



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SALINÓPOLIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

DENILSON DA CRUZ FERREIRA

Aplicação de massa ADM e Centro de Massa

SALINÓPOLIS

2025

DENILSON DA CRUZ FERREIRA

Aplicação de massa ADM e Centro de Massa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática, do Campus Universitário de Salinópolis, da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago.

SALINÓPOLIS

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F383a Ferreira, Denilson da Cruz.
Aplicação de Massa ADM e Centro de Massa / Denilson da
Cruz Ferreira, . — 2025.
50 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago
Trabalho de Conclusão (Graduação) - Universidade Federal do
Pará, Campus Universitário de Salinópolis, Curso de Licenciatura
em Matemática, Salinópolis, 2025.

1. Matemática. 2. Variedades Assintoticamente Planas. 3.
Aplicações. 4. Massa ADM. 5. Centro de Massa. I. Título.

CDD 530.15

Denilson da Cruz Ferreira


Aplicação de massa ADM e Centro de Massa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática, vinculado ao Campus Universitário de Salinópolis, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.


Aprovado em: 16 / 05 / 2025

Conceito: Excelente


BANCA EXAMINADORA:

Documento assinado digitalmente
 **AMILCAR MONTALBAN SAYAGO**
Data: 23/05/2025 14:44:18-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago (Orientador)
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Documento assinado digitalmente
 **ANDERSON DE JESUS ARAUJO RAMOS**
Data: 23/05/2025 08:40:46-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Documento assinado digitalmente
 **JEZIEL DO NASCIMENTO CORREIA**
Data: 22/05/2025 20:40:35-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jeziel do Nascimento Correia
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Este trabalho é dedicado à minha mãe Gilda
Pires da Cruz

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus pelo dom da vida, pois sem ele eu nada seria e por ter guiado meus passos durante esse ciclo acadêmico.

A minha mãe pela motivação e apoio de sempre nos meus estudos, e por ter me auxiliado nesses anos de faculdade.

Ao meu orientador Prof. Dr. Amilcar Montalban Sayago pela excelente orientação na elaboração deste trabalho e por ser bastante paciente comigo durante esse período.

Agradeço também a todos os professores que fizeram parte desse processo de formação, foram de muita importância e ajuda.

Gostaria de agradecer ao prof. Dr. Caio Filipe Bezerra Macedo por eu ter sido seu aluno de Iniciação Científica por um período, suas orientações, conselhos e formas de estudos foram de muita importância para mim.

Agradeço a toda minha família e amigos que me deram apoio nesses longos do curso.

Agradeço a todos!

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar a definição da massa ADM (Arnowitt-Deser-Misner) e aplicá-la ao cálculo da massa e do centro de massa da variedade exterior de Schwarzschild, uma solução essencial da relatividade geral. A massa ADM é uma quantidade geométrica que se associa ao comportamento assintoticamente plano de uma variedade Riemanniana, sendo interpretada como a massa total de um sistema isolado na relatividade geral. Para isso, desenvolvemos as ferramentas matemáticas que são necessárias para esse entendimento, começando com o estudo de campos vetoriais, operadores diferenciais como gradiente e divergente, e introduzindo a formulação do teorema da divergência. Em seguida, estendemos esses conceitos ao contexto de tensores de segunda ordem, desse modo nos permitindo aplicar o teorema da divergência à derivação da fórmula da massa ADM. Por último, aplicamos essa teoria à variedade exterior de Schwarzschild e demonstramos que a massa ADM encontrada coincide com o parâmetro de massa presente na métrica. Também discutimos a definição de centro de massa para variedades assintoticamente planas e mostramos como ele se manifesta na geometria de Schwarzschild.

Palavras-chave: campos vetoriais, teorema da divergência, tensores, variedades assintoticamente planas, massa ADM, centro de massa, variedade exterior de Schwarzschild.

ABSTRACT

This work aims to present the definition of the ADM (Arnowitt–Deser–Misner) mass and apply it to the calculation of the mass and center of mass of the exterior Schwarzschild manifold, an essential solution of general relativity. The ADM mass is a geometric quantity that is associated with the asymptotically flat behavior of a Riemannian manifold, being interpreted as the total mass of an isolated system in general relativity. To this end, we develop the mathematical tools that are necessary for this understanding, starting with the study of vector fields, differential operators such as gradient and divergence, and introducing the formulation of the divergence theorem. Next, we extend these concepts to the context of second-order tensors, which allows us to apply the divergence theorem to derive the ADM mass formula. Finally, we apply this theory to the exterior Schwarzschild manifold and demonstrate that the ADM mass found coincides with the mass parameter present in the metric. We also discuss the definition of the center of mass for asymptotically flat manifolds and show how it manifests in Schwarzschild geometry.

Keywords: vector fields, divergence theorem, tensors, asymptotically flat manifolds, ADM mass, center of mass, Schwarzschild exterior manifold.

Lista de Símbolos

∇f Vetor gradiente.

M^3 Variedade diferenciável tridimensional.

$\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{B}_{\frac{m}{2}}^3$ Espaço tridimensional euclidiano com uma bola de raio $\frac{m}{2}$ removida.

ν^j Componente do vetor normal exterior à esfera S_r^2 .

C_g^α Centro de massa da variedade, para $\alpha = 1, 2, 3$.

m Massa de Schwarzschild.

m_{ADM} Massa ADM da variedade.

\vec{n} Vetor unitário normal à superfície.

$T: E \rightarrow F$ Transformação linear do espaço vetorial E em F .

$\nabla \cdot \vec{v}$ Divergente de um campo vetorial.

$v_i = T_{ij}u_j$ Transformação de vetor \vec{u} via tensor T em notação de componentes.

$\vec{u} \otimes \vec{v}$ Produto tensorial dos vetores \vec{u} e \vec{v} (gera tensor de 2^a ordem).

$T(\vec{v}) = T\vec{v}$ Imagem do vetor \vec{v} pela transformação T .

δ_{ij} Delta de Kronecker.

δ Métrica euclidiana padrão (a métrica plana).

\mathbb{R}^n Espaço euclidiano n-dimensional.

g Métrica definida por $(1 + \frac{2}{m})^4 \delta$.

S_r^2 Esfera de centro na origem e de raio r no espaço \mathbb{R}^n .

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Ilustração do gradiente.	15
Figura 1.2 Campo Vetorial em \mathbb{R}^3	17
Figura 1.3 $\vec{v}(x, y, z) = z\vec{k}$ em \mathbb{R}^3	17
Figura 1.4 $\vec{v}(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ em \mathbb{R}^3	18
Figura 1.5 $\vec{v}(x, y, z) = (-y, x)$ em \mathbb{R}^3	19
Figura 2.1 Superfície do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ acima do plano $z = 0$	30
Figura 2.2 Teorema da Divergência	32
Figura 3.1 Visualização da variedade de Schwarzschild tridimensional.	40
Figura 3.2 Centro de Massa da Variedade Exterior de Schwarzschild	47

SUMÁRIO

Lista de Símbolos	8
INTRODUÇÃO	11
1 PRELIMINARES	13
1.1 Plano Tangente à Superfície	13
1.2 Vetor Gradiente	14
1.3 Campo Vetorial	17
1.3.1 Divergente de um Campo Vetorial	18
1.4 Tensor	19
1.4.1 Componentes de um Tensor	21
1.4.2 Tensor Simétrico	23
1.4.3 Produto Tensorial de Vetores	24
1.4.4 Traço de um Tensor	25
1.5 Gradiente de um Campo Tensorial	26
1.6 Divergente de um Campo Tensorial	27
2 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA DE GAUSS	29
2.1 Teorema da Divergência de um Campo Vetorial	32
2.2 Teorema da Divergência de um Campo Tensorial	35
3 APLICAÇÕES	37
3.1 Variedades Diferenciáveis	37
3.2 Variedades Assintoticamente Planas	38
3.3 Massa ADM e Centro de Massa da Variedade Exterior de Schwarzschild	41
3.3.1 Massa ADM da Variedade Exterior de Schwarzschild	41
3.3.2 Centro de Massa da Variedade Exterior de Schwarzschild	44
4 CONCLUSÃO	48

INTRODUÇÃO

A teoria da relatividade geral formulada por Albert Einstein, em 1915, marcou uma grande mudança no que se entendia sobre a teoria da gravidade de Newton, no qual se descreve como uma manifestação geométrica da curvatura do espaço-tempo. Em que, diferente da mecânica newtoniana, onde a massa de um corpo é uma grandeza local bem definida, na teoria da relatividade geral o conceito de massa torna-se sutil, especialmente para sistemas isolados que não possuem simetrias globais.

Nesse contexto, exploraremos a aplicação da massa ADM (Arnowitt-Deser-Misner) e o conceito de centro de massa, com foco no cálculo da massa ADM do fim exterior da variedade de Schwarzschild. O estudo foi inicialmente desenvolvido por Arnowitt, Deser e Misner [1], que investigaram sistemas gravitacionais isolados sob a perspectiva Hamiltoniana, resultando em descobertas significativas sobre a massa ADM, um invariante geométrico crucial. Essa definição coincide com a massa total do espaço de Schwarzschild, com a adição de uma constante.

Os autores Arnowitt, Deser e Misner, em seu trabalho original “Coordinate invariance and energy expressions in general relativity” de 1961 [1], abordaram a questão da energia e do momento em sistemas gravitacionais isolados. Eles demonstraram que a massa total de um sistema isolado pode ser definida a partir do comportamento assintótico do campo gravitacional, o que levou à definição da massa ADM. Esta massa representa a energia total do espaço-tempo e é um invariante sob transformações de coordenadas assintoticamente euclidianas. Essa formulação foi crucial para estabelecer uma conexão entre a teoria da relatividade geral e a mecânica clássica, fornecendo uma base sólida para a compreensão da energia em um espaço-tempo curvo. Além disso, Arnowitt, Deser e Misner também definiram o momento ADM e o centro de massa ADM, fornecendo um conjunto completo de grandezas que caracterizam um sistema gravitacional isolado de forma global [1].

O significado físico da massa ADM é profundo. Ela quantifica a energia de um sistema isolado em um espaço-tempo assintoticamente plano, um conceito que não é trivial na relatividade geral devido à não-linearidade das equações de campo de Einstein [1]. Diferente da mecânica newtoniana, onde a massa é intrinsecamente ligada à matéria local, na relatividade geral a massa total de um sistema é uma propriedade do espaço-tempo como um todo. A massa ADM provou ser uma ferramenta essencial para o estudo da energia em sistemas gravitacionais, como buracos negros e ondas gravitacionais, e sua conservação é um pilar fundamental da teoria [1].

Além disso, o trabalho de Arnowitt, Deser e Misner forneceu informações cruciais sobre as condições de contorno assintóticas para espaço-tempo que se tornam planos em grandes distâncias. A massa ADM é definida precisamente a partir do comportamento

da métrica nessas regiões assintoticamente planas, o que a torna uma ferramenta poderosa para a caracterizar a energia total em sistemas gravitacionais isolados. Essa definição mostrou consistente com as expectativas físicas e continua sendo um pilar no estudo na relatividade geral.

A definição da massa ADM pode ser generalizada para dimensões $n \geq 3$ ao escolher a constante adequada na frente da integral [1]. A expressão para a massa ADM para $n = 3$ é dada por:

$$m_{ADM} = \frac{1}{2(n-1)W_{n-1}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^2} \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j dS.$$

Um aspecto central deste estudo será a definição de variedades assintoticamente planas (M^3, g) , que são espaços que se aproximam do espaço euclidiano no infinito. Seguido pelo cálculo detalhado da massa ADM do fim exterior da variedade de Schwarzschild, que é descrita pela métrica:

$$(M^3, g) = \left(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{B}_{\frac{m}{2}}^3, g = \left(1 + \frac{m}{2r} \right)^4 \delta \right),$$

onde $\mathbb{B}_{\frac{m}{2}}^3$ denota uma bola de raio $m/2$ em \mathbb{R}^3 , m é a massa do buraco negro de Schwarzschild, r é a coordenada radial e δ é a métrica euclidiana plana em \mathbb{R}^3 . Além disso, calcularemos o centro de massa associado a essa variedade, um conceito que, embora mais complexo do que na mecânica clássica, é crucial para entender a distribuição de massa e a dinâmica de sistemas gravitacionais.

A apresentação deste trabalho está organizada da seguinte forma: No Capítulo 1, temos os preliminares: plano tangente à superfície, vetor gradiente, campos vetoriais e tensores. Desenvolvemos os conceitos de vetores e campos vetoriais, definindo seus operadores diferenciais gradiente e divergente. Em seguida, introduzimos a definição de tensores, explorando suas operações fundamentais em termos de componentes e definindo o gradiente e o divergente de um campo tensorial. No Capítulo 2, abordamos o teorema da divergência, explorando suas aplicações tanto para campos vetoriais quanto para campos tensoriais. Por fim, no Capítulo 3, apresentamos as definições de variedades diferenciáveis e variedades assintoticamente planas. Definimos, então, a massa ADM e o centro de massa, aplicando esses conceitos à variedade exterior de Schwarzschild e discutindo as propriedades geométricas e físicas associadas ao centro de massa.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados preliminares que darão suporte às demonstrações no transcórre deste trabalho. A seguir, com base em [3] e [2], serão definidos os seguintes temas.

1.1 Plano Tangente à Superfície

Definição 1.1.1 (Plano tangente à superfície). *Suponha que f tenha derivadas parciais contínuas. Uma equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ é dada por*

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Exemplo 1. *Determine o plano tangente ao parabolóide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 3)$.*

Solução : A superfície é dada por $z = f(x, y)$ e queremos o plano tangente no ponto $(1, 1, 3)$, para isso devemos verificar que o ponto pertence à superfície. Vamos substituir $x = 1$, $y = 1$ na equação da superfície:

$$z = 2(1)^2 + (1)^2 = 2 + 1 = 3,$$

o ponto $(1, 1, 3)$ realmente está na superfície. Em seguida, para encontrar a equação do plano tangente, precisamos das derivadas parciais de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ em relação a x e y :

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + y^2) = 4x,$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 + y^2) = 2y.$$

Agora, avaliamos essas derivadas parciais no ponto $(1, 1)$:

$$f_x(1, 1) = 4 \cdot 1 = 4,$$

$$f_y(1, 1) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Usando a fórmula do plano tangente

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

$$z = 3 + 4(x - 1) + 2(y - 1),$$

simplificando:

$$z = 3 + 4x - 4 + 2y - 2 = 4x + 2y - 3.$$

Portanto, a equação do plano tangente ao parabolóide $z = 2x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 3)$ é:

$$z = 4x + 2y - 3.$$

1.2 Vetor Gradiente

Definição 1.2.1. Para uma função f de três variáveis, o vetor gradiente, denotado por ∇f ou $\text{grad } f$, é

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)). \quad (1.2.1)$$

Exemplo 2. Se $f(x, y, z) = x \sin(yz)$, determine o gradiente de f .

Solução : Queremos calcular o gradiente de f , ou seja:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Derivada parcial em relação a x :

Como x é a variável de diferenciação e $\sin(yz)$ é tratado como uma constante, derivamos normalmente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(yz).$$

Derivada parcial em relação a y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \frac{d}{dy} [\sin(yz)] = x \cdot \cos(yz) \cdot z.$$

Derivada parcial em relação a z :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x \cdot \frac{d}{dz} [\sin(yz)] = x \cdot \cos(yz) \cdot y.$$

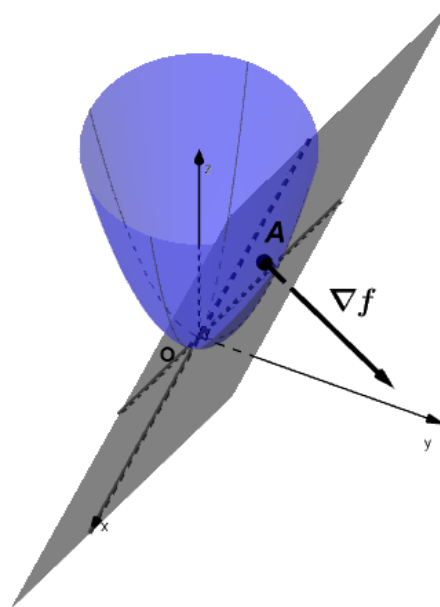
Agora juntamos os três resultados:

$$\nabla f(x, y, z) = (\sin(yz), xz \cos(yz), xy \cos(yz)).$$

Esse vetor aponta na direção de maior crescimento da função f em cada ponto do espaço.

Exemplo 3. *Gradiente do campo escalar da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.*

Figura 1.1: Ilustração do gradiente.



Fonte: Elaborado pelo Autor, usando o software GeoGebra.

Observação 1.2.1. *O gradiente ∇f associa a cada ponto da região $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um vetor. Assim, ∇f define um campo vetorial em Ω .*

Observação 1.2.2. *Para uma superfície S , determinada pela equação $f(x, y, z) = 0$, o vetor unitário normal em um ponto (x, y, z) é dado por*

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \quad (1.2.2)$$

onde ∇f é o vetor gradiente de f definido na equação anterior (1.2.1), e $\|\nabla f\|$ é a magnitude do gradiente.

Exemplo 4. *Se $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_3$, encontre um vetor unitário \vec{n} normal à superfície de uma constante f passando pelo ponto $(2, 1, 0)$.*

Solução : O vetor gradiente é perpendicular a superfície de f constante, o gradiente

da função f é calculado pela equação (1.2.1) como:

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) = (x_2, x_1, 1).$$

Um vetor unitário normal à superfície \vec{n} é obtido pela equação (1.2.2):

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|},$$

avaliando o gradiente no ponto $(2, 1, 0)$. Substituindo $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, obtemos

$$\nabla f(2, 1, 0) = (x_2, x_1, 1) = (1, 2, 1)$$

este vetor é normal à superfície de nível de f no ponto. A magnitude do gradiente no ponto $(2, 1, 0)$:

$$\|\nabla f\| = \|\nabla f(2, 1, 0)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}.$$

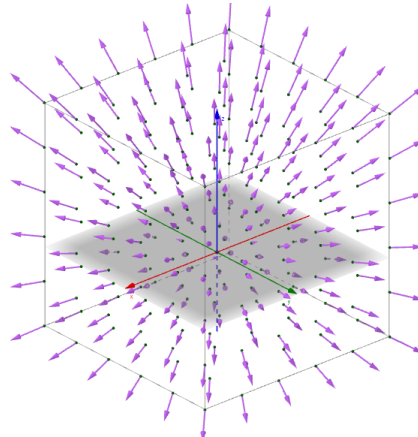
Assim, o vetor normal unitário \vec{n} é:

$$\vec{n} = \frac{\nabla f(2, 1, 0)}{\|\nabla f(2, 1, 0)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1) = \frac{\sqrt{6}}{6}(1, 2, 1).$$

1.3 Campo Vetorial

Definição 1.3.1. *Seja E um subconjunto de \mathbb{R}^3 . Um campo vetorial em \mathbb{R}^3 é uma função \vec{v} que associa a cada ponto (x, y, z) em E um vetor tridimensional $\vec{v}(x, y, z)$.*

Figura 1.2: Campo Vetorial em \mathbb{R}^3 .



Fonte: Elaborado pelo Autor, usando o software GeoGebra.

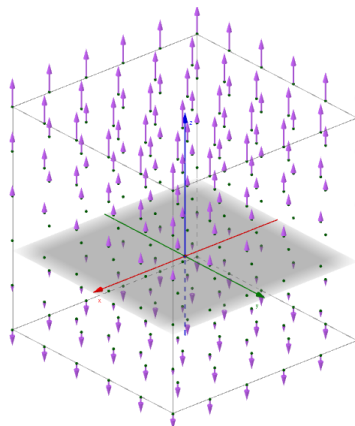
Observação 1.3.1. *Na Figura 1.2, todos os vetores apontam para fora da origem, como raios saindo de um ponto central e também à medida que você se afasta da origem, os vetores crescem em tamanho.*

Exemplo 5. *Esboce o campo vetorial em \mathbb{R}^3 dado por $\vec{v}(x, y, z) = z\vec{k}$.*

Solução : Isso significa que o vetor em cada ponto (x, y, z) tem apenas componente na direção z (ou seja, direção de \vec{k}), e essa componente é igual ao valor de z no ponto. Neste caso, o vetor associado é:

$$\vec{v} = (0, 0, z)$$

Figura 1.3: $\vec{v}(x, y, z) = z\vec{k}$ em \mathbb{R}^3 .



Fonte: Elaborado pelo Autor, usando o software GeoGebra.

1.3.1 Divergente de um Campo Vetorial

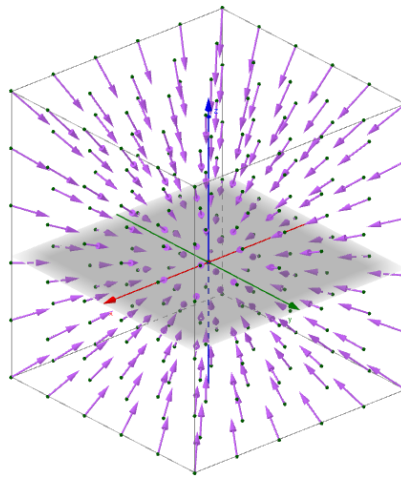
Definição 1.3.2 (Divergente de um Campo Vetorial). *Seja $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ uma função vetorial definida e diferenciável em cada um dos pontos (x_1, x_2, x_3) de uma determinada região do espaço $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (\vec{v} define um campo vetorial diferenciável Ω). A divergência de \vec{v} , representada por $\nabla \cdot \vec{v}$ ou $\text{div } \vec{v}$, é dada, em coordenadas cartesianas, pela expressão:*

$$\nabla \cdot \vec{v} = \text{tr} (\nabla \vec{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}. \quad (1.3.1)$$

O divergente de um campo vetorial é uma grandeza escalar que pode variar de ponto a ponto. Ao contrário do gradiente, que gera um vetor, a operação do divergente reduz o tipo da expressão em uma ordem, convertendo um campo vetorial em uma função escalar.

Exemplo 6. *Esboce o gráfico dos campos vetoriais $\vec{v}(x, y, z) = (-x, -y, -z)$, $\vec{v}(x, y, z) = (-y, x)$ e calcule o divergente.*

Figura 1.4: $\vec{v}(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ em \mathbb{R}^3 .



Fonte: Elaborado pelo Autor, usando o software GeoGebra.

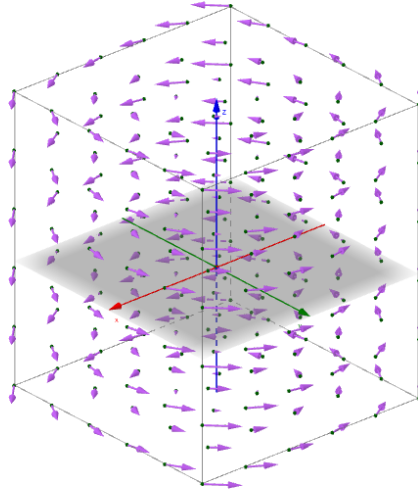
Solução : O divergente é calculado pela soma das derivadas parciais de cada componente do campo vetorial, na equação (1.3.1):

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial(-x)}{\partial x} + \frac{\partial(-y)}{\partial y} + \frac{\partial(-z)}{\partial z} = -3.$$

Portanto, o divergente é:

$$\nabla \cdot \vec{v} = -3.$$

Figura 1.5: $\vec{v}(x, y, z) = (-y, x)$ em \mathbb{R}^3 .



Fonte: Elaborado pelo Autor, usando o software GeoGebra.

Solução : Da equação 1.3.1

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial(x)}{\partial y} = 0.$$

Portanto, o divergente é

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Observação 1.3.2. Interpretação:

- Da Figura 1.2, $\nabla \cdot \vec{v} > 0$: o ponto é uma fonte, ou seja, o campo “sai” dele.
- Da Figura 1.4, $\nabla \cdot \vec{v} < 0$: o ponto é um sorvedouro, ou seja, o campo “entra” nele.
- Da Figura 1.5, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$: o campo é incompressível (ex: fluido sem perda de volume).

De fato, considerar o divergente de um escalar não tem significado, pois não há como calcular o “fluxo” de uma certa quantidade que já é escalar, neste caso é preciso que a função represente uma grandeza vetorial.

1.4 Tensor

Um tensor de certa forma é representado em um referencial particular por um conjunto de funções que são chamadas componentes. Tensores de segunda ordem são um certo produto de dois vetores ou de modo mais formal, são generalizações dos conceitos de vetores.

Em [4], temos as seguintes definições:

Definição 1.4.1 (Transformações Lineares). *Sejam E, F espaços vetoriais sobre \mathbb{R} . Uma transformação linear $T: E \rightarrow F$ é uma correspondência que associa a cada vetor $\vec{v} \in E$ um vetor $T(\vec{v}) = T \cdot \vec{v} = T\vec{v} \in F$ de modo que valham, para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, as seguintes condições:*

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T\vec{u} + T\vec{v}$$

$$T(\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot T\vec{v},$$

o vetor $T \cdot \vec{v}$ chama-se a imagem(ou transformado) de \vec{v} pela transformação T . Quando $E = F$, T é chamado de operador linear.

Definição 1.4.2 (Tensor). *Considere T uma aplicação de E em E , a qual transforma qualquer vetor em um outro vetor. Se T transforma \vec{u} em z e \vec{v} em \vec{w} , isto é,*

$$T\vec{u} = z \quad e \quad T\vec{v} = \vec{w}, \quad (1.4.1)$$

e se T satisfaz as seguintes condições:

Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in E$

$$\begin{cases} T(\vec{u} + \vec{v}) = T\vec{u} + T\vec{v} & \forall \vec{u}, \vec{v} \in E \\ T(\alpha\vec{v}) = \alpha T\vec{v} & \forall \vec{v} \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.4.2)$$

onde \vec{u} e \vec{v} são dois vetores arbitrários e α um escalar arbitrário então T é chamado de uma Transformação Linear. A qual também é chamado de Tensor de Segunda Ordem ou simplesmente um Tensor.

Uma definição alternativa e equivalente de uma transformação linear é dada pela única propriedade linear

$$T(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha T\vec{u} + \beta T\vec{v},$$

onde \vec{u} e \vec{v} são dois vetores arbitrários e α e β são escalares arbitrários.

Se dois tensores, T e S , transformam qualquer vetor arbitrário \vec{u} de forma idêntica, esses dois tensores são os mesmos, isto é, se $T\vec{u} = S\vec{u}$ para qualquer \vec{u} , então $T = S$. No entanto, dois tensores diferentes podem transformar um vetor específico da mesma forma.

De forma geral, dados os vetores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ e escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ as relações

anteriores podem ser resumidas como

$$\begin{aligned} T(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n) &= \alpha_1 T\vec{u}_1 + \alpha_2 T\vec{u}_2 + \dots + \alpha_n T\vec{u}_n \\ &= T(\alpha_i \vec{u}_i) \\ &= \alpha_i T\vec{u}_i. \end{aligned}$$

O conjunto de todos os tensores forma o espaço vetorial Lin se a adição e a multiplicação por escalar forem definidas ponto a ponto, ou seja, $S + T$ e αS ($\alpha \in \mathbb{R}$) são os tensores definidos por

$$(S + T)\vec{v} = S\vec{v} + T\vec{v}$$

$$(\alpha S)\vec{v} = \alpha(S\vec{v})$$

A forma com a qual definimos o conceito de tensor, acima, permite que se faça uma associação entre tensores e matrizes. Dessa maneira, as operações matriciais equivalentes à essas duas últimas operações tensoriais são, respectivamente, a soma e o produto por escalar usualmente conhecidos e usados no estudo de matrizes.

Exemplo 7. *Seja T uma transformação diferente de zero que transforma todo vetor em um vetor fixo n diferente de zero. Essa transformação é um tensor?*

Solução : Considere \vec{u} e \vec{v} dois vetores arbitrários, então pela definição de T , $T\vec{u} = n$, $T\vec{v} = n$, como

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = n$$

e

$$T\vec{u} + T\vec{v} = 2n.$$

Logo,

$$T(\vec{u} + \vec{v}) \neq T\vec{u} + T\vec{v}.$$

Portanto, essa transformação não é linear. Em outras palavras, não é um tensor.

1.4.1 Componentes de um Tensor

As componentes de um vetor dependem da base adotada para definir o sistema de coordenadas. O mesmo acontece para os tensores.

Definição 1.4.3. *Dado um vetor e uma base ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, as componentes*

desse vetor em relação a essa base são dadas por

$$u_i = \vec{e}_i \cdot \vec{u} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{u} \\ u_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{u} \\ u_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{u} \end{cases}$$

Por sua vez, denota-se o vetor \vec{u} em termos de suas componentes como

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 = u_i \vec{e}_i$$

Aplicando-se o tensor T ao vetor \vec{u} , tem-se um outro vetor $\vec{v} = T\vec{u}$ que pela linearidade de T , pode ser escrito como

$$\vec{v} = T\vec{u} = T(u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3) = u_1 T\vec{e}_1 + u_2 T\vec{e}_2 + u_3 T\vec{e}_3 = u_i T\vec{e}_i.$$

As componentes de \vec{v} são dadas por

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \vec{e}_1 \cdot \vec{v} = u_1 \vec{e}_1 \cdot T\vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_1 \cdot T\vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_1 \cdot T\vec{e}_3 \\ v_2 &= \vec{e}_2 \cdot \vec{v} = u_1 \vec{e}_2 \cdot T\vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 \cdot T\vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_2 \cdot T\vec{e}_3 \\ v_3 &= \vec{e}_3 \cdot \vec{v} = u_1 \vec{e}_3 \cdot T\vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_3 \cdot T\vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 \cdot T\vec{e}_3 \end{aligned} \right\} \longrightarrow v_i = u_j \cdot \vec{e}_j \cdot T\vec{e}_j.$$

Neste caso termos como $\vec{e}_1 \cdot T\vec{e}_1 = T_{11}$ e $\vec{e}_2 \cdot T\vec{e}_1 = T_{21}$ são interpretados como as componentes de T nas direções \vec{e}_1 e \vec{e}_2 respectivamente. De uma forma geral, defini-se T_{ij} como sendo as componentes do tensor T , que são dadas por

$$T_{ij} = \vec{e}_i \cdot T\vec{e}_j.$$

A partir daí, a equação $\vec{v} = T\vec{u}$ pode ser escrita na forma de componentes como

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= T_{11}u_1 + T_{12}u_2 + T_{13}u_3 \\ v_2 &= T_{21}u_1 + T_{22}u_2 + T_{23}u_3 \\ v_3 &= T_{31}u_1 + T_{32}u_2 + T_{33}u_3 \end{aligned} \right\} \longrightarrow v_i = T_{ij}u_j.$$

A relação anterior pode ainda ser representada na seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \longrightarrow (\vec{v}) = (T)(\vec{u}),$$

com $[T]$ denomina matriz do tensor T relativamente à base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Observa-se que os termos nas colunas de $[T]$ são, respectivamente, as componentes de $T\vec{e}_1$, $T\vec{e}_2$ e $T\vec{e}_3$.

Portanto:

$$\left. \begin{aligned} T\vec{e}_1 &= T_{11}\vec{e}_1 + T_{21}\vec{e}_2 + T_{31}\vec{e}_3 \\ T\vec{e}_2 &= T_{12}\vec{e}_1 + T_{22}\vec{e}_2 + T_{32}\vec{e}_3 \\ T\vec{e}_3 &= T_{13}\vec{e}_1 + T_{23}\vec{e}_2 + T_{33}\vec{e}_3 \end{aligned} \right\} \longrightarrow T\vec{e}_i = T_{ij}\vec{e}_j$$

Verifica-se que as componentes de T , assim como as de um vetor \vec{v} , dependem do sistema de coordenadas adotado através dos vetores unitários da base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Assim, um tensor terá uma matriz para cada base considerada.

1.4.2 Tensor Simétrico

Definição 1.4.4 (Tensor Simétrico). *Um tensor é chamado simétrico se*

$$S = S^T.$$

Assim, as componentes de um tensor simétrico possuem a propriedade,

$$S_{ij} = (S^T)_{ij} = S_{ji},$$

matricialmente temos,

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}^T.$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix}.$$

Observação 1.4.1. *Delta de kronecker é um tensor de segunda ordem*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

onde $i, j = 1, \dots, n$.

Exemplo 8. *Seja $T = g_{ij} = u^4\delta_{ij}$ uma métrica conforme é um tensor simétrico, onde $i, j = 1, 2, 3$.*

1.4.3 Produto Tensorial de Vetores

Definição 1.4.5. *O produto tensorial de dois vetores \vec{u} e \vec{v} é um tensor de 2ª ordem, $\vec{u} \otimes \vec{v}$, este tensor pode atuar num vetor \vec{w} . A definição de produto tensorial está incluída na igualdade seguinte*

$$(\vec{u} \otimes \vec{v})\vec{w} = (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}.$$

Assim, de acordo com a expressão anterior, o tensor $\vec{u} \otimes \vec{v}$ atua no vetor \vec{w} , sendo o resultado um vetor que tem a direção e sentido do vetor \vec{u} e cujo comprimento é igual a $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \|\vec{u}\|$, ou seja, o comprimento original de \vec{u} multiplicado pelo módulo do escalar de \vec{v} e \vec{w} .

Por outras palavras, se tens dois espaços vetoriais: E de dimensão p e F de dimensão q , o produto tensorial desses espaços gera um novo espaço:

$$E \otimes F$$

este é um espaço vetorial de dimensão pq , com as seguintes propriedades:

1. O produto tensorial de dois vetores $\vec{u} \in E$ e $\vec{v} \in F$ denotado por $\vec{u} \otimes \vec{v}$ é um vetor em $E \otimes F$ que, este produto satisfaz as seguintes relações:

- (i) $\vec{u} \otimes (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \otimes \vec{v} + \vec{u} \otimes \vec{w}$ (Lei Distributiva)
- (ii) $(\vec{u} + \vec{w}) \otimes \vec{v} = \vec{u} \otimes \vec{v} + \vec{w} \otimes \vec{v}$ (Lei Distributiva)
- (iii) $(\lambda\vec{u}) \otimes \vec{v} = \lambda(\vec{u} \otimes \vec{v}) = \vec{u} \otimes (\lambda\vec{v})$ (Lei Associativa).

2. Se $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p\}$ é uma base de E e $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q\}$ é uma base de F , então os elementos $\vec{e}_i \otimes \vec{f}_\alpha, i = 1, \dots, n : \alpha = 1, \dots, m$ formam uma base de $E \otimes F$.

As condições **1** e **2** permitem-nos concluir que, com $\vec{u} = u_i \vec{e}_i$ e $\vec{v} = v_\alpha \vec{f}_\alpha$, o elemento $\vec{u} \otimes \vec{v}$ do produto se pode escrever na seguinte forma:

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = (v_i \vec{e}_i) \otimes (v_\alpha \vec{f}_\alpha) = u_i v_\alpha (\vec{e}_i \otimes \vec{f}_\alpha).$$

Sendo pq escalares e $u_i v_\alpha (i = 1, \dots; \alpha = 1, \dots, q)$ como componentes do vetor $\vec{u} \otimes \vec{v}$ na base tensorial $\vec{e}_i \otimes \vec{f}_\alpha$.

1.4.4 Traço de um Tensor

Definição 1.4.6. O traço de um produto tensorial de dois vetores $\vec{u} \otimes \vec{v}$ é definido como um escalar dado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, ou seja,

$$\text{tr}(\vec{u} \otimes \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Nota-se que, o traço extrai um escalar do tensor, justamente a soma dos produtos das componentes correspondentes de \vec{u} e \vec{v} .

Como consequência direta dessa definição, tem-se a propriedade de linearidade do traço:

$$\begin{aligned} \text{tr}[(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \otimes \vec{w}] &= (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \cdot \vec{w} \\ &= \alpha(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{w}) \\ &= \alpha \text{tr}[\vec{u} \otimes \vec{w}] + \beta \text{tr}[\vec{v} \otimes \vec{w}]. \end{aligned}$$

Observação 1.4.2 (Cálculo nas Componentes Cartesianas). Se $\vec{u} = u_i \vec{e}_i$ e $\vec{v} = v_i \vec{e}_i$, então:

$$\text{tr}(\vec{u} \otimes \vec{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^3 u_i v_i = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Como qualquer tensor T pode ser escrito na forma,

$$T = T_{ij}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j),$$

então o traço de T é:

$$\begin{aligned} \text{tr}T &= \text{tr}(T_{ij}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)) \\ &= T_{ij} \text{tr}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \\ &= T_{ij}(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \\ &= T_{ij} \delta_{ij} \\ &= T_{11} + T_{22} + T_{33}. \end{aligned}$$

Logo, o traço de um tensor é bem definido através da relação

$$\text{tr}T = T_{ii}.$$

Verifica-se que o traço de um tensor possui ainda as seguintes propriedades

- 1. $\text{tr}T^T = \text{tr}T$,
- 2. $\text{tr}(ST) = \text{tr}(TS)$.

1.5 Gradiente de um Campo Tensorial

Definição 1.5.1 (Gradiente de um Campo Tensorial). *O gradiente de um campo tensorial de segunda ordem T é definido de maneira análoga à do gradiente de um vetor, eq.(1.2.1). É o tensor de terceira ordem*

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x_k} \otimes \vec{e}_k = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k,$$

em que T_{ij} são as componentes do tensor T , \vec{e}_i é a base canônica do espaço tridimensional, x_k são as coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) e $\frac{\partial}{\partial x_k}$ representa as derivadas parciais em relação à x_k .

Exemplo 9. *Usando a definição do gradiente do campo tensorial de segunda ordem, resolver o exemplo 8.*

Solução : Do exemplo, temos: T_{ij} é um tensor de segunda ordem, u é uma função escalar e δ_{ij} é o símbolo de kronecker.

O gradiente do campo tensorial é dado por:

$$\nabla T = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k.$$

Derivando T_{ij} em relação a x_k

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (u^4 \delta_{ij}).$$

A derivada depende apenas de u^4 , devido δ_{ij} ser constante (observação 1.4.1). Aplicando a regra da cadeia, temos:

$$\nabla T = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = \delta_{ij} \cdot \frac{\partial u^4}{\partial x_k}.$$

Agora, derivamos u^4 em relação a x_k :

$$\frac{\partial u^4}{\partial x_k} = 4u^3 \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

Substituindo a derivada na fórmula do gradiente

$$\nabla T = 4u^3 \frac{\partial u}{\partial x_k} \delta_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k.$$

Assim, o gradiente do tensor T é dado por:

$$\nabla T = 4u^3 \frac{\partial u}{\partial x_k} \delta_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k.$$

Que é um tensor de terceira ordem.

Observação 1.5.1. *Isso nos diz que a variação do tensor T é determinada pelo gradiente de u nas direções x_1, x_2, x_3 e observa-se que as componentes não nulas ocorrerão apenas quando $i = j$, porque o símbolo de Kronecker δ_{ij} é zero quando $i \neq j$.*

1.6 Divergente de um Campo Tensorial

Com base nos resultados obtidos do capítulo anterior da seção 1.3.1 podemos introduzir a noção de divergente de um campo tensorial de forma parecida das composição de tensores de segunda ordem.

Definição 1.6.1 (Divergente de um Campo Tensorial). *A divergência de um tensor de segunda ordem T é definida como o vetor*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} T &= \frac{\partial T}{\partial x_i} \vec{e}_i = \frac{\partial (T_{jk} \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k)}{\partial x_i} \vec{e}_i, \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} \vec{e}_i, \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

onde T é o tensor de segunda ordem com componentes T_{jk} , $\vec{e}_j \otimes \vec{e}_k$ é a base do espaço tensorial e $\frac{\partial}{\partial x_i}$ derivada parcial em relação à coordenada espacial x_i .

Exemplo 10. *Calcular a divergência de $T_{ij} = u(x, y, z) \delta_{ij}$.*

Solução : $u(x, y, z)$ é uma função escalar diferenciável e δ_{ij} é o símbolo de Kronecker. A divergência de um tensor é dado por:

$$\operatorname{div} T = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \vec{e}_i.$$

Substituindo $T_{ij} = u(x) \delta_{ij}$ na fórmula da divergência, temos:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (u(x) \delta_{ij}) \vec{e}_i.$$

Como δ_{ij} é constante em relação à diferenciação, podemos retirá-lo da derivada:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \delta_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \vec{e}_i.$$

Agora podemos usar a notação de Einstein, para a soma implícita sobre o índice j :

$$\operatorname{div} T = \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \vec{e}_i.$$

Portanto, a divergência desse tensor é o gradiente da função escalar u .

$$\operatorname{div} T = \frac{\partial u}{\partial x_i} \vec{e}_i.$$

Observação 1.6.1. Para um tensor constante $T_{ij} = \delta_{ij}$.

Neste caso, T é o tensor identidade constante (no qual, não depende das coordenadas).

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial x_j} = 0.$$

Logo,

$$\operatorname{div} T = 0.$$

Portanto, a divergência de um tensor constante é nula.

Capítulo 2

TEOREMA DA DIVERGÊNCIA DE GAUSS

Este capítulo descreve o teorema da divergência, tanto para campos vetoriais quanto para campos tensoriais. Trata-se de um teorema fundamental na análise vetorial, com grande importância para o cálculo de integrais de linha, de superfície e de volume, a partir das definições de divergência.

Esse teorema possui um profundo significado físico e é muito utilizado na formulação de equações matemáticas que representam leis físicas, como as leis de conservação em eletromagnetismo, dinâmica de fluidos e mecânica dos meios contínuos.

De [3], temos a seguinte definição:

Definição 2.0.1 (Integral de Superfícies de Campos Escalares). *Seja $f(x, y, z)$ uma função escalar definida sobre uma superfície S , e seja*

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

uma parametrização regular de S , onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é o domínio dos parâmetros. A integral de superfície é definida de f sobre S como:

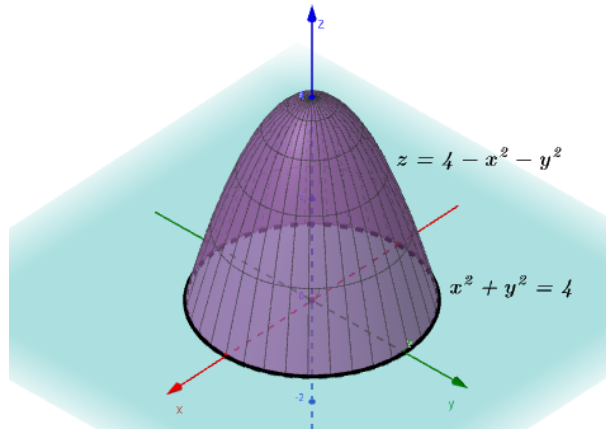
$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv. \quad (2.0.1)$$

Exemplo 11. *Calcular a integral de superfície da função escalar $f(x, y, z) = z$ sobre uma parte de um parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, que se encontra acima do plano $z = 0$.*

Solução : A superfície é dada pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, e devemos considerar e integrar sobre a parte da superfície que está acima do plano $z = 0$, ou seja, a parte onde $z \geq 0$.

Para $z = 4 - x^2 - y^2 \geq 0$, temos a condição $x^2 + y^2 \leq 4$. Logo, a região D sobre o plano xy é um disco de raio 2, ou seja, $x^2 + y^2 \leq 4$. Podemos parametrizar a superfície S usando coordenadas polares, uma vez que a equação $x^2 + y^2 = 4$ é circular.

Figura 2.1: Superfície do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ acima do plano $z = 0$.



Fonte: Elaborado pelo Autor, usando o software GeoGebra.

Definimos:

$$x(u, v) = u \cos v, \quad y(u, v) = u \operatorname{sen} v, \quad z(u, v) = 4 - u^2,$$

com $u \in [0, 2]$ e $v \in [0, 2\pi]$. O vetor normal \vec{n} à superfície é dado pelo produto vetorial de \vec{r}_u e \vec{r}_v , onde:

$$\vec{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right); \quad \vec{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

Assim, temos:

$$\vec{r}_u = (\cos v, \operatorname{sen} v, -2u); \quad \vec{r}_v = (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0).$$

O produto vetorial $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ é dado por:

$$\begin{aligned} \vec{r}_u \times \vec{r}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \operatorname{sen} v & -2u \\ -u \operatorname{sen} v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= (0 - (-2u^2 \cos v))\vec{i} - (0 - 2u^2 \operatorname{sen} v)\vec{j} + (u \cos^2 v - (-u \operatorname{sen}^2 v))\vec{k} \\ &= (2u^2 \cos v, 2u^2 \operatorname{sen} v, u(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v)) \\ &= (2u^2 \cos v, 2u^2 \operatorname{sen} v, u). \end{aligned}$$

O módulo $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$ é

$$\begin{aligned} \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| &= \sqrt{(2u^2 \cos v)^2 + (2u^2 \operatorname{sen} v)^2 + u^2} \\ &= \sqrt{4u^4 \cos^2 v + 4u^4 \operatorname{sen}^2 v + u^2} \\ &= \sqrt{4u^4(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) + u^2} \\ &= \sqrt{4u^4 + u^2} \\ &= u\sqrt{4u^2 + 1}. \end{aligned}$$

A função escalar $f(x, y, z)$ é dado por $f(x, y, z) = z$. Na parametrização, temos $z = 4 - u^2$. Logo, a função a ser integrada será $f(\vec{r}(u, v)) = 4 - u^2$.

A integral de superfície em equação (2.0.1) é dada por:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv.$$

Substituindo os valores:

$$I_s = \iint_S f(x, y, z) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - u^2) \cdot u \sqrt{4u^2 + 1} du dv. \quad (2.0.2)$$

A integral sobre v é simples, pois a função não depende de v , logo a integral sobre v de 0 a 2π é simplesmente 2π . A integral final fica:

$$I_s = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - u^2) \cdot u \sqrt{1 + 4u^2} \cdot du dv = 2\pi \int_0^2 (4 - u^2) \cdot u \sqrt{4u^2 + 1} du. \quad (2.0.3)$$

Fazendo a substituição. Se $w = 1 + 4u^2$, $u^2 = \frac{w-1}{4}$ então $dw = 8udu$. Logo $udu = \frac{1}{8}dw$. Quando, $u = 0 \Rightarrow w = 1$ e $u = 2 \Rightarrow w = 17$. Substituindo tudo na equação e resolvendo,

$$\begin{aligned} I_s &= \int_1^{17} \left(\frac{17-w}{4} \right) \cdot \sqrt{w} \cdot \frac{1}{8} dw = \int_1^{17} \frac{17-w}{32} \cdot w^{\frac{1}{2}} dw \\ &= \frac{1}{32} \int_1^{17} (17w^{1/2} - w^{3/2}) dw \\ &= \left[\frac{17 \cdot w^{3/2}}{3/2} - \frac{w^{5/2}}{5/2} \right]_1^{17} \\ &= \left[\frac{34}{3} w^{3/2} - \frac{2}{5} w^{5/2} \right]_1^{17}. \end{aligned}$$

Simplificamos

$$\begin{aligned} I_s &= \frac{1}{32} \left[\left(\frac{34}{3} \cdot 17\sqrt{17} - \frac{2}{5} \cdot 289\sqrt{17} \right) - \left(\frac{34}{3} - \frac{2}{5} \right) \right] = \frac{1}{32} \left[\left(\left(\frac{578}{3} - \frac{578}{5} \right) \sqrt{17} \right) - \left(\frac{170-6}{15} \right) \right] \\ &= \frac{1}{32} \left(\frac{1156}{15} \sqrt{17} - \frac{164}{15} \right) \\ &= \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{15} (1156\sqrt{17} - 164) \\ &= \frac{1}{480} (1156\sqrt{17} - 164). \end{aligned}$$

Finalmente, substituímos em (2.0.3).

$$2\pi \int_0^2 (4-r^2)r\sqrt{4r^2+1}dr = 2\pi \cdot \frac{1}{480}(1156\sqrt{17}-164) = \frac{\pi}{240}(1156\sqrt{17}-164).$$

Portanto, como resultado a equação (2.0.2) se torna:

$$I_s = \iint_S f(x, y, z)dS = \frac{\pi}{240}(1156\sqrt{17}-164).$$

Em [5], encontra-se a definição do Teorema da Divergência para campos vetoriais e tensoriais.

2.1 Teorema da Divergência de um Campo Vetorial

Teorema 2.1.1. *Seja V o volume de uma região tridimensional limitada por uma superfície fechada S , então para um campo vetorial \vec{v} definido em V e em S , será verdade que:*

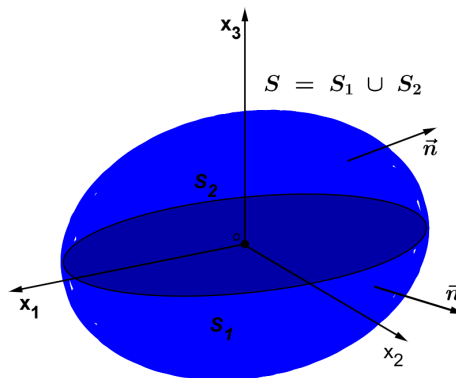
$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{v} dV = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (2.1.1)$$

onde dV e dS são os elementos infinitesimais de volume e área, respectivamente, \vec{n} é o vetor unitário e exterior à superfície S que contém o volume V no qual o campo vetorial é definido.

Em notação indicial, a equação (2.1.1) pode ser expressa como:

$$\iiint_V \frac{\partial v_j}{\partial x_j} dV = \iint_S v_j \cdot n_j dS. \quad (2.1.2)$$

Figura 2.2: Teorema da Divergência



Fonte: Elaborado pelo Autor, usando o software GeoGebra.

Demonstração. O campo vetorial \vec{v} é expresso da seguinte forma:

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

onde v_1, v_2 e v_3 são funções escalares das coordenadas (x_1, x_2, x_3) , o divergente de \vec{v} é dado em (1.3.1) por

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

Podemos expressar a integral de volume da divergência, na qual representa a soma da divergência em todos os pontos dentro do volume V da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \vec{v} \, dV &= \iiint_V \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) dV \\ &= \iiint_V \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dV + \iiint_V \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dV + \iiint_V \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dV \\ &= \iiint_V \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \iiint_V \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 + \iiint_V \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Agora, vamos analisar cada uma dessas integrais separadamente e aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo. Considere a primeira integral:

$$\iiint_V \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Vamos integrar primeiro em relação a x_1 , mantendo x_2 e x_3 constantes. Suponha que para cada (x_2, x_3) , a região V se estende de $x_1 = a(x_2, x_3)$ até $x_1 = b(x_2, x_3)$ ao longo da direção x_1 . Então, a integral em relação a x_1 é:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 &= \iint \left[\int_{a(x_2, x_3)}^{b(x_2, x_3)} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) dx_1 \right] dx_2 dx_3 \\ &= \iint [v_1(b(x_2, x_3), x_2, x_3) - v_1(a(x_2, x_3), x_2, x_3)] dx_2 dx_3 \\ &= \iint v_1(b(x_2, x_3), x_2, x_3) dx_2 dx_3 - \iint v_1(a(x_2, x_3), x_2, x_3) dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Da Figura 2.2, as superfícies definidas por $x_1 = a(x_2, x_3)$ e $x_1 = b(x_2, x_3)$ correspondem às partes inferior (S_1) e superior (S_2) da superfície S em relação à direção x_1 . Seja $\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$ o vetor normal unitário à superfície S em cada ponto $(x_1, x_2, x_3) \in S$, apontando para fora de V e seja γ o ângulo \vec{n} e \vec{e}_1 desta forma temos: $\vec{n} \cdot \vec{e}_1 = n_1 = \cos(\gamma) \cdot |\vec{n}| \cdot |\vec{e}_1|$ i.e. $\cos \gamma = n_1$ em S_2 e $\cos \gamma = -n_1$ em S_1 . Daí, e do fato de que $dx_2 dx_3 = \cos \gamma dS$. A projeção do elemento de área dS projetado no plano (x_2, x_3) está

relacionado com $dx_2 dx_3$ e a componente normal n_1 na direção x_1 , de forma que

$$dx_2 dx_3 = |n_1 \cdot \vec{e}_1| dS = |n_1| dS.$$

Portanto, em S_2

$$dx_2 dx_3 = n_1 dS,$$

e em S_1

$$dx_2 dx_3 = -n_1 dS.$$

Note que em S_2 (superior), a normal externa tem uma componente n_1 positiva, enquanto em S_1 (inferior), a normal externa tem uma componente n_1 negativa (devido à orientação da normal externa).

$$\iint_{S_2} v_1(b(x_2, x_3), x_2, x_3) dx_2 dx_3 = \iint_{S_2} v_1 n_1 dS,$$

e também:

$$\iint_{S_1} v_1(a(x_2, x_3), x_2, x_3) dx_2 dx_3 = - \iint_{S_1} v_1 n_1 dS.$$

Portanto, a primeira integral se torna:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 &= \iint_{S_2} v_1 n_1 dS + \iint_{S_1} v_1 n_1 dS \\ &= \iint_{S_2 \cup S_1} v_1 n_1 dS. \end{aligned}$$

Como $S = S_2 \cup S_1$, a integral acima pode ser reescrita como uma integral de superfície sobre S :

$$\iiint_V \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_S v_1 n_1 dS.$$

Análogo a este raciocínio, aplicamos o mesmo para as outras duas integrais, obtemos:

$$\iiint_V \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_S v_2 n_2 dS,$$

$$\iiint_V \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_S v_3 n_3 dS.$$

Somando as três integrais de superfície, obtemos:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) dV = \iint_S v_1 n_1 dS + \iint_S v_2 n_2 dS + \iint_S v_3 n_3 dS$$

e também,

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{v} \, dV = \iint_S (v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3) dS.$$

O termo $(v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3)$ é exatamente o produto escalar do campo vetorial $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ com o vetor normal unitário $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3.$$

Portanto, a equação final é:

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{v} \, dV = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$$

que é o Teorema da Divergência. □

Exemplo 12. Determine o fluxo do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = z\hat{i} + y\hat{j} + x\hat{k}$ sobre a unidade esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solução : Primeiro calcularemos o divergente de \vec{F} :

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial(z)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(x)}{\partial z}.$$

A esfera unitária S é a fronteira da região sólida dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Então, o Teorema da Divergência dá o fluxo como:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dV = \iiint_V 1 \, dV = \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4\pi}{3}.$$

2.2 Teorema da Divergência de um Campo Tensorial

O teorema da divergência pode ser estendido a campos tensoriais de classificação maior que um. Assim como no caso de um campo vetorial, a integral de um campo tensorial é definido como o tensor cujos elementos são as integrais das componentes de um determinado campo.

Teorema 2.2.1. *Seja V o volume de uma região tridimensional limitada por uma superfície regular fechada S , então o campo tensorial definido em V e em S é*

$$\iint_S (T\vec{e}_j) \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot (T\vec{e}_j) \, dV \quad (2.2.1)$$

onde \vec{n} representa o vetor normal unitário associado à superfície S , dV e dS são os elementos infinitesimais de volume e área, respectivamente.

Para um campo tensorial geral, isso tem uma extensão direta, segundo [10]:

$$\iint_S T_{ij} n_j dS = \iiint_V T_{ij,j} dV = \iiint_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV. \quad (2.2.2)$$

Demonstração. Análoga ao que foi demonstrado em 2.1. □

Exemplo 13. Um campo vetorial \vec{a} satisfaz $\nabla \cdot \vec{a} = 0$ dentro de um volume V e $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ na superfície de contorno S . Considerando o teorema da divergência aplicado a $T_{ij} = x_i a_j$, mostre que $\iiint_V \vec{a} dV = 0$.

Solução : Aplicando o teorema da divergência (2.2.2) a $T_{ij} = x_i a_j$ encontramos

$$\iiint_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV = \iiint_V \frac{\partial (x_i a_j)}{\partial x_j} dV = \iint_S x_i a_j n_j dS = 0,$$

já que $a_j n_j = 0$. Expandindo a integral de volume obtemos

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial (x_i a_j)}{\partial x_j} dV &= \iiint_V \frac{\partial x_i}{\partial x_j} a_j dV + \iiint_V x_i \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dV, \\ &= \iiint_V \delta_{ij} a_j dV, \\ &= \iiint_V a_i dV = 0, \end{aligned}$$

onde ao ir da primeira para a segunda linha usamos $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} a_j = \delta_{ij}$ e $\frac{\partial a_j}{\partial x_j} = 0$.

Capítulo 3

APLICAÇÕES

Neste capítulo, apresentaremos as definições de variedades diferenciáveis, variedades assintoticamente planas, da variedade de Schwarzschild tridimensional completa e da variedade exterior de Schwarzschild. Por fim, definiremos e aplicaremos os conceitos de massa ADM e centro de massa, que surgem naturalmente nesse contexto geométrico.

3.1 Variedades Diferenciáveis

Uma variedade diferenciável é uma generalização de uma superfície que não necessariamente precisa estar embutida em um espaço euclidiano. Ela é um espaço topológico localmente semelhante a \mathbb{R}^m e admite uma estrutura diferenciável, que permite o estudo de conceitos como derivadas e integrais.

De [6], temos as definições seguintes:

Definição 3.1.1 (Sistemas de Coordenadas Locais). *Seja M um espaço topológico. Um sistema de coordenadas locais (ou carta local) em M é um homeomorfismo $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$, onde U é um subconjunto aberto de M . As coordenadas $x(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p))$ associadas a um ponto $p \in U$ são chamadas de coordenadas locais de p no sistema x .*

Exemplo 14. *Coordenadas Cartesianas: Seja $M = \mathbb{R}^m$ com $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. A aplicação $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $x(p) = p$ é simplesmente a inclusão. Nesse caso, o sistema de coordenadas introduzido em U são as coordenadas cartesianas do espaço \mathbb{R}^m .*

Definição 3.1.2 (Mudança de Coordenadas). *Dado dois sistemas de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ no espaço topológico M , tais que $U \cap V \neq \emptyset$. Para cada ponto $p \in U \cap V$, podemos associar:*

- Coordenadas $x^i = x^i(p)$ no sistema x ,

- Coordenadas $y^i = y^i(p)$ no sistema y .

A mudança de coordenadas é a aplicação:

$$\varphi_{xy} = y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V).$$

Essa função relaciona as duas representações locais do ponto p e é um homeomorfismo.

Definição 3.1.3 (Atlas Diferenciável de Classe C^k). Um atlas U sobre um espaço topológico M é dito classe C^k (com $k \geq 1$) se todas as mudanças de coordenadas φ_{yx} , com $x, y \in U$, são aplicações de classe C^k . Escreve-se então $U \in C^k$. Como $\varphi_{yx} = (\varphi_{xy})^{-1}$, essas mudanças são difeomorfismo de classe C^k .

Definição 3.1.4 (Sistema de Coordenadas Admissível). Um sistema de coordenadas $z : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ é admissível relativamente a um atlas U se, para todo sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ do atlas, com $U \cap W \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas φ_{xz} e φ_{zx} forem de classe C^k . Em outras palavras $U \cup \{z\}$ continua sendo de classe C^k em M .

Definição 3.1.5 (Variedade Diferenciável). Uma variedade diferenciável, de dimensão m e classe C^k é um par ordenado (M, U) onde M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e U é um atlas máximo de dimensão m e classe C^k sobre M .

Exemplo 15. O espaço Euclidiano \mathbb{R}^m é uma variedade diferenciável.

Exemplo 16. Um subconjunto aberto W de uma variedade C^k tem uma estrutura natural de variedade C^k , dada pelo atlas máximo em W , formado por todos os sistemas de coordenadas admissíveis $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , cujos domínios U estão contidos em W .

3.2 Variedades Assintoticamente Planas

Da análise do contexto da geometria diferencial e da relatividade geral, as variedades assintoticamente planas são de fundamental importância na modelagem de espaços que, de longe de fontes de matéria ou energia, devem se aproximar do espaço euclidiano. Essas variedades descrevem, por exemplo, o espaço-tempo ao redor de corpos massivos isolados como de buracos negros, onde os efeitos gravitacionais se dissipam de acordo com a distância.

Segundo [7], temos a seguinte definição:

Definição 3.2.1. Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. (M^n, g) é dito assintoticamente plano se houver um subconjunto compacto $K \subset M$ tal que $M - K$ é difeomorfo

a $\mathbb{R}^n - \{|x| \leq 1\}$, e um difeomorfismo $\Phi : M - K \rightarrow \mathbb{R}^n - \{|x| \leq 1\}$ tal que, no gráfico de coordenadas definido por Φ , temos $g = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j$ onde $g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O(|x|^{-p})$ com $x \rightarrow \infty$ para algum $p > 0$. Também assumimos que

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= \delta_{ij} + O(|x|^{-p}), \\ |x| |g_{ij,k}(x)| + |x|^2 |g_{ij,k}(x)| &= O(|x|^{-p}), \\ |R(g)(x)| &= O(|x|^{-q}), \end{aligned}$$

para algum $q > n$ e $p > (n - 2)/2$.

Observação 3.2.1 (Métrica Conforme). *Considere a métrica euclidiana usual δ_{ij} no espaço \mathbb{R}^n e uma função positiva e suave $u(x)$. A métrica conforme associada é dada por:*

$$g_{ij}(x) = u(x)^{\frac{4}{n-2}} \delta_{ij},$$

onde:

- $g_{ij}(x)$: métrica conforme no ponto $x \in \mathbb{R}^n$,
- δ_{ij} é a métrica euclidiana usual,
- $u(x)$ é uma função escalar positiva (fator conforme),
- n representa a dimensão do espaço.

Em seguida veremos o funcionamento da aplicação da operação de deformação conforme da observação 3.2.1 sobre a métrica conforme, com $n = 3$ e escolhendo um fator conforme específico.

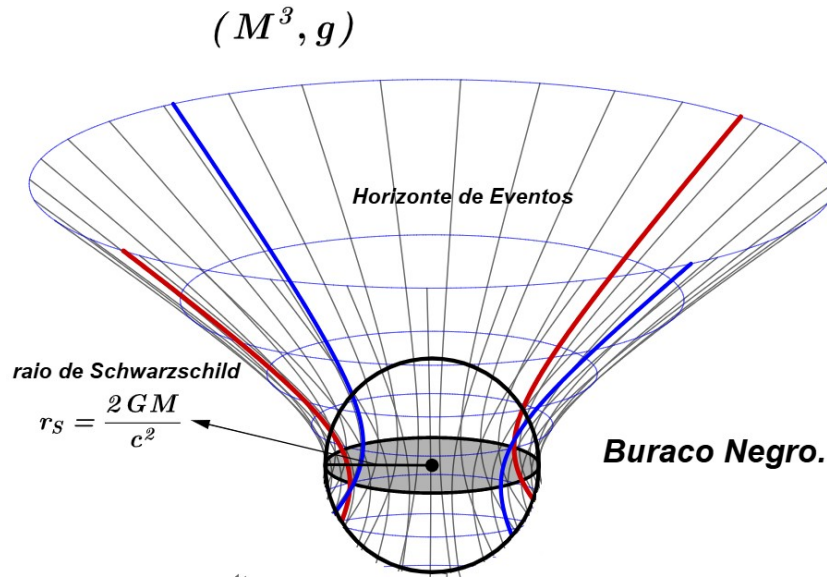
De [8], temos a seguinte definição.

Definição 3.2.2 (Variedade de Schwarzschild Tridimensional). *Seja $(M^3, g) = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, u^4 \delta)$ com $u = 1 + \frac{m}{2r}$ onde m é uma constante positiva e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância euclidiana da origem. Então a variedade resultante,*

$$(M^3, g) = \left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \delta \right), \quad (3.2.1)$$

é uma variedade assintoticamente plana completa. Isso é chamado de variedade de Schwarzschild tridimensional.

Figura 3.1: Visualização da variedade de Schwarzschild tridimensional.



Fonte: Elaborado pelo Autor, usando o software GeoGebra.

Podemos notar que, a variedade de Schwarzschild tridimensional Figura 3.1 tem duas extremidades com simetria de eção em torno dessa esfera mínima $\Sigma_{m/2}$. Então estaremos nos referindo à extremidade externa daqui pra frente, que é definida como:

$$\left(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{B}_{\frac{m}{2}}^3, \left(1 + \frac{m}{2r} \right)^4 \delta \right), \quad (3.2.2)$$

conhecida como a variedade exterior de Schwarzschild. Esta continua sendo uma variedade assintoticamente plana completa com uma extremidade que tem um limite mínimo.

De acordo com [8], a massa ADM para uma variedade assintoticamente plana (M^n, g) é definida como:

Definição 3.2.3 (Massa ADM). *A massa ADM de uma variedade completa assintoticamente plana (M^n, g) é definida por*

$$m_{ADM} = \frac{1}{2(n-1)W_{n-1}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j dS, \quad (3.2.3)$$

onde W_{n-1} é o volume da esfera unitária de dimensão $n-1$, S_r^{n-1} é a esfera de raio r , ν^j são as coordenadas do vetor normal exterior a S_r^{n-1} , dS é o elemento de área de S_r^{n-1} na carta coordenada e $g_{ij,i}$ e $g_{ii,j}$ são as derivadas parciais das componentes da métrica.

Podemos então estabelecer a definição de centro de massa de uma variedade assintoticamente plana. O centro de massa de uma variedade assintoticamente plana (quando bem definido) fornece a localização "efetiva" da massa total no espaço.

De [9], temos:

Definição 3.2.4 (Centro de Massa). *Seja (M^n, g) uma variedade assintoticamente plana que satisfaz a condição de Regge-Teitelboim e com massa ADM não nula; definimos o centro de massa desta variedade, num sistema de coordenadas x^i , $i = 1, 2, \dots, n$, do \mathbb{R}^n , por*

$$C^\alpha = (C^1, C^2, \dots, C^n),$$

onde

$$C^\alpha = \frac{1}{2(n-1)w_{n-1}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^{n-1}} \left[x^\alpha (g_{ij,j} - g_{jj,i}) \nu^i - (g_{i\alpha} \nu^i - g_{ii} \nu^\alpha) \right] dS,$$

para $\alpha = 1, 2, \dots, n$.

Estabeleceremos a seguir a aplicação de massa ADM e de centro de massa da variedade exterior de Schwarzschild.

3.3 Massa ADM e Centro de Massa da Variedade Exterior de Schwarzschild

A noção de massa ADM é uma generalização da ideia de massa total de um sistema físico, aplicada a variedades assintoticamente planas. Ela mede, de forma precisa, a massa total “vista de longe” (no infinito) da variedade. Esta quantidade é especialmente importante em relatividade geral, pois aparece naturalmente em soluções das equações de Einstein.

3.3.1 Massa ADM da Variedade Exterior de Schwarzschild

Agora, usando a definição 3.2.3 podemos calcular a massa ADM da variedade exterior de Schwarzschild.

$$\begin{aligned} m_{ADM} &= C_n \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) dV, \quad \text{com } n = 3, \\ &= \frac{1}{2(3-1)W_{3-1}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) dV, \\ &= \frac{1}{4W_2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) dV, \quad \text{com } W_2 = 4\pi(1)^2 \\ &= \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{B}_r^3} \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) dV. \end{aligned}$$

Em particular, escrevemos usando o teorema da divergência da equação (2.2.2), obtemos:

$$m_{ADM} = \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial \mathbb{B}_r^3 = S_r^2} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j dS. \quad (3.3.1)$$

$$g_{ij} = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \delta_{ij} \quad ; \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad ; \quad \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}.$$

Derivando g_{ij} .

$$g_{ij,i} = 4 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)}_{-\frac{m}{2} r^{-2} \frac{\partial r}{\partial x_i}} \delta_{ij}$$

$$g_{ij,i} = 4 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \left(\frac{-m}{2}\right) \frac{1}{r^2} \frac{x^i}{r} \delta_{ij} \quad (3.3.2)$$

com

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases} \quad (3.3.3)$$

e

$$g_{ii} = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \delta_{ii},$$

da equação (3.3.2) tem-se,

$$g_{ii,j} = 4 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \left(\frac{-m}{2}\right) \frac{x^j}{r^3} \delta_{ii}. \quad (3.3.4)$$

Agora, da equações (3.3.2) e (3.3.4) temos que, tendo $\nu^j = \frac{x^j}{r}$

$$\begin{aligned} N &= (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j, \\ &= \left(4 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \left(\frac{-m}{2}\right) \frac{1}{r^2} \frac{x^i}{r} \delta_{ij} - 4 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \left(\frac{-m}{2}\right) \frac{x_j}{r^3} \delta_{ii}\right) \frac{x^j}{r}, \\ &= -\frac{2m}{r^4} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \cdot \underbrace{(x^i \delta_{ij} - x^j \delta_{ii})}_{M} x^j. \end{aligned}$$

Como: $i, j = 1, 2, 3$. Podemos escrever M da forma de somatório da seguinte forma, temos

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^3 (x^i \delta_{ij} - x^j \delta_{ii}) x^j, \\ &= (x^1 \delta_{1j} - x^j \delta_{11}) x^j + (x^2 \delta_{2j} - x^j \delta_{22}) x^j + (x^3 \delta_{3j} - x^j \delta_{33}) x^j, \end{aligned}$$

fazendo para $j = 1, 2, 3$ e em seguida usando a equação (3.3.3) para simplificar os termos

obtidos:

$$\begin{aligned}
M &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 (x^i \delta_{ij} - x^j \delta_{ii}) x^j, \\
&= (x^1 \delta_{11} - x^1 \delta_{11}) x^1 + (x^2 \delta_{21} - x^1 \delta_{22}) x^1 + (x^3 \delta_{31} - x^1 \delta_{33}) x^1, \\
&+ (x^1 \delta_{12} - x^2 \delta_{11}) x^2 + (x^2 \delta_{22} - x^2 \delta_{22}) x^2 + (x^3 \delta_{32} - x^2 \delta_{33}) x^2, \\
&+ (x^1 \delta_{13} - x^3 \delta_{11}) x^3 + (x^2 \delta_{23} - x^3 \delta_{22}) x^3 + (x^3 \delta_{33} - x^3 \delta_{33}) x^3, \\
&= -2(x^1)^2 - 2(x^2)^2 - 2(x^3)^2, \\
&= 2r^2.
\end{aligned}$$

Agora, substituímos o valor de M em N

$$\begin{aligned}
N &= -\frac{2m}{r^4} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \cdot (-2r^2), \\
&= \frac{4m}{r^2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3.
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Substituindo o resultado anterior na equação da massa ADM (3.3.1). Desse modo, observe que:

$$\begin{aligned}
m_{ADM} &= \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial \mathbb{B}_r^3 = S_r^2} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j dV, \\
&= \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^2} \frac{4m}{r^2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right) dS, \\
&= \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{4m}{r^2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right) \int_{S_r^2} dS \right], \\
&= \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} 16m\pi \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3, \\
&= m.
\end{aligned}$$

Observação 3.3.1. Usando a equação (3.3.8) com a substituição de $\mathbb{S}_{\frac{m}{2}}^2$ em \mathbb{S}_r^2

$$\frac{1}{16\pi m} \int_{\mathbb{B}_{\frac{m}{2}}^3} x^\alpha (g_{ij,ij} - g_{ii,jj}) dv = 0.$$

Desse modo, concluímos que a massa ADM da variedade exterior de Schwarzschild é a constante positiva m . Esse resultado mostra a consistência entre o formalismo geométrico (massa ADM) e a interpretação física da solução de Schwarzschild como representando o campo gravitacional gerado por uma massa m no espaço.

3.3.2 Centro de Massa da Variedade Exterior de Schwarzschild

Teorema 3.3.1. *Se a variedade de Schwarzschild do fim exterior é: $(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{B}_{\frac{m}{2}}^3, g = (1 + \frac{m}{2r})^4 \delta)$. Então o centro de massa $C_g^\alpha = (0, 0, 0)$, para $\alpha = 1, 2, 3$.*

Demonstração. Pela definição de centro de massa e Observação 3.3.1, temos:

$$\begin{aligned} C_g^\alpha &= \frac{1}{16\pi m} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{B}_{\frac{m}{2}}^3} x^\alpha (g_{ij,ij} - g_{ii,jj}) dv \\ &= \frac{1}{16\pi m} \int_{\mathbb{R}^3} x^\alpha (g_{ij,ij} - g_{ii,jj}) dv - \frac{1}{16\pi m} \int_{\mathbb{B}_{\frac{m}{2}}^3} x^\alpha (g_{ij,ij} - g_{ii,jj}) dv. \end{aligned}$$

Desenvolvendo a equação:

$$\begin{aligned} C_g^\alpha &= \frac{1}{16\pi m} \int_{\mathbb{R}^3} x^\alpha (g_{ij,ij} - g_{ii,jj}) dv \\ &= \frac{1}{16\pi m} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \cdot \left[x^\alpha (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \right] - (g_{i\alpha,i} - g_{ii,\alpha}) \right) dv \\ &= \frac{1}{16\pi m} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{B}_r^3} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \cdot \left[x^\alpha (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \right] - (g_{i\alpha,i} - g_{ii,\alpha}) \right) dv. \end{aligned}$$

Usando o Teorema da Divergencia da equação (2.2.2):

$$C_g^\alpha = \frac{1}{16\pi m} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{S_r^2} \left[\underbrace{x^\alpha (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j}_N - \underbrace{(g_{i\alpha,i} - g_{ii,\alpha})}_T \right] dS. \quad (3.3.6)$$

Temos que N foi calculado na equação (3.3.5), sendo:

$$N = (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j = \frac{4m}{r^2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3,$$

$$T = g_{i\alpha} \nu^i - g_{ii} \nu^\alpha.$$

Temos

$$g_{i\alpha} = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \delta_{i\alpha} \Rightarrow g_{i\alpha} \nu^i = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \frac{x^i}{r} \delta_{i\alpha}.$$

Para $i = \alpha$,

$$g_{i\alpha} \nu^i = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \frac{x^\alpha}{r},$$

e

$$g_{ii} \nu^\alpha = 3 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \frac{x^\alpha}{r}.$$

Logo,

$$T = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \frac{x^\alpha}{r} - 3 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \frac{x^\alpha}{r} = -2 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \frac{x^\alpha}{r}.$$

Daí,

$$-T = 2 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \frac{x^\alpha}{r}. \quad (3.3.7)$$

Assim,

$$\begin{aligned} C_g^\alpha &= \frac{1}{16\pi m} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{S_r^2} \left[\frac{4m}{r^2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \cdot x^\alpha + 2 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \frac{x^\alpha}{r} \right] dS, \\ &= \frac{1}{16\pi m} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{4m}{r^2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \underbrace{\int_{S_r^2} x^\alpha dS}_I + \frac{2}{r} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \underbrace{\int_{S_r^2} x^\alpha dS}_I \right], \\ &= \frac{1}{16\pi m} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{4m}{r^2} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 + \frac{2}{r} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \right) \underbrace{\int_{S_r^2} x^\alpha dS}_I \right]. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Agora integrando

$$I = \int_{S_r^2} x^\alpha dS; \quad f(x^1, y^2, z^3) = x^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.3.9)$$

A parametrização da esfera é

$$r(u, v) = (r \sin v \cos u, r \sin v \sin u, r \cos v),$$

onde $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq \pi$, $0 \leq r \leq R$. Agora, usando a equação (3.3.9) e equação (2.0.1) para $\alpha = 1$, $f(x^1, x^2, x^3) = x^1$;

$$f(r(u, v)) = r \sin v \cos u \quad \text{e} \quad \|r_u \times r_v\| = r^2 \sin v,$$

temos que:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{S_r^2} x^1 dS, \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r \sin v \cos u \cdot r^2 \sin v dv du, \\
 &= \sin u \left|_0^{2\pi} r \left(\frac{1}{2}v - \frac{\sin(2v)}{4} \right) \right|_0^\pi = 0.
 \end{aligned}$$

Para $\alpha = 2$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{S_r^2} x^2 dS, \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r \sin v \sin u \cdot r^2 \sin v dv du, \\
 &= r^3 (-\cos u) \Big|_0^{2\pi} \left(\frac{v}{2} - \frac{\sin 2v}{4} \right) \Big|_0^\pi = 0.
 \end{aligned}$$

Para $\alpha = 3$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{S_r^2} x^3 dS, \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r \cos v \cdot r^2 \sin v dv du, \\
 &= 2\pi r^3 \frac{\sin^2 v}{2} \Big|_0^\pi = 0.
 \end{aligned}$$

Daí temos, que

$$I = \int_{S_r^2} x^\alpha dS = 0, \text{ para } \alpha = 1, 2, 3.$$

Substituindo na equação (3.3.8), então

$$C_g^1 = 0, \quad C_g^2 = 0 \text{ e } C_g^3 = 0.$$

Nessas condições temos que o centro de massa da variedade externa de Schwarzschild é:

$$C_g^\alpha = (C_g^1, C_g^2, C_g^3) = (0, 0, 0).$$

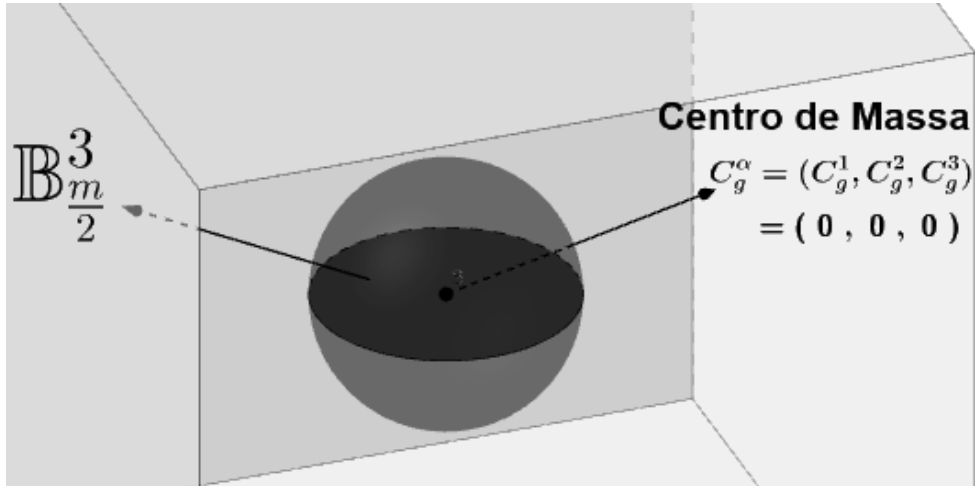
□

Esses resultados confirmam que a solução de Schwarzschild representa um corpo esférico de massa m centrado na origem, com simetria radial perfeita.

Interpretação Geométrica

Na Figura 3.2, descreve o centro de massa para um fim exterior $(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{B}_{\frac{m}{2}}^3, g = (1 + \frac{m}{2r})^4 \delta)$.

Figura 3.2: Centro de Massa da Variedade Exterior de Schwarzschild



Fonte: Elaborado pelo Autor, usando o software GeoGebra.

Capítulo 4

CONCLUSÃO

Neste trabalho, exploramos o conceito de massa ADM no contexto da relatividade geral e da sua aplicação à variedade exterior de Schwarzschild. Partimos de fundamentos de vetores e tensores, como operadores diferenciais e o teorema da divergência para campos vetoriais e tensoriais, até chegar em uma formulação precisa para a massa de sistemas isolados em variedades Riemannianas assintoticamente planas.

A formulação da massa ADM depende fortemente do comportamento assintótico da métrica e da geometria do espaço-tempo. Nesse contexto, aplicamos esse formalismo no caso da variedade exterior de Schwarzschild, mostrando que a massa ADM coincide com o parâmetro m que aparece na solução, confirmando a interpretação física deste parâmetro como a massa total do sistema. Além disso, discutimos também a simetria da solução em questão e como ela implica que o centro de massa está localizado na origem.

Essa generalização demonstrou sua importância ao mostrar as definições de variedades assintoticamente planas, tanto na dedução da equação da massa ADM quanto do centro de massa dessas variedades. Com isso, estabeleceu-se uma base matemática sólida para a aplicação da Definição 3.2.3 e do Teorema 3.3.1. Diante disso, nosso objetivo foi calcular massa ADM e o centro de massa da variedade exterior de Schwarzschild e os resultados obtidos validam o fato de que para $n = 3$, a massa total em um sistema gravitacional isolado é dada por $m_{ADM} = m$ e que o centro de massa se localiza na origem, $C_g^\alpha = (C_g^1, C_g^2, C_g^3) = (0, 0, 0)$.

Referências Bibliográficas

- [1] ARNOWITT, Richard; DESER, Stanley; MISNER, Charles W. **Coordinate invariance and energy expressions in general relativity**. Physical Review, v. 122, n. 3, p. 997, 1961.
- [2] BELÉNDEZ, A., BERNABEU, G., PASTOR ANTÓN, C., et al. **Temas de física para ingeniería: Campos escalares y vectoriales**. Fundamentos Físicos de la Ingeniería, (1988).
- [3] STEWART, James; **CÁLCULO**, Vol. 2, 7ª edição. Ed. Pioneira Thomson Learning, 2009.
- [4] FERREIRA, E. C; **Tensores e Aplicações**. Macapa, 2013.
- [5] PRADO, Armando Ortiz; VALERA, Juan Armando Ortiz; CERVANTES, Osvaldo Ruiz. **Introducción a la mecánica del medio continuo**. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, Ciudad Universitaria, México (2013).
- [6] LIMA, Elon Lages. **Variedades Diferenciáveis**, IMPA. Publicações Matemáticas, Rio de Janeiro, 2007.
- [7] SCHOEN, Richard M. **Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics**. In: Topics in Calculus of Variations: Lectures given at the 2nd 1987 Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held at Montecatini Terme, Italy, July 20–28, 1987. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006. p. 120-154.
- [8] LAM, Mau-Kwong George. **The graph cases of the Riemannian positive mass and Penrose inequalities in all dimensions**. 2011. Tese de Doutorado. Duke University.
- [9] GRANGEIRO FILHO, Antônio. **A massa e o centro de massa de gráficos**. 2017.
- [10] RILEY, Kenneth Franklin; HOBSON, Michael Paul; BENCE, Stephen John. **Mathematical methods for physics and engineering: a comprehensive guide**. Cambridge university press, 2006.