



**Universidade Federal do Pará
Campus Universitário de Castanhal
Faculdade de Matemática
Licenciatura em Matemática**

Trabalho de Conclusão de Curso

**Método de Diferenças Finitas aplicado
à Equação de Laplace**

Washington Luiz de Jesus Muniz

2020

Método de Diferenças Finitas aplicado à Equação de Laplace

Graduação

05/2016 – 04/2020

Submissão 13/02/2020

Defesa 18/02/2020

Versão Final 28/02/2020

Universidade Federal do Pará

Campus de Castanhal

Faculdade de Matemática

Washington Luiz de Jesus Muniz

wluiz7@gmail.com

Licenciado em Matemática 2020

UFPA-Castanhal

Banca Examinadora

Prof. MSc. Romário Silva Duarte

Doutorando em Matemática - UFPA (Orientador)

Prof. Dr. Valdelírio da Silva e Silva

Membro da Faculdade

Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida

Membro da Faculdade

Prof. MSc. André Renan Lima Barros

Membro Externo

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família.

Agradecimentos

A minha esposa Lizandra, minha companheira, que tem sido essencial em todas as minhas vitórias.

Aos meus filhos Douglas e Jéssica, os quais amo tanto e são a razão por eu estar buscando me qualificar cada vez mais.

A minha mãe Maria Vanda, a qual não tenho palavras pra defini-la, quão especial é, ao meu pai Luiz Maria, meus irmãos Luiz Augusto, Sávio Luiz, Ana Paula e Antônia Letícia (in memoriam).

Ao meu orientador, professor MSc. Romário Duarte, ao qual me proporcionou todos os recursos e atenção necessários para a realização deste trabalho.

A todos os professores que contribuíram para minha formação acadêmica.

Aos meus amigos de classe com os quais estivemos juntos nesta jornada.

Resumo

Este trabalho visa apresentar a resolução de uma equação diferencial parcial através de um método numérico, como alternativa para a obtenção de soluções, haja vista que a maioria das equações diferenciais parciais são bastante complexas, o que torna inviável a solução, ou por não existirem soluções analíticas para a equação diferencial estudada. Com base no problema, vamos aplicar o Método de Diferenças Finitas na Equação de Laplace, para mostrar como se dá a solução desta equação diferencial por este método numérico, o faremos através da análise de estudos anteriores e simulações em computador. Observou-se que, embora haja um custo computacional elevado, quando se trata de usar malhas finas, o método de diferenças finitas é uma boa opção para a resolução de equações diferenciais parciais.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais. Método de Diferenças Finitas. Equação de Laplace.

Abstract

This work aims to present the resolution of a partial differential equation through a numerical method, as an alternative to obtain solutions, given that most of the partial differential equations are quite complex, which makes the solution impracticable, or because there are no analytical solutions for the studied differential equation. Based on the problem, we will apply the Finite Difference Method to the Laplace Equation, to show how this differential equation is solved by this numerical method, we will do it through the analysis of previous studies and computer simulations. It was observed that, although there is a high computational cost, when it comes to using fine meshes, the finite difference method is a good option for solving partial differential equations.

Keywords: Partial Differential Equations. Finite Difference Method. Laplace equation.

Lista de Figuras

2.1	Domínio discretizado	15
2.2	Etapas para a obtenção da solução numérica	15
2.3	Relação entre discretização e consistência	23
2.4	Convergência de uma solução numérica	24
3.1	Região do domínio Ω e fronteira do domínio $\delta\Omega$	30
3.2	Simulação numérica para Equação de Laplace com $\Delta x = \Delta y = 0.1$	31
3.3	Simulação numérica para Equação de Laplace com $\Delta x = \Delta y = 0.005$	31
3.4	Simulação numérica para Equação de Laplace com $\Delta x = \Delta y = 0.003$	32
3.5	Valores de contorno na região do domínio	32
3.6	Simulação numérica para Equação de Laplace com $\Delta x = \Delta y = 0.005$	33
3.7	Simulação numérica para Equação de Laplace com $\Delta x = \Delta y = 0.005$	33

Sumário

Introdução	8
1 Equações Diferenciais Parciais	9
1.1 Classificação das Equações Diferenciais Parciais	10
1.1.1 Ordem	10
1.1.2 Dimensionalidade	10
1.1.3 Homogeneidade	10
1.1.4 Coeficientes	11
1.1.5 Linearidade	11
1.1.6 Arquétipos Fundamentais da Física-Matemática	12
2 Métodos numéricos na resolução de EDP	14
2.1 Método das Diferenças Finitas	15
2.1.1 Diferenças Finitas por Série de Taylor	16
2.1.1.1 Diferença Finita Avançada de Primeira Ordem para a Primeira Derivada	18
2.1.1.2 Diferença Finita Atrasada de Primeira Ordem para a Primeira Derivada	19
2.1.1.3 Diferença Finita Central de Segunda Ordem para a Primeira Derivada	20
2.1.1.4 Diferença Finita de Segunda Ordem para a Segunda Derivada	21
2.1.2 Consistência, Estabilidade e Convergência de um Método Numérico	22
2.1.2.1 Consistência	22
2.1.2.2 Estabilidade	23
2.1.2.3 Convergência	24
3 Modelo Numérico para a Equação de Laplace	25
3.1 Equação de Laplace	25
3.2 Modelo Numérico para Equação de Laplace	26
3.3 Simulações Numéricas	30
Considerações Finais	34
Referências	35
Apêndice	36
A Código-fonte usado na aplicação	37

Introdução

As equações diferenciais parciais (EDP) são de grande importância, pois através dessas expressões podemos analisar o comportamento futuro de fenômenos em vários campos da Física, com base na variação dos valores presentes. No entanto, a solução de uma equação diferencial parcial pode ser complexa, o que torna difícil ou mesmo impossível obter as soluções exatas pelos métodos analíticos existentes (MELO, 2011).

Para Bassanezi & Ferreira Jr (1988):

A origem, os objetivos e os métodos matemáticos das equações diferenciais parciais estão ligadas tradicionalmente de maneira indissolúvel (mais harmoniosa!) a problemas da Física Matemática e seu estudo não pode deixar de enfatizar e tirar o devido proveito desse fato. Não é necessário, todavia, recorrer as teorias físicas muito sofisticadas e exóticas para obtermos os exemplos mais representativos das equações diferenciais parciais (p.469).

Embora os métodos numéricos tenham surgido antes da criação do computador, o avanço computacional e as tecnologias hoje existentes, tornam mais fáceis a obtenção de soluções para as equações diferenciais através dos métodos numéricos, que podem ser implementados no computador.

Nesse contexto o presente trabalho tem como objetivo apresentar a resolução de uma equação diferencial parcial através de um método numérico, como uma das alternativas para a obtenção de solução para o problema, haja vista que a maioria das equações diferenciais parciais são bastante complexas, o que em muitos casos, tornam inviáveis as soluções analíticas para as equações diferenciais em apreço. Para tanto, o estudo ancora-se em trabalhos anteriores sobre o tema, e as simulações numéricas foram feitas no software livre Scilab.

A estrutura do trabalho foi composta de três capítulos. O primeiro capítulo apresenta a definição e algumas classificações de equações diferenciais parciais. O segundo capítulo apresenta métodos numéricos para resolução de equações diferenciais parciais, abordaremos algumas particularidades dos métodos numéricos, como a definição do erro, consistência, estabilidade e convergência, que são importantes no estudo de métodos numéricos. No terceiro capítulo, trataremos uma aplicação acerca da abordagem numérica sobre as equações diferenciais, mais especificamente usaremos o Método de Diferenças Finitas na Equação de Laplace, que é uma EDP elíptica, que modela fenômenos em vários campos da ciência, e por se tratar de uma EDP que admite solução analítica, o que torna viável a análise da solução obtida através do método numérico usado na aplicação; e alguns resultados das simulações numéricas para a aplicação.

Equações Diferenciais Parciais

As equações diferenciais parciais (EPD) são objetos de intensas atividades que envolvem a pesquisa científica e se caracterizam por apresentarem além de uma matemática rigorosa, uma diversidade quanto as suas aplicações. A maioria dos fenômenos podem ser descritos por equações diferenciais parciais, como por exemplo, a dinâmica dos fluidos, o eletromagnetismo, a deformação dos materiais elásticos, a difusão dos nêutrons, a difusão de calor, a dinâmica populacional, a propagação de vírus, modelos econômicos, entre outros (MAGALHÃES, 2016).

De maneira geral, Equações Diferenciais são equações matemáticas em que a variável desconhecida é uma função, conseqüentemente, neste tipo de equação aparecem operações que envolvem funções, tais como derivada e integral. Assim, ao resolvermos uma equação diferencial iremos encontrar uma função que verifica a EDP.

São exemplos de equações diferenciais parciais (MAGALHÃES, 2016):

- a) $\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, equação do calor unidimensional;
- b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, equação da onda unidimensional;
- c) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma^2 u$, equação do telégrafo;
- d) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, equação de Laplace tridimensional, teoria do potencial;
- e) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}$, equação de viga engastada;
- f) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \text{sen}(u) = 0$, equação de Sine-Gordon, óptica não linear;
- g) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-E/u}(1 - u)$, equação da combustão;
- h) $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, equação de Burgers para o fluido compressível viscoso;
- i) $\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} u^n\right)_x; n \geq 1$, equação da percolação;
- j) $i \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, equação de Shrödinger para o elétron livre;

Segundo Magalhães (2016), podemos também definir de maneira mais formal uma EDP, da seguinte maneira:

Definição 1. *Uma equação diferencial parcial (EDP) de ordem m é uma igualdade envolvendo uma função de n variáveis ($n \geq 2$) e suas respectivas derivadas parciais até ordem*

$m(m \geq 1)$, ou seja, é uma igualdade do tipo

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = 0 \quad (1.1)$$

onde $u = u(x_1, \dots, x_n)$ e F é uma função qualquer.

Existem diversas maneiras de se classificar uma Equação Diferencial, dependendo de como se deseja estudar a equação em questão. Na próxima seção apresentaremos algumas formas usuais de classificação para EDP.

1.1 Classificação das Equações Diferenciais Parciais

A importância de se classificarem as equações diferenciais parciais reside no fato de que cada classe possui sua própria técnica de resolução. As seis classificações básicas são as seguintes (MAGALHÃES, 2016).

- (i) Ordem;
- (ii) Dimensionalidade;
- (iii) Homogeneidade;
- (iv) Coeficientes;
- (v) Linearidade;
- (vi) Arquétipos Fundamentais da Física-Matemática.

1.1.1 Ordem

A ordem de uma equação diferencial parcial é a ordem da derivada mais alta que aparece nela.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \text{ (terceira ordem)}$$

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ (segunda ordem)}$$

1.1.2 Dimensionalidade

A dimensionalidade de uma EDP é definida pelo número de direções espaciais que nela aparecem, por exemplo: $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$. Problemas transientes bidimensionais possuem além de uma coordenada temporal duas coordenadas espaciais.

1.1.3 Homogeneidade

Se na equação diferencial parcial não aparece uma função (apenas das variáveis independentes) isolada, a equação é dita homogênea, caso contrário é não-homogênea.

1.1.4 Coeficientes

Uma equação diferencial parcial pode apresentar coeficientes constantes ou dependentes das variáveis de F.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \operatorname{sen}(u) \frac{\partial u}{\partial t} + e^u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{coeficientes variáveis})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (\text{coeficientes variáveis})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{coeficientes constantes})$$

1.1.5 Linearidade

Segundo Magalhães (2016), uma equação diferencial parcial é dita linear se atua linearmente sobre a variável dependente e suas derivadas. Usualmente se classificam apenas as equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem, a forma geral de tal equação diferencial parcial é dada por

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = d(x) \quad (1.2)$$

em que $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e eventualmente pode-se ter $x_n = t$, quando se tratar de fenômenos que evoluem no tempo, a parte principal de uma EDP é a parte da equação que contém os termos com derivadas de maior ordem. Por exemplo, a parte principal da equação 1.2 é dada por

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

Uma classificação mais geral, quanto a linearidade, para equações diferenciais parciais de segunda ordem pode ser dada do seguinte modo, seja a EDP,

$$F(x, u, u_i, u_{ij}) = 0 \quad i, j = 1, \dots, n$$

em que $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u_i = \left. \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{i=1, \dots, n}$, $u_{i,j} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{i,j=1, \dots, n}$. Restringindo-se a subfamília dada por

$$Au + N(u) = 0 \quad (1.3)$$

no qual $Au = \sum a_{i,j}u_{i,j}$, é a parte principal. Nesse caso tem-se que:

- I) a equação (1.3) é quase-linear se $a_{i,j} = a_{i,j}(x, u, u_i)$, $N(u) = N(x, u, u_i)$;
- II) a equação (1.3) é semi-linear se $a_{i,j} = a_{i,j}(x)$, $N(u) = N(x, u, u_i)$;
- III) a equação (1.3) é linear se $a_{i,j} = a_{i,j}(x)$, $N(u) = b_i(x)u_i + c(x)u + d(x)$.

Quando não acontece nenhum dos casos acima diz-se que a EDP é não-linear.

1.1.6 Arquétipos Fundamentais da Física-Matemática

Essa é uma classificação para EDP de 2ª Ordem lineares. Para Magalhães (2016), é originária da classificação das cônicas realizadas na geometria analítica, por isso se aplica apenas as equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem, com duas variáveis independentes, ou seja, as equações do tipo

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (1.4)$$

nais quais A, B, C, D, E, F e G são funções de duas variáveis independentes $x_1 = x$, $x_2 = y$.

Em função dos valores de A, B e C , podemos classificar as EPD conforme a definição a seguir.

Definição 2. *Uma equação diferencial parcial do tipo 1.4 é:*

- i) *Elíptica se $B^2 - 4AC < 0$;*
- ii) *Parabólica se $B^2 - 4AC = 0$;*
- iii) *Hiperbólica se $B^2 - 4AC > 0$.*

As EDP Elípticas descrevem fenômenos em regime permanente (estacionário), enquanto as EDP Parabólicas descrevem fenômenos difusivos, já as EDP Hiperbólicas descrevem fenômenos ondulatórios.

Exemplos:

- a) $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow A = \alpha^2, B = C = 0 \Rightarrow B^2 - 4AC = 0$ (parabólica);
- b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow A = c^2, B = 0, C = -1 \Rightarrow B^2 - 4AC > 0$ (hiperbólica);
- c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow A = C = 1, B = 0 \Rightarrow B^2 - 4AC < 0$ (elíptica).

Uma mesma equação diferencial parcial pode mudar de arquétipo em diferentes regiões do seu domínio, por exemplo, a equação de Tricomi, da dinâmica dos gases

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow B^2 - 4AC = -4y \Rightarrow \begin{cases} \text{Elíptica, se } y > 0 \\ \text{Parabólica, se } y = 0 \\ \text{Hiperbólica, se } y < 0 \end{cases}$$

Conforme Magalhães (2016, p. 7), *cada um dos três arquétipos fundamentais possuem uma ou duas formas canônicas que podem ser obtidas através de uma mudança das coordenadas. Os representantes canônicos são os seguintes:*

i) Arquétipo elíptico:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right);$$

ii) Arquétipo parabólico:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right);$$

iii) Arquétipo hiperbólico:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \Psi \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Nos quais Φ e Ψ são lineares em u e suas derivadas.

Neste trabalho estamos interessados em estudar as Equações Elípticas, mais especificamente faremos uma abordagem numérica sobre a Equação de Laplace. Com efeito, no próximo capítulo apresentaremos as vantagens de se trabalhar através de uma perspectiva numérica, uma equação diferencial.

2

Métodos numéricos na resolução de EDP

Devido à complexidade ou inviabilidade de se obter uma solução analítica para muitas EDP torna-se útil calcular a solução através de métodos computacionais, obtendo-se uma aproximação da solução real da EDP, que poderá ser um resultado tão aproximado quanto possível.

Os métodos computacionais que são capazes de aproximar soluções analíticas das EDP são chamados de métodos numéricos.

Os principais métodos numéricos utilizados para resolução dessas equações são: Método das Diferenças Finitas, Método dos Elementos Finitos, Método dos Elementos de Contorno e Método dos Volumes Finitos.

Para tratar o modelo computacionalmente, é necessário expressar de forma adequada as equações na região do domínio em que elas são válidas. Como não podemos obter soluções numéricas sobre uma região contínua, devido aos infinitos pontos da mesma, inicialmente o domínio é discretizado, isto é, dividido em uma quantidade finita de pontos, conforme figura 2.1. Somente nesses pontos é que as soluções serão obtidas. Ao conjunto dos pontos discretos dá-se o nome de malha. A distribuição adequada dos pontos no domínio é fundamental para se obter uma solução numérica representativa. O resultado do processo de discretização é um conjunto de expressões algébricas, nesta etapa é que tratamos das condições auxiliares, que serão as condições de contorno (PVC) ¹ ou condições iniciais (PVI) ², conforme a especificação do problema em questão (FORTUNA, 2000, p.30).

Quanto maior for o número de pontos discretos, isto é, quanto mais fina for a malha, mais fiel ao modelo será o resultado numérico obtido (FORTUNA, 2000, p. 30). Na figura 2.2 tem-se as etapas do procedimento para a obtenção da solução através de método numérico.

Em nosso trabalho estamos interessados em estudar o método de diferenças finitas e obter uma aproximação numérica para a Equação de Laplace. Discutiremos mais detalhadamente esse método na próxima seção e apresentaremos as principais características que devem ser levadas em consideração para uma abordagem numérica em EDP.

¹Problema de Valor de Contorno (Problemas de Dirichlet e Neumann)

²Problema de Valor Inicial (Problema de Cauchy)

Figura 2.1: Domínio discretizado

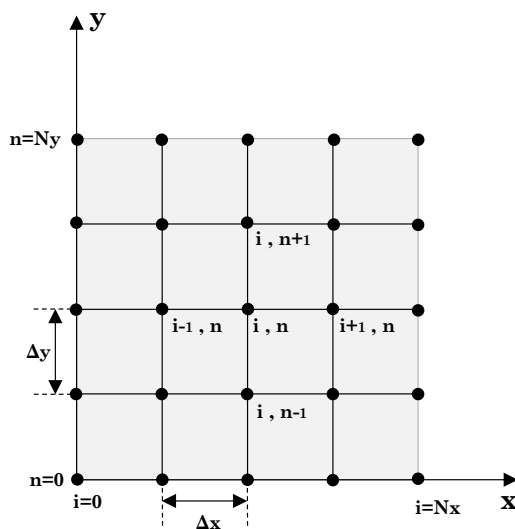
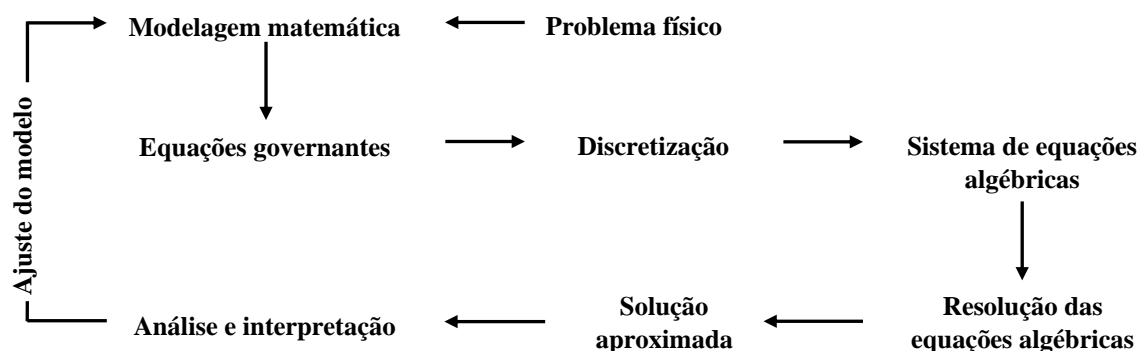


Figura 2.2: Etapas para a obtenção da solução numérica



Fonte: FORTUNA, 2000, p.31

2.1 Método das Diferenças Finitas

Nesta seção discutiremos o Método das Diferenças Finitas (MDF) e abordaremos os conceitos de erro, convergência, estabilidade e consistência, importantes no contexto da solução numérica de EDP.

Sabemos que uma derivada de primeira ordem de uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, pode ser dada pelo seguinte limite:

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

naturalmente, essa notação de limite consiste na noção de que poderíamos diminuir o incremento h tanto quanto queiramos, de modo que quando este fosse "infinitamente" pequeno, teríamos o valor da derivada em x .

Devido ao fato de os números armazenados na memória do computador serem finitos e em quantidades finitas (mesmo que grandes), não podemos representar o conceito de limite, pois não podemos considerar computacionalmente um valor "infinitamente" pequeno.

No entanto, podemos considerar computacionalmente o incremento h tão pequeno quanto possível, de modo que o limite acima que define a derivada pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\frac{df}{dx}(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \approx 0$$

deste modo, não teremos a derivada da função f no ponto x , e sim, uma aproximação para a derivada.

Apesar de simples, a ideia do método de diferenças finitas apresenta algumas sutilezas. Por exemplo, na análise que fizemos acima, não consideramos o quão longe a aproximação para a derivada pode estar da derivada analítica, tal distância representa o "erro" do método numérico. Para analisar de maneira mais profunda este método, vamos fazer uso de uma poderosa ferramenta analítica conhecida como **Fórmula de Taylor**, a qual nos permitirá trabalhar melhor o erro do método numérico de diferenças finitas para obter melhores aproximações para as derivadas analíticas.

2.1.1 Diferenças Finitas por Série de Taylor

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f \in C^n[a, b]$, ou seja, f é contínua em $[a, b]$ e derivável n -vezes com as n -derivadas também contínuas em $[a, b]$. Então, o Teorema de Taylor, nos permite escrever, para todo ponto $x \in [a, b]$ a seguinte fórmula:

$$f(x+h) = f(x) + h \frac{df}{dx}(x) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x) + r_n(h) \quad (2.1)$$

em que, r_n é chamado de resto.

Esta fórmula nos permite aproximar uma função para a vizinhança de um ponto usando suas derivadas. A ordem da maior derivada que aparece na Fórmula de Taylor é também a ordem da aproximação.

Devido a nossa aplicação, vamos considerar aproximações de segunda ordem pela Fórmula de Taylor, isto é, consideraremos uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f \in C^2[a, b]$, e teremos:

$$f(x+h) = f(x) + h \frac{df}{dx}(x) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x) + r_2(h)$$

Note que nesta fórmula podemos isolar o termo onde aparece a derivada de primeira ordem de modo que obtemos:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \left(\frac{h}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x) + \frac{r_2(h)}{h} \right)$$

Assim, teremos uma maneira de representar a derivada analítica semelhante vista na seção anterior, no entanto, aqui temos um conjunto de parcelas dado por

$$\frac{h}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + \frac{r_2(h)}{h}$$

esse conjunto de parcelas vai representar a distância que a aproximação da derivada está para a derivada analítica, a qual chamamos de **erro local de truncamento (ELT)**, ou seja,

$$ELT = \frac{h}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + \frac{r_2(h)}{h}$$

podemos ainda escrever,

$$ELT = h \left(\frac{1}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + \frac{r_2(h)}{h^2} \right) \quad (2.2)$$

e como $f \in C^2[a, b]$, então a derivada de segunda ordem de f é contínua, e da análise real temos que toda função contínua definida sobre conjuntos compactos (LIMA, 2007) é uma função limitada, em que existe $M > 0$, tal que

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$$

daí a expressão do erro 2.2, pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$ELT(h) \leq h \left(\frac{M}{2!} + \frac{r_2(h)}{h^2} \right)$$

Também da análise real, podemos ter que o resto da fórmula de Taylor verifica a seguinte propriedade (LIMA, 2007):

$$\frac{r_n(h)}{h^n} \rightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow 0$$

e por ser convergente, esta expressão é também limitada, ou seja, para algum $P_n > 0$

$$\frac{r_n(h)}{h^n} \leq P_n, \forall h \approx 0$$

Assim, podemos escrever a fórmula do erro da seguinte maneira

$$ELT(h) \leq hK$$

em que $K = \frac{M}{2!} + P_2$.

O que significa que o erro cai linearmente conforme h diminui. Podemos ainda usar

análise assintótica e dizer que h "domina" o erro, e escrever a seguinte notação:

$$ELT = O(h)$$

o que dá significado a dizermos que o erro é de primeira ordem.

Portanto, temos a seguinte aproximação para a derivada analítica:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

na qual podemos controlar a distância da aproximação para a derivada analítica através do erro e sabemos que a medida que diminuimos o incremento h o erro também tende a diminuir. Assim, teremos mais controle sobre a aproximação, o que será muito útil mais adiante nos estudos de métodos numéricos para resolução de Equações Diferenciais.

Além disso, esta fórmula vai nos possibilitar tomar o incremento h negativo, de modo que possamos aproximar a derivada analítica no ponto x usando pontos anteriores a ele. Conforme veremos nas próximas seções.

Vale destacar que para o ELT, quanto menor for o incremento h , melhor é o resultado da aproximação numérica, porém, quando o incremento se torna "muito pequeno", outro erro passa a dominar a solução numérica, fazendo com que o erro cresça e afete o resultado da aproximação numérica, é o **erro de arredondamento** do computador, portanto deve-se ter cautela quanto ao incremento a ser utilizado na aproximação numérica para a EDP a qual procura-se a solução, para saber mais veja Fontana (2019).

2.1.1.1 Diferença Finita Avançada de Primeira Ordem para a Primeira Derivada

Vamos considerar a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua e $f \in C^2[a, b]$ e dividiremos o intervalo $[a, b]$ em uma quantidade finita de pontos, ou seja, consideraremos o seguinte conjunto:

$$P[a, b] = \{x_0 = a, x_1 = x_0 + \Delta x, x_2 = x_0 + 2\Delta x, \dots, x_i = x_0 + i\Delta x, \dots, x_N = b\}$$

tal conjunto é chamado partição de $[a, b]$. Note que a quantidade de elementos N deste conjunto depende do incremento Δx que usarmos para definir a partição.

Podemos então usar a fórmula de Taylor para os elementos de uma partição da seguinte maneira:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + (\Delta x) \frac{df}{dx}(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) + r_2(\Delta x) \quad (2.3)$$

ao isolarmos $\frac{df}{dx}(x_i)$, obtemos

$$\frac{df}{dx}(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} + \left(-\frac{(\Delta x)}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) - \frac{r_2(\Delta x)}{\Delta x} \right) \quad (2.4)$$

Vamos denotar a primeira parcela da equação 2.4 de **Operador de Diferença Finita Avançada** e adotar a seguinte notação:

$$D_i^+(f) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \quad (2.5)$$

e os termos da segunda parcela em diante são o erro local de truncamento(ELT), conforme discutimos na seção anterior, ou seja,

$$O(\Delta x) = -\frac{(\Delta x)}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) - \frac{r_2(\Delta x)}{\Delta x} \quad (2.6)$$

Portanto, podemos escrever:

$$\frac{df}{dx}(x_i) = D_i^+(f) + O(\Delta x) \quad (2.7)$$

2.1.1.2 Diferença Finita Atrasada de Primeira Ordem para a Primeira Derivada

Uma outra forma de aproximarmos a derivada analítica é considerarmos a fórmula de Taylor para uma função $f \in C^2[a, b]$ usando um incremento h negativo, isto é,

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \Delta x \frac{df}{dx}(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) + r_2(-\Delta x) \quad (2.8)$$

ao isolarmos $\frac{df}{dx}(x_i)$, obtemos

$$\frac{df}{dx}(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} + \left(\frac{(\Delta x)}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) + \frac{r_2(-\Delta x)}{\Delta x} \right) \quad (2.9)$$

Vamos denotar a primeira parcela da equação 2.9 de **Operador de Diferença Finita Atrasada** e adotar a seguinte notação:

$$D_i^-(f) = \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.10)$$

e os termos da segunda parcela em diante são o erro local de truncamento(ELT), ou seja,

$$O(\Delta x) = \frac{(\Delta x)}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) + \frac{r_2(-\Delta x)}{\Delta x} \quad (2.11)$$

Portanto, podemos escrever:

$$\frac{df}{dx}(x_i) = D_i^-(f) + O(\Delta x) \quad (2.12)$$

2.1.1.3 Diferença Finita Central de Segunda Ordem para a Primeira Derivada

Para obter uma aproximação para a primeira derivada com um erro menor, podemos utilizar as séries de Taylor 2.3 e 2.8. Combinando as expressões podemos obter uma expressão de segunda ordem, ou seja, $O((\Delta x)^2)$, para a primeira derivada da função f .

De fato, fazendo a primeira equação menos a segunda, obtemos:

$$f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x) = 2\Delta x \frac{df}{dx}(x_i) + (r_2(\Delta) - r_2(-\Delta x)) \quad (2.13)$$

ao dividirmos por $2(\Delta x)$ e isolando $\frac{df}{dx}(x_i)$ obtemos

$$\frac{df}{dx}(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} + (r_2(\Delta) - r_2(-\Delta x)) \quad (2.14)$$

assim, vamos denotar a primeira parcela da equação 2.14 de **Operador de Diferença Finita Central** e adotar a seguinte notação:

$$D_i^0(f) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x)}{2(\Delta x)} \quad (2.15)$$

e os termos da segunda parcela em diante da equação 2.14 são o Erro Local de Truncamento:

$$ELT = r_2(\Delta x) - r_2(-\Delta x) \quad (2.16)$$

Como sabemos da análise real (LIMA, 2007) que

$$\frac{r_2(\Delta x)}{(\Delta x)^2} \rightarrow 0, \text{ quando } \Delta x \rightarrow 0$$

então, isso significa que o erro local de truncamento, tende pra zero mais rápido que $(\Delta x)^2$, ou seja, existe $K > 0$, tal que

$$ELT \leq (\Delta x)^2 K$$

de onde, usando a análise assintótica, podemos dizer que $(\Delta x)^2$ "domina" o ELT e podemos escrever:

$$ELT = O((\Delta x)^2)$$

o que dá significado a dizermos que para o Operador de Diferença Finita Central o erro é de segunda ordem.

Logo, a expressão de Diferença Finita Central é apresentada da seguinte forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i) = D_i^0(f) + O((\Delta x)^2) \quad (2.17)$$

2.1.1.4 Diferença Finita de Segunda Ordem para a Segunda Derivada

Para obter uma aproximação para a segunda derivada, podemos utilizar as séries de Taylor 2.3 e 2.8. Combinando as expressões podemos obter uma expressão de segunda ordem, ou seja, $O((\Delta x)^2)$, para a segunda derivada da função f .

Somando as equações 2.3 e 2.8, obtemos

$$f(x_i + \Delta x) + f(x_i - \Delta x) = 2f(x_i) + \frac{2(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) + (r_2(\Delta) + r_2(-\Delta x)) \quad (2.18)$$

ao dividirmos por $(\Delta x)^2$ e isolando $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_i)$, obtemos

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + (r_2(\Delta) + r_2(-\Delta x)) \quad (2.19)$$

assim, vamos denotar a primeira parcela da equação 2.19 de **Operador de Diferença Finita Central para a segunda derivada** e adotar a seguinte notação:

$$(D_i^0(f))^2 = \frac{f(x_i + \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (2.20)$$

e ao conjunto dos termos da segunda parcela em diante da equação 2.19 teremos o Erro Local de Truncamento:

$$ELT = r_2(\Delta) + r_2(-\Delta x) \quad (2.21)$$

Pelo mesmo motivo do Operador Diferença Finita Central para derivada de primeira ordem da seção anterior, teremos que

$$ELT = O((\Delta x)^2)$$

Logo, a expressão de Diferença Finita Central para a segunda derivada é apresentada da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i) = (D_i^0(f))^2 + O((\Delta x)^2) \quad (2.22)$$

Podemos ainda enunciar algumas propriedades que estes operadores vão verificar:

$$D_{i-1}^+ = D_i^-$$

$$D_{i+1}^- = D_i^+$$

$$2D_i^0 = D_i^+ + D_i^-$$

$$(D_i^+ D_i^-)(f) = (D_i^- D_i^+)(f) = (D_i^0(f))^2$$

2.1.2 Consistência, Estabilidade e Convergência de um Método Numérico

Quando se resolve uma EDP numericamente, é natural questionarmos se a solução calculada se aproxima de alguma forma da solução real da EDP. Esse questionamento não é sem sentido, pois na seção 2.1.1 vimos que o ELT influencia na qualidade da aproximação numérica de derivadas parciais (FORTUNA, 2000, p.118).

Estamos querendo determinar fundamentalmente, quando e sob que condições as soluções de equações lineares são representativas da solução real da EDP. Como será apresentada a seguir, a resposta a essa pergunta depende da consistência das equações de diferenças finitas, da estabilidade e convergência do método numérico empregado (FORTUNA, 2000, p.118).

2.1.2.1 Consistência

Uma característica importante de uma aproximação de diferenças finitas é que ela seja consistente com a EDP que ela discretiza, Na seção 2.1.1, vimos que, desprezando os erros de arredondamento nos cálculos, quanto menor espaçamento Δx melhor é a aproximação para as derivadas de uma função f . Isso equivale afirmar que, quando $\Delta x \rightarrow 0$, o ELT tende para zero, e recuperamos a partir da expressão discreta, a aproximação contínua original da derivada analítica (FORTUNA, 2000, p. 119).

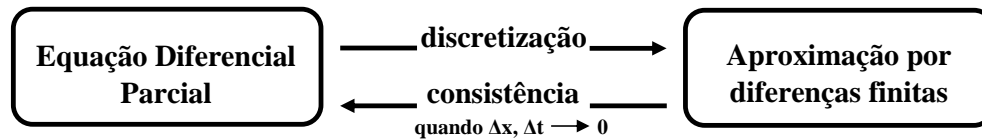
Mais precisamente, uma discretização é dita consistente com a equação diferencial parcial se o ELT tender a zero quando o Δx e Δt tende para zero.

Nos métodos de diferenças finitas a consistência é garantida graças a Fórmula de Taylor dada em 2.1, consonante o método apresentado na seção 2.1.1. Isto mostra o quanto esta fórmula é importante para aproximarmos derivadas analíticas por derivadas discretas.

Existem outros métodos usados para aproximar a derivada analítica, no entanto para aplicação destes métodos é necessário provar a consistência. Geralmente mostrar esta propriedade não é algo trivial, por isso, diversos autores se utilizam do método de diferenças finitas pois este já possui naturalmente a garantia da consistência numérica. De maneira geral, a relação entre discretização e consistência será mostrada na figura 2.3

(FORTUNA, 2000, p.119).

Figura 2.3: Relação entre discretização e consistência



Fonte: FORTUNA, 2000, p.120

2.1.2.2 Estabilidade

Segundo Fortuna (2000):

Um método numérico estável é aquele no qual quaisquer erros ou perturbações na solução não são amplificados sem limite. Essa amplificação quando presente faz com que o módulo dos valores da solução numérica cresça a cada etapa dos cálculos. Eventualmente nossa solução "explode". Como esse crescimento é puramente relativa ao método e não a física do problema ele deve ser evitado. Portanto, como afirma Fletcher (1992), o conceito de estabilidade está relacionada ao crescimento ou diminuição de erros introduzidos nos cálculos (p.121).

Para métodos que tratam de problemas transientes, a estabilidade garante que a solução numérica seja limitada, ou seja, o módulo dos valores das incógnitas não crescem arbitrariamente. Já para métodos iterativos de solução de sistemas lineares, um método estável é aquele que não diverge conforme as interações progredem, ou seja, fornece resultados que se aproximam cada vez mais da solução numérica real do sistema de equações (FORTUNA, 2000).

Exemplos mais diretos de perturbações e erros, são as condições de fronteiras ou iniciais aproximadas de forma incorreta, e acúmulo de erros de arredondamento cometidos pelo computador durante os cálculos. O primeiro caso é evitado com a correta discretização das condições auxiliares, o segundo não pode ser evitado, devendo, portanto, ser controlado. Os erros de arredondamento não devem crescer sem limites, a ponto de influir desastrosamente na solução numérica. O acúmulo desse erro pode ser evitado se seguirmos os critérios de estabilidade dos métodos numéricos, isto é, condições que garantam que o método numérico seja estável (FORTUNA, 2000).

Em relação a estabilidade os métodos numéricos podem ser classificados em (FORTUNA, 2000, p.123):

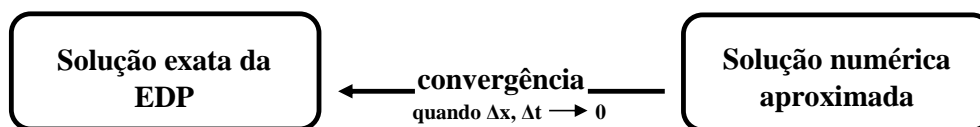
- a) **Condicionalmente estáveis:** para fornecerem soluções numéricas estáveis, devem satisfazer uma condição de estabilidade, métodos explícitos em geral são desse tipo;
- b) **Incondicionalmente estáveis:** não necessitam satisfazer quais critérios de estabilidade para produzirem soluções estáveis, em geral, métodos implícitos e semi-implícitos, e alguns métodos explícitos muito particulares pertencem a essa categoria;

c) **Incondicionalmente instáveis:** não existem valores de Δt que permitam a eles fornecerem em soluções estáveis, não devem ser utilizados.

2.1.2.3 Convergência

Sabemos que, se a discretização for consistente, então $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, o ELT se anula e recuperamos a derivada analítica original. Caso a solução numérica no domínio de interesse se aproxime da solução exata da equação diferencial parcial, conforme Δx e Δt tenda a zero, dizemos que o método numérico é convergente, conforme a figura 2.4 (FORTUNA, 2000).

Figura 2.4: Convergência de uma solução numérica



Fonte: FORTUNA, 2000, p.120

A consistência é uma condição necessária para convergência, pois, ao fazermos $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ e não recuperarmos a derivada analítica, então, a solução numérica não se aproximará da solução exata da EDP original, mas sim de outra, e não daquela com a qual discretização é consistente. No entanto, um esquema consistente é inútil se a solução numérica não for convergente (FORTUNA, 2000).

Para Fortuna (2000), convergência é uma qualidade extremamente importante, mas, ao mesmo tempo difícil de ser demonstrada diretamente. Em geral, é utilizada uma técnica indireta para demonstrar a convergência de um método numérico, baseado em um importante teorema (HIRSCH, 2007, p.286), a prova deste teorema pode ser encontrada em Morton & Mayers (2005).

Teorema 1. *(Teorema de Lax) Para a solução numérica de um problema linear de valor inicial bem posto, por uma discretização consistente, a estabilidade do método numérico é a condição necessária e suficiente para convergência. Ou seja,*

$$\text{consistência e estabilidade} \Leftrightarrow \text{convergência}$$

Portanto, para que possamos obter métodos numéricos que convirjam para a solução da EDP é necessário e suficiente que provemos a estabilidade e a consistência. De fato, utilizando-se dos métodos de diferenças finitas já temos a garantia da consistência numérica. No próximo capítulo, vamos propor um método numérico baseado em diferenças finitas para a equação de Laplace, tal método será naturalmente consistente, no entanto vamos garantir a estabilidade do método.

3

— Modelo Numérico para a Equação de Laplace —

3.1 Equação de Laplace

A equação de Laplace é uma importante equação diferencial parcial Elíptica que serve para modelar fenômenos da teoria do potencial, tais como potencial gravitacional, elétrico e fluídico.

Segundo Figueiredo (1987, p.245):

Definição 3. *Em um conjunto aberto $\Omega \in \mathbb{R}^n$, a equação de Laplace é definida por,*

$$\Delta f = 0$$

onde, Δ denota o operador de Laplace (ou, laplaciano),

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Aqui, a incógnita f é uma função de $\Omega \in \mathbb{R}^n$ em \mathbb{R} . Em muitos textos, o operador laplaciano é denotado por ∇^2 . Esta notação é motivada pelo fato de que $\Delta = \nabla \cdot \nabla$, onde ∇ denota o gradiente.

A equação ¹ analítica a ser modelada, na forma conservativa, pode ser escrita como,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.1}$$

Essa é uma equação diferencial parcial linear, de segunda ordem e homogênea, em que x e y são as variáveis independentes da equação e u representa a variável dependente

¹Equação de Laplace bidimensional

da equação e não há termo fonte.

Vamos considerar esta equação levando em consideração que a solução é conhecida na fronteira de Ω , ou seja, conhecemos a priori os valores $u(\partial\Omega)$.

Nestas condições, uma solução para a equação 3.1 pode ser dada por:

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (3.2)$$

3.2 Modelo Numérico para Equação de Laplace

Para avaliar a equação de Laplace numericamente vamos dividir o domínio em uma quantidade finita de pontos. Isto significa tomar pontos $x \in [x_0, N_x]$ e $y \in [y_0, N_y]$, onde o retângulo $[x_0, N_x] \times [y_0, N_y] \subset \Omega$, sendo Ω o domínio da Equação de Laplace. Com efeito, tomamos as seguintes partições para definir o retângulo:

$$P_x = \{x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_{N_x}\}$$

$$P_y = \{y_0, y_1, \dots, y_n, \dots, y_{N_y}\}$$

onde,

$$x_i = x_0 + ih_x, \quad i = 1, \dots, N_x$$

$$y_n = y_0 + nh_y, \quad n = 1, \dots, N_y$$

os parâmetros $h_x, h_y > 0$ são chamados *passos*. Além disso, o conjunto $P_x \times P_y$ é chamado de *grade* ou *malha*.

Note que as quantidades N_x e N_y indicam a quantidade de subintervalos que dividiremos o domínios do espaço x e y do domínio Ω da equação de Laplace e essas quantidades são determinadas pelos passos h_x e h_y respectivamente. Assim, quanto mais aumentarmos a quantidade de pontos na malha, diminuindo os passos h_x e h_y , esta se aproximará do retângulo $[x_0, N_x] \times [y_0, N_y] \subset \Omega$.

Vamos então encontrar a solução da equação de Laplace nos pontos (x_i, y_n) , isto é, estamos em busca de determinar o valor:

$$u(x_i, y_n) \equiv u_i^n$$

O método das diferenças finitas leva em consideração as derivadas numéricas, as quais também dependem dos passos, para encontrar tais soluções usando a equação diferencial original. Neste sentido, espera-se que quanto mais pontos tomarmos na malha, mais perto as soluções numéricas se aproximem da solução analítica.

O esquema numérico que usaremos neste trabalho é dado por:

$$\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h_x^2} + \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{h_y^2} = 0, \quad i = 1, \dots, N_x \text{ e } n = 1, \dots, N_y \quad (3.3)$$

Ou ainda,

$$(D_i^+ D_i^-)(u) + (D_n^+ D_n^-)(u) = 0, \quad i = 1, \dots, N_x \text{ e } n = 1, \dots, N_y$$

tal esquema é conhecido como *Esquema de Euler Implícito* para a equação de Laplace.

Consideramos também que conhecemos os valores da função na fronteira do retângulo $[x_0, N_x] \times [y_0, N_y] \subset \Omega$, ou seja,

$$u_i^0 = V_1$$

$$u_i^{N_t} = V_2$$

$$u_0^n = V_3$$

$$u_{N_x}^n = V_4$$

Afim de facilitar nossos cálculos, tomamos a seguinte restrição $h_x = h_y$ e o esquema 3.3 se torna:

$$u_{i+1}^n - 4u_i^n + u_{i-1}^n + u_i^{n+1} + u_i^{n-1} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N_x \text{ e } n = 0, 1, \dots, N_y \quad (3.4)$$

e ainda podemos escrever a equação 3.4 da seguinte forma,

$$u_{i+1}^n - 4u_i^n + u_i^{n+1} = -u_{i-1}^n - u_i^{n-1}, \quad i = 0, 1, \dots, N_x \text{ e } n = 0, 1, \dots, N_y \quad (3.5)$$

esta equação pode ser representada por um sistema linear. Por exemplo, se tomarmos $N_x = N_y = 3$, então teremos $i = 1, 2$ e $n = 1, 2$, isto é, vamos encontrar a solução em quatro pontos. Com efeito, o sistema se torna:

$$\begin{cases} u_2^1 - 4u_1^1 + u_1^2 = -u_0^1 - u_1^0 \\ -4u_2^1 + u_1^1 + u_2^2 = -u_2^0 - u_3^1 \\ u_2^2 - 4u_1^2 + u_1^1 = -u_0^2 - u_1^3 \\ -4u_2^2 + u_1^2 + u_2^1 = -u_3^2 - u_2^3 \end{cases} \quad (3.6)$$

Podemos reescrever este sistema na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_0^1 - u_1^0 \\ -u_2^0 - u_3^1 \\ -u_0^2 - u_1^3 \\ -u_3^2 - u_2^3 \end{bmatrix}$$

Portanto, para encontrarmos a solução numérica, teremos que inverter a matriz dos coeficientes. neste sentido, métodos numéricos de inversão de matrizes são extremamente úteis.

Além disso, matrizes com esta forma sempre admitirão inversas, pois são matrizes diagonais e quadradas (RINCON; FAMPA, 2016). Portanto, o método numérico 3.3 de Euler Implícito é sempre estável e como deduzimos que os métodos que se utilizam de diferenças finitas são consistentes, temos então via Teorema 1 que este método é convergente.

Vamos encontrar o sistema para $N_x = N_y = 4$, de onde, $i = 1, 2, 3$ e $n = 1, 2, 3$, isto é, vamos encontrar a solução para nove pontos. Assim, o sistema 3.6 se torna:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2^1 - 4u_1^1 + u_1^2 = -u_0^1 - u_1^0 \\ u_3^1 - 4u_2^1 + u_1^1 + u_2^2 = -u_2^0 \\ -4u_3^1 + u_2^1 + u_3^2 = -u_3^0 - u_4^1 \\ u_2^2 - 4u_1^2 + u_1^3 + u_1^1 = -u_0^2 \\ u_3^2 - 4u_2^2 + u_1^2 + u_2^3 + u_2^1 = 0 \\ -4u_3^2 + u_2^2 + u_3^3 + u_3^1 = -u_4^2 \\ u_2^3 - 4u_1^3 + u_1^2 = -u_0^3 - u_1^4 \\ u_3^3 - 4u_2^3 + u_1^3 + u_2^2 = -u_2^4 \\ -4u_3^3 + u_2^3 + u_3^2 = -u_4^3 - u_3^4 \end{array} \right.$$

o qual podemos considerar na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_0^1 - u_1^0 \\ -u_2^0 \\ -u_3^0 - u_4^1 \\ -u_0^2 \\ 0 \\ -u_4^2 \\ -u_0^3 - u_1^4 \\ -u_2^4 \\ -u_4^3 - u_3^4 \end{bmatrix}$$

Seguindo este raciocínio podemos encontrar a forma geral para o sistema na forma

matricial, a qual é dada por:

$$\begin{bmatrix}
 -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 1 & -4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & 1 & -4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 1 \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1^1 \\
 u_2^1 \\
 \vdots \\
 u_{N_x-1}^1 \\
 u_1^2 \\
 u_2^2 \\
 \vdots \\
 u_{N_x-1}^2 \\
 \vdots \\
 u_1^{N_y-1} \\
 u_2^{N_y-1} \\
 \vdots \\
 u_{N_x-1}^{N_y-1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -u_0^1 - u_1^0 \\
 -u_2^0 \\
 \vdots \\
 -u_{N_x-2}^0 \\
 -u_{N_x-1}^0 - u_{N_x}^1 \\
 -u_0^{N_y-2} \\
 0 \\
 -u_{N_x}^{N_y-2} \\
 -u_0^{N_y-1} - u_1^{N_y} \\
 -u_2^{N_y} \\
 \vdots \\
 -u_{N_x-2}^{N_y} \\
 -u_{N_x}^{N_y-1} - u_{N_x-1}^{N_y}
 \end{bmatrix}$$

Notamos que a matriz dos coeficientes é de dimensão $(N_{x-1})^2 \times (N_{y-1})^2$ (lembrando que estamos tomando $N_y = N_x$, onde esses valores determinam a quantidade de subintervalos que dividimos os domínios espaço x e y , respectivamente) o que faz com que a inversão dessas matrizes se torne inviável analiticamente, assim é necessário a aplicação de métodos numéricos de inversão.

Na literatura, existem diversos métodos numéricos que podem ser utilizados para a inversão de matrizes como a apresentada para a Equação de Laplace, tais métodos apresentam diversas vantagens e desvantagens.

Note que a matriz dos coeficientes é do tipo **esparsa**, ou seja, possui a maioria dos termos iguais a zero; fazendo com que a aplicação de métodos para inverter esta matriz tenha um custo computacional altíssimo a medida que aumentamos a quantidade de pontos na malha.

Além disso, tais matrizes apresentam a dificuldade de que as diagonais imediatamente acima e imediatamente abaixo da diagonal principal mudam conforme mudamos a quantidade de pontos na malha. Também, temos duas diagonais que se "movimentam" conforme mudamos a quantidade de pontos na malha. Assim, métodos que buscam utilizar apenas as diagonais que são diferentes de zero para diminuir os custos computacionais também se tornam mais complexos.

Portanto, as particularidades da matriz dos coeficientes dificultam a adoção de um método computacional para inversão da mesma. Mais detalhes acerca dos métodos usados para a inversão dessas matrizes podem ser encontrados em Fontana (2019).

Neste trabalho, estamos interessados apenas na exemplificação da aplicação dos métodos de diferenças finitas para equações diferenciais, em especial, a equação de Laplace. Neste sentido, não nos aprofundaremos nas discussões dos métodos numéricos e suas particularidades e adotaremos um método que consiste na decomposição LU da matriz dos coeficientes e na resolução direta dos sistemas que surgem. Mais detalhes podem ser encontrado em Fortuna (2000).

3.3 Simulações Numéricas

Para aplicarmos o Método de Diferenças Finitas na Equação de Laplace, as condições auxiliares tornam-se um requisito fundamental na obtenção da solução numérica aproximada, neste caso estaremos adotando as condições de contorno (PVC), nas quais temos as condições de contorno de Dirichlet, que especificam valores constantes na fronteira $\delta\Omega$ da região do domínio Ω discretizado, na figura 3.1 visualiza-se a região do domínio e a delimitação da fronteira. PVC de Dirichlet são típicos de EDP Elípticas, e a Equação de Laplace em particular. Para mais detalhes sobre PVC do tipo Dirichlet, veja Krantz (1988).

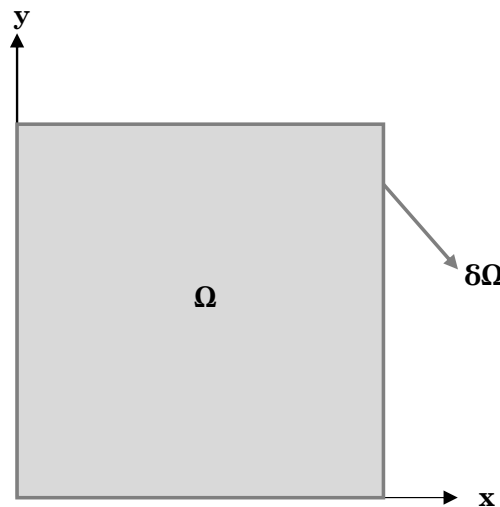


Figura 3.1: Região do domínio Ω e fronteira do domínio $\delta\Omega$

Em nossas simulações usamos primeiro as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= -\frac{1}{2\pi} \ln(x) \\
 u(x, T) &= -\frac{1}{2\pi} \ln(\sqrt{x^2 + T^2}) \\
 u(0, y) &= -\frac{1}{2\pi} \ln(y) \\
 u(L, y) &= -\frac{1}{2\pi} \ln(\sqrt{L^2 + y^2})
 \end{aligned}$$

Tais condições são obtidas considerando conhecida a solução da equação na fronteira do domínio e são importantes para avaliar o erro do método e a sua capacidade de convergência. Neste sentido, notamos através da figura 3.2, 3.3 e 3.4 que a solução numérica se aproxima da solução analítica. No entanto, nestas simulações percebe-se que o método não converge rapidamente, de fato, esta é uma característica dos métodos implícitos, nos quais conseguimos a garantia da convergência, mas perdemos o baixo custo computacional e a velocidade de convergência.

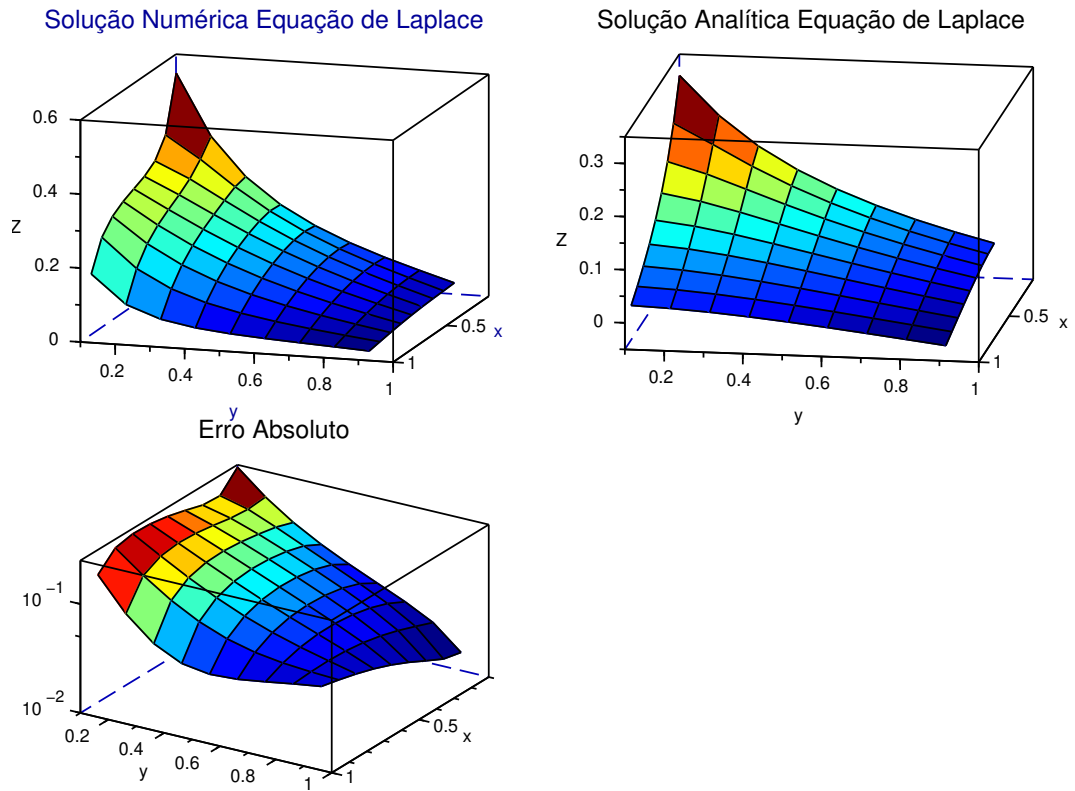


Figura 3.2: Simulação numérica para Equação de Laplace com $\Delta x = \Delta y = 0.1$.

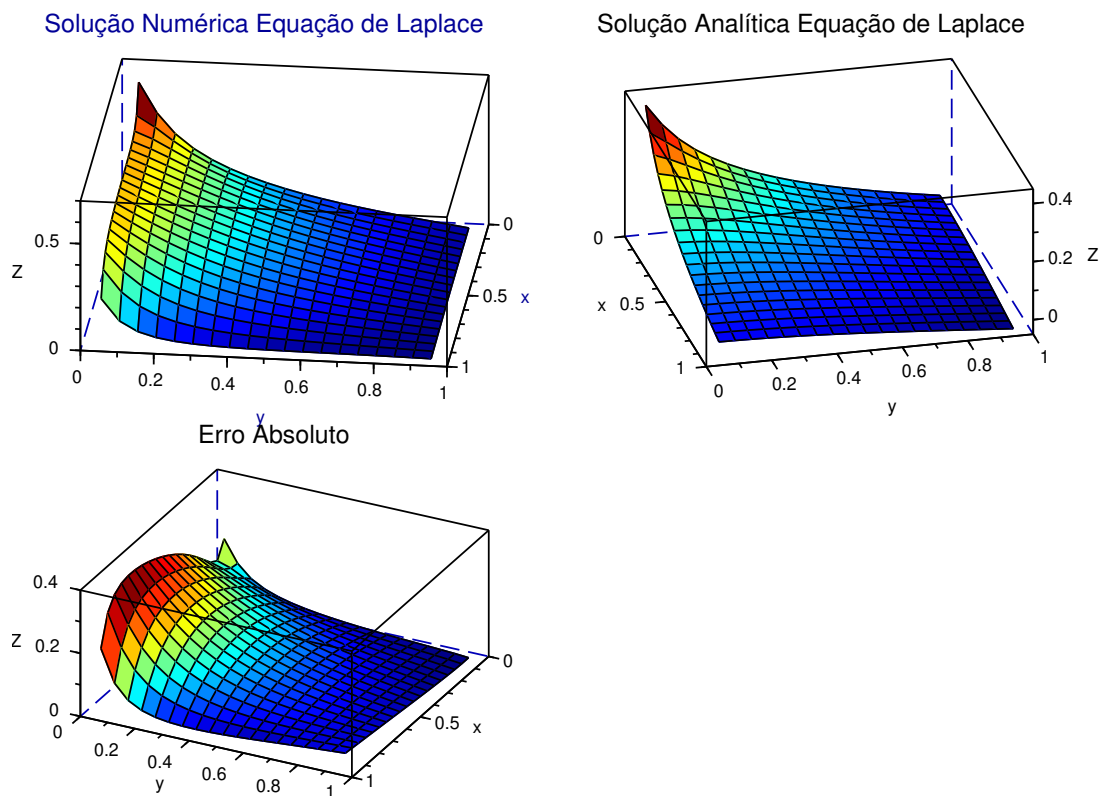


Figura 3.3: Simulação numérica para Equação de Laplace com $\Delta x = \Delta y = 0.005$.

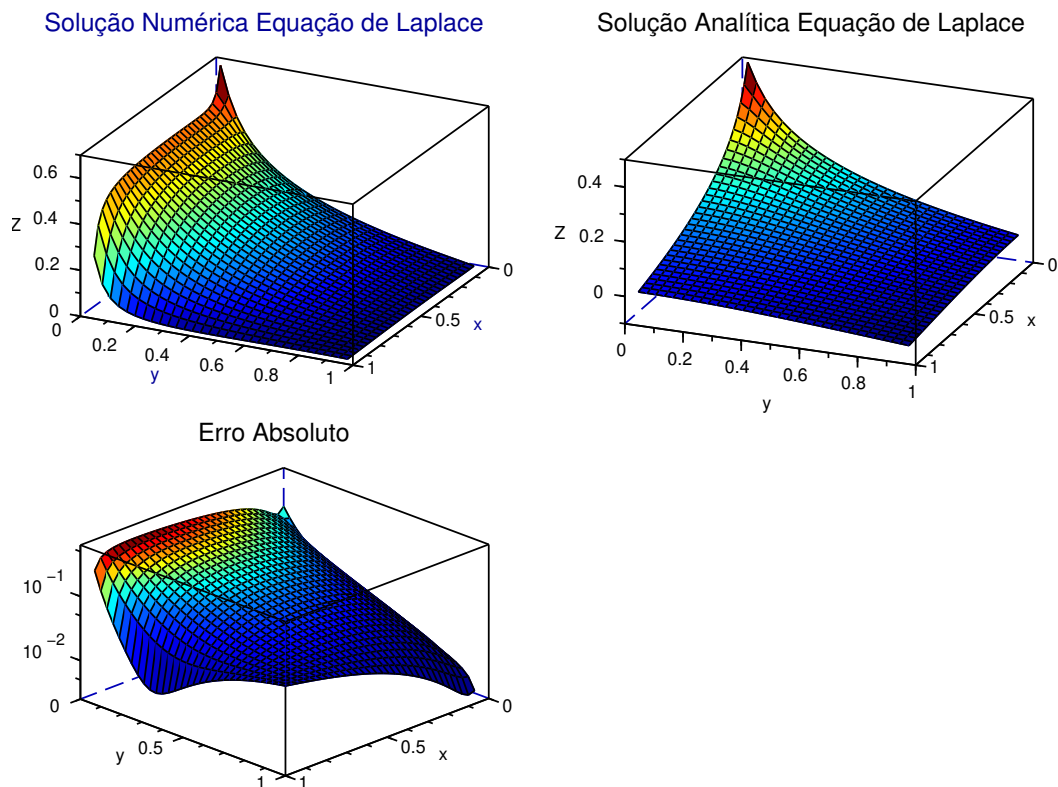


Figura 3.4: Simulação numérica para Equação de Laplace com $\Delta x = \Delta y = 0.003$.

Além disso, verificando estas figuras, percebe-se que a solução numérica apresenta uma certa deformidade em uma fronteira próxima a condição inicial, isso se deve a dificuldade do método em propagar a condição inicial. Tais problemas podem ser considerados instabilidades exclusivamente numéricas, as quais não tem ligação com a análise matemática. Por isso, são chamados de **instabilidades espúrias**.

Podemos também utilizar as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \\ u(x, T) &= 1 \\ u(0, y) &= 0 \\ u(L, y) &= 0 \end{aligned}$$

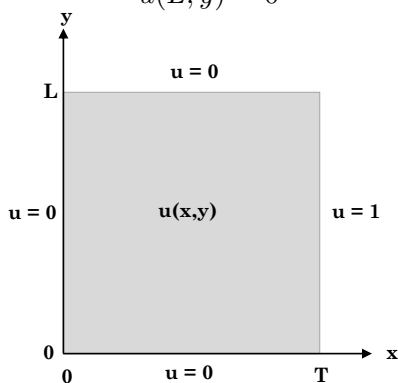


Figura 3.5: Valores de contorno na região do domínio

Na figura 3.5 verifica-se a disposição para os valores das condições de contorno na região do domínio, considere-se esta região uma chapa de metal, no formato retangular, isolado nas faces e trocando calor somente nas bordas, troca dada pelos valores mencionados acima. Quando a chapa está em equilíbrio térmico, em cada ponto interno na chapa é satisfeito

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Tais condições são tomadas quando deseja-se simular uma distribuição de temperatura em um sistema de duas dimensões. Com efeito, na figura 3.6, podemos ver que a Equação de Laplace modela como esperado a distribuição de temperatura em uma superfície de duas dimensões onde é aquecido.

Também podemos observar na figura 3.7 um situação semelhante onde aquecemos dois lados opostos na estrutura 2D e percebemos o mesmo comportamento para a solução, o qual modela como esperado a distribuição de calor.

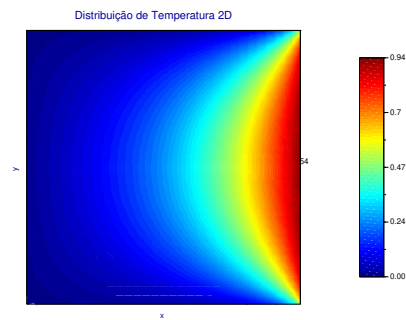


Figura 3.6: Simulação numérica para Equação de Laplace com $\Delta x = \Delta y = 0.005$.

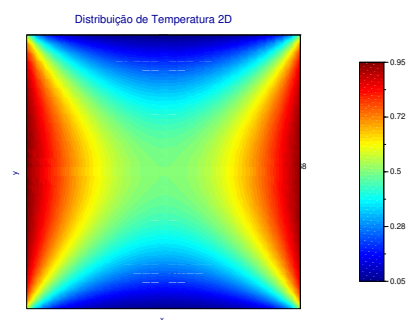


Figura 3.7: Simulação numérica para Equação de Laplace com $\Delta x = \Delta y = 0.005$.

Considerações Finais

Este trabalho buscou introduzir de forma básica a abordagem numérica nas equações diferenciais dando ênfase às parciais através da aplicação proposta. Aqui, mostramos o processo de utilização do método de diferenças finitas em uma equação diferencial parcial elíptica, mostrando através das simulações numéricas realizadas, a eficiência do método empregado, contudo deve-se atentar para as particularidades dos métodos numéricos para que a solução seja satisfatória.

Das particularidades dos métodos numéricos destacamos a correta discretização do domínio da equação, no caso do método das diferenças finitas, a escolha apropriada das equações de diferenças finitas, a definição correta das condições auxiliares, que podem ser as condições de contorno ou as condições iniciais, a implementação computacional do método a ser utilizado, e após a simulação processada no computador, a análise dos resultados, da solução aproximada e do erro, para o ajuste do modelo matemático, e assim a obtenção da solução da EDP apreciada.

Neste trabalho, nas simulações, foi implementado a programação do método no software Scilab, pelo método das diferenças finitas, discretizou-se e resolveu-se a equação de Laplace bidimensional, um caso de propagação do calor em uma chapa de metal, foi usado a discretização de uma malha uniforme. Os resultados obtidos no mapa de cores (ver figuras 3.2 a 3.4) comprovaram que o programa foi eficaz. Utilizou-se diferentes valores de contorno para mostrar as mudanças que ocorrem nos resultados, comparar as figuras 3.6 e 3.7.

Verificou-se que através do método de diferenças finitas pode-se obter equações algébricas eficientes para soluções numéricas de problemas estacionários, métodos de discretização que utilizam técnicas de correção ao serem submetidos a um número maior de iterações convergem em um tempo mais demorado e geram malhas mais refinadas de melhores resultados.

Como sugestão de trabalhos futuros, temos a busca de métodos que visem otimizar o tempo de processamento computacional, métodos de inversão de matrizes, para que tenhamos melhores soluções com um menor custo computacional.

Referências

- BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JR, W. C. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo: Editora Harbra, 1988. 8
- FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1987. 25
- FONTANA Éliton. *Introdução ao Método de Diferenças Finitas com Aplicações em Engenharia Química*. Curitiba: editora, 2019. Disponível em: <<http://>>. Acesso em: 12 jan. 2020. 18, 29
- FORTUNA, A. de O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos básicos e aplicações*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000. 14, 15, 22, 23, 24, 29
- HIRSCH, C. *Numerical Computation Of Internal and External Flows*. New Jersey-EUA: JohhWiley and Sons, 2007. 24
- KRANTZ, S. G. *Complex Variables: A physical approach*. Boston: Birkhäuser, 1988. Disponível em: <<https://www.math.wustl.edu/~sk/books/test.pdf>>. Acesso em: 23 jan. 2020. 30
- LIMA, E. L. *Análise Real: Funções de uma variável*. vol. 1. 9 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. 17, 20
- MAGALHÃES, P. M. D. de. *Introdução as Equações Diferenciais Parciais*. 2016. Disponível em: <<http://professor.ufop.br/sites/default/files/freud/files/edp-cap1.pdf>>. Acesso em: 28 nov. 2019. 9, 10, 11, 12, 13
- MELO, K. J. M. de. Aplicação do método das diferenças finitas explícito na solução da equação do calor para o caso transiente e unidimensional. *Monografia (Graduação em Ciência e Tecnologia) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Campus Angicos.*, Angicos, 2011. Disponível em: <<http://www2.ufersa.edu.br/portal/view/uploads/setores/232/arquivos/Kelly%20Jacqueline%20Moura%20de%20Melo.pdf>>. Acesso em: 10 jan. 2020. 8
- MORTON, K. W.; MAYERS. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 24
- RINCON, M.; FAMPA, M. Álgebra linear: Matriz inversa. Notas de aula. Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: <https://dcc.ufrj.br/~rincon/Disciplinas/Algebra%20Linear/Aula_009.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2020. 28

Apêndice



Código-fonte usado na aplicação

Código A.1: Método de diferenças finitas para a Equação de Laplace

```
1
2
3 //Programa para discretizar Equação de Laplace
4
5 x0=0; // valor inicial do eixo x
6 xN=0.1; // valor final do eixo x
7 dx=0.01; // passo no eixo x
8 y0=0; // valor inicial do eixo y
9 yN=0.1; // valor final do eixo y
10 dy=0.01; // passo do eixo y
11 x=[x0:dx:xN]; // construção do vetor x
12 y=[y0:dy:yN]; // construção do vetor y
13 nx=length(x); // tamanho do eixo x
14 ny=length(y); // tamanho do eixo y
15 Nx=(nx-2)^2; // variável para matriz dos coeficientes, tiramos os
    // extremos pois são as condições de contorno
16 Ny=(ny-2)^2; // variável para matriz dos coeficientes, tiramos os
    // extremos pois são as condições de contorno
17 A=zeros(Nx,Ny); //
18
19 ///////////////CONDIÇÕES DE CONTORNO //////////////////////
20 a=nx-2;
21 g1=zeros(a); // condição u(x,0)
22 for i=1:a
23     g1(i)=0;
24 end
25
26 g2=zeros(a);
27 for i=1:a
28     g2(i)=2; // condição u(x,T)
29 end
30
31 g3=zeros(a);
```

```

32 for i=1:a
33 g3(i)= -3; // condição u(0,y)
34 end
35
36 g4=zeros(a);
37 for i=1:a
38 g4(i)=2; // condição u(L,y)
39 end
40
41 //////////////////////////////////////
42
43 ////////////////////////////////////// CONSTRUCAO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
44 for i=1:Nx
45 for j=1:Ny
46 if i==j
47 A(i,j)=-4; // diagonal principal
48 end
49
50 if i==j+1
51 A(i,j)=1; // diagonal inferior sem os zeros
52 end
53
54 if i==j-1
55 A(i,j)=1; // diagonal superior sem os zeros
56 end
57
58 if i==j+(nx-2)
59 A(i,j)=1; // segunda diagonal inferior
60 end
61
62 if i==j-(nx-2)
63 A(i,j)=1; // segunda diagonal superior
64 end
65
66 end
67
68 end
69
70 for i=(nx-2):(nx-2):Nx-1
71 for j=(nx-2):(nx-2):Ny-1
72 A(i+1,j)=0;
73 A(i,j+1)=0; // colocando os zeros nas primeiras diagonais superior e
       inferior
74 end
75 end
76 //
       //////////////////////////////////////

```



```

121 b1=1;
122 b2=1;
123 for i=a:-1:1
124 for j=1:a
125 S(i,j)=C(b1); // AQUI FAZEMOS O VETOR SE TORNAR UMA MATRIZ QUE SERA A
    MATRIZ DA SOLUCAO
126 b1=b1+1;
127 b2=b1;
128 end
129 b1=b2;
130
131 end
132
133 //disp(C)
134 //disp(S)
135
136
137 ///////////////////////////////////////////////////////////////////
138
139 /////////////////////////////////////////////////////////////////// solucao analitica
    ///////////////////////////////////////////////////////////////////
140 S2=zeros(a,a);
141 x2=x(2:nx-1);
142 y2=y(2:nx-1);
143 for i=1:a
144 for j=1:a
145 S2(i,j)=-((1/(2*pi))*log(sqrt(x2(i)^2+y2(j)^2))); // ESSA SOLUCAO PODE
    SER OBTIDA ANALITICAMENTE
146 end
147 end
148
149 ///////////////////////////////////////////////////////////////////
150
151 contour2d(x2,y2,S,10,rect=[0,0,12,12]); // FAZ APARECER AS CURVAS DE
    NIVEL
152 Sgrayplot(x2,y2,S,strf="042"); // PLOTA EM 2D DE CIMA
153 title('Distribuicao de Temperatura 2D','fontsize',3,'color','blue'); //
    TITULO
154 xlabel('x','color','blue'); // DESCRICAO NO EIXO DO X
155 ylabel('y','color','blue'); // DESCRICAO NO EIXO Y
156 xset("colormap",jetcolormap(64)); // BARRA DE COR
157 colorbar(min(S),max(S));

```