medicamentos. O tratado fornece uma lista sistemática:

Tendo 6 sabores básicos; 15 sabores para combinações de dois sabores; 20 sabores para combinações de três sabores básicos; 15 sabores para combinações de quatro sabores básicos; 6 sabores para combinação de cinco sabores básicos; 1 sabor quando juntamos todos os sabores. A figura 3 mostra exemplos de sabores.

Figura 3 – Exemplos de Sabores

Fonte: Shaiith(2016)

É provável que naquela época tenha encontrado todas as possibilidades considerando o caso a caso, mas o problema se torna bem mais fácil com o princípio multiplicativo, suponha que queiramos avaliar o número de sabores possíveis considerando combinações de três sabores, o primeiro sabor pode ser escolhido de seis maneiras distintas, o segundo de cinco maneiras diferentes e o terceiro de quatro maneiras diferentes. O resultado desse produto não é o valor correto porque estamos contando muitas vezes a mesma combinação de sabores em ordem diferente na verdade o número de vezes que contamos a mesma combinação em ordem diferente corresponde ao número de permutações possíveis dos três sabores escolhidos.

2 CONCEITOS E DEFINIÇÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Nesse capítulo vamos apresentar as definições de Analise Combinatória, baseado em MORGADO (2006) e DANTE (2020).

2.1 Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo

Definição: Se um experimento A apresenta n resultados distintos e um experimento B apresenta k resultados distintos, então o experimento composto de A e B, nessa ordem apresenta n.k resultados distintos; ou seja, esse método consiste em multiplicar o número de possibilidades de cada etapa da experiência.

Exemplo 1: Ruan tem 3 camisas, 5 calças, 2 gravatas, 4 pares de sapatos e 1 paletó. De quantas maneiras diferentes ele poderá se vestir, usando uma peça de cada conjunto?

Resolução: Seja k_1= 3 camisas; k_2 = 5 calças; k_3 = 2 gravatas; k_4 = 4 pares de sapatos e k_5 = 1paletó

Então, $k_1.k_2.k_3.k_4.k_5$=$3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 = 120$ maneiras diferentes.

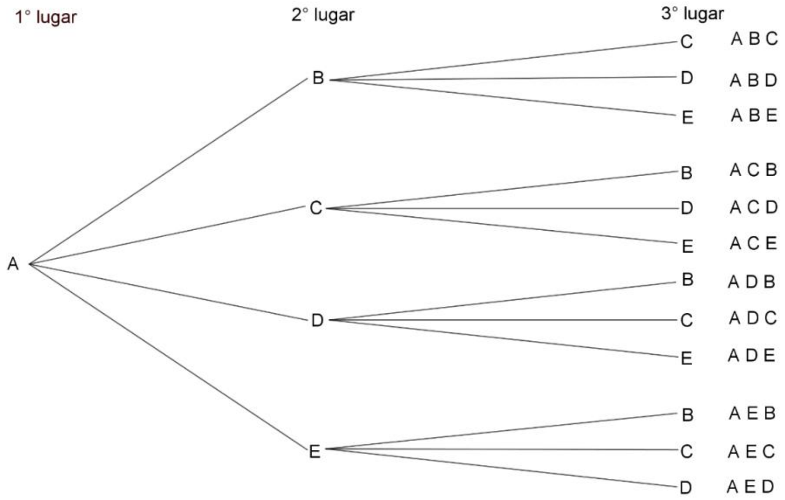
O princípio fundamental de contagem permite-nos a contagem sem descrição das possibilidades. Se o número de possibilidades for pequeno, podemos usar o **diagrama de árvore.**

Exemplo 2: Numa competição entre 6alunos, os prêmios foram distribuídos da seguinte forma:1º colocado: um computador; 2º colocado: uma bicicleta e 3º colocado: um celular.

De quantas maneiras os seis alunos podem se classificar, de modo que três recebam os prêmios?

Resolução: Existem 12 maneiras diferentes para o aluno A obter o primeiro lugar. Portanto, como há 6 alunos, multiplicamos por 12: 6 x 12 = 72 maneiras diferentes. A figura 4 mostra o diagrama de árvore do exemplo2.

Figura 4 - Diagrama de árvore



Fonte:Autor (2023)

2.2 Princípio aditivo de contagem

Sendo A e B conjuntos finitos, o numero de elementos da união de A e B é dado por:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Onde n representa o número de elementos dos conjuntos.

Exemplo 3: O professor de português pediu para que os alunos de uma classe lessem pelo menos uma das obras, Dom Casmuro ou O Alienista, de Machado de Assis para o ENEM. Após um certo tempo o professor verificou que:

- cada aluno havia lido pelo menos uma das obras
- 22 alunos leram Dom Casmuro
- 18 leram O Alienista
- 10 alunos, as duas obras.

Quantos alunos há nessa turma?

Resolução: Sendo A: o conjunto dos alunos que leram Dom Casmuro, temos n(A)=22. E, seja B: o conjunto dos alunos que leram O Alienista, temos n(B)=18. E $(A \cap B)$ é o conjunto dos alunos que leram as duas obras, que $n(A \cap B) = 10$.

Portanto,

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$$
$$n(A\cup B) = 22 + 18 - 10$$
$$n(A\cup B) = 30 \text{ alunos}$$

2.3 Fatorial

Definição:O valor obtido com P_n é chamado fatorial do número natural n e indicado por $n!$ (lê-se "fatorial de n" ou "n fatorial").

Assim, temos $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, para\, n \geq 1.$

Exemplo 4: De quantas maneiras podemos organizar 7 alunos em uma fila?

Resolução: Seja

1° 2° 3°...7°

7° 6° 5°...1°

O número de possibilidades é igual ao produto de todos os números naturais de 7 até 1, isto é:

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040\ maneiras$$

2.4 Permutações

Definição: O Arranjo de n elementos, tomando n a n, isto é, quando $k = n$, é chamado de **Permutação** de n elementos. A permutação trata-se, pois de uma ordenação de n objetos. Denota-se por P_n o número de permutação de n elementos. Como 0! = 1, temos:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Portanto,

$$P_n = n!$$

Exemplo 5: (FUVEST-SP) Em um programa de rádio transmitido diariamente, uma emissora toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar todas as possíveis sequências dessas músicas, serão necessários, quanto tempo:

Resolução:O número de dias necessários para esgotar todas as possíveis sequências é: $10! = 3.628.800$ dias $\rightarrow 10.000$ anos.

Portanto $10! \rightarrow 10.000$ anos, ou seja, aproximadamente 100 séculos.

2.4.1 Permutação com Repetição

Definição:A permutação de n elementos, dos quais um elemento é repetido R_1 vezes, outro elemento é repetido R_2 vezes, e assim por diante, é dada por:

$$P_n^{R_1, R_2, \ldots, R_n} = \frac{n!}{R_1! \cdot R_2! \cdot \ldots \cdot R_n!}$$

Exemplo 6: Vamos determinar o número de anagramas da palavra M A T E M Á T I C A.

Resolução: Notamos que, na palavra MATEMÁTICA, temos a letra M que repete 2 vezes, a letra A que repete 3 vezes, e a letra T que repete 2 vezes, num total de 10 letras.

Portanto, usando a fórmula de permutação com repetição temos:

$$P_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{3!\,2!\,2!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3!}{3!\,2!\,2!} = 151.200$$

Logo, o número total de anagramas da palavra MATEMÁTICA é 151.200.

2.4.2 Permutação Circular

Definição: Chama-se **Permutação Circular** de n objetos distintos quaisquer disposição desses n objetos em torno de um círculo, colocados em lugares igualmente espaçados. Portanto, o número de permutação circular de n objetos distintos é dada por:

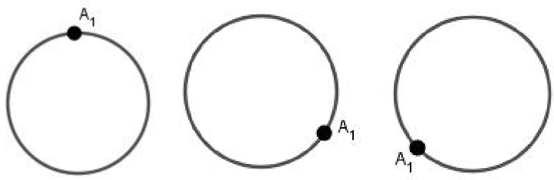
$$PC_n = (n-1)!$$

Exemplo 7: Determine PC_1

Resolução: Considere a tarefa de colocar A_1 num circulo abaixo:

Lembrando, que não é relevante o lugar que a pessoa (ou o objeto) ocupa no círculo, mas sim sua posição relativa, ou seja, sua posição em relação aos demais elementos no círculo. Nesse caso, como A_1 é único, só há uma possibilidade de colocá-lo no círculo. Em qualquer lugar que o coloquemos, ele é o único elemento no círculo. Observe que todas as permutações, na figura 5 coincidem por rotação.

Figura 5 - Permutação Circular A



Fonte:Autor (2023)

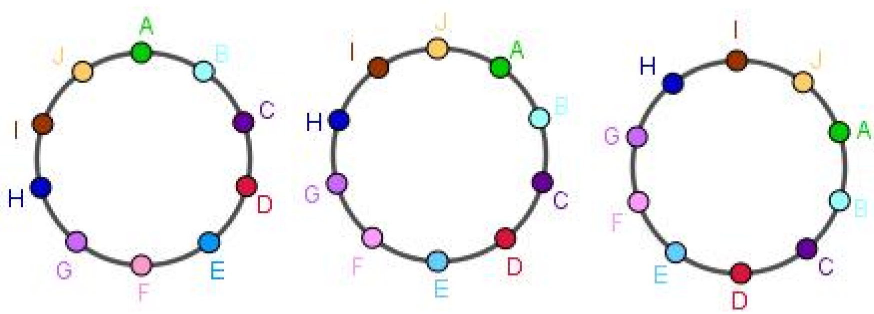
Escrevemos (A_1) para representar esta permutação. E temos que,

$$PC_1 = 1.$$

Exemplo 9: De quantos modos 10 pessoas podem sentar-se em torno de uma mesa circular?

Resolução: Considerando que A, B, C, D, E, F, G, H, I e J representam as 10 pessoas, podemos montar como mostra a figura 6.

Figura 6–Permutação Circular B



Fonte:Autor(2023)

Notamos que, se todas as pessoas se deslocarem uma posição no sentido horário, por exemplo, a configuração contínua a mesma. Então, devemos fixar uma das pessoas, por exemplo A, e efetuar a permutação das outras 9 pessoas.

$$(PC)_{10} = (10-1)! = 9! = 362.880$$

Portanto, as 10 pessoas podem sentar-se a mesa de 362.880 maneiras diferentes.

2.5 Arranjo Simples

Definição: Arranjo simples de *n* elementos tomados p a $p (p \leq n)$ são os agrupamentos ordenados que é possível formar com *p* dos *n* elementos distintos dados.

Indica-se por $A_{n,p}$

O total desses agrupamentos, que calculamos assim:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

Ou

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo 10: Quantos números de 2 algarismos distintos podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Resolução: Procuramos agrupamentos de 2 elementos em que a ordem é importante; por exemplo: $12 \neq 21$.

Temos 9 elementos que devem ser arranjados 2 a 2. Assim, temos de calcular:

$$A_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 72$$

Portanto, existem 72 números de 2 algarismos distintos que podem ser inscritos com os algarismos de 1 a 9.

Exemplo 11: Quantas palavras (que pertencem à língua portuguesa ou não) de 4 letras distintas podemos formar com as letras da palavra CONTAGEM?

Resolução: Aplicando a fórmula para o cálculo da quantidade de arranjos, temos:

$$A_{8,4} = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 1680$$

Portanto, teremos 1680 palavras.

Exemplo 12: Quantas dessas palavras começam com E?

Resolução: Fixando *E* como 1ª letra, temos de arranjar as 3 restantes das 7 que sobraram.

Assim, temos:

$$A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 210$$

Logo, são 210 palavras.

2.6 Combinação Simples

Definição: Denomina-se combinação simples todo subconjunto formado por *p* dos *n* elementos de um conjunto. Difere do arranjo porque, aqui, a ordem não é importante.

Para determinarmos a combinação simples de *n* elementos tomados *p* a *p*, utilizamos a fórmula:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplo 13: Quantas são as opções que temos de formar uma comissão de 5 membros, escolhidos dentre 8 pessoas?

Resolução: Trata-se de uma escolha, não ordenada, de 5 elementos distintos de um conjunto contendo 8 elementos. Logo, uma combinação simples de classe 5, de 8 objetos, cujo total é dado por;

$$C_{8,5} = \frac{8!}{5!\,(8-5)!} = \frac{8!}{5!\,3!} = 56$$

Logo, temos 56 opções de formar uma comissão.

Exemplo 14: De quantos modos diferentes um técnico pode escalar um time de basquete tendo à disposição 12 atletas que jogam em qualquer posição?

Resolução: Procuramos o número total de subconjuntos (ou combinações) com 5 elementos tirados de um conjunto de 12 elementos. A ordem não importa; cada subconjunto difere um do outro apenas pela natureza dos elementos.

$$C_{12,5} = \frac{12!}{5!\,(12-5)!} = \frac{12!}{5!\,7!} = 792$$

Portanto, é possível escalar o time de basquete de 792 modos diferentes.

3 USO DE GEOGEBRA NA ANÁLISE COMBINATÓRIA

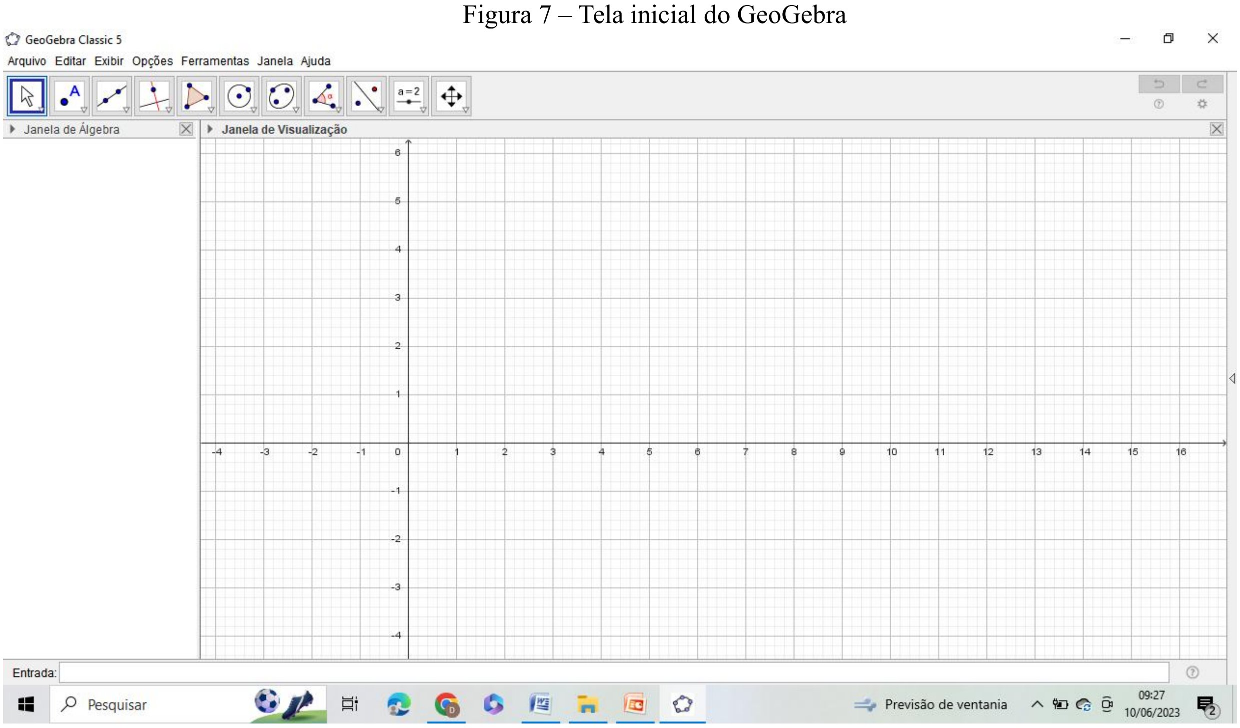
3.1 Geogebra

O software Geogebra é um aplicativo de matemática dinâmico e livre, e pode ser baixado gratuitamente. Disponível em iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux. É uma ferramenta útil em sala de aula para ensinar de maneira mais simples os assuntos diversos, pois reúne também planilhas, gráficos, estatística e cálculo. Pode ser instalado acessando o Play Store ou o site oficial www.geogebra.org.

Por ser um software de acessível e gratuito, se torna um forte aliado para o desenvolvimento das aulas, pois como já foi dito, ele abrange dois ramos da Matemática, Geometria e a Álgebra que acompanham Educação Básica, isto é, alunos do Ensino Fundamental Menor até o Ensino Médio. Tornando a Matemática mais tangível, os alunos podem manusear investigar, tocar e experimentar o aplicativo, como consequência, deixar mais acessível e prazeroso o aprendizado.

Por causa dessa facilidade de acesso e manipulação, optou-se a sua utilização para mostrar a solução de problemas de análise combinatória. A figura 7mostraa tela inicial.

Figura 7 – Tela inicial do GeoGebra



Fonte:Autor(2023)

3.2 Uso do Geogebra em Problemas de Análise Combinatória

A seguir serão apresentados problemas de Análise Combinatória com a resolução utilizando o Geogebra.

3.2.1 PROBLEMA 1: No campeonato Primaverense de vôlei de praia masculino, quatro duplas (D1, D2, D3, D4) foram para a semifinal. De quantas maneiras diferentes poderiam ocorrer as duas primeiras colocações (campeão e vice-campeão)?

Objetivos:

•Examinar o diagrama e identificar o Princípio Multiplicativo como estratégia de solução, na resolução do problema.

•Construir a árvore de possibilidades usando o Geogebra.

Construção do diagrama de árvore:

1. Na primeira janela, selecione ARQUIVO e depois, NOVA JANELA.
2. Desmarcar a opção EIXOS na janela de visualização, com o botão direito do *mouse*.
3. Agrupando formaremos três colunas, incluindo na primeira, na segunda e na terceira coluna, os respectivos textos:CAMPEÃO, VICE-CAMPEÃO e RESULTADOS. Ativando a ferramenta INSERIR TEXTO ABC (janela 10) e clicando em um lugar da janela de visualização, onde se deseja que os textos acima surjam.
4. Antes da primeira coluna(CAMPEÃO), criar um ponto. Selecione NOVO PONTO •A (janela 2) e clicando na janela de visualização no lugar onde seja escolhido que os ramos da árvore de possibilidades comece, o GeoGebra nomeará de ponto A.
5. Fazer quatro pontos na primeira coluna (CAMPEÃO), visto que existem quatro duplas competindo o primeiro lugar. Selecionando NOVO PONTO •A (janela 2), clicando em quatro lugares diferentes em sequência, o *software* nomeará os próximos quatro pontos como: B, C, D e E.

6. Construir as ramificações do ponto A para os quatro pontos da primeira coluna (CAMPEÃO), criando os segmentos AB, AC, AD e AE. Selecionando a ferramenta SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS  (janela 3) e clique, por exemplo: primeiro no ponto A e depois no ponto B, para fazer o segmento AB, repetindo o processo para formar os outros segmentos. Ao fazer esses seguimentos de um ponto ao outro irá surgir um nome desse segmento, para tirá-lo basta selecionar o segmento e com o botão direito do mouse clique em EXIBIR RÓTULO 

.

7. De acordo com o problema, escrever: D1, próximo ao ponto B, D2 próximo ao ponto C, D3, próximo ao ponto D e D4, próximo ao ponto E. Ativando a ferramenta INSERIR TEXTO 

(janela10) e clicar na janela de visualização, onde se deseje que os textos acima ocorram.

8. Na segunda coluna criar mais doze pontos, pois de cada ponto da primeira coluna, temos três possibilidades. Selecione NOVO PONTO 

(janela 2) e clique em doze lugares distintos em sequência na segunda coluna, o GeoGebra nomeará os seguintes pontos: F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, e Q.

9. Para fazer as ramificações da árvore de possibilidades, criar os segmentos que partirá da primeira coluna (CAMPEÃO) para a segunda coluna (VICE-CAMPEÃO). Formando os segmentos: BF, BG, BH, CI, CJ, CK, DL, DM, DN, EO, EP e EQ, selecionar a ferramenta SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS  (janela 3) e clicando, por exemplo: primeiro no ponto B e depois no ponto F, para fazer o segmento BF, novamente repetir o processo para formar os outros segmentos.

10. De acordo com o problema, escrever:

- D2, perto ao ponto F,
- D3, perto ao ponto G,
- D4, perto ao ponto H,
- D1, perto ao ponto I,
- D3, perto ao ponto J,
- D4, perto ao ponto K,
- D1, perto ao ponto L,
- D2, perto ao ponto M,
- D4, perto ao ponto N,

- D1, perto ao ponto O,
- D2, perto ao ponto P,
- D3, perto ao ponto Q.

Selecionar a ferramenta INSERIR TEXTO  (janela10) e clique na janela de visualização, onde se deseja que os textos acima surjam.

11. Ative a ferramenta EXIBIR/ESCONDER OBJETO  (Janela 11) e clique sobre cada ponto e, seguidamente, apertando a tecla ESC. Cada ponto vai desaparecer como resultado esperado.

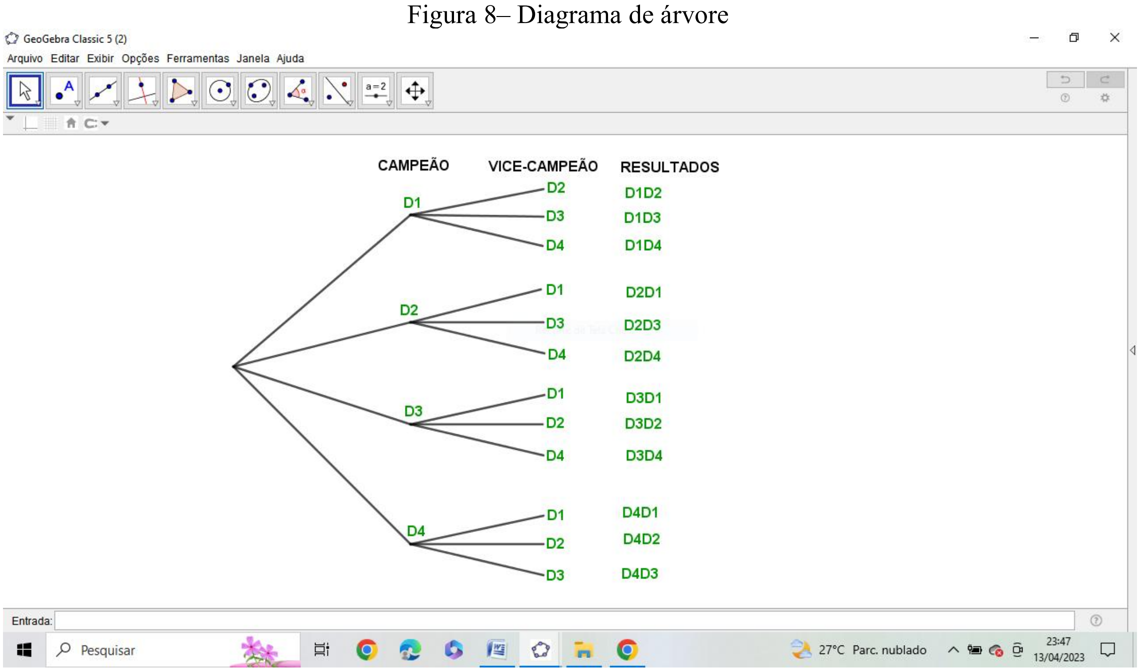
12. Pelo diagrama gerado, escrever na terceira coluna, os possíveis resultados do problema.

13. Na opção PROPRIEDADES, clicando com o botão direito do mouse, pode-se modificar a cor e o tamanho da fonte.

14. Finalizando com o botão direito do mouse na janela de visualização e desmarcando a opção MALHA.

A figura 8, mostra o diagrama gerado do problema 1.

Figura 8– Diagrama de árvore



Fonte:Autor (2023)

A construção do diagrama de árvore no Geogebra para a resolução deste problema possibilita através da visualização, a representação de todos os agrupamentos possíveis.

O diagrama torna possível uma melhor organização, ordenando o problema, facilitando o processo de contagem e assim, identificando o uso do Princípio Fundamental da Contagem, visto que para a primeira colocação, temos quatro possibilidades, e para a segunda colocação, temos três possibilidades. Contudo temos 4.3 = 12 maneiras diferentes para as duas primeiras colocações (campeão e vice-campeão), como apresentado no diagrama de árvore construído no Geogebra.

3.2.2 PROBLEMA 2: Sobre uma circunferência tomam-se 5 pontos distintos. Quantos triângulos se podem obter com vértices nos pontos dados?

Objetivos:

•Comprovar a natureza do problema de contagem.

•Reunir com o auxílio do Geogebra, todos os triângulos.

•Expandir o conceito de combinação simples por meio dos desenhos construídos no software.

Construção no Geogebra:

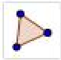
1. Selecione a ferramenta CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS  (Janela 6) depois em seguida de um clique em dois pontos distintos da janela de visualização para criar uma circunferência c.O centro será o ponto A e ela passará pelo ponto B.

2. Na ferramenta EXIBIR/ESCONDER OBJETO  (Janela 11). Oculte o ponto A, clicando sobre ele e apertando a tecla ESC logo em seguida.

3. Clique na ferramenta NOVO PONTO  (Janela 2), com o cursor do *mouse* clique sobre a circunferência para que ela fique em destaque gerando desse modo um ponto C.

4. Continue a repetir o processo 3 para criar mais três pontos: D, E e F.

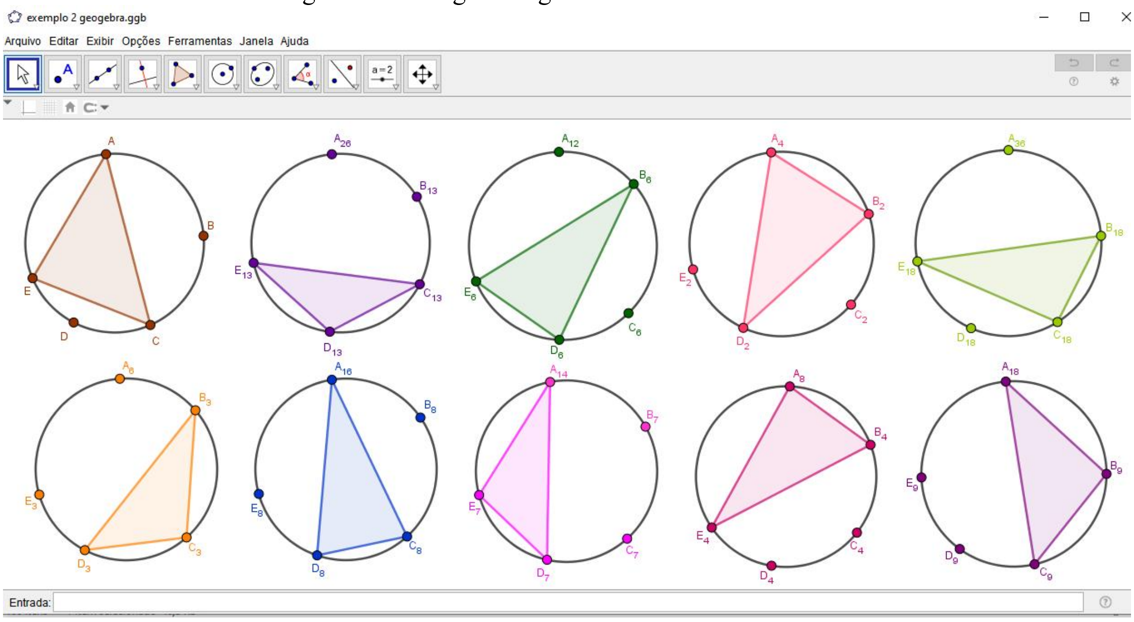
5. Selecionara opção “Renomear”, com o botão direito do *mouse* para dar um novo nome aos pontos. (Exemplo, alterando ponto B por ponto A, e assim por diante).

6. Construiremos um triângulo em cada circunferência. Com a ferramenta POLÍGONO  (janela 5) e clicando em três pontos distintos que (serão os vértices do triângulo) em destaque na circunferência, clicando novamente no primeiro ponto.

7. Refazer os passos acima, quantas vezes for preciso até que não existam triângulos iguais.

Na figura 9 mostra os 10 triângulos construídos.

Figura 9 – Triângulos registrados na Circunferência



Fonte:Autor (2023)

Para entender como surgiu o problema de contagem, pense na seguinte linha de pensamento:

Pode se observar que os pontos não estão alinhados, visto que na construção de um triângulo a escolha de três pontos dados (vértices),a ordem da escolha dos vértices não irá importar devido o triângulo ABC, é o mesmo triângulo BCA, portanto, se trata de uma combinação simples de cinco elementos, tomados três a três, temos:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!.(5-3)!} = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5.4.3!}{3!.2!} = \frac{20}{2} = 10$$

Como demonstrado na ilustração realizada com o uso do Geogebra. Espera-se que a solução do problema por meio do software estimule a curiosidade e a motivação necessária para uma melhora na aprendizagem do aluno.

No momento da aula, analisando a mesma construção podemos fazer ainda as seguintes perguntas: Quantos quadriláteros podem formar? Quantos pentágonos?

E até pode acrescentar um número maior de pontos sobre a circunferência.

3.2.3 PROBLEMA 3: Quantos e quais são os números de 3 algarismos(sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os algarismos 3, 6, 7?

Objetivos:

•Reconhecer a natureza do problema de contagem.

•Criar no Geogebra uma planilha de forma organizada a formação dos números solicitados.

•Aumentar o conceito de permutação.

Construção de planilha:

1. Para criar uma planilha, clique no menu Exibir e selecione a opção Planilha.

2. Digitar nas células: A1–Algarismo das Centenas, B1 – Algarismo das Dezenas, C1 – Algarismo das Unidades.

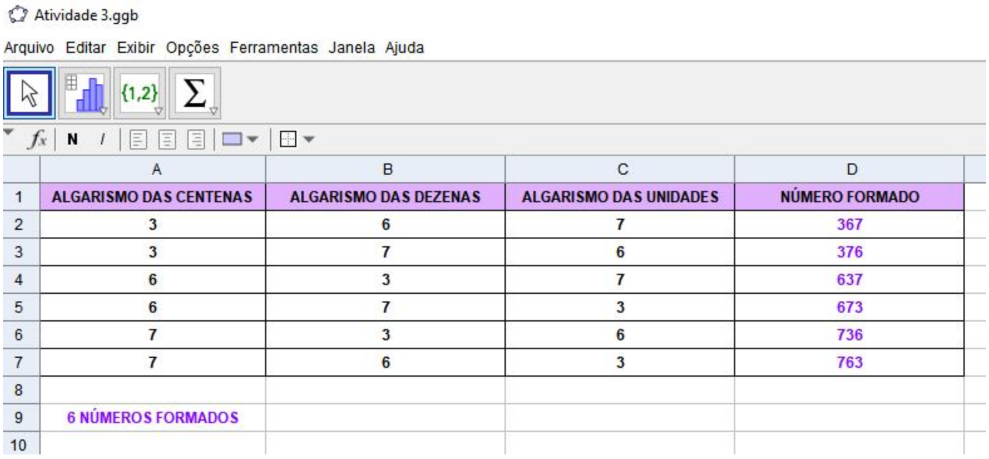
3. Para destacar as células A1, B1 e C1selecionem e em seguida clique na opção N(Negrito) na barra de ícone da planilha para destacar.

4. Com o cursor selecionar nas linhas e nas colunas a serem preenchidas e clicando na opção espessura na barra de ícone da planilha, assim ficará com bordas.

5. Coloque os valores nas células de acordo com o enunciado do problema.

Agora com a planilha preenchida corretamente se tem a resposta para o **problema 3**, quantos e quais são os números solicitados, conforme figura 10.

Figura10 – Planilha preenchida



	A	B	C	D
1	ALGARISMO DAS CENTENAS	ALGARISMO DAS DEZENAS	ALGARISMO DAS UNIDADES	NÚMERO FORMADO
2	3	6	7	367
3	3	7	6	376
4	6	3	7	637
5	6	7	3	673
6	7	3	6	736
7	7	6	3	763
8				
9	6 NÚMEROS FORMADOS			
10				

Fonte**:** Autor(2023)

A planilha é um recurso que facilita de maneira organizada as informações, oferecendo neste caso o Raciocínio Combinatório, devido ao preencher a planilha, o aluno executa o problema de forma organizada, observando que a ordem dos algarismos importa, visto que todos os números diferenciam entre si pela ordem de seus algarismos. Trazemos então um caso de permutação simples de três elementos:

$$P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$$

Dessa forma, podemos formar 6 números, são eles: 367, 376, 637, 673, 736 e 763, conforme visualizamos na planilha acima.

3.2.4 PROBLEMA 4: Em uma escola, há um total de 20 professores que irão participar de um conselho para a escolha de diretor, vice-diretor e coordenador, calcule:

a) O número de maneiras para a escolha do diretor,vice-diretor e coordenador.
b) A quantidade de maneiras de se montar uma equipe com 4 professores para a realização de uma determinada tarefa.

Objetivos:

•Reconhecera natureza do problema de contagem em cada item.

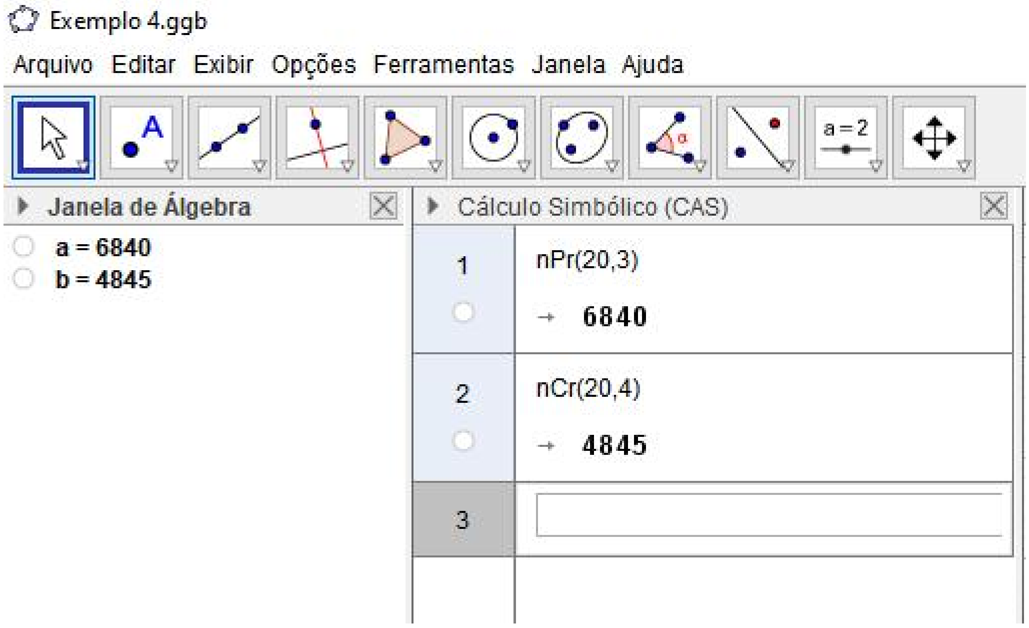
•Aplicação de fórmulas de arranjo e combinação, usando a ferramenta Cálculo Simbólico (CAS) no *software* Geogebra.

Construção de fórmulas.

1. Selecionara opção “Cálculo Simbólico” clicando no menu Exibir.Em seguida uma janela de cálculo simbólico irá surgir. No campo de entrada digite o seguinte comando: nPr(20,3) dando enter. O valor do cálculo do arranjo de 20 elementos, tomados 3 a 3 será exibido no Geogebra.

2. No campo de entrada digitar o comando: nCr(20,4) e dando enter. O valor do cálculo da combinação simples de 20 elementos, tomados 4 a 4 será exibido no GeoGebra, conforme a figura 11.

Figura 11– Comandos de combinatória



Fonte:Autor (2023)

Nos problemas envolvendo contagem na maioria dos casos estamos interessados não na lista de agrupamentos, mas na quantidade. O Geogebra possui a ferramenta “Cálculo Simbólico”, possibilitando calcular expressões, fatorial, permutação e combinação.

No item (a) do problema, dentre os 20 professores, devemos escolher 3 professores. A ordem em que os professores serão escolhidos é importante, devido à função que cada professor exercerá é diferente (um diretor, um vice-diretor e um coordenador). Dessa forma, se trata de arranjo simples de 20 elementos tomados 3 a 3.

$$A_{20,3} = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = \frac{20.19.18.17!}{17!} = 6840$$

Utilizamos o comando permutação no *software* Geogebra, pois toda permutação é um arranjo, onde *n*=*p*. Somente alteramos os valores de *n* e *p*.

No item(b), precisa – se escolher 4 dentre os 20 professores, só que agora a ordem das escolhas não tem importância para determinar a equipe escolhida. Por isso, se trata de uma combinação simples de 20 elementos tomados, 4 a 4.

$$C_{20,4} = \frac{20!}{4!.(20-4)!} = \frac{20!}{4!.16!} = \frac{20.19.18.17.16!}{4!.16!} = 4845$$

3.2.5 PROBLEMA 5: De quantas formas distintas 4 clientes em um restaurante podem se sentar em torno de uma mesa redonda?

Objetivos:

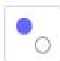
•Reconhecer a natureza do problema de contagem.

•Construir no Geogebra conforme enunciado do problema.

Construção:

1. Na primeira janela, selecionar ARQUIVO e depois, NOVA JANELA.
2. Desmarcar a opção EIXOS na janela de visualização, dando um clique com o botão direito do *mouse*.
3. Clicando no ícone  (Janela 6) Selecione a ferramenta CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS, em seguida de um clique em dois pontos distintos da janela de visualização para criar uma circunferência c.

O centro será o ponto A e ele tende a passar pelo ponto B.

4. Na ferramenta EXIBIR/ESCONDER OBJETO  (Janela 11). Oculte o ponto A, clicando sobre ele e apertando a tecla ESC em seguida.

5. Clique na ferramenta NOVO PONTO 

(Janela 2), posicione o cursor sobre a circunferência, clicando em três pontos distintos, criando assim, os pontos C, D e E.

6. Em cada um dos pontos clique sobre eles e com o botão direito do mouse, selecione EXIBIR RÓTULOS, para ocultar os rótulos.

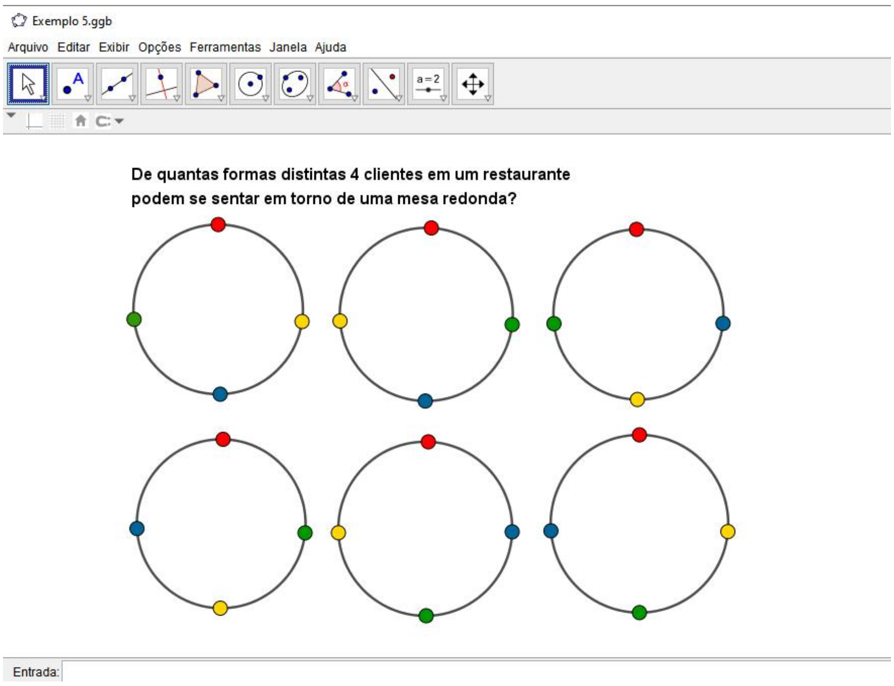
7. Caso queira colocar cores nos pontos,clique sobre cada ponto e use o botão direito do mouse, selecionando PROPRIEDADE, afim de escolher a cor, aumentar o tamanho do ponto. Portanto, cada ponto representará um cliente em torno da mesa.

8. Selecionando a ferramenta INSERIR TEXTO ABC (janela 10) e clicando em um lugar da janela de visualização, onde se deseja que o enunciado da questão apareça. Digite na opção editar que irá surgir.

9. Clique com o botão direito do mouse na janela de visualização e desmarque a opção MALHA.

A seguir, a figura 12todas as distribuições possíveis.

Figura 12– Permutação Circular



Fonte:Autor (2023)

Na construção, cada ponto está representando um cliente sentado ao redor da mesa, as cores diferentes nos pontos são para diferenciar os clientes, oferecendo uma melhor visualização.

Se todos os clientes se deslocarem uma posição no sentido horário, por exemplo, a organização ao redor da mesa continuará a mesma. Portanto, temos que fixar um dos clientes, nesse caso o ponto VERMELHO e efetuar a permutação dos outros 3 clientes.

Fazendo o cálculo a permutação circular das 4 pessoas:

$$(PC)_4 = (4-1)! = 3! = 6$$

Gerando dessa forma 6 maneiras distintas de organizar os quatro clientes em torno de uma mesa redonda.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, mostra que é possível resolver problemas de Análise Combinatória com a utilização do software Geogebra. Para isso, exemplificamos com alguns problemas resolvidos com auxílio do aplicativo e como são realizadas as construções.

O Geogebra, como ferramenta no auxilio na resolução de problemas de contagem, constrói um aspecto muito importante dentro da análise combinatória: o raciocínio construtivo. Pois, ao se fazer conjectura para um problema, infere-se sobre o caminho e técnica a serem usados para se chegar ao resultado correto. Para isso, o Geogebra dispõe de um aspecto importante que é a sua dinamicidade, permitindo analisar um problema de várias maneiras. O que torna um aplicativo de destaque entre as tecnologias usadas por professores em vários países do mundo.

Outras maneiras também podem trabalhar com a Análise Combinatória, como jogos e o uso também do Excel. São maneiras que auxilia o professor no ensino e na aprendizagem do aluno. Espera-se que neste trabalho possa contribuir para a discussão e aperfeiçoamento do ensino/aprendizado da Análise Combinatória e todo o raciocínio envolvido neste importante processo.

REFERÊNCIAS

ASTH, Rafael. Análise Combinatória. **Toda Matéria**, *[s.d]*. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/analise-combinatoria/>. Acesso em: 7 mar. 2023.

BACHX, Arago de Carvalho;POPPE, Luiz M. B.; TAVARES, Raymundo N. O. **Prelúdio à Análise Combinatória**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.

BEZERRA, Maria de Nazaré. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 1.ed. Belém: Ediaedi, 2018.48-53p.ISBN 978-85-65054-56-0.

BOSQUILHA, Alessandra; CORRÊA, Marlene Lima Pires; VIVEIRO, Tânia Cristina. **Manual Compacto de Matemática**: Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Rideel, 2010. 235-236, 240-244, 247 p. ISBN 978-85-339-1557-2.

BIGGS, N. L. **The roots of combinatorics.** Revista Historia Mathematica, V. 6,1979.p.109-136.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando**. Matemática em Contextos:** Análise Combinatória, Probabilidade e Computação. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020. 22, 26, 30-31 p. ISBN 978-65-5767-045-3.

DANTE, Luiz Roberto.**Projeto Teláris: 9° ano** - Ensino Fundamental Anos Finais - Matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 2016. 280 p. ISBN 9788508174027.

DNYLLOH. **História da Matemática: Blog desenvolvido pelos alunos do curso de Matemática da UNIMEP 2016,** 25 de set. de 2017. Disponível em: https://matematicahistoria.wordpress.com/2017/09/25/origem-da-analise-combinatoria-i/. Acesso em: 21 de mar. de 2023.

FERNADEZ, José Carlos. História da Matemática: o problema 79 do papiro de Rhind. **Matemática para Filósofos**, 7 out. 2021. Disponível em: https://www.matematicaparafilosofos.pt/o-problema-79-do-papiro-de-rhind/. Acesso em: 16 mar.2023.

IMPERATIVO MATEMATICO. **Da origem da combinatória à origem da probabilidade – Parte 1: Tópicos da Matemática Elementar.** You tube, 2 de dez. 2022. Disponível em:<https://youtu.be/7ehlokvUGnl>. Acesso em: 16 de março de 2023.

IMPERIO, Pablo Silva. **A utilização do GeoGebra na Resolução de Problemas de Análise Combinatória.** 2017.51p. Dissertação(Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Maranhão, São Luis, 2017.

MORGADO, Augusto César de Oliveira et al **Análise combinatória e probabilidade.** 9. ed, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

OLIVEIRA, Ana Maria.**Minimanual de Matemática**. São Paulo: DCL 2011. 340-347 p. ISBN 978-85-368-1183-3.

RIEMMA, Constantino K. O que são os Hexagramas. **I Ching**, 26 de jul. de 2015. Disponível em: <https://iching.com.br/o-que-sao-hexagramas-do-ching/>. Acesso em: 10 de jun. de 2023.

SILVA, Sueli Xavier**. Análise Combinatória**: Conceitos e possibilidades no ensino – Aprendizagem com auxílio do geogebra. 2021.100f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-árido, Mossoró, 2021.

SHAIITH. **Condimentos intensivos em colheres velhas.**06 set.2016. 3fotografia. 5760x3840 pixels. Disponível em: <https://www.istockphoto.com/br/search/2/image? phrase= temperos>. Acesso em: 28 de março de 2023.